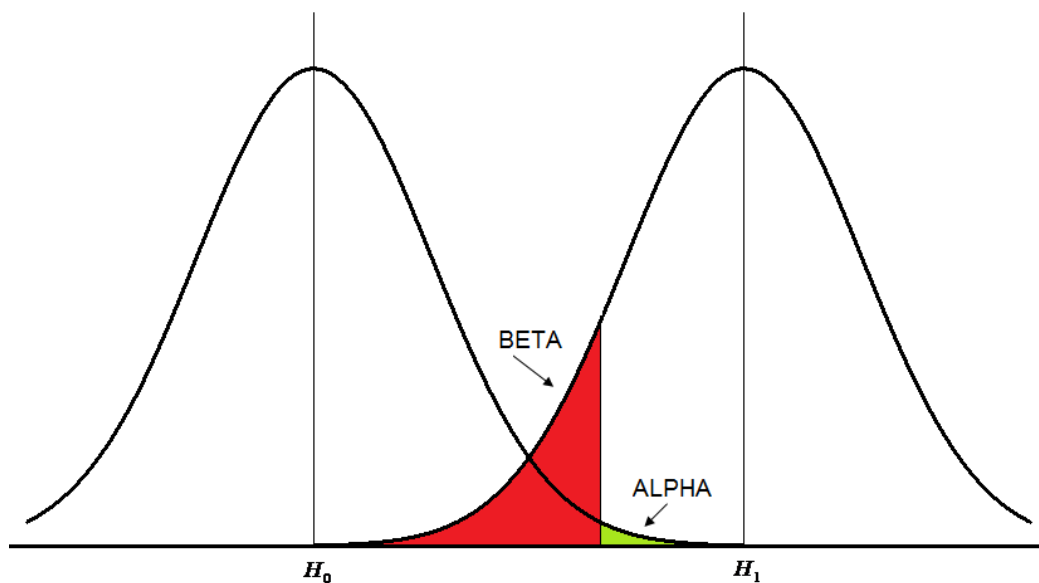


מבוא
לסטטיסטיקה
והסתברות

II

(הסקה סטטיסטית)



ברק קנדל

סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בנושא סטטיסטיקה והסתברות 2 (הסקה סטטיסטית).

הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](http://www.gool.co.il/statb.html) (www.gool.co.il/statb.html).

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר

www.gool.co.il



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול, בשביל התרגול...

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.Gool.co.il

כתב ופתר - ברק קנדל ©

תוכן העניינים

פרק ראשון – המשתנה המקרי הבדיד -עמ' 4

פונקצית ההסתברות
 תוחלת, שונות וסטיית תקן
 טרנספורמציה לינארית (תכונות התוחלת, השונות וסטיית התקן)
 תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים
 ההתפלגות הבינומית
 ההתפלגות הגיאומטרית
 ההתפלגות הפואסונית
 התפלגות אחידה
 התפלגות היפרגאומטרית
 התפלגות בינומית שלילית
 שאלות מסכמות
 תשובות סופיות למשתנה המקרי הבדיד

פרק שני – המשתנה המקרי הרציף –עמ' 21

פונקציית הצפיפות וההתפלגות המצטברת
 ההתפלגות הנורמלית
 ההתפלגות האחידה
 ההתפלגות המעריכית
 תשובות סופיות למשתנה המקרי הרציף

פרק שלישי – התפלגות הדגימה ומשפט הגבול המרכזי –עמ' 28

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי
 התפלגות מספר ההצלחות במדגם, פרופורציות ההצלחות במדגם, קירוב נורמאלי להתפלגות הבינומית
 תשובות סופיות להתפלגות הדגימה

פרק רביעי – אמידה נקודתית –עמ' 34

אומדים חסרי הטיה
 אומדי נראות מכסימלית- לא בחומר הנלמד.
 שאלות מסכמות לאומדים חסרי הטיה ואומדי נראות מכסימלית
 קריטריון MSE – תוחלת ריבוע הטעות –לא בחומר הנלמד.
 שיטת המומנטים

תשובות סופיות לאמידה נקודתית
נספח : אומדי נראות מכסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות

פרק חמישי – רווחי סמך – עמ' 47

אמידה נקודתית (אומדים חסרי הטיה)
רווח סמך לתוחלת (שונות ידועה/שונות לא ידועה)
רווח סמך לפרופורציה
רווח סמך לשונות וסטיית תקן - לא בחומר הנלמד.
רווח סמך להפרשים (הפרשי פרופורציות, הפרשי תוחלות)
תשובות סופיות לרווח סמך

פרק שישי – בדיקת השערות – מבחנים פרמטרים – עמ' 54

בדיקת השערות על תוחלת
בדיקת השערות פרופורציה
בדיקת השערות הפרש פרופורציות
בדיקת השערות הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים
בדיקת השערות במדגמים מזווגים
בדיקת השערות על שונות - לא בחומר הנלמד.
בדיקת השערות שתי שונות - לא בחומר הנלמד.
הגישה המעשית-מובהקות התוצאה p-value
טעויות ועוצמה
הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות
תשובות סופיות לבדיקת השערות-מבחנים על פרמטרים

פרק שביעי – בדיקת השערות - מבחני חי בריבוע – עמ' 67

מבחן טיב התאמה
מבחן לאי תלות
תשובות סופיות למבחני חי בריבוע

פרק שמיני - רגרסיה לינארית – עמ' 70

מדד הקשר של פירסון
תשובות סופיות לרגרסיה לינארית

פרק ראשון- המשתנה המקרי הבדיד

א. פונקצית ההסתברות:

1. ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ₪ הוא חצי וב-10 ₪ רבע כך גם ב- 20 ₪. נגדיר את X להיות סכום הזכייה במשחק בודד. בנה את פונקצית ההסתברות של X .
2. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה: נגדיר את המאורעות הבאים:
 - A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
 - B- לעבור את המבחן בכלכלה.
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנה את פונקצית ההסתברות של X .
3. הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ- 4 פעמים. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנה את פונקצית ההסתברות של X .
4. חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7. הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8. הסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את x להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנה את פונקצית ההסתברות של X .

ב. תוחלת, שונות וסטיית תקן:

1. חשב את התוחלת, השונות וסטיית התקן של שאלה מספר 1 בפרק א'.
2. חשב את התוחלת, השונות וסטיית התקן של שאלה מספר 2 בפרק א'.
3. חשב את התוחלת, השונות וסטיית התקן של שאלה מספר 3 בפרק א'.
4. חשב את התוחלת, השונות וסטיית התקן של שאלה מספר 4 בפרק א'.
5. נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

8	6	4	2	x
0.2		0.3		P(x)

כמו כן נתון ש: $E(X) = 4.2$

א. מצא את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את $V(X)$.

ג. טרנספורמציה לינארית (תכונות התוחלת, השונות וסטיית התקן):

1. חזור לשאלה מספר 1 מפרק ב'. נניח שעלות השתתפות ברולטה היא 15 ₪ וסכום הזכייה הינו התוצאה שיצאה ברולטה. חשב את התוחלת והשונות של הרווח במשחק.
2. חזור לשאלה מספר 2 מפרק ב'. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשב את התוחלת והשונות של סך הנקודות שצבר סטודנט שניגש ל-2 המבחנים.
3. חזור לשאלה מספר 3 מפרק ב'. נניח שזמן ההכנה לתהליך שמסופר בשאלה הינו 10 דקות, וכל משחק אורך 2 דקות. מה התוחלת ומהי השונות של זמן הפעילות הכוללת שעובר האדם בתהליך שתואר בשאלה?
4. חזור לשאלה מספר 4 מפרק ב'. נניח שעלות כל פרויקט הינה 5 אלף ₪. כל פרויקט שיצליח יכניס לחברה פדיון של 10 אלף ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח החברה מניהול הפרויקטים?
5. תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטיית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן לעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?
6. X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X) = 4$ ו- $V(X) = 3$.
 Y הינו משתנה מקרי חדש עבורו $Y = 7 - X$.
חשב את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.

ד. תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים (המשך תכונות התוחלת, השונות

וסטיית התקן):

1. הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10. הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות 5. ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו. מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?
2. בהמשך לשאלה 3 מפרק א' ומפרק ב' מסופר שהאדם חוזר על התהליך שסופר כל 7 ימות השבוע. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר המשחקים הכולל שישחק בשבוע?
3. X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3. סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של $X+Y$?

ה. התפלגויות מיוחדות:

התפלגות בינומית

1. במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
 - א. מהי ההתפלגות של X ?
 - ב. מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
 - ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
 - ד. מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?
 - ה. מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
 - ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?
2. בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב- 20 ₪, בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית הימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.
 - א. מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
 - ב. מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
 - ג. מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה- 30 ₪ שהשקיע?
 - ד. מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?
3. במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30 מהמדינה הנ"ל.
 - א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
 - ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

4. במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו.
- ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם.
5. 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
- א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
- ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?

התפלגות גיאומטרית

1. צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם. הוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.
 - א. מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?
 - ב. מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?
 - ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצע?
 - ד. כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?
2. מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".
 - א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
 - ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
 - ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי" מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
 - ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?
3. 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון 10 מכוניות אקראיות.
 - א. מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?
 - ב. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

התפלגות פואסונית

1. במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
 - א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
 - ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?
2. מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
 - א. מה ההסתברות שבחלק זה בדיוק 18 טעויות?
 - ב. אם בדף הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בחלק ישנן 15 טעויות?
 - ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בדף הראשון?
3. מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
 - א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
 - ב. מהי ההסתברות שבחודש (הנח שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?

התפלגות אחידה :

1. במשחק הלוטו 45 כדורים ממוספרים מ-1 ועד -45 . נתבונן במשתנה X המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.
 - א. חשבו את $P(X = 2)$
 - ב. חשבו את $P(X \leq 30)$
 - ג. חשבו את $P(X > 4 | X \leq 10)$
 - ד. חשבו את $P(X = k)$

2. קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל-100. בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם.
 - א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?
 - ב. הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר :
 1. מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר הגדול מ 80?
 2. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו?

התפלגות הפרגאומטרית:

1. בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.
 - א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו.
 - ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו. פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.
 - ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?

2. בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות. נגדיר את X להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.
 - א. בנו את פונקציית ההסתברות של X בנוסחא ולא בטבלה.
 - ב. מה התוחלת וסטיית התקן של X ?
 - ג. חשבו את ההסתברות הבאה: $P(X = 2 | X > 1)$

התפלגות בינומית שלילית :

1. בכד 4 כדורים שחורים ו-6 כדורים לבנים. אדם מוציא כדור באקראי פעם אחר פעם ומחזיר בין הוצאה להוצאה את הכדור. נסמן ב- X את מספר הכדורים שהוא הוציא עד אשר הוא קיבל 2 כדורים לבנים בסך הכול אך לא בהכרח ברצף.

ה. חשבו את $P(X = 2)$

ו. חשבו את $P(X = 3)$

ז. חשבו את $P(X = 4)$

ח. חשבו את $P(X = k)$

2. הראה שההתפלגות הגאומטרית היא מקרה פרטי של ההתפלגות הבינומית השלילית.

3. מטילים מטבע שוב ושוב עד אשר מקבלים שלוש פעמים עץ בסך בכול.

ג. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר ההטלות הכולל.

ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר ההטלות הכולל?

ה. חוזרים על התהליך שלעיל 5 פעמים. מה ההסתברות שפעמיים מתוך ה-5 חזרות נאלץ להטיל את המטבע בדיוק 4 פעמים?

ו. שאלות מסכמות:

1. נתון ש:

$$X \sim B(4, \frac{1}{2})$$

$$Y \sim B(10, \frac{1}{4})$$

א. חשב את התוחלת וסטיית התקן של X .

ב. $W = 2X - 4$, חשב את התוחלת וסטיית התקן של W .

ג. $T = X + Y$, חשב את התוחלת של T . האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T ?

2. ערן משחק בקזינו בשתי מכונות הימורים. משחק אחד בכל מכונה (במכונה א' ובמכונה

ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכונה א'

הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערן ניצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומה השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה

ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם

מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו

מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

ב. חשב את התוחלת והשונות של X .

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן

הכולל לפתיחת הדלת?

4. מספר התקלות בשידור "בערוץ 1" מתפלג פואסוני בקצב של 6 תקלות ביום.

א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?

ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

5. בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.

א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?

ב. יהי X - מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתחתה ביום א' בבוקר, עד (וכלל) שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ. מהי פונקציית

ההסתברות של X ?

ג. מהי תוחלת מס' המוצרים **מתוצרת חוץ** שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?

ד. ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?

ז. תשובות סופיות למשתנה המקרי הבדיד**פרק א' – פונקציות ההסתברות****שאלה 1**

x	10	20	30
P(x)	0.25	0.25	0.5

שאלה 2

x	0	1	2
P(x)	0.05	0.20	0.75

שאלה 3

x	1	2	3	4
P(x)	0.3	0.21	0.147	0.343

שאלה 4

x	0	1	2	3
P(x)	0.006	0.092	0.398	0.504

פרק ב' – תוחלת, שונות וסטיית תקן**שאלה 1**

תוחלת: 22.5

שונות: 68.75

סטיית תקן: 8.29

שאלה 2

תוחלת: 1.7

שונות: 0.31

סטיית תקן: 0.557

שאלה 3

תוחלת: 2.533

שונות: 1.535

סטיית תקן: 1.239

שאלה 4

תוחלת: 2.4

שונות: 0.46

סטיית תקן: 0.678

שאלה 5

א.

x	2	4	6	8
P(x)	0.4	0.3	0.1	0.2

ב. תשובה: 5.16

פרק ג' – טרנספורמציה לינארית (תכונות תוחלת, שונות וסטיית תקן)**שאלה 1**

תוחלת: 7.5

שונות: 68.75

שאלה 2

תוחלת: 6.8

שונות: 4.96

שאלה 3

תוחלת: 15.066

שונות: 6.14

שאלה 4

תוחלת: 9

שונות: 46

שאלה 5

תוחלת: 13.2

סטיית תקן: 5.5

שאלה 6

תוחלת: 3

שונות: 3

פרק ד' – תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים (המשך תכונות תוחלת, שונות וסטיית תקן)

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
תוחלת: 9	תוחלת: 17.731
שונות: 15	סטיית תקן: 3.28
<u>שאלה 3</u>	
תשובה: 5	

פרק ה' – התפלגויות מיוחדות

התפלגות בינומית

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. $X \sim B(5, 0.1)$	א. תשובה: 0.5314
ב. תשובה: 0.32805	ב. תשובה: 0.0984
ג. תשובה: 0.59049	ג. תשובה: 0.1143
ד. תשובה: 0.0729	ד. תוחלת: -18
ה. תשובה: 0.40954	סטיית תקן: 14.697
ו. תוחלת: 0.5	
שונות: 0.45	

<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. תשובה: 0.1789	א. תשובה: 0.1956
ב. תשובה: 2	ב. תשובה: 0.4506

<u>שאלה 5</u>
א. תשובה: 0.401
ב. תוחלת: 8.025
סטיית תקן: 2.193

התפלגות גיאומטרית

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. תשובה: 0.009	א. תשובה: 0.001
ב. תשובה: 0.0001	ב. תשובה: 0.875
ג. תוחלת: 1.111	ג. תשובה: 0.03125
שונות: 0.1234	ד. תשובה: 1
ד. תוחלת: 44.4	
שונות: 308.5	

<u>שאלה 3</u>
א. תשובה: 0.1029
ב. תשובה: 9.72

התפלגות פואסונית**שאלה 1**

א. תשובה: 0.0337

ב. תשובה: 0.9933

ג. תשובה: 0.1246

ד. תשובה: 5

שאלה 3

א. תשובה: 4

ב. תשובה: 0.4077

התפלגות אחידה**שאלה 1**א. תשובה: $\frac{1}{45}$ ב. תשובה: $\frac{30}{45}$

ג. תשובה: 0.6

שאלה 2

א. תשובה: 0.084

ב. תשובה: 0.099

ג. תשובה: 0.151

שאלה 2

א. התוחלת: 50.5

סטיית התקן: 28.87

ב. 1. תשובה: 0.08192

ב. 2 תוחלת: 303 סטיית תקן: 70.71

התפלגות הפרגאומטרית**שאלה 1**ב. תוחלת: $1\frac{2}{3}$ שונות: $\frac{5}{9}$ ג. תוחלת: $1\frac{2}{3}$ שונות: $\frac{20}{27}$ **שאלה 2**

ב. תוחלת: 1.5

סטיית תקן: 0.748

ג. תשובה: 0.9

התפלגות בינומית שלילית**שאלה 1**

א. תשובה: 0.36

ב. תשובה: 0.288

שאלה 3

ב. תוחלת: 6 שונות: 6

ג. תשובה: 0.1886

פרק ו' – שאלות מסכמות**שאלה 1**

א. תוחלת: 2

ב. סטיית תקן: 1

ג. תוחלת: 0

ד. סטיית תקן: 2

ה. תוחלת: 4.5

ו. סטיית תקן: לא ניתן

שאלה 3

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב. תוחלת: 3

ג. שונות: 2

ד. תוחלת: 1.5

ה. שונות: 1/2

שאלה 5

א. תשובה: 0.375

ב. תשובה: 0.6

ג. תשובה: 0.282

שאלה 2

א. תשובה: 0.01

ב. תוחלת: 0.13

ג. שונות: 0.1331

ד. תשובה: 0.048

שאלה 4

א. תשובה: 0.9975

ב. תשובה: 0.0172

ג. תשובה: 1.0025

פרק שני - המשתנה המקרי הרציף

א. פונקציית הצפיפות וההתפלגות המצטברת של המשתנה הרציף

1. נתון משתנה מקרי רציף X שפונקציית הצפיפות שלו היא:

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

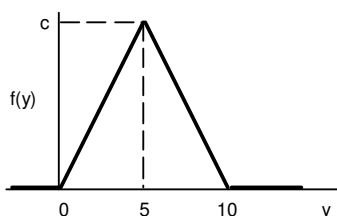
ידוע ש- $P(0 < X < 1) = 1/4$.

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של X .

ב. מצאו את החציון של X .

ג. מה הסיכוי ש- X קטן מ- 0.5 ?

2. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y



א. מצאו את c .

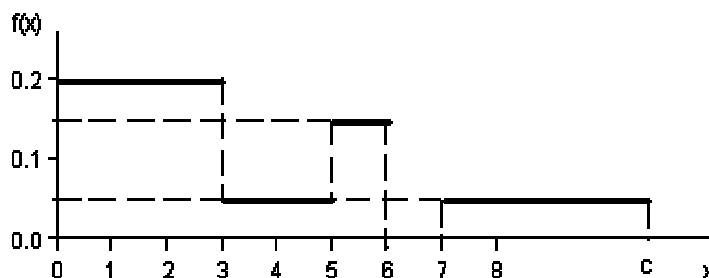
ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .

ג. חשבו את ההסתברויות: $P(Y > 4)$, $P(7.5 \leq Y \leq 15.5)$, $P(Y \leq 3.0)$, $P(Y = 7.0)$.

ד. מצאו את העשירון התחתון $y_{0.1}$, הרבעון התחתון $y_{0.25}$ והחציון של Y . הסיקו מהו העשירון

עליון $y_{0.9}$.

3. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X :



א. מצאו ערך c שעבורו תתקבל פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות: $P(1.0 < X \leq 5.0)$, $P(X \geq -2.0)$, $P(X \geq 4)$.

ב. התפלגויות מיוחדות:**התפלגות נורמלית**

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
 - א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ?
 - ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
 - א. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
 - ב. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
 - ג. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
 - א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
 - ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
 - ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
 - ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
 - ה. מה אחוז האנשים באוכלוסייה הזו ששוקלים מתחת ל- 140 ק"ג?

3. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.
 - א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
 - ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
 - ג. מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
 - ד. מהו האחוזון ה- 20?
 - ה. מה הרבעון התחתון?

4. אורך חיים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חיים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חיים פחות מ- 544 שעות.
 - א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 - ב. מהי סטיית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 - ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?
 - ד. מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?
 - ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

5. ¹ הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

6. ¹ ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976.

א. מה ערכו של T.

ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?

ג. אם זוז שווה ל \$ 2, מצא את סטית התקן של ההוצאה החודשית לבית אב בזוים.

¹ השאלה רלבנטית רק למי שכבר למד הסתברות והתפלגות בינומית.

התפלגות אחידה

1. משך (בדקות) הפסקה בשיעור, X , מתפלג $U(13, 16)$.
 - א. מהי התוחלת ומהי סטית התקן של משך ההפסקה?
 - ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?
 - ג. מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?

2. רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.
 - א. הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?
 - ב. אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?
 - ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?

3. מתקן המילוי במפעל ממלא בקבוקים באופן אחיד לפי פונקציה הצפיפות (סמ"ק):

$$f(x) = \begin{cases} 0.8 & 120 \leq x \leq 121.25 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
 - א. מה אחוז הבקבוקים שתכולתם מעל 120.4 סמ"ק?
 - ב. דרישות התקן הן לדחות כל בקבוק עם תכולה השונה מן התכולה המוצהרת (121 סמ"ק) ביותר מחמישית סמ"ק. מהו אחוז הבקבוקים שלא יעמדו בתקן? (בקבוק כזה יושמד).
 - ג. בקבוק תקני יימכר ב-8 שקלים. עלות הייצור לבקבוק היא 2 שקל. מה הרווח הממוצע במכירת בקבוק?

התפלגות מעריכית (אקספוננציאלית)

1. הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.
 - א. מהי סטיית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?
 - ב. מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?
 - ג. מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?

2. משך הזמן X (בדקות) שסטודנטים יושבים ליד מסוף מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.
 - א. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?
 - ב. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?
 - ג. אם סטודנט עובד ליד המסוף כבר יותר מ- 10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו ליד המסוף יעלה על 30 דקות?

3. בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.
 - א. שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ- 20 דקות?
 - ב. אם שולה המתונה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?
 - ג. מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה השני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

ג. תשובות סופיות למשתנה המקרי הרצף

פרק א' – פונקציות צפיפות והתפלגות מצטברת

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. $b=2$ $c=0.5$	א. 0.2
ב. 1.41	ג. 0, 0.18, 0.125, 0.32
ג. 0.0625	ד. העשירון התחתון: 2.24 הרבעון התחתון: 3.54 החציון: 5 העשירון העליון: 7.76
<u>שאלה 3</u>	
א. 10	
ג. 0.5, 1, 0.35	

פרק ב' – התפלגויות מיוחדות

התפלגות נורמלית

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. 89.25%	א. 26.43%
ב. 2.28%	ב. 89.44%
ג. 0	ג. 39.44%
ד. 50%	ד. 0.383
ה. 50%	ה. 100%
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. 119.23	א. 500
ב. 80.77	ב. 100
ג. 112.63	ג. 0.3446
ד. 87.37	ד. 732.6
ה. 89.89	ה. 267.4
<u>שאלה 5</u>	<u>שאלה 6</u>
א. 0.1587	א. 1924.1
ב. 0.0228	ב. 0.2266
ג. 0.8563	ג. 600
ד. 0.3975	

פרק שלישי - התפלגות הדגימה

א. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי

1. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה בישוב מסוים:

מספר המקלטים	מספר המשפחות
0	500
1	2500
2	3500
3	3000
4	500
סך הכול $N = 10000$	

נגדיר את x להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית.

- א. בנו את פונקציית ההסתברות של x .
- ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של x .
- ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

2. אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

3. משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלי עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.

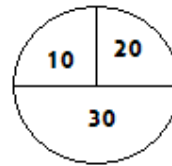
א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון שביום מסוים נולדו 4 תינוקות.

- ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
- ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
- ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?

4. הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועיות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך פתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלי.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
- ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה פחות ממנו?
- ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
5. נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלי עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
- ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
- ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
- ד. בקבוקי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
6. משתנה מתפלג נורמאלי עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
- ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
- ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

7. בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט:



אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.

- א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.
- ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?
- ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?
- ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?

8. לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?

9. מטילים קובייה 50 פעמים בכל פעם מתבוננים בתוצאה של הקובייה. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72 ב-50 ההטלות?

10. אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ.
א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל-78 ס"מ?

ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?

ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. העזר במשפט הגבול המרכזי.

ב. התפלגות מספר ההצלחות במדגם ופרופורציות ההצלחות במדגם וקירוב

נורמאלי להתפלגות הבינומית

1. נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
 - א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
 - ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
 - ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?
2. הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת בחורף מוערך ב-0.4. נדגמו 30 מבוגרים אקראיים.
 - א. חשבו את הסיכוי שבדיוק 15 יחלו בשפעת (1) לפי ההתפלגות הבינומית ; (2) לפי הקירוב הנורמאלי.
 - ב. חשבו את הסיכוי לכל היותר 14 יחלו בשפעת.
 - ג. חשבו את הסיכוי שלפחות 11 יחלו בשפעת.
3. במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
 - א. מה ההסתברות שנדגמו לכל היותר 6 מוצרים פגומים?
 - ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?
 - ג. מה ההסתברות שיהיו בדיוק 11 פגומים?
4. ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלי עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
5. במדינה יש 10% של אבטלה. נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.
 - א. מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?
 - ב. מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?
 - ג. מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?
6. נניח ש-30% מהאוכלוסייה תומכת בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות :
 - א. לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - ב. לכל היותר 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - ג. יותר מ – 27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

תשובות סופיות להתפלגות הדגימה

פרק א' - התפלגות ממוצע מדגם ומשפט הגבול המרכזי**שאלה 2****שאלה 1**

$$E(\bar{X}) = 3.5 \quad \text{א.}$$

$$\sigma(\bar{X}) = 1.208$$

4	3	2	1	0	x
0.05	0.3	0.35	0.25	0.05	P(x)

$$\sigma = 0.973 \quad \sigma^2 = 0.9475 \quad \mu = 2.05 \quad \text{ב.}$$

$$V(\bar{X}) = 0.237 \quad E(\bar{X}) = 2.05 \quad \text{ג.}$$

$$\sigma(\bar{X}) = 0.487$$

שאלה 4**שאלה 3**

$$0.0465 \quad \text{א.}$$

$$0.8413 \quad \text{א.}$$

$$32.29 \quad \text{ב.}$$

$$0.0013 \quad \text{ב.}$$

$$0.2628 \quad \text{ג.}$$

$$0 \quad \text{ג.}$$

$$0.1974 \quad \text{ד.}$$

שאלה 6**שאלה 5**

$$0.5468 \quad \text{א.}$$

$$0 \quad \text{א.}$$

$$0.6826 \quad \text{ב.}$$

$$0.1587 \quad \text{ב.}$$

$$0.1587 \quad \text{ג.}$$

$$0.5 \quad \text{ד.}$$

שאלה 8**שאלה 7**

$$0.0475$$

$$\text{א.}$$

30	20	10	
0.5	0.25	0.25	P(x)

$$22.5 : \text{ התוחלת : ב.}$$

$$68.75 : \text{ השונות :}$$

$$22.5 : \text{ התוחלת : ג.}$$

$$13.75 : \text{ השונות :}$$

ד. 0.8997

שאלה 10

א. 0.9772

ב. 0.0228

ג. 271

שאלה 9

0.1814

פרק ב' - התפלגות מספר ההצלחות במדגם ופרופורציות ההצלחות במדגם וקירובנורמאלי להתפלגות הבינומיתשאלה 2

א. 0.0783 (1) ; 0.0794 (2)

ב. 0.8238

ג. 0.7123

שאלה 1

א. 0.201

ב. 0.3758

ג. התוחלת: 2

סטיית התקן: 1.2649

שאלה 4

0.1611

שאלה 3

א. 0.121

ב. 0.6915

ג. 0.124

שאלה 6

א. 0.0618

ב. 0.0618

ג. 0.8238

שאלה 5

א. התוחלת: 0.1

השונות: 0.00064

ב. 0.5

ג. 0.3446

פרק רביעי - אמידה נקודתית

א. אומדים חסרי הטיה

1. הציון במבחן מסוים של תלמידי כיתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת - μ , נלקח מדגם של 5 ציונים $X_1, \dots, X_5$. שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{X_1 + \dots + X_5}{5} \quad \text{חוקר א' הציע:}$$

$$T_2 = \frac{2X_1 - X_3 + X_4}{2} \quad \text{חוקר ב' הציע:}$$

$$T_3 = \frac{2X_1 + X_3}{2} \quad \text{חוקר ג' הציע:}$$

- (א) איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?
 (ב) במדגם התקבלו הציונים הבאים: 65, 78, 58, 82, 100. חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי הטיה.
 (ג) איזה מבין שני האומדים חסרי הטיה עדיף? נמקו.

2. כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים. נסמן את שונות הגובה ב- σ^2 . הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad T_2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$$

- (א) בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.
 (ב) איזה אומד עדיף? נמקו.
3. $X \approx B(n, p)$ כלומר X הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר P (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל n .

- (א) פתחו אומד חסר הטיה ל- P .
 (ב) מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד.
 (ג) מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$.

4. בתיק מניות שתי מניות . מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר פרמטר לא ידוע θ , $0 \leq \theta \leq 2$.

פונקציית ההסתברות של X – מספר המניות שיעלו ביום מסוים :

$$P(X=0)=1-\frac{\theta}{2} \quad P(X=1)=\frac{\theta}{3} \quad P(X=2)=\frac{\theta}{6}$$

- א. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.
 ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום במשך שלושה ימים X_1, X_2, X_3 (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

5. בקרב המטפלות בת"א מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מיקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ באופן הבא :

הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחת בלבד הוא 3θ ,
 הסיכוי שמטפלת תטפל ב-2 תינוקות הוא $1-4\theta$,
 הסיכוי שמטפלת תטפל ב-3 תינוקות הוא θ .
 במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א, נמצא כי שתיים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשתיים ואחת השלושה תינוקות.

- א. מצא אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת.
 ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך 4 תצפיות .
 ג. מהו האומדן לפרמטר θ על סמך תוצאות המדגם .
 ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.
 ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א.

ב. אומדי נראות מכסימלית

1. הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא p (לא ידוע). השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה. נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.
 - (א) חשבו את פונקציית הנראות של p וציירו גרף שלה.
 - (ב) מצאו אומדן נראות מכסימלית עבור p .
 - (ג) מצאו אומדן נראות מכסימלית ל- p אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים עד אשר ניצח.
2. מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של λ לקוחות ביום.
 - (א) מצאו אומד נראות מכסימלית ל- λ על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.
 - (ב) מצאו אומד נראות מכסימלית ל- λ על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב- n ימים מסוימים.
3. הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר λ . דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם. התוצאות שהתקבלו בדקות הן: 3, 7, 5 ו-3.
 - (א) פתחו אומד נראות מכסימלית לפרמטר זה על סמך n תצפיות כלשהן.
 - (ב) מהו האומדן לפרמטר?
4. משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער ביום אחד מתפלג אחיד $U(0, \theta)$. כדי לאמוד את θ , נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי בית באותו יום.
 - (א) אלעד הכין ביום מסוים שיעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של θ המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.
 - (ב) מצאו אומדן נראות מכסימלית ל- θ על סמך התצפית.
 - (ג) משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1.5, 3, 1. מצאו אומדן נראות מכסימלית ל- θ על סמך המדגם הזה.
 - (ד) מצאו באופן כללי אומד נראות מכסימלית ל- θ על סמך מדגם של n בני נוער - $X_1, \dots, X_n$.

5. הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות σ^2 לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מכסימלית עבור השונות על סמך מדגם $X_1, \dots, X_n$ של n תצפיות מהאוכלוסייה.

ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 174, 165, 174. מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

6. פתחו אומד נראות מכסימלי לפרמטר P בהתפלגות הבינומית על סמך מדגם בגודל n בו X הוא מספר ההצלחות במדגם.

7. X הוא משתנה מקרי בעל פונקצית הצפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו אומד נראות מכסימלית ל- θ על סמך n תצפיות בלתי תלויות: $X_1, \dots, X_n$.

ב. מצאו אומד נראות מכסימלית ל- θ^2 .

8. בכד א 10 כדורים שחורים ו 10 לבנים בכד ב 5 כדורים שחורים ו- 15 לבנים. דוגמים באקראי כדור אך אינך יודע מאיזה כד.

א) מצא אומד נראות מכסימלי לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב) מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

9. הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה. נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א) מה אומדן הנראות המכסימלי לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב) מה אומדן הנראות המכסימלי לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?

10. מספר הקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מיקרי X בעל התפלגות התלויה

בפרמטר θ באופן הבא :

X	0	1	2
$P(X)$	$4\theta^2$	$4\theta - 8\theta^2$	$1 - 4\theta + 4\theta^2$

בחמישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו : 0, 0, 1, 0 לקוחות ממתינים בתור.

(א) מצאו אומדן בשיטת הנראות המכסימלית עבור הפרמטר θ על-סמך המדגם הנתון.

(ב) מצאו אומדן בשיטת הנראות המכסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

11. אדם מחזיק בידו שני מטבעות : מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן שהסיכוי בו לתוצאה עץ

הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ.

אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל : את ההוגן או זה שאינו הוגן.

(א) מצא אומדן בשיטת הנראות המכסימלית לסוג המטבע שהוטל.

(ב) מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

12. מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה. דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש 4

מהם מובטלים.

(א) מצא אומדן נראות מכסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

(ב) מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה.

(ג) מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

ג. שאלות מסכמות לאומדים חסרי הטיה ונראות מכסימלית

1. במפעל מייצרים מוצרים בשלוש מכונות שונות ובלתי תלויות. במכונה הראשונה הסיכוי שמוצר יהיה תקין הוא P , במכונה השנייה ההסתברות שמוצר יהיה תקין הוא P^2 ובמכונה השלישית הסיכוי הוא $2P$. דוגמים 20 מוצרים מכל מכונה. נסמן ב- X את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה א. נסמן ב- Y את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השנייה וב- Z את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השלישית.
 - (א) מהם הערכים האפשריים של הפרמטר P .
 - (ב) מצאו אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר P על סמך X ו- Z .
 - (ג) אם התקבל ש- $Y=3$, $X=6$ מהו אומדן נראות מכסימלית ל- P .
2. מספר תאונות הדרכים בקטע כביש א' מתפלג פואסונית עם קצב של λ תאונות בחודש. מספר תאונות הדרכים בקטע כביש ב' מתפלג פואסונית עם קצב של 2λ תאונות בחודש. הוחלט לספור את מספר התאונות בחודש בכל אחד מקטעי הכביש.
 - נסמן ב- X את מספר התאונות בחודש בקטע א' ו ב- Y בקטע ב'.
 - (א) מצאו אומד נראות מכסימלי לפרמטר λ על סמך X ו- Y .
 - (ב) מצאו אומד נראות מכסימלי לסיכוי שבקטע כביש א' תהיה לפחות תאונה אחת בחודש?
 - (ג) האם האומד שמצאת בסעיף א הוא חסר הטיה ל- λ ?
3. זמן הייצור של מוצר מסוים בתהליך ייצור מתפלג נורמאלי עם תוחלת ושונות שאינן ידועות.
 - (א) הציעו אומדים חסרי הטיה לתוחלת והשונות של זמן הייצור של המוצר.
 - (ב) הציעו אומדי נראות מכסימלי לתוחלת ולשונות של זמן הייצור של המוצר.
 - (ג) הציעו אומד נראות מכסימלי לריבוע התוחלת של זמן הייצור.
 - (ד) האם האומד מהסעיף הקודם הוא גם חסר הטיה?

4. בקזינו משחק בו 4 תאים ממוספרים מ 1 עד 4. מפעיל המשחק שם כסף באחד מארבעת התאים והאדם המשתתף צריך לנחש באיזה תא הכסף מוחבא. מפעיל הקזינו מודיע שהסיכוי להחביא את הכסף בכל אחד משלושת התאים הראשונים שווה אך לא בהכרח שווה לסיכוי להחביא אותו בתא הרביעי.

יש לאמוד את הסיכוי להחביא את הכסף בתא הראשון : P.

א) מצא את תחום ההגדרה של הפרמטר P.

יעל שיחקה את המשחק 3 פעמים וקיבלה שפעם אחת הכסף הוחבא בתא מספר 1 ובפעמים האחרות בתא מספר 2.

ב) מצאו אומדן ל-P על סמך התוצאות הללו בשיטת הנראות המכסימלית.

ג) מצאו אומדן חסר הטיה ל-P מהו האומדן לפי התוצאות של יעל?

ד) מצאו אומדן חסר הטיה ונראות מכסימלית לסיכוי שהכסף יוחבא בתא מספר 4 על סמך התוצאות של יעל.

ד. קריטריון MSE – תוחלת ריבוע הטעות

1. מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת. מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפיות וממוצע של שלוש תצפיות. לפי קריטריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE) איזה אומד עדיף? הסבירו.
2. בעיר מסוימת בשוויץ בכל θ דקות רכבת מגיעה לתחנה מסוימת. דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת – X .
 - א. הצע אומד חסר הטיה ל- θ על סמך X .
 - ב. סטטיסטיקאי הציע לאמוד את θ על סמך האומד: $1.5X$ האם האומד הנ"ל מוטא?
 - ג. איזה אומד מבין האומדים של סעיף א או ב עדיף?
3. חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלות במחלת השפעת בחורף (להלן הפרמטר P). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים ומתבונן בסטטיסטי X מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף. הוא מתלבט בין שני אומדים: $T_1 = \frac{X}{5}$ ו- $T_2 = \frac{X+1}{7}$
 - א. מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?
 - ב. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.5$?
 - ג. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.1$?

ה. שיטת המומנטים

1. X מתפלג אחיד רציף מהערך המינימלי a לערך המכסימלי 20 מצא אומד לערך מינימלי a לפי שיטת המומנטים על סמך n תצפיות מההתפלגות.
2. דוגמים n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות נורמאלית אשר תוחלתה היא μ והשונות שלה היא σ^2 מצא אומדים לפרמטרים אלה לפי שיטת המומנטים.
3. אדם מטיל מטבע רגיל n פעמים. יש לאמוד את מספר הפעמים שהוא מטיל את המטבע וזאת על סמך X - מספר העצים שהוא קיבל.
 - (א) מצא אומד בשיטת המומנטים ל- n על סמך X בודד.
 - (ב) מצא אומד בשיטת המומנטים ל- n על סמך חזרה של m פעמים על אותו תהליך בו מטילים את המטבע ההוגן n פעמים.
 - (ג) מהו האומדן אם האדם חזר על התהליך שלוש פעמים: פעם אחת קיבל 5 עצים, בפעם השנייה הוא קיבל 4 עצים ובפעם השלישית הוא קיבל 7 עצים.

תשובות סופיותפרק א' – תשובות לאומדים חסרי הטייהשאלה 1

ב. $T_2 T_1$

ג. $T_2 = 110 \quad T_1 = 76.6$

ד. T_1

שאלה 4

א. $\frac{3x}{2}$

ב. $\frac{3\bar{x}}{2}$

שאלה 3

א. $\frac{x}{n}$

ב. $1 - \frac{x}{n}$

ג. x

שאלה 5

א. $1 - \frac{x}{2}$

ג. 0.125

ה. לשונות 0.917

פרק ב' – תשובות לאומדי נראות מכסימליתשאלה 1

ב. 0.5

ג. $\frac{2}{9}$ שאלה 3א. $\frac{1}{\bar{X}}$ ב. $\frac{2}{9}$ שאלה 2א. X ב. $\bar{X}$ שאלה 4

א. 1

ג. 3

ד. $X_{\max}$ שאלה 6 $\frac{x}{n}$ שאלה 5א. $\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 170)^2}{n}$

ב. 40.2

שאלה 7א. $\frac{n}{\sum X_i^2}$ ב. $(\frac{n}{\sum X_i^2})^2$ שאלה 8

ב. כד א

שאלה 9

א. 32

ב. 0.3916

שאלה 10

א. 0.45

ב. 0.81

שאלה 12

א. 0.08

ב. 0.92

ג. 11.5

שאלה 11

ב. הוגן

פרק ג' – תשובות לשאלות המסכמות לאומדים חסרי הטיה ונראות מכסימלית.

שאלה 2

א. $\frac{x+y}{3}$

ג. כן

שאלה 1

א. $0.5 \leq P \leq 1$

ג. 0.345

שאלה 4

א. $0 \leq P \leq \frac{1}{3}$

ב. $\frac{1}{3}$

ג. 0.389

פרק ד' – תשובות ל-MSE

שאלה 2

א. $2x$

ג. סעיף ב

שאלה 1

זה עם השלוש תצפיות

שאלה 3

א. T_1

ב. T_2

ג. T_1

פרק ה' – תשובות לשיטת המומנטים

שאלה 3

א. $2x$

ב. $2\bar{x}$

ג. $10\frac{2}{3}$

שאלה 1

$2(\bar{x} - 10)$

נספח : אומדי נראות מכסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות:

מודל בינומי-

נתון מדגם של משתנה בינומי $X \sim B(n, p)$.

א.נ.מ עבור p הוא $\hat{p} = \frac{X}{n}$ והוא גם א.ח.ה.

מודל אחיד (בדיד)

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים אחידים $X_i \sim U(1, N)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור N הוא $\hat{N} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ואינו א.ח.ה.

מודל פואסוני

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים פואסוניים $X_i \sim P(\lambda)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור λ הוא $\hat{\lambda} = \bar{X}$ וגם א.ח.ה.

מודל גיאומטרי

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים גיאומטריים $X_i \sim G(p)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור p הוא $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$ אינו א.ח.ה. וא.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{p}$ הוא $\bar{X}$ והנו א.ח.ה.

מודל נורמלי

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים נורמליים $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור μ הוא $\hat{\mu} = \bar{X}$

כאשר μ ידוע א.נ.מ עבור σ^2 הוא $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ (אומד חסר-הטייה)

כאשר μ לא-ידוע א.נ.מ עבור σ^2 הוא $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (אומד מוטעה!!!)

אומד חסר-הטיה עבור σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \text{ כאשר } \mu \text{ ידוע}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ כאשר } \mu \text{ לא-ידוע}$$

מודל מעריכי

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים מעריכיים $X_i \sim \exp(\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$ -מהווה אומד מוטעה. וא.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{\theta}$ הוא $\bar{X}$.
א.ח.ה.

מודל אחיד (רציף)

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים אחידים $X_i \sim U(0, \theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ אינו א.ח.ה.

בכל התפלגות:

א.ח.ה עבור μ הוא $\hat{\mu} = \bar{X}$

אומד חסר-הטיה עבור σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \text{ כאשר } \mu \text{ ידוע}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ כאשר } \mu \text{ לא-ידוע}$$

פרק חמישי - רווחי סמך

א. אמידה נקודתית (אומדים חסרי הטיה)

1. נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו :
168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
א. מצא אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
ב. מצא אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
ג. מצא אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.

2. נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים. להלן

$$\text{התוצאות שהתקבלו : } \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 162$$

- א. אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
- ב. אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.

ב. רווח סמך לתוחלת

ב.1. שונות האוכלוסיה ידועה

1. מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
ג. הסבר כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
ד. מהי טעות התקן של האומד?

2. בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (99,105). שחזרו את :
א. ממוצע המדגם.
ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.
ג. רמת הסמך.

3. מעוניינים לאמוד את המשקל הממוצע של רכיב מסוים. ידוע שהמשקל מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן 12.
- א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת אם מעוניינים ששגיאת האמידה המקסימאלית תהיה 2 גרם ברמת סמך של 95%.
- ב. ביצעו מדגם שאת גודלו מצאתם בסעיף א והתקבל ממוצע של 23 גרם. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למשקל הממוצע של הרכיב.
4. זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
- ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
- ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
5. משתנה מקרי מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?

2.ב. שונות האוכלוסיה לא ידועה

1. זמן התגובה מתפלג נורמאלי. במטרה לאמוד את תוחלת זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 3.5, 4.6, 5.2, 4.7. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן התגובה באוכלוסיה.
2. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאלי. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 ו סטיית תקן מדגמית 13.
- א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסיה ברמת ביטחון של 95%.
- ב. חזרו על סעיף א' אם סטיית התקן הנתונה היא סטיית התקן האמיתית של כלל הנבחנים.
- ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
3. נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים. להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$, $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

ג. רווח סמך לפרופורציה

1. במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים. מתוכם התקבל ש 24 היו מובטלים.
 - א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסיה ברמת סמך של 95%.
 - ב. מהו האומד לטעות התקן?
 - ג. מה יקרה לאורך רווח הסמך אם הוא יבנה ברמת סמך של 99%?
2. נבנה רווח סמך לאחוז בעלי רישיון נהיגה באוכלוסיה (69%, 79%) הוא התבסס על מדגם שכלל 400 נשאלים.
 - א. לכמה נשאלים לא היה רישיון נהיגה במדגם?
 - ב. באיזו רמת סמך נבנה רווח הסמך?
3. מעוניינים לאמוד את הרייטינג של תוכנית מסוימת. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.
 - א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?
 - ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שאחוז הרייטינג של התוכנית לא אמור לעלות על 20%.
4. במדגם של 300 נשים בגילאי 35-40 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.
 - א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסיה.
 - ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לאחוז הלא נשואות באוכלוסיה.
5. הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה. מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמיתי באוכלוסיה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?

ד. רווח סמך לשונות וסטיית תקן

1. זמן התגובה מתפלג נורמאלי. במטרה לאמוד את תוחלת זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 3.5, 4.2, 4.7, 5.4. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה באוכלוסיה.
2. נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלי:
 - א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בצהרי ת"א ברמת סמך של 95%.
 - ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בצהרי ת"א ברמת סמך של 95%.

ה. רווח סמך להפרשים

ה.1. הפרשי פרופורציות

1. במטרה להשוות בין שתי תרופות נדגמו 200 איש שלקחו תרופה x. מתוכם 180 טענו שהתרופה עזרה להם. כמו כן נלקחו 300 איש שלקחו את תרופה y. מתוכם 150 טענו שהתרופה עזרה להם. בנו רווח סמך להפרש אחוזי ההצלחה של התרופות ברמת סמך של 95%. מה ניתן לומר על סמך רווח הסמך על ההבדלים בין התרופות?
2. מתוך 150 נשים שנדגמו באקראי 30% תמכו בהצעת חוק מסוימת. מתוך 200 גברים שנדגמו באקראי 25% תמכו בהצעת החוק.
 - א. בנו רווח סמך לפער בין אחוזי התמיכה של הנשים לעומת הגברים ברמת סמך של 96%.
 - ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז התמיכה בהצעת החוק.

ה.2. הפרשי תוחלות (שונות ידועות)

1. מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?
2. בנק מתלבט האם לפתוח סניף באזור A או באזור B. לצורך פתרון נניח שסטית התקן של המשכורת באזור A היא 1200 ובאזור B 1500. הבנק דגם 50 אנשים מאזור A, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,800 ₪. כמו כן נדגמו 40 אנשים מאזור B, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,600 ₪.
 - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש הממוצעים של המשכורות בשני האזורים. האם על סמך רווח הסמך ניתן להמליץ לבנק היכן לפתוח את הסניף. אם כן, היכן?
 - ב. בנו רווח סמך לתוחלת המשכורת באזור A ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות לאמידה נקודתית ורווחי סמך

פרק א' - אמידה נקודתית

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
ג. 177.9	א. 8.1
ד. 64.1	ב. 3.16
ה. 0.4	

פרק ב' - רווח סמך לתוחלת

שונות האוכלוסיה ידועה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. $223.42 < \mu < 236.58$	א. 102
ב. $222.16 < \mu < 237.84$	ב. 3
ד. 4	ג. 0.9544
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. 139	א. $3.58 < \mu < 4.42$
ב. $21 < \mu < 25$	ב. יקטן פי 2
	ג. גדל
<u>שאלה 5</u>	
780	

שונות האוכלוסיה לא ידועה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
$4.39 < \mu < 5.51$	א. $96.63 < \mu < 107.37$
	ב. $96.90 < \mu < 107.10$
<u>שאלה 3</u>	
$3.149 < \mu < 3.351$	

פרק ג' – רווח סמך לפרופורציה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. $7.5\% < p < 16.5\%$	א. 104
ב. 2.29%	ב. 0.9774
ג. יגדל	
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. 423	א. $22.5\% < p < 30.9\%$
ב. 271	ב. $45.91\% < p < 60.72\%$
<u>שאלה 5</u>	
1068	

פרק ד' – רווח סמך לשונות וסטיית תקן

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
$0.039 < \sigma^2 < 1.708$	א. $30.285 < \mu < 31.315$
	ב. $0.837 < \sigma < 1.607$

פרק ה' – רווח סמך להפרשיםהפרשי פרופורציות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
(33%, 47%)	א. (4.93%, 14.93%)
	ב. (22.5%, 31.8%)

הפרשי תוחלות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
(-20, 90)	א. (-372, 772)
	ב. (6467, 7133)

פרק שישי - בדיקת השערות - מבחנים פרמטרים

א. בדיקת השערות על תוחלת

שונות האוכלוסיה ידועה

1. ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהייה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

2. לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?

3. מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

שונות האוכלוסיה לא ידועה

1. משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון.

2. ציוני מבחן IQ מתפלגים נורמלית בארצות הברית עם ממוצע 100. במדגם על 20 נבחנים ישראלים התקבלו התוצאות הבאות.

$$\bar{x} = 102$$

$$\hat{S} = 16$$

האם בישראל ממוצע הציונים הוא כמו בארצות הברית? בדקו ברמת מובהקות של 2% הניחו הנחות אם יש צורך.

ב. בדיקת השערות על פרופורצייה

1. במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
2. במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
3. הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?

ג. בדיקת השערות להפרש פרופורציות

1. במדגם של 200 גברים. 8% מהם היו מובטלים. המדגם של 180 נשים 10% מהן היו מובטלות האם קיים הבדל מובהק בין פרופורציית המובטלים לפרופורציית המובטלות. בדוק ברמת מובהקות של 5%.
2. אחוז בעלי רישיון נהיגה בקרב האוכלוסייה הבוגרת הינו 60%. במדגם של 300 בוגרים מתל אביב 204 היו בעלי רישיון נהיגה. במדגם של 220 בוגרים מירושלים 100 היו בעלי רישיון נהיגה.
 - א. ברמת מובהקות של 5% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון בתל אביב גבוה מהאחוז הארצי?
 - ב. ברמת מובהקות של 10% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון נהיגה בתל אביב גבוה מאחוז בעלי רישיון נהיגה בירושלים?

ד. בדיקת השערות להפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

שוניות האוכלוסייה ידועות

1. ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508. במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.

2. במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים. האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית בדקו ברמת מובהקות של 10%. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

שוניות האוכלוסייה לא ידועות (בהנחה שהן שוות)

1. במדגם של 10 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$\begin{aligned}n_1 &= 10 \\ \sum x_i &= 1020 \\ \sum x_i^2 &= 105120\end{aligned}$$

במדגם של 14 אמריקאים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$\begin{aligned}n_1 &= 14 \\ \sum x_i &= 1386 \\ \sum x_i^2 &= 138644\end{aligned}$$

בדקו האם קיים הבדל בממוצע הציונים בבחינת ה-IQ בין ישראל לארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות. ברמת מובהקות של 5%.

2. להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100.

אורך החיים נמדד בשעות.

1-100W	2-60W	הקבוצה
956	1007	$\bar{x}$
72	80	$\hat{S}$
15	13	n

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפיתרון.

ה. בדיקת השערות על מדגמים מזווגים

1. במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

המדינה	X	Y
ארה"ב	1.5	1.4
קנדה	2.1	2
הולנד	2.2	1.9
פולין	3	3.1
מצרים	3.5	3.2
סין	3.2	3.2
יפן	4.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים בממוצע.

2. מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	506	470	420	640	670	390	500	590
אחרי	570	540	430	610	680	510	520	580

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלג נורמלית.

ו. בדיקת השערות על שונות

1. זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו 38,72,90,110,50. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית.

2. הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית על ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.
- ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה.

ז. בדיקת השערות על שתי שונויות

1. מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני ביצוע המשימה:

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 204$$

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 200$$

בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונויות? מה יש להניח?

2. ציוני בחינת הבגרות במתמטיקה מתפלגים נורמלית עם שונות 150. במדגם של 16 נבחנים מתל אביב התקבלה שונות חסרת הטיה- 190. במדגם של 25 ירושלמים התקבלה שונות חסרת הטיה- 118.

- א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות הציונים במתמטיקה בקרב נבחני תל אביב גבוהה מהשונות בכלל הארץ.
- ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ציונים במתמטיקה בקרב תלמידי תל אביב גבוהה מאשר בקרב תלמידי ירושלים.

ח. הגישה המעשית – מובהקות התוצאה – P-VALUE – $\alpha_{\min}$

1. השכר הממוצע במשק בשנת 2006 היה 7800 ₪ עם סטיית תקן 2000 ₪. במדגם כיום של מאה עובדים התקבל שכר ממוצע 7500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם כיום חלה שחיקה בשכר כיום. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט לקבל את טענת המחקר?

$$2. \text{ לפניך השערות של מחקר: } H_0: \mu = 70$$

$$H_1: \mu > 70$$

המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות:

$$n = 100$$

$$\bar{x} = 74$$

מהי האלפא המנימלית לדחיית השערת האפס?

3. במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?

4. במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן הוא הוטל 100 פעמים. התקבל 58 פעמים "עץ". האם יתכן שחוקר אחד יחליט שהמטבע הוגן ואחר יחליט שהמטבע לא הוגן?

5. הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\bar{x} = 176.2$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$

מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוהה מ-174 ס"מ באופן מובהק. מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6%?

ט. טעויות ועוצמה

1. לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.
- א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
- ב. בהמשך לסעיף א מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
- ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העוצמה של הכלל מסעיף א?

2. להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$$H_0 : \mu = 200$$

$$H_1 : \mu \neq 200$$

$$\sigma = 30$$

$$n = 225$$

- א. רשום כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
- ב. בהמשך לסעיף א מהי העוצמה אם התוחלת שווה ל-195?
- ג. הסבר ללא חישוב איך העוצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

3. אחוז הסובלים מתופעות הלוואי מתרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מתופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת.
- א. ניח שהתרופה נבדקת אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מתופעות הלוואי ל-10%. מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?
- ב. אם המדגם יתבסס על יותר תצפיות כיצד הדבר ישנה את התשובה לשל סעיף א'?

4. בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פתיחת מכללה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדל. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסוג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.

5. מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומוודים את קוטרם, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.
- א. רשום את ההשערות ואת ככל ההכרעה ברמת מובהקות של 5% .
- ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
- ג. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
- ד. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

י. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות

1. חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10 מ"ג. נלקח מדגם של 100 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היא 112.6 מ"ג לסמ"ק.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.

ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 113 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבר.

2. חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות :

$$H_0 : \mu = 90$$

$$H_1 : \mu \neq 90$$

החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: (87,97). אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.

3. במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים שיבדוק את השערות המחקר ברמת מובהקות של 5%

להלן התוצאות :

המדינה	X	Y
ארה"ב	1.5	1.4
קנדה	2.1	2
הולנד	2.2	1.9
פולין	3	3.1
מצרים	3.5	3.2
סין	3.2	3.2
יפן	4.2	4.2

תשובות סופיות לבדיקת השערות

פרק א' – בדיקת השערות לתוחלת

שונות האוכלוסיה ידועה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	נדחה H_0
<u>שאלה 3</u>	
נדחה H_0	

שונות האוכלוסיה לא ידועה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נדחה H_0	נקבל H_0

פרק ב' – בדיקת השערות על פרופורציה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נדחה H_0	נדחה H_0
<u>שאלה 3</u>	
נקבל H_0	

פרק ג' – בדיקת השערות להפרש פרופורציות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	א. נדחה H_0
	ב. נדחה H_0

פרק ד' – בדיקת השערות להפרש תוחלות**שוניות האוכלוסייה ידועות**

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	נדחה H_0

שוניות האוכלוסייה לא ידועות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	נדחה H_0

פרק ה' – בדיקת השערות במדגמים מזווגים

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	נקבל H_0

פרק ו' – בדיקת השערות על שונות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נדחה H_0	א. נדחה H_0

פרק ז' בדיקת השערות לשתי שוניות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	א. נקבל H_0
	ב. נקבל H_0

פרק ח' – מובהקות התוצאה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
מעל 0.0668	0.0228
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 5</u>
א. 0.0455	נקבל H_0

פרק ט' – טעויות ועוצמה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
ב. נדחה H_0	ב. 0.8051
ג. 1	
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. 0.4404	0.1446

פרק י' – הקשר בין בדיקת השערות לרווח סמך

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 3</u>
(110.64, 114.56)	(-0.241, 0.041)

פרק שביעי - מבחנים חי בריבוע

א. מבחן טיב התאמה

1. במטרה לבדוק האם קובייה הוגנת, מטילים אותה 120 פעמים. התקבל 17 פעמים 1, 23 פעמים 2, 20 פעמים 3, 25 פעמים 4, 18 פעמים 5 ו- 17 פעמים 6. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

2. מפעל מייצר סוכריות בצבעים כחול, אדום, ירוק וכתום. מעוניינים לבדוק שפרופורציית הסוכריות הכחולות גדולה פי 2 מכל צבע אחר. לצורך כך נדגמו באקראי 200 סוכריות והתקבל: 70 כחולות, 50 אדומות, 40 ירוקות והיתר כתומות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

3. משרד החינוך טוען שבקרב השכירים במשק היחס בין השכירים בעלי השכלה נמוכה, תיכונית ואקדמאית הוא 1:2:1 בהתאמה. במדגם של 200 שכירים התקבלו 56 אנשים בעלי השכלה נמוכה, 105 בעלי השכלה תיכונית והיתר בעלי השכלה גבוהה. ע"ס תוצאות המדגם האם התפלגות ההשכלה היא כמו שמשרד החינוך מפרסם? בדוק ברמת מובהקות של 5%.

4. בפנס יש 4 סוללות. בבדיקה שנערכה ב-400 פנסים נמצאו סוללות פגומות לפי השכיחויות הבאות:

מספר הסוללות הפגומות	0	1	2	3 ומעלה
שכיחות	276	104	12	8

מעוניינים לבדוק על סמך תוצאות מדגם אלה האם הסיכוי לסוללה פגומה הוא 20%. בדוק ברמת מובהקות של 5%.

ב. מבחן אי תלות

1. במפעל עובד בשלוש משמרות. להלן מספר המוצרים הפגומים והתקינים בכל אחת מן המשמרות לפי מדגם שנעשה :

	יום	ערב	לילה
פגומים	50	60	70
תקינים	600	700	800

האם קיים קשר בין טיב המוצר למשמרת שלו? הסיקו עבור רמת מובהקות $\alpha = 0.05$.

2. בקרב מדגם של 200 נשים 120 טענו שהן תצבענה למועמד R לראשות העיר. בקרב מדגם של 200 גברים 80 טענו שהם יצביעו למועמד R האם קיים הבדל בין דפוס ההצבעה של הנשים ושל הגברים? בדוק ברמת מובהקות של 5%.

3. בחנות בגדים A בדקו את התפלגות הצבעים של הבגדים הנמכרים ביום מסוים :

צבע	שחור	לבן	אדום	כחול
מספר הפריטים	15	20	15	50

כמו כן בדקו את התפלגות הצבעים בחנות שכנה B :

צבע	שחור	לבן	אדום	כחול
מספר הכדורים	60	20	10	20

- א. בדוק ברמת מובהקות של 5% האם התפלגות הצבעים בחנות A היא ביחס של 3:1:1:1 לטובת הכחול.

- ב. בדוק ברמת מובהקות של 2.5% האם קיים הבדל בין החניות מבחינת התפלגות הצבעים של הפריטים הנמכרים.

תשובות סופיות למבחני חי בריבוע

פרק א' - מבחן טיב התאמה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	נקבל H_0
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
נקבל H_0	נדחה H_0

פרק ב' - מבחן לאי תלות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	נדחה H_0
<u>שאלה 3</u>	
ג. נקבל H_0	
ד. נדחה H_0	

פרק שמיני - רגרסיה ליניארית

א. מדד הקשר של פירסון – מדד הקשר הלינארי (כולל רגרסיה לינארית

פשוטה):

1. להלן נתונים לגבי חמישה תלמידים שנגשו למבחן אמצע סמסטר ולמבחן סוף סמסטר :

ציון אמצע סמסטר	7	6	7	8	8
ציון סוף סמסטר	8	7	7	9	10

- א. שרטט דיאגרמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על הקשר בין ציון אמצע סמסטר לבין ציון סוף סמסטר?
- ב. חשב את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א'?

2. נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{20} Y_i &= 200 & \sum_{i=1}^{20} X_i &= 240 \\ \sum_{i=1}^{20} Y_i^2 &= 2080 & \sum_{i=1}^{20} X_i^2 &= 2960 \\ \sum_{i=1}^{20} X_i Y_i &= 2464\end{aligned}$$

- א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y .
- ב. מצא את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה.
- ג. משפחת כהן הכניסה 15,000 ₪, מה ההוצאה הצפויה שלה?
3. נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות למוד. נסמן ב- Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות :

$$\begin{aligned}S_y &= 5 & S_x &= 2 \\ \bar{Y} &= 8 & \bar{X} &= 14 \\ COV(X, Y) &= 7.5\end{aligned}$$

- א. חשב את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.
- ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?
- ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000 ₪?
- ד. איזה אחוז משוונות ההכנסה מוסבר באמצעות ההשכלה של האדם?

4. להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבע נכון/לא נכון ונמק:
- א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.
- ב. לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$ $S_x = S_y = 1$ לכן מדד הקשר של פירסון יהיה 1.
- ג. אם שונות הטעויות שווה ל-0 (השונות הלא מוסברת) אז מקדם המתאם של פירסון יהיה 1.
- ד. אם מקדם המתאם של פירסון בין שני משתנים הוא 1 אזי שונות הטעויות (השונות הלא מוסברת) תהיה 1.
- ה. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

פתרונות**א. מדד הקשר של פירסון – מדד הקשר הלינארי****שאלה 1**

א.

ב. 0.871

שאלה 2

א. 0.8

ב. $\tilde{Y} = 0.8X + 0.4$

ג. 12.4

שאלה 3

א. 0.75

ב. 4.25 אלפי ש"ח

ג. 14.6 שנים

ד. 56.25%

שאלה 4

א. נכון

ב. לא נכון

ג. לא נכון

ד. נכון

ה. נכון