

סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א'.
הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה,
המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את
התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

**הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם
רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי
שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה ליחצו כאן.**

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים
שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים
להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם
לחויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר
www.gool.co.il



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

גול, בשביל התרגול...

תוכן

פרק ראשון - יסודות ההסתברות – עמ' 5

בעיות בסיסיות בהסתברות
פעולות בין מאורעות
קומבינטוריקה
הסתברות מותנה ודיאגרמת עצים
תלות בין מאורעות
שאלות מסכמות
תשובות סופיות

פרק שני – המשתנה המיקרי הבדיד – עמ' 19

פונקציית ההסתברות
תוחלת, שונות וסטיית תקן
טרנספורמציה לינארית (תכונות התוחלת, השונות וסטיית התקן)
תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים
ההתפלגות הבינומית
ההתפלגות הגיאומטרית
ההתפלגות הפואסונית
התפלגות אחידה
התפלגות היפרגאומטרית
התפלגות בינומית שלילית
שאלות מסכמות
תשובות סופיות

פרק שלישי – המשתנה המקרי הרציף – עמ' 36

פונקציית הצפיפות וההתפלגות המצטברת
ההתפלגות הנורמלית
ההתפלגות האחידה
ההתפלגות המעריכית
תשובות סופיות
נספח : המשתנה המקרי רציף אינטגרל

פרק רביעי – המשתנה הדו-מימדי הבדיד – עמ' 49

תרגילים שונים
תשובות סופיות

פרק חמישי – אי שוויונים הסתברותיים - עמ' 53

אי שוויון צ'ביצ'ב

אי שוויון מרקוב

תשובות סופיות

פרק שישי – התפלגות הדגימה – עמ' 56

התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי

התפלגות מספר ההצלחות במדגם, פרופורציות ההצלחות במדגם, קירוב נורמאלי להתפלגות

הבינומית

תשובות סופיות לפרק

פרק שביעי – אמידה נקודתית – עמ' 62

אומדים חסרי הטיה

אומדי נראות מכסימלית

שאלות מסכמות לאומדים חסרי הטיה ואומדי נראות מכסימלית

קריטריון MSE – תוחלת ריבוע הטעות

שיטת המומנטים

תשובות סופיות

נספח : אומדי נראות מכסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות

פרק שמיני – רווחי סמך – עמ' 75

אמידה נקודתית (אומדים חסרי הטיה)

רווח סמך לתוחלת (שונות ידועה/שונות לא ידועה)

רווח סמך לפרופורציה

רווח סמך לשונות וסטיית תקן

רווח סמך להפרשים (הפרשי פרופורציות, הפרשי תוחלות)

תשובות סופיות

פרק תשיעי – בדיקת השערות – מבחנים פרמטרים – עמ' 82

בדיקת השערות על תוחלת

בדיקת השערות פרופורציה

בדיקת השערות הפרש פרופורציות

בדיקת השערות הפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

בדיקת השערות במדגמים מזווגים

בדיקת השערות על שונות

בדיקת השערות שתי שונויות

הגישה המעשית-מובהקות התוצאה p-value

טעויות ועוצמה

הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות

תשובות סופיות

פרק ראשון - יסודות ההסתברות

א. בעיות בסיסיות בהסתברות

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
 - א. הרכב את כל המילים האפשריות.
 - ב. רשום את המקרים למאורע:
 - A - במילה נמצאת האות E.
 - B - במילה האותיות שונות.
 - ג. רשום את המקרים למאורע $\bar{A}$.
2. מטילים זוג קוביות.
 - א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?
 - ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:
 - A - סכום התוצאות 7.
 - B - מכפלת התוצאות 12.
3. בוחרים באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
 - א. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
 - ב. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
 - ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?
4. חשב את ההסתברויות למאורעות שהוגדרו בשאלה מספר 2.
5. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה שנספרו עבור כל משפחה ביישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- נבחרה משפחה באקראי מהיישוב.
- א. מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
 - ב. מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
 - ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

ב. פעולות בין מאורעות

1. חזור לנתונים של שאלה מספר 1 בפרק הקודם.
 - א. רשום את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.
 - ב. רשום את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

2. חזור לנתונים של שאלה מספר 2 בפרק הקודם.
 - א. רשום את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.
 - ב. רשום את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.

3. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים:
 - A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
 - B- לעבור את המבחן בכלכלה.
 העזר בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמן בדיאגרמת וון את השטח המתאים:
 - א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
 - ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
 - ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
 - ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
 - ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
 - ו. התלמיד נכשל בכלכלה.

4. בהמשך לשאלה הקודמת נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשב את הסיכויים למאורעות הבאים:
 - א. לעבור לפחות את אחד המבחנים.
 - ב. לעבור רק את המבחן בכלכלה.
 - ג. לעבור רק את המבחן בסטטיסטיקה.
 - ד. להיכשל בשני המבחנים.

5. הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשב את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים :

א. ששתי המניות תעלנה.

ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.

ג. שמניה A בלבד תעלה.

6. מטילים זוג קוביות אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים :

A- בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B- סכום התוצאות משתי הקוביות 6.

C- מכפלת התוצאות בשתי הקוביות 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

7. עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות :

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \quad p(B) = 0.3 \quad p(A) = 0.6$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשב את $p(\bar{A} \cap B)$

8. מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים :

A- קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B- קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

9. בהגרלה חולקו 100 כרטיסים על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

- א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?
 ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

10*. באוכלוסיה מסוימת בדקו את סוגי חשבונות הבנק שבידי האנשים הבוגרים. הנתונים שהתקבלו היו: 45% מהאנשים מחזיקים חשבון בנק ב"בנק לאומי", 55% מחזיקים חשבון בנק ב"בנק הפועלים", 20% מחזיקים חשבון בנק ב"בנק דיסקונט", 15% מחזיקים חשבון בנק ב"בנק לאומי" וגם ב"בנק הפועלים", 10% מחזיקים חשבון בנק ב"בנק הפועלים" וגם ב"בנק דיסקונט" ו-10% מחזיקים חשבון בנק ב"בנק לאומי" וגם ב"בנק דיסקונט". כמו כן, 5% מחזיקים חשבון בנק בכל שלושת הבנקים הנ"ל.

- א. מה אחוז מחזיקי חשבון בנק ב-"בנק לאומי" בלבד?
 ב. מה אחוז מחזיקי חשבון בנק ב"בנק הפועלים" וחשבון בנק ב"בנק לאומי" אך לא ב"בנק דיסקונט"?
 ג. מה אחוז מחזיקי חשבון בנק אחד בלבד?
 ד. מה אחוז מחזיקי שני חשבונות בנק בלבד?
 ה. מה אחוז מחזיקי חשבון בנק אחד לפחות?

ג. קומבינטוריקה

רמה א'

1. חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
 א. הטלת קובייה פעמים.
 ב. מספר תלת ספרתי.
 ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
 ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.

2. במסעדה מציעים ארוחה עסקית. בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטרקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
- א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
- ב. אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
1. בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
 2. בארוחה סלט, לזניה ותה.
3. בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. המספר הוא זוגי.
- ב. במספר כל הספרות שונות.
- ג. במספר כל הספרות זהות.
- ד. במספר לפחות שתי ספרות שונות.
- ה. במספר לפחות שתי ספרות זהות.
- ו. המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באותה צורה).
4. חמישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבנין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
- א. כולם ירדו בקומה החמישית?
- ב. כולם ירדו באותה קומה?
- ג. כולם ירדו בקומה אחרת?
- ד. ערן ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות?
5. במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים אם:
- א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
6. מטילים קובייה 4 פעמים.
- א. מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
- ב. מה ההסתברות של התוצאות תהינה שונות?
- ג. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
- ד. מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?

7. בכמה דרכים :

- א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
 - ב. בכמה דרכים אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?
8. סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
- א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
 - ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
 - ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?

9. 4 בנים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורה של בית קולנוע בו 8 מקומות .

- א. מה ההסתברות שהבנים יישבו זה ליד זה?
- ב. מה ההסתברות שהבנות תשבנה זו ליד זו וגם הבנים יהיו זה ליד זה?
- ג. מה ההסתברות שהבנים יישבו במקומות הזוגיים?

רמה ב'

1. בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם :

- א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
- ג. אין תפקידים שונים בוועד.

2. בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות. יש לבחור למשלחת 4

- תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
- א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
 - ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
 - ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?

3. מעוניינים להרכיב קוד סודי. הקוד מורכב מ-2 ספרות שונות ו-3 אותיות שונות באנגלית (26 אותיות אפשריות).

- א. כמה קודים שונים ניתן להרכיב?
- ב. כמה קודים שונים ניתן להרכיב אם הקוד מתחיל בספרה ונגמר בספרה?
- ג. כמה קודים ניתן להרכיב אם הספרות חייבות להיות צמודות זו לזו?
- ד. בכמה קודים הספרות לא מופיעות ברצף?

4. בארונית 4 מגירות. ילד התבקש ע"י אימו לסדר 6 משחקים בארונית. הילד מכניס את המשחקים באקראי למגירות השונות. כל מגירה יכולה להכיל גם את כל המשחקים יחד.
- א. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים למגירה העליונה?
- ב. מה ההסתברות שהילד יכניס את כל המשחקים לאותה מגירה?
- ג. מה ההסתברות שה"דומינו" יוכנס למגירה העליונה ויתר המשחקים לשאר המגירות.
- ד. מה ההסתברות שה"דומינו" לא יוכנס למגירה העליונה?
5. בעיר מסוימת מתמודדות למועצת העיר 4 מפלגות שונות: "הירוקים", "קדימה", "העבודה" ו"הליכוד". 6 אנשים אינם יודעים למי להצביע, ולכן בוחרים באקראי מפלגה כלשהי.
- א. מה ההסתברות שכל ה-6 יבחרו באותה מפלגה?
- ב. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" לא תקבל קולות?
- ג. מה ההסתברות שמפלגת ה"ירוקים" תקבל בדיוק 3 קולות וכל מפלגה אחרת תקבל קול 1 בלבד?
- ד. מה ההסתברות שמפלגת "הירוקים" תקבל 2 קולות, מפלגת "העבודה" תקבל 2 קולות ומפלגת "הליכוד" תקבל 2 קולות?

ד. הסתברות מותנה ודיאגרמת עצים

1. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה :
- נגדיר את המאורעות הבאים : A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה. B- לעבור את המבחן בכלכלה. כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים :
- א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
- ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
- ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
- ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
- ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד מה ההסתברות שהוא יעבור את שני המבחנים?

2. במדינה שתי חברות טלפון סלולארי "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל". 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט". ל-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי בכלל.
- א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
 ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
 ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
 ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?
3. בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים. מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים. נבחר אדם באקראי מאותה חברה.
- א. מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי?
 ב. מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי?
 ג. מה הסיכוי שהוא אקדמאי?
4. בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו3 לימון. מוציאים באקראי סוכרייה אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכרייה נוספת, אך אם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכרייה נוספת.
- א. מה ההסתברות שהסוכרייה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון?
 ב. מה ההסתברות שהסוכרייה השנייה בטעם לימון?
5. באוכלוסיה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
- א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?
 ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?
 ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
 ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?

6. בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים.
- בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
- א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?
- ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?

ה. תלות בין מאורעות

1. נתון:
- $$p(A) = 0.2$$
- $$P(B) = 0.5$$
- $$P(A \cup B) = 0.6$$
- האם המאורעות הללו בלתי תלויים?
2. חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח בניסוי השני הוא 0.4.
- א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?
- ב. מה הסיכוי שניכשל בשני הניסויים?
3. מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווק, אחרת הוא נפסל ולא יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4 הבדיקות.
- א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?
- ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בבדיקה אחת?

ו. שאלות מסכמות

1. 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.
- א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
- ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
- ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?
- ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?

2. באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים.

בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.

א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?

ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?

ג. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - נבחר אדם מובטל

B - נבחר גבר

האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?

3. ערן מעוניין למכור את רכבו, הוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה

שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את

המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.

א. מה אחוז האנשים מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש יראו את 2 המודעות?

ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה

בעיתון?

ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו"לראות את המודעה

באינטרנט" בלתי תלויים?

ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם

הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6. ואם

הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.

1. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?

2. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה

את שתי המודעות?

ז. תשובות סופיות ליסודות הסתברות:

פרק א' - בעיות בסיסיות בהסתברות

<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. תשובה: 0.4	הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$
ב. תשובה: 0.4	הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$
ג. תשובה: 0.5	
<u>שאלה 5</u>	
א. תשובה: 0.22	
ב. תשובה: 0.78	
ג. תשובה: 0.32	

פרק ב' - פעולות בין מאורעות

<u>שאלה 4</u>	<u>שאלה 5</u>
א. תשובה: 0.95	א. תשובה: 0.2
ב. תשובה: 0.05	ב. תשובה: 0.3
ג. תשובה: 0.15	ג. תשובה: 0.3
ד. תשובה: 0.05	
<u>שאלה 6</u>	<u>שאלה 7</u>
א. לא	א. כן
ב. כן	ב. תשובה: 0.3
ג. כן	
ד. לא	
<u>שאלה 8</u>	<u>שאלה 9</u>
תשובה: ג'	א. תשובה: 0.05
	ב. תשובה: 0.95
<u>*שאלה 10</u>	
א. תשובה: 25%	
ב. תשובה: 10%	
ג. תשובה: 65%	
ד. תשובה: 20%	
ה. תשובה: 90%	

פרק ג' - קומבינטוריקה**רמה א'**

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. תשובה: 36	א. 36
ב. תשובה: 900	ב. 1. $1/36$ 2. $1/9$
ג. תשובה: 70	
ד. תשובה: 90	
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. תשובה: 0.5	א. 0.00003
ב. תשובה: 0.3024	ב. 0.00024
ג. תשובה: 0.0001	ג. 0.20508
ד. תשובה: 0.9999	ד. 0.01047
ה. תשובה: 0.6976	
ו. תשובה: 0.01	
<u>שאלה 5</u>	<u>שאלה 6</u>
א. תשובה: 3,375	א. תשובה: $1/216$
ב. תשובה: 2,730	ב. תשובה: $5/18$
	ג. תשובה: $13/18$
	ד. תשובה: $215/216$
<u>שאלה 7</u>	<u>שאלה 8</u>
א. תשובה: 24	א. תשובה: 0.2
ב. תשובה: 120	ב. תשובה: 0.8
	ג. תשובה: 0.022
<u>שאלה 9</u>	
א. תשובה: 0.0714	
ב. תשובה: 0.0286	
ג. תשובה: 0.0143	

רמה ב'

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. תשובה: 102,400,000	א. תשובה: 0.1117
ב. תשובה: 78,960,960	ב. תשובה: 0.1445
ג. תשובה: 658,008	ג. תשובה: 0.9819
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. תשובה: 14,040,000	א. תשובה: 0.00024
ב. תשובה: 1,404,000	ב. תשובה: 0.00098
ג. תשובה: 5,616,000	ג. תשובה: 0.05933
ד. תשובה: 8,424,000	ד. תשובה: 0.75000
<u>שאלה 5</u>	
א. תשובה: 0.00098	
ב. תשובה: 0.17798	
ג. תשובה: 0.02929	
ד. תשובה: 0.02197	

פרק ד' - הסתברות מותנה ודיאגרמת עצים

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. תשובה: 0.833	א. תשובה: 5%
ב. תשובה: 0.9375	ב. תשובה: 0.0833
ג. תשובה: 0.0625	ג. תשובה: 0.786
ד. תשובה: 0.5	ד. תשובה: 0.6875
ה. תשובה: 0.789	
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. תשובה: 0.07	א. תשובה: 2/7
ב. תשובה: 0.72	ב. תשובה: 23/49
ג. תשובה: 0.25	
<u>שאלה 5</u>	<u>שאלה 6</u>
א. תשובה: 6%	א. תשובה: 0.544
ב. תשובה: 0.58	ב. תשובה: 0.5
ג. תשובה: 0.241	
ד. תשובה: 0.2	

פרק ה' - תלות בין מאורעות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
כן	א. תשובה : 0.28
	ב. תשובה : 0.18
<u>שאלה 3</u>	
א. תשובה : 0.5904	
ב. תשובה : 0.9984	

פרק ו' - שאלות מסכמות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. תשובה : 0.94	א. תשובה : 15%
ב. תשובה : 0.255	ב. תשובה : 0.692
ג. תשובה : 0.03	ג. תשובה : לא זרים ותלויים
ד. תשובה : 0.168	
<u>שאלה 3</u>	
א. תשובה : 8%	
ב. תשובה : 0.733	
ג. תלויים	

פרק שני- המשתנה המקרי הבדיד

א. פונקצית ההסתברות:

1. ברולטה הסיכוי לזכות ב- 30 ₪ הוא חצי וב-10 ₪ רבע כך גם ב- 20 ₪. נגדיר את X להיות סכום הזכייה במשחק בודד. בנה את פונקצית ההסתברות של X .
2. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה: נגדיר את המאורעות הבאים:
 - A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
 - B- לעבור את המבחן בכלכלה.
 כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי X מספר המבחנים שהסטודנט עבר. בנה את פונקצית ההסתברות של X .
3. הסיכוי לזכות במשחק מסוים הינו 0.3. אדם משחק את המשחק עד אשר הוא מנצח אך בכל מקרה הוא לא משחק את המשחק יותר מ- 4 פעמים. נגדיר את X להיות מספר הפעמים שהוא שיחק את המשחק. בנה את פונקצית ההסתברות של X .
4. חברה לניהול פרויקטים מנהלת 3 פרויקטים במקביל. הסיכוי שפרויקט א' יצליח הינו 0.7. הסיכוי שפרויקט ב' יצליח הינו 0.8. הסיכוי שפרויקט ג' יצליח הינו 0.9. נתון שהצלחת כל פרויקט בלתי תלויה זו בזו. נגדיר את x להיות מספר הפרויקטים שיצליחו. בנה את פונקצית ההסתברות של X .

ב. תוחלת, שונות וסטיית תקן:

1. חשב את התוחלת, השונות וסטיית התקן של שאלה מספר 1 בפרק א'.
2. חשב את התוחלת, השונות וסטיית התקן של שאלה מספר 2 בפרק א'.
3. חשב את התוחלת, השונות וסטיית התקן של שאלה מספר 3 בפרק א'.
4. חשב את התוחלת, השונות וסטיית התקן של שאלה מספר 4 בפרק א'.
5. נתונה פונקציית ההסתברות של המשתנה המקרי X :

8	6	4	2	x
0.2		0.3		P(x)

כמו כן נתון ש: $E(X) = 4.2$

א. מצא את ההסתברויות החסרות בטבלה.

ב. חשב את $V(X)$.

ג. טרנספורמציה לינארית (תכונות התוחלת, השונות וסטיית התקן):

1. חזור לשאלה מספר 1 מפרק ב'. נניח שעלות השתתפות ברולטה היא 15 ₪ וסכום הזכייה הינו התוצאה שיצאה ברולטה. חשב את התוחלת והשונות של הרווח במשחק.
2. חזור לשאלה מספר 2 מפרק ב'. נניח שכל קורס שסטודנט מסיים מזכה אותו ב-4 נקודות אקדמאיות. חשב את התוחלת והשונות של סך הנקודות שצבר סטודנט שניגש ל-2 המבחנים.
3. חזור לשאלה מספר 3 מפרק ב'. נניח שזמן ההכנה לתהליך שמסופר בשאלה הינו 10 דקות, וכל משחק אורך 2 דקות. מה התוחלת ומהי השונות של זמן הפעילות הכוללת שעובר האדם בתהליך שתואר בשאלה?
4. חזור לשאלה מספר 4 מפרק ב'. נניח שעלות כל פרויקט הינה 5 אלף ₪. כל פרויקט שיצליח יכניס לחברה פדיון של 10 אלף ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח החברה מניהול הפרויקטים?
5. תוחלת של משתנה מקרי הינה 10 וסטיית התקן 5. הוחלט להוסיף 2 למשתנה ולאחר מכן לעלות אותו ב-10%. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן לאחר השינוי?
6. X הינו משתנה מקרי. כמו כן נתון ש- $E(X) = 4$ ו- $V(X) = 3$.
 Y הינו משתנה מקרי חדש עבורו $Y = 7 - X$.
חשב את: $E(Y)$ ו- $V(Y)$.

ד. תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים (המשך תכונות התוחלת, השונות וסטיית התקן):

1. הרווח ממניה א' הוא עם תוחלת של 5 ושונות 10. הרווח ממניה ב' הוא עם תוחלת של 4 ושונות 5. ידוע שההשקעות של שתי המניות בלתי תלויות זו בזו. מה התוחלת והשונות של הרווח הכולל מהשקעה בשתי המניות יחד?
2. בהמשך לשאלה 3 מפרק א' ומפרק ב' מסופר שהאדם חוזר על התהליך שסופר כל 7 ימות השבוע. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר המשחקים הכולל שישחק בשבוע?
3. X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים, סטיית התקן של X היא 3. סטיית התקן של Y היא 4. מהי סטיית התקן של $X+Y$?

ה. התפלגויות מיוחדות:

התפלגות בינומית

1. במדינה 10% מהאוכלוסייה מובטלת. נבחרו 5 אנשים באקראי מאותה אוכלוסייה. נגדיר את X להיות מספר המובטלים שהתקבלו במדגם.
 - א. מהי ההתפלגות של X ?
 - ב. מה ההסתברות שיהיה בדיוק מובטל אחד?
 - ג. מה ההסתברות שכולם יעבדו במדגם?
 - ד. מה ההסתברות ששלושה יעבדו במדגם?
 - ה. מה ההסתברות שלפחות אחד יהיה מובטל?
 - ו. מה תוחלת ומהי השונות של מספר המובטלים במדגם?
2. בבית הימורים יש שורה של 6 מכונות מזל מאותו סוג. משחק במכונת מזל כזו עולה 5 ₪. ההסתברות לזכות ב- 20 ₪, בכל אחת מהמכונות היא 0.1 וההסתברות להפסיד את ההשקעה היא 0.9 בכל מכונה. מהמר נכנס לבית הימורים ומכניס 5 ₪ לכל אחת מ-6 המכונות.
 - א. מה ההסתברות שיפסיד בכל המכונות?
 - ב. מה ההסתברות שיזכה בדיוק בשתי מכונות?
 - ג. מה ההסתברות שיזכה ביותר כסף מה- 30 ₪ שהשקיע?
 - ד. מהן התוחלת וסטיית התקן של הרווח נטו של המהמר (הזכיות בניכוי ההשקעה)?
3. במדינה מסוימת התפלגות ההשכלה בקרב האוכלוסייה מעל גיל 30 היא כזו:

השכלה	נמוכה	תיכונית	תואר I	תואר II ומעלה
פרופורציה	0.1	0.6	0.2	0.1

- נבחרו 20 אנשים אקראיים מעל גיל 30 מהמדינה הנ"ל.
- א. מה ההסתברות ש-5 מהם אקדמאים?
 - ב. מה התוחלת של מס' בעלי ההשכלה הנמוכה?

4. במכללה מסוימת 20% מהסטודנטים גרים בת"א. מבין הסטודנטים שגרים בת"א 30% מגיעים ברכבם ומבין הסטודנטים שלא גרים בת"א 50% מגיעים ברכבם למכללה.
- א. השומר בשער המכללה בודק לכל סטודנט את תיקו בהיכנסו למכללה. מה ההסתברות שבקרב 5 סטודנטים שנבדקו ע"י השומר רק 1 מתוכם הגיע למכללה ברכבו.
- ב. בהמשך לסעיף הקודם מה ההסתברות שרוב הסטודנטים בקרב ה-5 הגיעו למכללה ברכבם.
5. 5% מקו היצור פגום. המוצרים נארזים בתוך קופסת קרטון. בכל קופסא 10 מוצרים שונים. הקופסאות נארזות בתוך מכולה. בכל מכולה 20 קופסאות.
- א. מה ההסתברות שבקופסא אקראית לפחות מוצר פגום אחד?
- ב. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר הקופסאות במכולה בהן לפחות מוצר פגום אחד?

התפלגות גיאומטרית

1. צילום שמבוצע במכון הרנטגן "X-RAY" יתקבל תקין בהסתברות של 0.9. אדם נכנס למכון כדי להצטלם. הוא ייצא מהמכון רק כאשר יש בידו תצלום תקין.
 - א. מה ההסתברות שיצטלם בסך הכול 3 פעמים?
 - ב. מה ההסתברות שהצטלם יותר מ-4 פעמים?
 - ג. מה התוחלת ומה השונות של מספר הצילומים שייבצע?
 - ד. כל צילום עולה למכון 50 ₪. אדם משלם על צילום תקין 100 ₪. מה התוחלת ומה השונות של רווח המכון מאדם שהגיע להצטלם?
2. מטילים מטבע עד אשר מתקבלת התוצאה "עץ".
 - א. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 10 פעמים?
 - ב. מה ההסתברות להטיל את המטבע לכל היותר 5 פעמים אם ידוע שהמטבע הוטל לפחות 3 פעמים?
 - ג. אם ידוע שבשתי ההטלות הראשונות התקבלה התוצאה "פלי" מה ההסתברות שהאדם הטיל את המטבע 7 פעמים?
 - ד. מה תוחלת מספר הפעמים שהתקבלה התוצאה "פלי"?
3. 30% מהמכוניות בארץ הן בצבע לבן. בכל יום נכנסות לחניון 10 מכוניות אקראיות.
 - א. מה ההסתברות שביום מסוים בדיוק מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?
 - ב. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום עד שלראשונה מחצית מהמכוניות בחניון יהיו לבנות?

התפלגות פואסונית

1. במוקד טלפוני מתקבלות פניות בקצב של 5 פניות לדקה. מספר הפניות בדקה מתפלג פואסונית.
 - א. מה ההסתברות שבדקה תתקבל פניה 1?
 - ב. מה ההסתברות שבדקה תתקבל לפחות פניה 1?
 - ג. מה ההסתברות שבדקה יתקבלו לכל היותר 2 פניות?
 - ד. מה שונות מספר הפניות בדקה?
2. מספר הטעויות לעמוד בעיתון מתפלג פואסונית עם ממוצע של 4 טעויות לעמוד. בחלק מסוים של עיתון ישנם 5 עמודים.
 - א. מה ההסתברות שבחלק זה בדיוק 18 טעויות?
 - ב. אם בדף הראשון אין טעויות, מה ההסתברות שבסך הכול בחלק ישנן 15 טעויות?
 - ג. אם בחלק של העיתון נמצאו בסך הכול 18 טעויות, מה ההסתברות ש-5 מהן בדף הראשון?
3. מספר תאונות הדרכים הקטלניות במדינת ישראל מתפלג פואסונית עם סטיית תקן של 2 תאונות לשבוע.
 - א. מה תוחלת מספר התאונות בשבוע?
 - ב. מהי ההסתברות שבחודש (הנח שבחודש יש 4 שבועות) יהיה בדיוק שבוע אחד בו יהיו 3 תאונות דרכים קטלניות?

התפלגות אחידה :

1. במשחק הלוטו 45 כדורים ממוספרים מ-1 ועד -45 . נתבונן במשתנה X המספר של הכדור הראשון שנשלף על ידי המכונה.
 - א. חשבו את $P(X = 2)$
 - ב. חשבו את $P(X \leq 30)$
 - ג. חשבו את $P(X > 4 | X \leq 10)$
 - ד. חשבו את $P(X = k)$

2. קוסם מבקש לבחור מספר שלם אקראי בין 1 ל-100. בהנחה שאין כאן מניפולציות של הקוסם.
 - א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של המספר שיבחר?
 - ב. הקוסם ביקש משישה אנשים לבחור מספר :
 1. מה ההסתברות ששלושה מהם יבחרו מספר הגדול מ 80?
 2. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של סכום המספרים שהאנשים בחרו?

התפלגות הפרגאומטרית:

1. בכד 5 כדורים אדומים ו-4 כדורים ירוקים מוציאים באקראי שלושה כדורים מהכד.
 - א. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו.
 - ב. חשבו את התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים שהוצאו. פעם מתוך פונקציית ההסתברות ופעם מתוך הנוסחאות להתפלגות היפרגאומטרית.
 - ג. מה הייתה התוחלת והשונות של מספר הכדורים האדומים אם ההוצאה הייתה עם החזרה?

2. בחידון 10 שאלות משלושה תחומים שונים: 3 בתחום הספורט, 4 בתחום הבידור והיתר בתחום המדעים. משתתף בחידון שולף באקראי 4 שאלות. נגדיר את X להיות מספר השאלות מתחום הספורט שנשלפו.
 - א. בנו את פונקציית ההסתברות של X בנוסחא ולא בטבלה.
 - ב. מה התוחלת וסטיית התקן של X ?
 - ג. חשבו את ההסתברות הבאה: $P(X = 2 | X > 1)$

התפלגות בינומית שלילית :

1. בכד 4 כדורים שחורים ו-6 כדורים לבנים. אדם מוציא כדור באקראי פעם אחר פעם ומחזיר בין הוצאה להוצאה את הכדור. נסמן ב- X את מספר הכדורים שהוא הוציא עד אשר הוא קיבל 2 כדורים לבנים בסך הכול אך לא בהכרח ברצף.
 - ה. חשבו את $P(X = 2)$
 - ו. חשבו את $P(X = 3)$
 - ז. חשבו את $P(X = 4)$
 - ח. חשבו את $P(X = k)$
2. הראה שההתפלגות הגאומטרית היא מקרה פרטי של ההתפלגות הבינומית השלילית.
3. מטילים מטבע שוב ושוב עד אשר מקבלים שלוש פעמים עץ בסך בכול.
 - ג. בנו את פונקציית ההסתברות של מספר ההטלות הכולל.
 - ד. מהי התוחלת ומהי השונות של מספר ההטלות הכולל?
 - ה. חוזרים על התהליך שלעיל 5 פעמים. מה ההסתברות שפעמיים מתוך ה-5 חזרות נאלץ להטיל את המטבע בדיוק 4 פעמים?

ו. שאלות מסכמות:

1. נתון ש:

$$X \sim B(4, \frac{1}{2})$$

$$Y \sim B(10, \frac{1}{4})$$

א. חשב את התוחלת וסטיית התקן של X .

ב. $W = 2X - 4$, חשב את התוחלת וסטיית התקן של W .

ג. $T = X + Y$, חשב את התוחלת של T . האם ניתן לדעת מה סטיית התקן של T ?

2. ערן משחק בקזינו בשתי מכוונות הימורים. משחק אחד בכל מכוונה (במכוונה א' ובמכוונה

ב'). הסיכוי שלו לנצח במשחק במכוונה א' הינו 0.08 והסיכוי שלו לנצח רק במכוונה א'

הינו 0.05. הסיכוי שלו להפסיד בשני המשחקים ביום מסוים הוא 0.88.

א. מה הסיכוי שערן ינצח בשני המשחקים?

ב. מה התוחלת ומה השונות של מספר הניצחונות של ערן?

ג. אם ערן נכנס לקזינו 5 פעמים ובכל פעם שיחק את שני המשחקים, מה

ההסתברות שערן ינצח בשני המשחקים בדיוק פעם אחת מתוך חמשת הפעמים?

3. לאדם צרור מפתחות. בצרור 5 מפתחות אשר רק אחד מתאים לדלת של ביתו. האדם

מנסה את המפתחות באופן מקרי. לאחר שניסה מפתח מסוים הוא מוציא אותו

מהצרור כדי לא להשתמש בו שוב. נסמן ב- X את מספר הניסיונות עד שהדלת תפתח.

א. בנה את פונקציית ההסתברות של X .

ב. חשב את התוחלת והשונות של X .

ג. כל ניסיון לפתוח הדלת אורך חצי דקה. מה התוחלת ומה השונות של הזמן

הכולל לפתיחת הדלת?

4. מספר התקלות בשידור "בערוץ 1" מתפלג פואסונית בקצב של 6 תקלות ביום.

א. מה ההסתברות שביום מסוים הייתה לפחות תקלה אחת?

ב. מה ההסתברות שבשבוע (7 ימי שידור) יהיו בדיוק 6 ימים בהם לפחות תקלה אחת?

ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו מהיום ועד היום הראשון בו לפחות תהיה תקלה אחת?

5. בעל חנות גדולה בקניון שם לב ש-40% מהמוצרים בחנותו נרכשים עבור ילדים, 35% נרכשים עבור נשים ו-25% נרכשים עבור גברים. 10% מהמוצרים הנרכשים עבור ילדים הם מתוצרת חוץ, וכך גם 60% מהמוצרים הנרכשים עבור נשים ו-50% מאלה הנרכשים עבור גברים.
- א. מה ההסתברות למכור בחנות זו מוצר מתוצרת חוץ?
- ב. יהי X - מספר המוצרים שימכרו בחנות זו מפתחתה ביום א' בבוקר, עד (וכולל) שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ. מהי פונקציית ההסתברות של X ?
- ג. מהי תוחלת מס' המוצרים **מתוצרת חוץ** שימכרו, עד שלראשונה יימכר מוצר מתוצרת הארץ?
- ד. ביום ב' נמכרו בחנות 7 מוצרים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם הם מתוצרת חוץ?

ז. תשובות סופיות למשתנה המקרי הבדיד

פרק א' – פונקציות ההסתברות

שאלה 1

x	10	20	30
P(x)	0.25	0.25	0.5

שאלה 2

x	0	1	2
P(x)	0.05	0.20	0.75

שאלה 3

x	1	2	3	4
P(x)	0.3	0.21	0.147	0.343

שאלה 4

x	0	1	2	3
P(x)	0.006	0.092	0.398	0.504

פרק ב' – תוחלת, שונות וסטיית תקן

שאלה 1

תוחלת: 22.5

שונות: 68.75

סטיית תקן: 8.29

שאלה 2

תוחלת: 1.7

שונות: 0.31

סטיית תקן: 0.557

שאלה 3

תוחלת: 2.533

שונות: 1.535

סטיית תקן: 1.239

שאלה 4

תוחלת: 2.4

שונות: 0.46

סטיית תקן: 0.678

שאלה 5

א.

x	2	4	6	8
P(x)	0.4	0.3	0.1	0.2

ב. תשובה: 5.16

פרק ג' – טרנספורמציה לינארית (תכונות תוחלת, שונות וסטיית תקן)

שאלה 1

תוחלת: 7.5

שונות: 68.75

שאלה 2

תוחלת: 6.8

שונות: 4.96

שאלה 3

תוחלת: 15.066

שונות: 6.14

שאלה 4

תוחלת: 9

שונות: 46

שאלה 5

תוחלת: 13.2

סטיית תקן: 5.5

שאלה 6

תוחלת: 3

שונות: 3

פרק ד' – תוחלת ושונות של סכום משתנים מקריים (המשך תכונות תוחלת, שונות וסטיית תקן)

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
תוחלת: 9	תוחלת: 17.731
שונות: 15	סטיית תקן: 3.28
<u>שאלה 3</u>	
תשובה: 5	

פרק ה' – התפלגויות מיוחדות

התפלגות בינומית

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. $X \sim B(5, 0.1)$	א. תשובה: 0.5314
ב. תשובה: 0.32805	ב. תשובה: 0.0984
ג. תשובה: 0.59049	ג. תשובה: 0.1143
ד. תשובה: 0.0729	ד. תוחלת: -18
ה. תשובה: 0.40954	סטיית תקן: 14.697
ו. תוחלת: 0.5	
שונות: 0.45	

<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. תשובה: 0.1789	א. תשובה: 0.1956
ב. תשובה: 2	ב. תשובה: 0.4506

שאלה 5

א. תשובה: 0.401
ב. תוחלת: 8.025
סטיית תקן: 2.193

התפלגות גיאומטרית

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. תשובה: 0.009	א. תשובה: 0.001
ב. תשובה: 0.0001	ב. תשובה: 0.875
ג. תוחלת: 1.111	ג. תשובה: 0.03125
שונות: 0.1234	ד. תשובה: 1
ד. תוחלת: 44.4	
שונות: 308.5	

שאלה 3

א. תשובה: 0.1029
ב. תשובה: 9.72

התפלגות פואסונית**שאלה 1**

א. תשובה: 0.0337

ב. תשובה: 0.9933

ג. תשובה: 0.1246

ד. תשובה: 5

שאלה 3

א. תשובה: 4

ב. תשובה: 0.4077

התפלגות אחידה**שאלה 1**א. תשובה: $\frac{1}{45}$ ב. תשובה: $\frac{30}{45}$

ג. תשובה: 0.6

שאלה 2

א. תשובה: 0.084

ב. תשובה: 0.099

ג. תשובה: 0.151

שאלה 2

א. התוחלת: 50.5

סטיית התקן: 28.87

ב. 1. תשובה: 0.08192

ב. 2 תוחלת: 303 סטיית תקן: 70.71

התפלגות הפרגאומטרית**שאלה 1**ב. תוחלת: $1\frac{2}{3}$ שונות: $\frac{5}{9}$ ג. תוחלת: $1\frac{2}{3}$ שונות: $\frac{20}{27}$ **שאלה 2**

ב. תוחלת: 1.5

סטיית תקן: 0.748

ג. תשובה: 0.9

התפלגות בינומית שלילית**שאלה 1**

א. תשובה: 0.36

ב. תשובה: 0.288

שאלה 3

ב. תוחלת: 6 שונות: 6

ג. תשובה: 0.1886

פרק ו' – שאלות מסכמות**שאלה 1**

א. תוחלת: 2

סטיית תקן: 1

ב. תוחלת: 0

סטיית תקן: 2

ג. תוחלת: 4.5

סטיית תקן: לא ניתן

שאלה 3

א.

5	4	3	2	1	x
0.2	0.2	0.2	0.2	0.2	P(x)

ב. תוחלת: 3

שונות: 2

ג. תוחלת: 1.5

שונות: 1/2

שאלה 5

א. תשובה: 0.375

ג. תשובה: 0.6

ד. תשובה: 0.282

שאלה 2

א. תשובה: 0.01

ב. תוחלת: 0.13

שונות: 0.1331

ג. תשובה: 0.048

שאלה 4

א. תשובה: 0.9975

ב. תשובה: 0.0172

ג. תשובה: 1.0025

פרק שלישי - המשתנה המקרי הרציף

א. פונקציית הצפיפות וההתפלגות המצטברת של המשתנה הרציף

1. נתון משתנה מקרי רציף X שפונקציית הצפיפות שלו היא:

$$f(x) = \begin{cases} cx & 0 \leq x \leq b \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

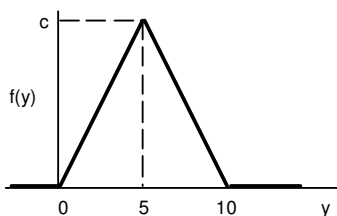
ידוע ש- $P(0 < X < 1) = 1/4$.

א. מצאו במפורש את פונקציית הצפיפות של X .

ב. מצאו את החציון של X .

ג. מה הסיכוי ש- X קטן מ- 0.5 ?

2. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי Y



א. מצאו את c .

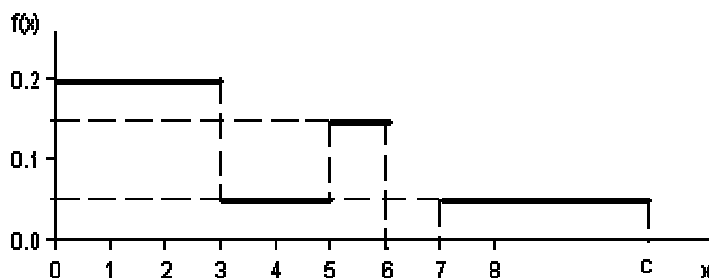
ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y .

ג. חשבו את ההסתברויות: $P(Y > 4)$, $P(7.5 \leq Y \leq 15.5)$, $P(Y \leq 3.0)$, $P(Y = 7.0)$.

ד. מצאו את העשירון התחתון $y_{0.1}$, הרבעון התחתון $y_{0.25}$ והחציון של Y . הסיקו מהו העשירון

עליון $y_{0.9}$.

3. נתונה פונקציית צפיפות של משתנה מקרי X :



א. מצאו ערך c שעבורו תקבל פונקציית צפיפות.

ב. מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת.

ג. חשבו את ההסתברויות הבאות: $P(1.0 < X \leq 5.0)$, $P(X \geq -2.0)$, $P(X \geq 4)$.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר - ברק קנדל ©

ב. התפלגויות מיוחדות:**התפלגות נורמלית**

1. הגובה של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 170 ס"מ וסטית תקן של 10 ס"מ.
 - א. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 182.4 ס"מ?
 - ב. מה אחוז האנשים שגובהם מעל 190 ס"מ?
 - ג. מה אחוז האנשים שגובהם בדיוק 173.6 ס"מ?
 - ד. מה אחוז האנשים שגובהם מתחת ל- 170 ס"מ?
 - ה. מה אחוז האנשים שגובהם לכל היותר 170 ס"מ?

2. המשקל של אנשים באוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמלית עם ממוצע של 60 ק"ג וסטיית תקן של 8 ק"ג.
 - א. מה אחוז האנשים שמשקלם נמוך מ- 55 ק"ג?
 - ב. מהי פרופורציית האנשים באוכלוסייה שמשקלם לפחות 50 ק"ג?
 - ג. מהי השכיחות היחסית של האנשים באוכלוסייה שמשקלם בין 60 ל- 70 ק"ג?
 - ד. לאיזה חלק מהאוכלוסייה משקל הסוטה מהמשקל הממוצע בלא יותר מ- 4 ק"ג?
 - ה. מה אחוז האנשים באוכלוסייה הזו ששוקלים מתחת ל- 140 ק"ג?

3. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלג נורמלית עם ממוצע 100 ושונות 225.
 - א. מה העשירון העליון של הציונים במבחן האינטליגנציה?
 - ב. מה העשירון התחתון של ההתפלגות?
 - ג. מהו הציון ש- 20% מהנבחנים מקבלים מעליו?
 - ד. מהו האחוזון ה- 20?
 - ה. מה הרבעון התחתון?

4. אורך חים של מכשיר מתפלג נורמלית. ידוע שמחצית מהמכשירים חים פחות מ- 500 שעות, כמו כן ידוע ש- 67% מהמכשירים חים פחות מ- 544 שעות.
 - א. מהו ממוצע אורך חיי מכשיר?
 - ב. מהי סטית בתקן של אורך חיי מכשיר?
 - ג. מה הסיכוי שמכשיר אקראי יחיה פחות מ- 460 שעות?
 - ד. מהו המאיון העליון של אורח חיי מכשיר?
 - ה. 1% מהמכשירים בעלי אורך החיים הקצר ביותר נשלח למעבדה לבדיקה מעמיקה. מהו אורך החיים המקסימלי לשליחת מכשיר למעבדה?

5. ¹ הזמן שלוקח לאדם להגיע לעבודתו מתפלג נורמלית עם ממוצע של 40 דקות וסטית תקן של 5 דקות.

א. מה ההסתברות שמשך הנסיעה של האדם לעבודתו יהיה לפחות שלושת רבעי השעה?

ב. אדם יצא לעבודתו בשעה 08:10 מביתו. הוא צריך להגיע לעבודתו בשעה 09:00. מה הסיכוי שיאחר לעבודתו?

ג. אם ידוע שזמן נסיעתו לעבודה היה יותר משלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שזמן הנסיעה הכולל יהיה פחות מ- 50 דקות?

ד. מה הסיכוי שבשבוע (חמישה ימי עבודה) בדיוק פעם אחת יהיה זמן הנסיעה לפחות שלושת רבעי השעה?

6. ¹ ההוצאה החודשית לבית אב בעיר "טרירה" מתפלגת נורמלית עם ממוצע של 2000 דולר וסטית תקן של 300 דולר. בחרו באקראי 5 בתי אב. ההסתברות שלפחות אחד מהם מוציא בחודש מעל ל- T דולר היא 0.98976.

א. מה ערכו של T.

ב. מה הסיכוי שההוצאה החודשית של בית אב בעיר תהיה לפחות סטיית תקן אחת מעל T?

ג. אם זוז שווה ל \$ 2, מצא את סטית התקן של ההוצאה החודשית לבית אב בזוים.

¹ השאלה רלבנטית רק למי שכבר למד הסתברות והתפלגות בינומית.

התפלגות אחידה

1. משך (בדקות) הפסקה בשיעור, X , מתפלג $U(13, 16)$.
 - א. מהי התוחלת ומהי סטיית התקן של משך ההפסקה?
 - ב. מהי ההסתברות שהפסקה תמשך יותר מ-15 דקות?
 - ג. מהי ההסתברות שמשך ההפסקה יסטה מהתוחלת בפחות מדקה?

2. רכבת מגיעה לתחנה בשעות היום כל עשר דקות. אדם הגיע לתחנה בזמן אקראי.
 - א. הסבר כיצד מתפלג זמן ההמתנה לרכבת?
 - ב. אם זמן ההמתנה לרכבת ארך יותר מ-5 דקות, מהי ההסתברות שבסך הכל האדם ימתין לרכבת פחות מ-8 דקות?
 - ג. מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד הפעם הראשונה שהאדם ימתין לרכבת יותר מ-9 דקות?

3. מתקן המילוי במפעל ממלא בקבוקים באופן אחיד לפי פונקציית הצפיפות (סמ"ק):

$$f(x) = \begin{cases} 0.8 & 120 \leq x \leq 121.25 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$
 - א. מה אחוז הבקבוקים שתכולתם מעל 120.4 סמ"ק?
 - ב. דרישות התקן הן לדחות כל בקבוק עם תכולה השונה מן התכולה המוצהרת (121 סמ"ק) ביותר מחמישית סמ"ק. מהו אחוז הבקבוקים שלא יעמדו בתקן? (בקבוק כזה יושמד).
 - ג. בקבוק תקני יימכר ב-8 שקלים. עלות הייצור לבקבוק היא 2 שקל. מה הרווח הממוצע במכירת בקבוק?

התפלגות מעריכית (אקספוננציאלית)

1. הזמן שעובר בכביש מסוים עד להתרחשות תאונה מתפלג מעריכית עם תוחלת של 24 שעות.
 - א. מהי סטיית התקן של הזמן עד להתרחשות תאונה?
 - ב. מה ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך פחות מיממה?
 - ג. מהי ההסתברות שהתאונה הבאה תתרחש תוך לפחות יומיים?

2. משך הזמן X (בדקות) שסטודנטים יושבים ליד מסוף מחשב מתפלג מעריכית עם תוחלת של 30 דקות.
 - א. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך פחות מרבע שעה?
 - ב. מה הסיכוי שעבודת סטודנט על המחשב תארך בין רבע שעה לחצי שעה?
 - ג. אם סטודנט עובד ליד המסוף כבר יותר מ- 10 דקות, מה ההסתברות שמשך כל עבודתו ליד המסוף יעלה על 30 דקות?

3. בממוצע מגיעים לחדר מיון 4 חולים בשעה בזרם פואסוני.
 - א. שולה המזכירה הגיעה לחדר המיון. מה ההסתברות שזמן ההמתנה שלה לחולה הבא יהיה יותר מ- 20 דקות?
 - ב. אם שולה המתונה יותר מרבע שעה לחולה הבא. מה ההסתברות שתמתין בסך הכל יותר מחצי שעה?
 - ג. מה ההסתברות שבין החולה הראשון לשני יש להמתין יותר מרבע שעה ובין החולה השני לשלישי יש להמתין פחות מרבע שעה?

ג. תשובות סופיות למשתנה המקרי הרצוף

פרק א' – פונקציות צפיפות והתפלגות מצטברת

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. $b=2$ $c=0.5$	א. 0.2
ב. 1.41	ג. 0, 0.18, 0.125, 0.32
ג. 0.0625	ד. העשירון התחתון: 2.24 הרבעון התחתון: 3.54 החציון: 5 העשירון העליון: 7.76
<u>שאלה 3</u>	
א. 10	
ג. 0.5, 1, 0.35	

פרק ב' – התפלגויות מיוחדות

התפלגות נורמלית

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. 89.25%	א. 26.43%
ב. 2.28%	ב. 89.44%
ג. 0	ג. 39.44%
ד. 50%	ד. 0.383
ה. 50%	ה. 100%
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. 119.23	א. 500
ב. 80.77	ב. 100
ג. 112.63	ג. 0.3446
ד. 87.37	ד. 732.6
ה. 89.89	ה. 267.4
<u>שאלה 5</u>	<u>שאלה 6</u>
א. 0.1587	א. 1924.1
ב. 0.0228	ב. 0.2266
ג. 0.8563	ג. 600
ד. 0.3975	

התפלגות אחידה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. תוחלת : 14.5	א. $X \sim U(0,10)$
שונות : 0.866	ב. 0.6
ב. $1/3$	ג. 10
א. $2/3$	
<u>שאלה 3</u>	
א. 68%	
ב. 68%	
ג. 0.56	

התפלגות מעריכית

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. 24 שעות	א. 0.632
ב. 0.632	ב. 0.239
ג. 0.135	ג. 0.513
<u>שאלה 3</u>	
א. 0.264	
ב. 0.368	
ג. 0.233	

נספח: המשתנה הרציף - שימוש באינטגרלים

באופן כללי נסמן פונקציית צפיפות של משתנה רציף כלשהו ב $f(x)$.
השטח שמתחת לפונקציית הצפיפות נותן את ההסתברות.
פונקציית צפיפות חייבת להיות לא שלילית והשטח הכולל שמתחת לפונקציה יהיה תמיד 1.

פונקציית התפלגות מצטברת :

$$F(t) = p(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$$

תוחלת של משתנה רציף כלשהו :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X \cdot f(x) dx = \mu$$

שונות של משתנה רציף כלשהו :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} X^2 \cdot f(x) dx - \mu^2 = \sigma^2$$

כמו כן :

$$p(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

$$p(X > t) = 1 - F(t)$$

שאלה 1

נתונה פונקציית צפיפות $f(X) = \frac{2}{x}$ פונקציה זו מוגדרת מ-1 ועד K.

- א. מצא את ערכו של K.
- ב. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- ג. חשב את הסיכוי ש X לפחות 1.5.
- ד. מצא את העשירון התחתון של ההתפלגות.
- ה. מה התוחלת של X?

שאלה 2

נתונה פונקציית צפיפות הבאה: $f(X) = AX^2(10 - X)$ $0 < X < 10$ A הינו קבוע חיובי.

- א. מצא את A.
- ב. חשב את $P(x > 5 | x > 2)$.
- ג. מה התוחלת ומהי השונות של X?

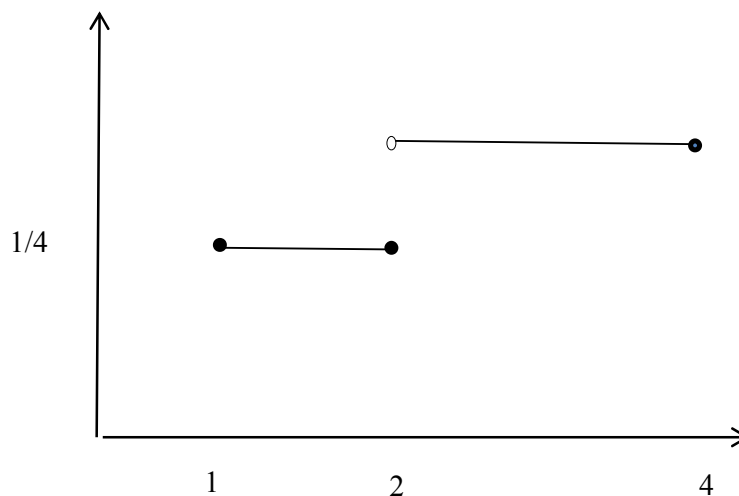
שאלה 3

פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי רציף X : $f(x) = 0.5 \cdot e^{2x}$ $-\infty \leq X \leq \ln(c)$

- א. מצא את ערכו של c.
- ב. מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של ההתפלגות.
- ג. חשב $P(X > 0)$.
- ד. מהו הרבעון העליון של ההתפלגות?

שאלה 4

נתונה פונקציית הצפיפות הבאה של משתנה מקרי X :



- א. רשום את נוסחת פונקציית הצפיפות.
- ב. בנה את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- ג. מצא את החציון של ההתפלגות.
- ד. חשב את התוחלת והשונות של המשתנה.
- ה. חשב את $E(X^3)$.

שאלה 5

במפעל מייצרים מוצר A. זמן תהליך הייצור של המוצר בשעות הוא בעל פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = 6x(1-x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

- א. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה קטן מ 20 דקות?
- ב. מה ההסתברות שזמן הייצור של מוצר A אקראי יהיה בדיוק חצי שעה?
- ג. נבחרו חמישה מוצרים אקראיים מסוג A. מה תוחלת מספר המוצרים שזמן הייצור שלהם יהיה גדול מ 20 דקות?

שאלה 6

זמן ההמתנה בדקות של לקוח בתור למכולת השכונתית מתפלג עם פונקציית ההתפלגות המצטברת הבאה :

$$F(t) = 1 - e^{-0.2t}$$

- א. שרטט את פונקציית ההתפלגות המצטברת.
- ב. מה הסיכוי שזמן ההמתנה יהיה לפחות רבע שעה?
- ג. אם חיכיתי בתור כבר 10 דקות מה ההסתברות שאאלץ לחכות בסך הכול פחות מרבע שעה?
- ד. מהו הזמן ש-90% מהלקוחות מחכים מתחתיו?

שאלה 7

פונקציית הצפיפות של משתנה מקרי נתונה על ידי הנוסחה הבאה :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 4 \\ bx - 4b & 4 \leq x \leq 5 \\ b & 5 < x \leq 6 \\ 0 & x > 6 \end{cases}$$

- א. מצאו את b.
- ב. חשבו את התוחלת של X.
- ג. Y הוא משתנה אינדיקטור המקבל את הערך 1 אם X קטן מ-5. מהי השונות של Y?

פתרונותשאלה 1

ז. $e^{0.5}$

ח.

ט. 0.189

י. 1.051

יא. 1.297

שאלה 2

ה. 0.0012

ו. 0.7067

ז. תוחלת : 6 שונות : 4

שאלה 3

א. 2

ב.

ג. $3/4$

ד. 0.549

שאלה 4

ג. $2\frac{2}{3}$

ד. תוחלת : 2.625 שונות : 0.6927

ה. 23.4375

שאלה 5

א. $\frac{7}{27}$

ב. 0

ג. 3.704

שאלה 6

ב. 0.0498

ג. 0.6321

ד. 11.51

שאלה 7

א. $\frac{2}{3}$

ב. 5.22

ג. $\frac{2}{9}$

פרק רביעי - המשתנה הדו מימדי הבדיד

1. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. הסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. יהי X מספר הקורסים שהסטודנט עבר. יהי Y משתנה אינדיקטור המקבל את הערך אחד אם הסטודנט עבר את הבחינה בכלכלה ואפס אחרת.
 - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו Y ואת השוליות.
 - ב. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?
 - ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y . האם המשתנים מתואמים?

2. מטילים מטבע שלוש פעמים. נגדיר את X להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות הראשונות ואת Y להיות מספר העצים המתקבלים בשתי ההטלות האחרונות.
 - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת של X ו Y ואת פונקציות ההסתברות השוליות.
 - ב. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?
 - ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y . האם המשתנים מתואמים?
 - ד. אם בשתי ההטלות הראשונות יצא בדיוק עץ אחד, מה ההסתברות שבשתי ההטלות האחרונות יצאו שני עצים?
 - ה. אם בשתי ההטלות האחרונות יצא לפחות פעם אחת עץ, מה ההסתברות שבשתי ההטלות הראשונות יצא עץ אחד?

3. אדם נכנס לקזינו עם 75 דולר. הוא ישחק במכונת מזל בה יש סיכוי של 03 לנצח. במקרה של ניצחון במשחק הוא יקבל מהקזינו 25 דולר ובמקרה של הפסד הוא ישלם 25 דולר. אותו אדם החליט שיפסיק לשחק ברגע שיהיה לו 100 דולר, אך בכל מקרה לא ישחק יותר מ- 3 משחקים. נגדיר את X להיות הכסף שברשות האדם בצאתו מהקזינו ואת Y מספר המשחקים שהאדם שיחק.
 - א. בנו את פונקציית ההסתברות המשותפת.
 - ב. מה תוחלת מספר המשחקים שישחק האדם?
 - ג. אם האדם יצא מהקזינו שברשותו 100 דולר, מה התוחלת ומהי השונות של מספר המשחקים שישחק?

4. מפעל משווק מוצר הנארוז בחבילות בגדלים שונים. ישנו מספר שווה של חבילות בנות שני מוצרים ושלושה מוצרים. ההסתברות שמוצר מסוים יהיה פגום היא $1/10$. מהנדס הייצור בוחר באקראי חבילת מוצרים לשם בקורת איכות. יהיו: X – מספר המוצרים בחבילה, Y – מספר המוצרים הפגומים בחבילה.

א. מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן X הינו 3.

ב. מה ההתפלגות של המשתנה Y בהינתן X הינו K כלשהו.

ג. מהי תוחלת מספר המוצרים הפגומים בחבילות בנות 3 מוצרים? נמקו.

ד. בנה את פונקציית ההסתברות המשותפת.

5. מתוך כד עם שלושה כדורים ממוספרים במספרים 2, 4, 8 שולפים באקראי שני כדורים ללא

החזרה. נגדיר: X – המספר הקטן מבין השניים; Y – המספר הגדול מבין השניים.

א. חשבו את ההתפלגות של (X, Y) .

ב. אם המספר המינימאלי שנבחר הוא 2, מה הסיכוי שהמספר המקסימאלי 8?

ג. חשבו את ההתפלגות המותנית של X בהינתן $Y = 4$. מצאו $E(X / Y = 4)$.

6. מבחן בנוי מחלק כמותי ומחלק מילולי. תוחלת הציון בחלק המילולי הנו 100 עם סטית תקן 20

ובחלק הכמותי תוחלת הציון 90 עם סטיית תקן 15. מקדם המתאם בין שני הציונים הוא 0.9.

א. חשבו את השונות המשותפת בין ציוני שני חלקי הבחינה.

ב. אם יעלו את כל הציונים בחלק המילולי ב-20%, מה יהיה מקדם המתאם בין הציון

המילולי החדש לציון הכמותי ובין הציון המילולי הישן לציון המילולי החדש?

ג. נגדיר משתנה חדש W להיות המרחק של הציון בחשיבה מילולית מהציון המקסימאלי

בבחינה-150. מצא את מקדם המתאם בין הציון המילולי ל- W ובין W ל-לציון הכמותי.

ד. מה התוחלת ומהי השונות של סכום הציונים?

ה. מה התוחלת ומה השונות של פער הציונים בין החשיבה המילולית לחשיבה הכמותית?

7. נתונה פונקציית ההסתברות המשותפת הבאה :

$Y \backslash X$	1	2	3	$P(Y)$
2		0.1	0.3	0.6
3	0.2		0.1	
$P(X)$				

ה. השלם את ההסתברויות החסרות.

ו. האם המשתנים תלויים?

ז. האם המשתנים בלתי מתואמים?

ח. חשב את השונות המשותפת.

ט. חשב את התוחלת והשונות של סכום המשתנים.

י. חשב את התוחלת והשונות של הפרש המשתנים.

תשובות סופיות למשתנה המקרי הדו מימדי הבדיד

שאלה 1	שאלה 2
ב. תלויים	ב. תלויים.
ג. מקדם המתאם: 0.853 . מתואמים.	ג. מקדם המתאם : 0.5 . מתואמים.
	ד. 0.25 ה. 0.5
שאלה 3	שאלה 4
ב. 2.4	ג. 0.3
ג. התוחלת 1.348 והשונות 0.575	
שאלה 5	שאלה 6
ב. 0.5	א. 270
ג. תוחלת 2	ב. 1, 0.9
	ג. -1, -0.9
	ד. תוחלת 190 ושונות 1165
	ה. תוחלת 10 ושונות 85
שאלה 7	
ב. תלויים	
ג. מתואמים	
ד. תשובה: -0.1	
ה. תוחלת: 4.4 שונות: 0.84	
ו. תוחלת: -0.4 שונות: 1.24	

פרק חמישי - אי שוויונים הסתברותיים

אי שוויון צ'ביצ'ב א.

1. מצא חסמים להסתברויות הבאות עבור משתנה מקרי רציף בעל תוחלת 8 וסטית תקן 3 .
א.

$$p(2 < x < 14)$$

ב.

$$p(|x - 8| \geq 9)$$

2. מתוך קו יצור של רכיבים שאורכם הממוצע הנו 10 ס"מ ושונותם 3 סמ"ר. יש לקחת מדגם. מהו גודל המדגם שיבטיח שבהסתברות של 0.9 לפחות ימצא ממוצע המדגם בין 9 ל-11 ס"מ?

3. אחוז התומכים במפלגה מסוימת הנו 40% . נלקח מדגם מקרי בגודל 200 .
תן חסם תחתון לכך שאחוז התומכים במדגם יהיה בין 35% ל- 45% .

4. מספר המטוסים המגיעים לנמל תעופה ב 20 דקות מתפלג התפלגות פואסונית עם תוחלת של 100 . העזר באי שוויון צ'ביצ'ב כדי למצוא גבול תחתון להסתברות שמספר המטוסים המגיעים בתקופה בת 20 דקות נתונה תהיה בין 80 ל-120.

5. בוחרים מספר n ספרתי באופן מקרי. (הספרה ראשונה יכולה להיות 0)
א. עבור $n = 10$: הערך את ההסתברות שממוצע הספרות במספר יסטה מתוחלתו בלפחות 1.
ב. מה אורך המספר המינימלי (n) שיבטיח שבהסתברות של 95%, ממוצע הספרות יסטה מתוחלתו בפחות מ-0.75? לפי אי-שוויון צ'ביצ'ב.

6. בעיר מסוימת ל 5% מהמשפחות אין מכונית , ל-20% יש מכונית אחת, ל- 35% יש שתי מכוניות, ל- 30% שלוש מכוניות וליתר ארבע מכוניות. נניח שמספר המשפחות ביישוב הוא גדול מאד. הערך את ההסתברות שמספר המכוניות הכולל בעשר משפחות יהיה לפחות 17 ולכל היותר ל-27 .

ב. אי שוויון מרקוב

1. אורך חיים של מכשיר מתפלג עם תוחלת של 500 שעות. חשב לפי אי שוויון מרקוב את ההסתברות שאורך חיים של מכשיר יהיה לפחות 1500 שעות.
2. התפלגות מספר הילדים למשפחה במדינה מסוימת היא עם תוחלת של 2 ילדים. נלקחו 5 משפחות אקראיות. הערך את הסיכוי שבסה"כ בחמשת המשפחות יש יותר מ-15 משפחות.
3. ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 75.
 - א. מצא חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 85.
 - ב. נניח שהמרצה יודע בנוסף ששונות ציון מבחן הגמר של הסטודנט היא 25, מה אפשר לומר על ההסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה גבוה מ-65 ונמוך מ-85?

ג. תשובות סופיות לאי שוויונים הסתברותיים

פרק א' – אי שוויון צ'ביצ'ב

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
א. בין $3/4$ ל- 1	לפחות 30
ב. בין 0 ל- $1/9$	
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
0.52	0.75
<u>שאלה 5</u>	<u>שאלה 6</u>
א. 0.825	0.706
ב. 294	

פרק ב' – אי שוויון מרקוב

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
בין 0 ל- $1/3$	לכל היותר 0.625
<u>שאלה 3</u>	
א. 0.8823	
ב. לפחות 0.75	

פרק שישי - התפלגות הדגימה

א. התפלגות ממוצע המדגם ומשפט הגבול המרכזי

1. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה למשפחה בישוב מסוים:

מספר המקלטים	מספר המשפחות
0	500
1	2500
2	3500
3	3000
4	500
סך הכול $N = 10000$	

נגדיר את x להיות מספר המקלטים של משפחה אקראית.

- א. בנו את פונקציית ההסתברות של x .
- ב. חשבו את התוחלת, השונות וסטיית התקן של x .
- ג. אם נדגום 4 משפחות מהישוב מה תהיה התוחלת, מהי השונות ומהי סטיית התקן של ממוצע המדגם?

2. אם נטיל קובייה פעמיים ונתבונן בממוצע התוצאות שיתקבלו, מה תהיה התוחלת ומה תהיה סטיית התקן של ממוצע זה?

3. משקל תינוק ביום היוולדו מתפלג נורמאלית עם ממוצע 3400 גרם וסטיית תקן של 400 גרם.

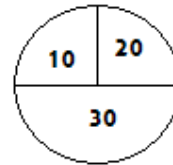
א. מה ההסתברות שתינוק אקראי בעת הלידה ישקול פחות מ-3800 גרם?

נתון שביום מסוים נולדו 4 תינוקות.

- ב. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע שלהם יעלה על 4 ק"ג?
- ג. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה מתחת ל-2.5 ק"ג?
- ד. מה ההסתברות שהמשקל הממוצע של התינוקות יהיה רחוק מהתוחלת בלא יותר מ-50 גרם?

4. הזמן הממוצע שלוקח לאדם להגיע לעבודתו 30 דקות עם שונות של 16 דקות רבועיות. האדם נוסע לעבודה במשך שבוע 5 פעמים. לצורך פתרון הניחו שזמן הנסיעה לעבודה מתפלג נורמאלי.
- א. מה ההסתברות שבמשך שבוע משך הנסיעה הממוצע יהיה מעל 33 דקות?
- ב. מהו הזמן שבהסתברות של 90% ממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה פחות ממנו?
- ג. מה ההסתברות שממוצע משך הנסיעה השבועי יהיה מרוחק מ-30 דקות בלפחות 2 דקות?
5. נפח היין בבקבוק מתפלג נורמאלי עם תוחלת של 750 סמ"ק וסטיית תקן של 10 סמ"ק.
- א. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה בדיוק 755 סמ"ק?
- ב. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה יותר מ-755 סמ"ק?
- ג. בארגז 4 בקבוקי יין. מה ההסתברות שהנפח הממוצע של הבקבוקים בארגז יהיה לפחות 755 סמ"ק?
- ד. בקבוקי היין שבארגז נמזגים לקערה עם קיבולת של שלושה ליטר. מה ההסתברות שהיין יגלוש מהקערה?
6. משתנה מתפלג נורמאלי עם תוחלת 80 וסטיית תקן 4.
- א. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה כאשר גודל המדגם הוא 9?
- ב. מה ההסתברות שממוצע המדגם יסטה מתוחלתו בלא יותר מיחידה שגודל המדגם הוא 16?
- ג. הסבר את ההבדל בתשובות של שני הסעיפים.

7. בקזינו ישנה רולטה. על הרולטה רשומים המס' הבאים כמוראה בשרטוט:



- אדם מסובב את הרולטה וזוכה בסכום הרשום על הרולטה.
- א. בנו את פונקציית ההסתברות של סכום הזכייה במשחק בודד.
- ב. מה התוחלת ומה השונות של סכום הזכייה?
- ג. אם האדם ישחק את המשחק 5 פעמים מה התוחלת ומה השונות של ממוצע סכום הזכייה בחמשת המשחקים?
- ד. אם האדם משחק את המשחק 50 פעם מה ההסתברות שבסה"כ יזכה ב-1050 ₪ ומעלה?
8. לפי הערכות הלשכה המרכזית לסטטיסטיקה השכר הממוצע במשק הוא 8000 ₪ עם סטיית תקן של 3000 ₪. מה ההסתברות שבמדגם מקרי של 100 עובדים השכר הממוצע יהיה יותר מ-8500 ₪?
9. מטילים קובייה 50 פעמים בכל פעם מתבוננים בתוצאה של הקובייה. מה ההסתברות שהממוצע של התוצאות יהיה לפחות 3.72 ב-50 ההטלות?
10. אורך צינור שמפעל מייצר הינו עם ממוצע של 70 ס"מ וסטיית תקן של 10 ס"מ
- א. נלקחו באקראי 100 מוטות, מה ההסתברות שממוצע אורך המוטות יהיה בין 68 ל 78 ס"מ?
- ב. יש לחבר 2 בניינים באמצעות מוטות. המרחק בין שני הבניינים הינו 7200 ס"מ. מה ההסתברות ש 100 המוטות יספיקו למלאכה?
- ג. מה צריך להיות גודל המדגם המינימאלי, כדי שבהסתברות של 5% ממוצע המדגם יהיה קטן מ-69 ס"מ. העזר במשפט הגבול המרכזי.

ב. התפלגות מספר ההצלחות במדגם ופרופורציות ההצלחות במדגם וקירוב

נורמאלי להתפלגות הבינומית

1. נתון ש-20% מאוכלוסייה מסוימת אקדמאית. נבחרו באקראי 10 אנשים באותה אוכלוסייה.
 - א. מה ההסתברות ששלושה מהם אקדמאים?
 - ב. מה ההסתברות שלכל היותר אחד מהם אקדמאי?
 - ג. מה התוחלת ומהי סטיית התקן של מספר האקדמאים במדגם?
2. הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת בחורף מוערך ב-0.4. נדגמו 30 מבוגרים אקראיים.
 - א. חשבו את הסיכוי שבדיוק 15 יחלו בשפעת (1) לפי ההתפלגות הבינומית ; (2) לפי הקירוב הנורמאלי.
 - ב. חשבו את הסיכוי לכל היותר 14 יחלו בשפעת.
 - ג. חשבו את הסיכוי שלפחות 11 יחלו בשפעת.
3. במפעל 10% מהמוצרים פגומים. נלקחו 100 מוצרים באקראי מקו הייצור.
 - א. מה ההסתברות שנדגמו לכל היותר 6 מוצרים פגומים?
 - ב. מה ההסתברות שמספר המוצרים הפגומים יהיה לכל היותר 11 במדגם?
 - ג. מה ההסתברות שיהיו בדיוק 11 פגומים?
4. ציוני פסיכומטרי בקרב הנרשמים למוסד מסוים מתפלגים נורמאלי עם ממוצע 500 וסטיית תקן 100. למוסד מסוים הוחלט לקבל אך ורק סטודנטים שקיבלו מעל 600 בפסיכומטרי. 100 סטודנטים אקראיים נרשמו למוסד. מה ההסתברות שלפחות 20 יתקבלו?
5. במדינה יש 10% של אבטלה. נדגמו באקראי 140 אנשים מהמדינה.
 - א. מה התוחלת ומהי השונות של פרופורציות המובטלים שנדגמו?
 - ב. מה ההסתברות שבמדגם לפחות 10% יהיו מובטלים?
 - ג. מה ההסתברות שלכל היותר 9% מהמדגם יהיו מובטלים?
6. נניח ש-30% מהאוכלוסייה תומכת בהצעת חוק מסוימת. אם נדגום מהאוכלוסייה 200 איש. חשבו את ההסתברויות הבאות:
 - א. לפחות 35% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - ב. לכל היותר 25% יתמכו בהצעת החוק במדגם.
 - ג. יותר מ-27% יתמכו בהצעת החוק במדגם.

תשובות סופיות להתפלגות הדגימה

פרק א' - התפלגות ממוצע מדגם ומשפט הגבול המרכזי

שאלה 1

שאלה 2

א. $E(\bar{X}) = 3.5$

$\sigma(\bar{X}) = 1.208$

x	0	1	2	3	4
P(x)	0.05	0.25	0.35	0.3	0.05

ב. $\mu = 2.05 \quad \sigma^2 = 0.9475 \quad \sigma = 0.973$

ג. $E(\bar{X}) = 2.05 \quad V(\bar{X}) = 0.237$

$\sigma(\bar{X}) = 0.487$

שאלה 3

שאלה 4

א. 0.0465

א. 0.8413

ב. 32.29

ב. 0.0013

ג. 0.2628

ג. 0

ד. 0.1974

שאלה 5

שאלה 6

א. 0.5468

א. 0

ב. 0.6826

ב. 0.1587

ג. 0.1587

ד. 0.5

שאלה 7

שאלה 8

א. 0.0475

א.

	10	20	30
P(x)	0.25	0.25	0.5

ב. התוחלת: 22.5

השונות: 68.75

ג. התוחלת: 22.5

השונות: 13.75

ד. 0.8997

שאלה 10

א. 0.9772

ב. 0.0228

ג. 271

שאלה 9

0.1814

פרק ב' - התפלגות מספר ההצלחות במדגם ופרופורציות ההצלחות במדגם וקירוב

נורמאלי להתפלגות הבינומית

שאלה 2

א. 0.0783 (1) ; 0.0794 (2)

ב. 0.8238

ג. 0.7123

שאלה 1

א. 0.201

ב. 0.3758

ג. התוחלת: 2

סטיית התקן: 1.2649

שאלה 4

0.1611

שאלה 3

א. 0.121

ב. 0.6915

ג. 0.124

שאלה 6

א. 0.0618

ב. 0.0618

ג. 0.8238

שאלה 5

א. התוחלת: 0.1

השונות: 0.00064

ב. 0.5

ג. 0.3446

פרק שביעי - אמידה נקודתית

א. אומדים חסרי הטיה

1. הציון במבחן מסוים של תלמידי כיתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת - μ , נלקח מדגם של 5 ציונים $X_1, \dots, X_5$. שלושה חוקרים הציעו אומדים לתוחלת על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{X_1 + \dots + X_5}{5} \quad \text{חוקר א' הציע:}$$

$$T_2 = \frac{2X_1 - X_3 + X_4}{2} \quad \text{חוקר ב' הציע:}$$

$$T_3 = \frac{2X_1 + X_3}{2} \quad \text{חוקר ג' הציע:}$$

- (א) איזה מן האומדים הוא חסר הטיה?
 (ב) במדגם התקבלו הציונים הבאים: 100, 82, 58, 78, 65. חשבו את האומדנים המתקבלים עבור האומדים חסרי הטיה.
 (ג) איזה מבין שני האומדים חסרי הטיה עדיף? נמקו.

2. כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארה"ב, נבחר מדגם של $2n$ נשים. נסמן את שונות הגובה ב- σ^2 . הוצעו שני אומדים לממוצע המשקל על סמך מדגם זה:

$$T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad T_2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$$

- (א) בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.
 (ב) איזה אומד עדיף? נמקו.
3. $X \approx B(n, p)$ כלומר X הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר P (סיכוי להצלחה בניסיון בודד) במדגם בגודל n .

- (א) פתחו אומד חסר הטיה ל- P .
 (ב) מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסיון בודד.
 (ג) מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$.

4. בתיק מניות שתי מניות . מספר המניות שיעלו ביום מסוים הוא משתנה מקרי התלוי בפרמטר פרמטר לא ידוע θ , $0 \leq \theta \leq 2$.

פונקציית ההסתברות של X – מספר המניות שיעלו ביום מסוים :

$$P(X=0)=1-\frac{\theta}{2} \quad P(X=1)=\frac{\theta}{3} \quad P(X=2)=\frac{\theta}{6}$$

- א. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ שמתבסס על מספר המניות שיעלו ביום מסוים.
 ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ שמתבסס על מספר המניות שעלו ביום במשך שלושה ימים
 X_1, X_2, X_3 (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

5. בקרב המטפלות בת"א מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מיקרי בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ באופן הבא :

הסיכוי שמטפלת תטפל בתינוק אחת בלבד הוא 3θ ,
 הסיכוי שמטפלת תטפל ב2 תינוקות הוא $1-4\theta$,
 הסיכוי שמטפלת תטפל ב 3 תינוקות הוא θ .

במדגם מיקרי של 4 מטפלות מת"א , נמצא כי שתיים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד , אחת מהן בשתיים ואחת השלושה תינוקות.

- א. מצא אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת.
 ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך 4 תצפיות .
 ג. מהו האומדן לפרמטר θ על סמך תוצאות המדגם .
 ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיכוי שלמטפלת בת"א תטפל בתינוק בודד אחד.
 ה. מצאו אומדים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מת"א.

ב. אומדי נראות מכסימלית

1. הסיכוי של שחקן לנצח במשחק הוא p (לא ידוע). השחקן משחק במשחק עד אשר הוא מנצח בפעם הראשונה. נתון שהשחקן ניצח לראשונה רק במשחק השני.
 - (א) חשבו את פונקציית הנראות של p וציירו גרף שלה.
 - (ב) מצאו אומדן נראות מכסימלית עבור p .
 - (ג) מצאו אומדן נראות מכסימלית ל- p אם ביום אחד הוא נאלץ לשחק 4 פעמים וביום אחר הוא נאלץ לשחק 5 פעמים עד אשר ניצח.
2. מספר הלקוחות שנכנסים לחנות מסוימת, מתפלג פואסונית עם תוחלת של λ לקוחות ביום.
 - (א) מצאו אומד נראות מכסימלית ל- λ על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ביום מסוים.
 - (ב) מצאו אומד נראות מכסימלית ל- λ על סמך מספר הלקוחות שנכנסים ב- n ימים מסוימים.
3. הזמן שלוקח לאדם לחכות בתור מתפלג מעריכית עם פרמטר λ . דגמו 4 אנשים מקריים שחיכו בתור ומדדו את זמני ההמתנה שלהם. התוצאות שהתקבלו בדקות הן : 3, 5, 7 ו- 3.
 - (א) פתחו אומד נראות מכסימלית לפרמטר זה על סמך n תצפיות כלשהן.
 - (ב) מהו האומדן לפרמטר ?
4. משך זמן הכנת שיעורי הבית (בשעות) של בני נוער ביום אחד מתפלג אחיד $U(0, \theta)$. כדי לאמוד את θ , נשאלו ביום מסוים מספר בני נוער כמה שעות הם הכינו שיעורי בית באותו יום.
 - (א) אלעד הכין ביום מסוים שיעורי בית במשך שעה שלמה. חשבו את פונקציית הנראות של θ המתבססת על תצפית זו, וציירו את הגרף שלה.
 - (ב) מצאו אומדן נראות מכסימלית ל- θ על סמך התצפית.
 - (ג) משכי הכנת שיעורי בית (שעות) של 3 בני נוער היו 1.5, 3, 1. מצאו אומדן נראות מכסימלית ל- θ על סמך המדגם הזה.
 - (ד) מצאו באופן כללי אומד נראות מכסימלית ל- θ על סמך מדגם של n בני נוער – $X_1, \dots, X_n$.

5. הגובה של אוכלוסייה מסוימת מתפלג נורמאלית עם תוחלת ידועה של 170 ס"מ ושונות σ^2 לא ידועה.

א. מצאו אומד נראות מכסימלית עבור השונות על סמך מדגם $X_1, \dots, X_n$ של n תצפיות מהאוכלוסייה.

ב. נדגמו 5 אנשים בלתי תלויים בעלי הגבהים: 170, 182, 174, 165, 174. מהו האומדן לשונות הגבהים באוכלוסייה?

6. פתחו אומד נראות מכסימלי לפרמטר P בהתפלגות הבינומית על סמך מדגם בגודל n בו X הוא מספר ההצלחות במדגם.

7. X הוא משתנה מקרי בעל פונקצית הצפיפות:

$$f(x) = \begin{cases} 2\theta x e^{-\theta x^2}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

א. מצאו אומד נראות מכסימלית ל- θ על סמך n תצפיות בלתי תלויות: $X_1, \dots, X_n$.

ב. מצאו אומד נראות מכסימלית ל- θ^2 .

8. בכד א 10 כדורים שחורים ו 10 לבנים בכד ב 5 כדורים שחורים ו- 15 לבנים. דוגמים באקראי כדור אך אינך יודע מאיזה כד.

א) מצא אומד נראות מכסימלי לכד שממנו הוצא הכדור על סמך הצבע של הכדור.

ב) מהו האומדן אם הצבע הוא שחור?

9. הזמן שלוקח ליוסי לפתור תשבץ מתפלג מעריכית עם תוחלת לא ידועה. נתנו ליוסי לפתור חמישה תשבצים ובממוצע לקח לו 32 דקות לפתור אותם.

א) מה אומדן הנראות המכסימלי לתוחלת זמן הפתרון של תשבץ על ידי יוסי (אין חובה לפתח).

ב) מה אומדן הנראות המכסימלי לסיכוי שייקח לו לפחות חצי שעה לפתור את התשבץ הבא?

10. מספר הלקוחות הממתינים בתור במוקד טלפוני הוא משתנה מיקרי X בעל התפלגות התלויה בפרמטר θ באופן הבא :

X	0	1	2
$P(X)$	$4\theta^2$	$4\theta - 8\theta^2$	$1 - 4\theta + 4\theta^2$

בחמישה זמנים שונים שנבחרו באקראי נמצאו : 0, 1, 0, 0, 0 לקוחות ממתינים בתור.

(א) מצאו אומדן בשיטת הנראות המכסימלית עבור הפרמטר θ על-סמך המדגם הנתון.

(ב) מצאו אומדן בשיטת הנראות המכסימלית לסיכוי שלא יהיו לקוחות בתור.

11. אדם מחזיק בידו שני מטבעות : מטבע הוגן ומטבע שאינו הוגן שהסיכוי בו לתוצאה עץ הוא 0.2. האדם מטיל את אחד המטבעות פעמיים ומודיע לך כמה פעמים הוא קיבל עץ. אתה צריך לנחש איזה מטבע הוא הטיל : את ההוגן או זה שאינו הוגן.
(א) מצא אומדן בשיטת הנראות המכסימלית לסוג המטבע שהוטל.
(ב) מהו האומדן אם האדם קיבל פעמיים עץ?

12. מעוניינים לאמוד את אחוז המובטלים באוכלוסייה. דוגמים 50 אנשים אקראיים ומתקבל ש 4 מהם מובטלים.

(א) מצא אומדן נראות מכסימלית לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

(ב) מצא אומדן לשיעור העובדים באוכלוסייה.

(ג) מצא אומדן ליחס בין שיעור העובדים לשיעור המובטלים באוכלוסייה.

ג. שאלות מסכמות לאומדים חסרי הטיה ונראות מכסימלית

1. במפעל מייצרים מוצרים בשלוש מכונות שונות ובלתי תלויות. במכונה הראשונה הסיכוי שמוצר יהיה תקין הוא P , במכונה השנייה ההסתברות שמוצר יהיה תקין הוא P^2 ובמכונה השלישית הסיכוי הוא $2P$. דוגמים 20 מוצרים מכל מכונה. נסמן ב- X את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה א'. נסמן ב- Y את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השנייה וב- Z את מספר המוצרים התקינים שיוצרו במכונה השלישית.
 - (א) מהם הערכים האפשריים של הפרמטר P .
 - (ב) מצאו אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר P על סמך X ו- Z .
 - (ג) אם התקבל ש- $Y=3$, $X=6$ מהו אומדן נראות מכסימלית ל- P .
2. מספר תאונות הדרכים בקטע כביש א' מתפלג פואסונית עם קצב של λ תאונות בחודש. מספר תאונות הדרכים בקטע כביש ב' מתפלג פואסונית עם קצב של 2λ תאונות בחודש. הוחלט לספור את מספר התאונות בחודש בכל אחד מקטעי הכביש.
 - (א) נסמן ב- X את מספר התאונות בחודש בקטע א' ו ב- Y בקטע ב'. מצאו אומד נראות מכסימלי לפרמטר λ על סמך X ו- Y .
 - (ב) מצאו אומד נראות מכסימלי לסיכוי שבקטע כביש א' תהיה לפחות תאונה אחת בחודש?
 - (ג) האם האומד שמצאת בסעיף א' הוא חסר הטיה ל- λ ?
3. זמן הייצור של מוצר מסוים בתהליך ייצור מתפלג נורמאלי עם תוחלת ושונות שאינן ידועות.
 - (א) הציעו אומדים חסרי הטיה לתוחלת והשונות של זמן הייצור של המוצר.
 - (ב) הציעו אומדי נראות מכסימלי לתוחלת ולשונות של זמן הייצור של המוצר.
 - (ג) הציעו אומד נראות מכסימלי לריבוע התוחלת של זמן הייצור.
 - (ד) האם האומד מהסעיף הקודם הוא גם חסר הטיה?

4. בקזינו משחק בו 4 תאים ממוספרים מ 1 עד 4. מפעיל המשחק שם כסף באחד מארבעת התאים והאדם המשתתף צריך לנחש באיזה תא הכסף מוחבא. מפעיל הקזינו מודיע שהסיכוי להחביא את הכסף בכל אחד משלושת התאים הראשונים שווה אך לא בהכרח שווה לסיכוי להחביא אותו בתא הרביעי.

יש לאמוד את הסיכוי להחביא את הכסף בתא הראשון: P .

א) מצא את תחום ההגדרה של הפרמטר P .

יעל שיחק את המשחק 3 פעמים וקיבלה שפעם אחת הכסף הוחבא בתא מספר 1 ובפעמים האחרות בתא מספר 2.

ב) מצאו אומדן ל- P על סמך התוצאות הללו בשיטת הנראות המכסימלית.

ג) מצאו אומדן חסר הטיות ל- P מהו האומדן לפי התוצאות של יעל?

ד) מצאו אומדן חסר הטיות ונראות מכסימלית לסיכוי שהכסף יוחבא בתא מספר 4 על סמך התוצאות של יעל.

ד. קריטריון MSE – תוחלת ריבוע הטעות

1. מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת. מוצעים שני אומדים אפשריים ממוצע של שתי תצפיות וממוצע של שלוש תצפיות. לפי קריטריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE) איזה אומדן עדיף? הסבירו.
2. בעיר מסוימת בשוויץ בכל θ דקות רכבת מגיעה לתחנה מסוימת. דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת – X .
א. הצע אומדן חסר הטיה ל- θ על סמך X .
ב. סטטיסטיקאי הציע לאמוד את θ על סמך האומדן: $1.5X$. האם האומדן הנ"ל מוטעה?
ג. איזה אומדן מבין האומדים של סעיף א או ב עדיף?
3. חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחלות במחלת השפעת בחורף (להלן הפרמטר P). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים ומתבונן בסטטיסטי X מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף. הוא מתלבט בין שני אומדים: $T_1 = \frac{X}{5}$ ו- $T_2 = \frac{X+1}{7}$.
א. מי מבין האומדים הללו הוא חסר הטיה?
ב. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.5$?
ג. מי מבין האומדים עדיף אם $P=0.1$?

ה. שיטת המומנטים

1. X מתפלג אחיד רציף מהערך המינימלי a לערך המכסימלי 20 מצא אומדן לערך מינימלי a לפי שיטת המומנטים על סמך n תצפיות מההתפלגות.
2. דוגמים n תצפיות בלתי תלויות מתוך התפלגות נורמאלית אשר תוחלתה היא μ והשונות שלה היא σ^2 מצא אומדים לפרמטרים אלה לפי שיטת המומנטים.
3. אדם מטיל מטבע רגיל n פעמים. יש לאמוד את מספר הפעמים שהוא מטיל את המטבע וזאת על סמך X - מספר העצים שהוא קיבל.
(א) מצא אומדן בשיטת המומנטים ל- n על סמך X בודד.
(ב) מצא אומדן בשיטת המומנטים ל- n על סמך חזרה של m פעמים על אותו תהליך בו מטילים את המטבע ההוגן n פעמים.
(ג) מהו האומדן אם האדם חזר על התהליך שלוש פעמים: פעם אחת קיבל 5 עצים, בפעם השנייה הוא קיבל 4 עצים ובפעם השלישית הוא קיבל 7 עצים.

תשובות סופיות

פרק א' – תשובות לאומדים חסרי הטייה

שאלה 1

ב. $T_2 T_1$

ג. $T_2 = 110 \quad T_1 = 76.6$

ד. T_1

שאלה 4

ד. $\frac{3x}{2}$

ה. $\frac{3\bar{x}}{2}$

שאלה 3

א. $\frac{x}{n}$

ב. $1 - \frac{x}{n}$

ג. x

שאלה 5

א. $1 - \frac{x}{2}$

ג. 0.125

ה. לשונות 0.917

פרק ב' – תשובות לאומדי נראות מכסימליתשאלה 1

ב. 0.5

ג. $\frac{2}{9}$ שאלה 2ה. $\frac{1}{\bar{X}}$ ו. $\frac{2}{9}$ ז. $X_{\max}$ שאלה 3

$$\frac{x}{n}$$

שאלה 4

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - 170)^2}{n}$$

א. 40.2

שאלה 5

ב. כד א

שאלה 6

$$\frac{n}{\sum X_i^2}$$

$$\left(\frac{n}{\sum X_i^2}\right)^2$$

שאלה 7

א. 0.45

ב. 0.81

שאלה 8

א. 0.08

ב. 0.92

ג. 11.5

שאלה 9

א. 32

ב. 0.3916

שאלה 10

ב. הוגן

פרק ג' – תשובות לשאלות המסכמות לאומדים חסרי הטיה ונראות מכסימלית.

שאלה 1

א. $0.5 \leq P \leq 1$

ג. 0.345

שאלה 4

א. $0 \leq P \leq \frac{1}{3}$

ב. $\frac{1}{3}$

ג. 0.389

שאלה 2

א. $\frac{x+y}{3}$

ג. כן

פרק ד' – תשובות ל-MSE

שאלה 1

זה עם השלוש תצפיות

שאלה 2

א. $2x$

ג. סעיף ב

שאלה 3

א. T_1

ב. T_2

ג. T_1

פרק ה' – תשובות לשיטת המומנטים

שאלה 1

$2(\bar{x} - 10)$

שאלה 3

א. $2x$

ב. $2\bar{x}$

ג. $10\frac{2}{3}$

נספח : אומדי נראות מכסימלית ואומדים חסרי הטיה בהתפלגויות השונות:

מודל בינומי-

נתון מדגם של משתנה בינומי $X \sim B(n, p)$.

א.נ.מ עבור p הוא $\hat{p} = \frac{X}{n}$ והוא גם א.ח.ה.

מודל אחיד (בדיד)

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים אחידים $X_i \sim U(1, N)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור N הוא $\hat{N} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ ואינו א.ח.ה.

מודל פואסוני

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים פואסוניים $X_i \sim P(\lambda)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור λ הוא $\hat{\lambda} = \bar{X}$ וגם א.ח.ה.

מודל גיאומטרי

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים גיאומטריים $X_i \sim G(p)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור p הוא $\hat{p} = \frac{1}{\bar{X}}$ אינו א.ח.ה. וא.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{p}$ הוא $\bar{X}$ והנו א.ח.ה.

מודל נורמלי

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים נורמליים $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור μ הוא $\hat{\mu} = \bar{X}$

כאשר μ ידוע א.נ.מ עבור σ^2 הוא $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ (אומד חסר-הטייה)

כאשר μ לא-ידוע א.נ.מ עבור σ^2 הוא $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ (אומד מוטעה!!!)

אומד חסר-הטיה עבור σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \text{ כאשר } \mu \text{ ידוע}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ כאשר } \mu \text{ לא-ידוע}$$

מודל מעריכי

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים מעריכיים $X_i \sim \exp(\theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא $\hat{\theta} = \frac{1}{\bar{X}}$ -מהווה אומד מוטעה. וא.נ.מ עבור התוחלת $\frac{1}{\theta}$ הוא $\bar{X}$ א.ח.ה.

מודל אחיד (רציף)

נתון מדגם $X_1, X_2, \dots, X_n$ של משתנים אחידים $X_i \sim U(0, \theta)$ בלתי-תלויים בזוגות.

א.נ.מ עבור θ הוא $\hat{\theta} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ אינו א.ח.ה

בכל התפלגות:

א.ח.ה עבור μ הוא $\hat{\mu} = \bar{X}$

אומד חסר-הטיה עבור σ^2 :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \text{ כאשר } \mu \text{ ידוע}$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ כאשר } \mu \text{ לא-ידוע}$$

פרק שמיני - רווחי סמך

א. אמידה נקודתית (אומדים חסרי הטיה)

1. נדגמו עשרה מתגייסים לצה"ל. גובהם נמדד בס"מ. להלן התוצאות שהתקבלו :
168, 184, 192, 171, 180, 177, 187, 168, 177 ו-175.
א. מצא אומדן חסר הטיה לגובה הממוצע של מתגייסי צה"ל.
ב. מצא אומדן חסר הטיה לשונות הגבהים של מתגייסי צה"ל.
ג. מצא אומדן חסר הטיה לפרופורציות המתגייסים בגובה של לפחות 180 ס"מ.

2. נדגמו 20 שכירים באקראי. עבור כל שכיר נמדד השכר באלפי שקלים. להלן

$$\text{התוצאות שהתקבלו : } \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 1502.2 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 162$$

- א. אמדו את השכר הממוצע של השכירים במשק.
- ב. אמדו את סטיית התקן של שכר השכירים במשק.

ב. רווח סמך לתוחלת

ב.1. שונות האוכלוסיה ידועה

1. מעוניינים לאמוד את ממוצע אורך החיים של מכשיר. מנתוני היצרן ידוע שאורך החיים מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן של 20 שעות. נדגמו 25 מכשירים ונמצא כי ממוצע אורך החיים שלהם היה 230 שעות.
א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 90% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאורך החיים הממוצע של מכשיר.
ג. הסבר כיצד ומדוע השתנה רווח הסמך.
ד. מהי טעות התקן של האומד?

2. בנו רווח סמך לממוצע הציונים של מבחן אינטליגנציה. ידוע שסטיית התקן היא 15 והמדגם מתבסס על 100 תצפיות. רווח הסמך שהתקבל הוא (99,105). שחזרו את :
א. ממוצע המדגם.
ב. שגיאת האמידה המקסימאלית.
ג. רמת הסמך.

3. מעוניינים לאמוד את המשקל הממוצע של רכיב מסוים. ידוע שהמשקל מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן 12.
- א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת אם מעוניינים ששגיאת האמידה המקסימאלית תהיה 2 גרם ברמת סמך של 95%.
- ב. ביצעו מדגם שאת גודלו מצאתם בסעיף א והתקבל ממוצע של 23 גרם. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% למשקל הממוצע של הרכיב.
4. זמן החלמה מאנגינה מתפלג עם סטיית תקן של יומיים. חברת תרופות מעוניינת לחקור אנטיביוטיקה חדשה שהיא פיתחה. במחקר השתתפו 60 אנשים שחלו באנגינה וקיבלו את האנטיביוטיקה החדשה. בממוצע הם החלימו לאחר 4 ימים.
- א. בנו רווח סמך לתוחלת זמן ההחלמה תחת האנטיביוטיקה החדשה ברמת סמך של 90%.
- ב. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היה תקציב להגדלת גודל המדגם פי 4? הסבירו.
- ג. מה היה קורה לאורך רווח הסמך אם היינו בונים את רווח הסמך ברמת סמך גדולה יותר? הסבירו.
5. משתנה מקרי מתפלג נורמאלי עם סטיית תקן ידועה 12. מה צריך להיות גודל המדגם כדי לבנות רווח סמך ברמת סמך של 98% שאורכו לא יעלה על 2?

2.ב. שונות האוכלוסיה לא ידועה

1. זמן התגובה מתפלג נורמאלי. במטרה לאמוד את תוחלת זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לממוצע זמן התגובה באוכלוסיה.
2. ציוני מבחן אינטליגנציה מתפלגים נורמאליים. נדגמו 25 מבחנים והתקבל ממוצע ציונים 102 ו סטיית תקן מדגמית 13.
- א. בנו רווח סמך לממוצע הציונים באוכלוסיה ברמת ביטחון של 95%.
- ב. חזרו על סעיף א' עם סטיית התקן אינה סטיית התקן האמיתית של כלל הנבחנים.
- ג. הסבירו את ההבדלים בין שני הסעיפים הנ"ל.
3. נשקלו 60 תינוקות אשר נולדו בשבוע ה-40 של ההיריון. המשקל נמדד בקילוגרמים.
- להלן התוצאות שהתקבלו: $\sum_{i=1}^{60} X_i = 195$, $\sum_{i=1}^{60} X_i^2 = 643.19$. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לתוחלת משקל תינוק ביום היוולדו.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

ג. רווח סמך לפרופורציה

1. במטרה לאמוד את אחוז המובטלים במשק נדגמו 200 אזרחים. מתוכם התקבל ש 24 היו מובטלים.
 - א. בנו רווח סמך לאחוז המובטלים באוכלוסיה ברמת סמך של 95%.
 - ב. מהו האומד לטעות התקן?
 - ג. מה יקרה לאורך רווח הסמך אם הוא יבנה ברמת סמך של 99%?
2. נבנה רווח סמך לאחוז בעלי רישיון נהיגה באוכלוסיה (69%, 79%) הוא התבסס על מדגם שכלל 400 נשאלים.
 - א. לכמה נשאלים לא היה רישיון נהיגה במדגם?
 - ב. באיזו רמת סמך נבנה רווח הסמך?
3. מעוניינים לאמוד את הרייטינג של תוכנית מסוימת. האמידה צריכה להתבצע ברמת סמך של 90% ועם שגיאת אמידה שלא תעלה על 4%.
 - א. מהו גודל המדגם המינימאלי שיש לקחת?
 - ב. חזור לסעיף א' אם ידוע שאחוז הרייטינג של התוכנית לא אמור לעלות על 20%.
4. במדגם של 300 נשים בגילאי 35-40 נמצא ש-140 היו נשואות, 80 היו גרושות, 60 רווקות והיתר אלמנות.
 - א. מצאו רווח סמך ברמה של 90% לאחוז הגרושות באוכלוסיה.
 - ב. מצאו רווח סמך ברמה של 99% לאחוז הלא נשואות באוכלוסיה.
5. הממשלה אומדת מדי חודש את אחוז התמיכה בה. מהו גודל המדגם אשר יש לקחת אם דורשים שהאומדן לא יסטה מהאחוז האמיתי באוכלוסיה ביותר מ-3%, וזאת בביטחון של 95%?

ד. רווח סמך לשונות וסטיית תקן

1. זמן התגובה מתפלג נורמאלי. במטרה לאמוד את תוחלת זמן התגובה נדגמו 4 תצפיות. להלן התוצאות בשניות: 4.7, 5.2, 4.6, 5.3. בנו רווח סמך, ברמת סמך של 95% לשונות זמן התגובה באוכלוסיה.
2. נדגמו 20 ימים אקראיים מחודשי יולי-אוגוסט ונמדדה בהם הטמפ' במעלות צלזיוס בת"א. במדגם התקבל טמפ' ממוצעת 30.8 וסטיית תקן מדגמית 1.1. בהנחה והטמפ' מתפלגת נורמאלי:
 - א. בנו רווח סמך לתוחלת הטמפ' בחודשים אלה בצהרי ת"א ברמת סמך של 95%.
 - ב. בנו רווח סמך לסטיית התקן של הטמפ' בחודשים אלה בצהרי ת"א ברמת סמך של 95%.

ה. רווח סמך להפרשים

ה.1. הפרשי פרופורציות

1. במטרה להשוות בין שתי תרופות נדגמו 200 איש שלקחו תרופה x. מתוכם 180 טענו שהתרופה עזרה להם. כמו כן נלקחו 300 איש שלקחו את תרופה y. מתוכם 150 טענו שהתרופה עזרה להם. בנו רווח סמך להפרש אחוזי ההצלחה של התרופות ברמת סמך של 95%. מה ניתן לומר על סמך רווח הסמך על ההבדלים בין התרופות?
2. מתוך 150 נשים שנדגמו באקראי 30% תמכו בהצעת חוק מסוימת. מתוך 200 גברים שנדגמו באקראי 25% תמכו בהצעת החוק.
 - א. בנו רווח סמך לפער בין אחוזי התמיכה של הנשים לעומת הגברים ברמת סמך של 96%.
 - ב. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% לאחוז התמיכה בהצעת החוק.

ה.2. הפרשי תוחלות (שונות ידועות)

1. מעוניינים לבדוק האם קיים הבדל בין ממוצע ציוני הפסיכומטרי של חיילים לממוצע ציוני הפסיכומטרי של תלמידי תיכון. ידוע שציוני הפסיכומטרי מתפלגים נורמאלית עם סטיית תקן 100. במדגם של 16 נבחנים חיילים התקבל ממוצע 543. במדגם של 20 תלמידי תיכון התקבל ממוצע 508. בנו רווח סמך לפער תוחלות הציונים בין חיילים לתלמידי תיכון ברמת סמך של 90%. מה ניתן להסיק מרווח סמך זה?
2. בנק מתלבט האם לפתוח סניף באזור A או באזור B. לצורך פתרון נניח שסטית התקן של המשכורת באזור A היא 1200 ובאזור B 1500. הבנק דגם 50 אנשים מאזור A, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,800 ₪. כמו כן נדגמו 40 אנשים מאזור B, המשכורת הממוצעת שהתקבלה במדגם היא 6,600 ₪.
 - א. בנו רווח סמך ברמת סמך של 95% להפרש הממוצעים של המשכורות בשני האזורים. האם על סמך רווח הסמך ניתן להמליץ לבנק היכן לפתוח את הסניף. אם כן, היכן?
 - ב. בנו רווח סמך לתוחלת המשכורת באזור A ברמת סמך של 95%.

תשובות סופיות לאמידה נקודתית ורווחי סמך

פרק א' - אמידה נקודתית

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
177.9	א. 8.1
64.1	ב. 3.16
0.4	

פרק ב' - רווח סמך לתוחלת

שונות האוכלוסיה ידועה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
$223.42 < \mu < 236.58$	א. 102
$222.16 < \mu < 237.84$	ב. 3
ד. 4	ג. 0.9544
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
ג. 139	א. $3.58 < \mu < 4.42$
ד. $21 < \mu < 25$	ב. יקטן פי 2
	ג. גדל
<u>שאלה 5</u>	
780	

שונות האוכלוסיה לא ידועה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
$4.39 < \mu < 5.51$	א. $96.63 < \mu < 107.37$
	ב. $96.90 < \mu < 107.10$
<u>שאלה 3</u>	
$3.149 < \mu < 3.351$	

פרק ג' – רווח סמך לפרופורציה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
7.5% < p < 16.5%	א. 104
2.29%	ב. 0.9774
יגדל	
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
423	22.5% < p < 30.9%
271	45.91% < p < 60.72%
<u>שאלה 5</u>	
1068	

פרק ד' – רווח סמך לשונות וסטיית תקן

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
$0.039 < \sigma^2 < 1.708$	א. $30.285 < \mu < 31.315$
	ב. $0.837 < \sigma < 1.607$

פרק ה' – רווח סמך להפרשים**הפרשי פרופורציות**

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
(33% , 47%)	א. (4.93% , 14.93%)
	ב. (22.5% , 31.8%)

הפרשי תוחלות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
(-20,90)	א. (-372,772)
	ב. (6467,7133)

פרק תשיעי - בדיקת השערות - מבחנים פרמטרים

א. בדיקת השערות על תוחלת

שונות האוכלוסיה ידועה

1. ממוצע הציונים בבחינת הבגרות באנגלית הנו 72 עם סטיית תקן 15 נקודות. מורה טוען שפיתח שיטת לימוד חדשה שתעלה את ממוצע הציונים. משרד החינוך החליט לתת למורה 36 תלמידים אקראיים. ממוצע הציונים של אותם תלמידים לאחר שלמדו בשיטתו היה 75.5. בהנחה שגם בשיטתו סטיית התקן תהייה 15 מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

2. לפי הצהרת היצרן של חברת משקאות מסוימת נפח הנוזל בבקבוק מתפלג נורמלית עם תוחלת 500 סמ"ק וסטיית תקן 20 סמ"ק. אגודת הצרכנים מתלוננת על הפחתת נפח המשקה בבקבוק מהכמות המוצהרת. במדגם שעשתה אגודת הצרכנים התקבל נפח ממוצע של 492 סמ"ק במדגם בגודל 25.

א. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 2.5%?

ב. האם ניתן לדעת מה תהיה המסקנה עבור רמת מובהקות הגבוהה מ-5%?

3. מהנדס האיכות מעוניין לבדוק אם מכונה מכוילת (מאופסת). המכונה כוונה לחתוך מוטות באורך 50 ס"מ. לפי נתוני היצרן סטיית התקן בחיתוך המוטות היא 0.5 ס"מ. במדגם של 50 מוטות התקבל ממוצע אורך המוט 50.93 ס"מ. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%?

שונות האוכלוסיה לא ידועה

1. משך זמן ההחלמה בלקיחת אנטיביוטיקה מסוימת הוא 120 שעות בממוצע עם סטיית תקן לא ידועה. מעוניינים לבדוק האם אנטיביוטיקה אחרת מקטינה את משך זמן ההחלמה. במדגם של 5 חולים שלקחו את האנטיביוטיקה האחרת התקבלו זמני ההחלמה הבאים: 90, 95, 100, 80, 125 שעות. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%. מהי ההנחה הדרושה לצורך הפתרון.

2. ציוני מבחן IQ מתפלגים נורמלית בארצות הברית עם ממוצע 100. במדגם על 20 נבחנים ישראלים התקבלו התוצאות הבאות.

$$\bar{x} = 102$$

$$\hat{S} = 16$$

האם בישראל ממוצע הציונים הוא כמו בארצות הברית? בדקו ברמת מובהקות של 2% הניחו הנחות אם יש צורך.

ב. בדיקת השערות על פרופורצייה

1. במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. ברמת מובהקות של 5% האם השנה הקשו על תנאי הקבלה?
2. במדגם של 300 אזרחים 57% מתנגדים להצעת חוק מסוימת. לאור נתונים אלה האם רוב האזרחים מתנגדים להצעת החוק? בדקו ברמת מובהקות של 10%.
3. הטילו מטבע 50 פעמים וקיבלו 28 פעמים עץ. האם המטבע הוגן ברמת מובהקות של 5%?

ג. בדיקת השערות להפרש פרופורציות

1. במדגם של 200 גברים. 8% מהם היו מובטלים. המדגם של 180 נשים 10% מהן היו מובטלות האם קיים הבדל מובהק בין פרופורציית המובטלים לפרופורציית המובטלות. בדוק ברמת מובהקות של 5%.
2. אחוז בעלי רישיון נהיגה בקרב האוכלוסייה הבוגרת הינו 60%. במדגם של 300 בוגרים מתל אביב 204 היו בעלי רישיון נהיגה. במדגם של 220 בוגרים מירושלים 100 היו בעלי רישיון נהיגה.
 - א. ברמת מובהקות של 5% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון בתל אביב גבוה מהאחוז הארצי?
 - ב. ברמת מובהקות של 10% האם תקבלו את הטענה שאחוז בעלי הרישיון נהיגה בתל אביב גבוה מאחוז בעלי רישיון הנהיגה בירושלים?

ד. בדיקת השערות להפרש תוחלות במדגמים בלתי תלויים

שוניות האוכלוסייה ידועות

1. ציוני פסיכומטרי מתפלגים נורמלית עם סטיית תקן 100. מכון ללימוד פסיכומטרי טוען שהוא יכול לשפר את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. במדגם של 20 נבחנים שניגשו למבחן ללא הכנה במכון התקבל ממוצע 508. במדגם של 25 נבחנים שעברו הכנה במכון התקבל ממוצע ציונים 561. מה מסקנתכם ברמת מובהקות של 5%.

2. במדגם אקראי של 20 ימים נבדקה התפוקה של מפעל ביום. התפוקה הממוצעת הייתה של 340 מוצרים ליום. במדגם אקראי של 20 ימים אחרים נבדקה התפוקה של המפעל בלילה והתפוקה הממוצעת הייתה 295. לצורך פתרון נניח שסטיית התקן של התפוקה ביום היא 40 מוצרים ובלילה 30 מוצרים. האם התפוקה הממוצעת היומית גבוהה מהתפוקה הממוצעת הלילית בדקו ברמת מובהקות של 10%. מה ההנחה הדרושה לצורך פתרון?

שוניות האוכלוסייה לא ידועות (בהנחה שהן שוות)

1. במדגם של 10 ישראלים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$\begin{aligned}n_1 &= 10 \\ \sum x_i &= 1020 \\ \sum x_i^2 &= 105120\end{aligned}$$

במדגם של 14 אמריקאים שנבחנו במבחן ה-IQ נתקבלו התוצאות הבאות:

$$\begin{aligned}n_1 &= 14 \\ \sum x_i &= 1386 \\ \sum x_i^2 &= 138644\end{aligned}$$

בדקו האם קיים הבדל בממוצע הציונים בבחינת ה-IQ בין ישראל לארה"ב. רשמו את כל ההנחות הדרושות. ברמת מובהקות של 5%.

2. להלן תוצאות מדגם הבדק אורך חיים של נורות מסוג W60 ומסוג W100. אורך החיים נמדד בשעות.

1-100W	2-60W	הקבוצה
956	1007	$\bar{x}$
72	80	$\hat{S}$
15	13	n

בדקו ברמת מובהקות של 5% האם נורות מסוג W60 דולקות בממוצע יותר מאשר נורות מסוג W100. רשמו את כל ההנחות הדרושות לפיתרון.

ה. בדיקת השערות על מדגמים מזווגים

1. במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. להלן התוצאות:

המדינה	X	Y
ארה"ב	1.5	1.4
קנדה	2.1	2
הולנד	2.2	1.9
פולין	3	3.1
מצרים	3.5	3.2
סין	3.2	3.2
יפן	4.2	4.2

בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בכל חברה, בדקו ברמת מובהקות של 5% האם קיים הבדל בין החברות מבחינת המחירים בממוצע.

2. מכון המכין לפסיכומטרי טוען שהוא מעלה את ממוצע הציונים ביותר מ-30 נקודות. 8 נבחנים נבדקו לפני ואחרי שהם למדו במכון. להלן התוצאות שהתקבלו:

לפני	590	500	390	670	640	420	470	506
אחרי	580	520	510	680	610	430	540	570

מה מסקנתכם ברמת מובהקות 5%? הניחו שציוני פסיכומטרי מתפלג נורמלית.

ו. בדיקת השערות על שונות

1. זמן ההחלמה ממחלה מסוימת כאשר משתמשים בטיפול מסוים מתפלג נורמלית עם סטיית תקן של 80 שעות. תרופה חדשה נוסתה על 5 חולים. זמני ההחלמה שלהם בשעות היו 38,72,90,110,50. ברמת מובהקות של 5% בדקו האם סטיית התקן של זמן החלמה של התרופה החדשה נמוכה מהתרופה המקורית.

2. הגובה של אוכלוסייה מסוימת נחשב כמתפלג נורמלית על ממוצע של 174 ס"מ וסטיית תקן 12. במדגם של 20 אנשים מהאוכלוסייה התקבל ממוצע 171 וסטיית תקן מדגמית 23.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בשונות הגבהים באוכלוסייה.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם חל שינוי בתוחלת הגבהים באוכלוסייה.

ז. בדיקת השערות על שתי שונויות

1. מעוניינים להשוות בין נשים וגברים מבחינת השונות בזמנים שלהם לבצע משימה מסוימת. במדגם של 10 גברים התקבלו התוצאות הבאות לגבי זמני ביצוע המשימה:

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 204$$

במדגם של 13 נשים התקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 200$$

בדקו ברמת מובהקות של 2% האם קיים הבדל בין השונויות? מה יש להניח?

2. ציוני בחינת הבגרות במתמטיקה מתפלגים נורמלית עם שונות 150. במדגם של 16 נבחנים מתל אביב התקבלה שונות חסרת הטיה- 190. במדגם של 25 ירושלמים התקבלה שונות חסרת הטיה- 118.

א. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות הציונים במתמטיקה בקרב נבחני תל אביב גבוהה מהשונות בכלל הארץ.

ב. בדקו ברמת מובהקות של 5% האם שונות ציונים במתמטיקה בקרב תלמידי תל אביב גבוהה מאשר בקרב תלמידי ירושלים.

ח. הגישה המעשית – מובהקות התוצאה – P-VALUE – $\alpha_{\min}$

1. השכר הממוצע במשק בשנת 2006 היה 7800 ₪ עם סטיית תקן 2000 ₪. במדגם כיום של מאה עובדים התקבל שכר ממוצע 7500 ₪. מטרת המחקר היא לבדוק האם קיום חלה שחיקה בשכר כיום. עבור אילו רמות מובהקות שיבחר החוקר יוחלט לקבל את טענת המחקר?

$$2. \text{ לפיכך השערות של מחקר : } H_0 : \mu = 70$$

$$H_1 : \mu > 70$$

המשתנה הנחקר מתפלג נורמלית עם סטיית תקן 20. במדגם מאותה אוכלוסייה התקבלו התוצאות הבאות :

$$n = 100$$

$$\bar{x} = 74$$

מהי האלפא המנימלית לדחיית השערת האפס?

3. במשך שנים אחוז המועמדים שהתקבל לפקולטה מסוימת היה 25%. השנה מתוך מדגם של 120 מועמדים התקבלו 22. רוצים לבדוק האם השנה הקשו על תנאי הקבלה.

א. מהי מובהקות התוצאה?

ב. מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 1% וברמת מובהקות של 5%?

4. במטרה לבדוק האם מטבע הוא הוגן הוא הוטל 100 פעמים. התקבל 58 פעמים "עץ". האם יתכן שחוקר אחד יחליט שהמטבע הוגן ואחר יחליט שהמטבע לא הוגן?

5. הגובה של מתגייסים לצה"ל מתפלג נורמלית. במדגם של 25 מתגייסים מדדו את הגבהים שלהם בס"מ והתקבלו התוצאות הבאות :

$$\bar{x} = 176.2$$

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 2832$$

מטרת המחקר היא לבדוק האם תוחלת הגבהים של המתגייסים גבוהה מ-174 ס"מ באופן מובהק. מהי בקרוב מובהקות התוצאה ועל פיה מה תהיה המסקנה ברמת מובהקות של 6% ?

ט. טעויות ועוצמה

1. לפי נתוני משרד הפנים בשנת 1980 למשפחה ממוצעת היה 2.3 ילדים למשפחה עם סטיית תקן 0.4. מעוניינים לבדוק אם כיום ממוצע מספר הילדים למשפחה קטן יותר. לצורך כך הוחלט לדגום 121 משפחות. במדגם התקבל ממוצע 2.17 ילדים למשפחה.
א. רשמו כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי ברמת מובהקות של 5%.
ב. בהמשך לסעיף א מה תהיה המסקנה ומהי הטעות האפשרית במסקנה?
ג. אם באמת ממוצע מספר הילדים במשפחה פחת לכדי 2.1 מהי העוצמה של הכלל מסעיף א?

2. להלן נתונים על תהליך של בדיקת השערות על תוחלת:

$$H_0 : \mu = 200$$

$$H_1 : \mu \neq 200$$

$$\sigma = 30$$

$$n = 225$$

- א. רשום כלל הכרעה במונחי ממוצע מדגם קריטי וברמת מובהקות של 10%.
ב. בהמשך לסעיף א מהי העוצמה אם התוחלת שווה ל-195?
ג. הסבר ללא חישוב איך העוצמה תשתנה אם רמת המובהקות תהיה 5%?

3. אחוז הסובלים מתופעות הלוואי מתרופה מסוימת הוא 15%. חברת תרופות טוענת שפיתחה תרופה שאמורה לצמצם את אחוז הסובלים מתופעות לוואי. לצורך בדיקת הטענה הוחלט לבצע מחקר שיכלול 120 חולים שיקבלו את התרופה הנבדקת.
א. נניח שהתרופה נבדקת אכן מורידה את פרופורציות הסובלים מתופעות הלוואי ל-10%. מהי עצמת המבחן עבור רמת מובהקות של 5%?
ב. אם המדגם יתבסס על יותר תצפיות כיצד הדבר ישנה את התשובה לשל סעיף א'?

4. בעיר מסוימת היו 20% אקדמאים. בעקבות פתיחת מכללה בעיר לפני כמה שנים מעוניינים לבדוק האם אחוז האקדמאים גדל. מעוניינים שהמחקר יכלול 200 אנשים והוא יהיה ברמת מובהקות של 5%. חשבו את הסיכוי לבצע טעות מסוג שני בהנחה והיום יש 28% אקדמאים.

5. מפעל לייצור צינורות מייצר צינור שקוטרו מתפלג נורמלית עם תוחלת של 50 מ"מ וסטית תקן של 6 מ"מ. במחלקת ביקורת האיכות דוגמים בכל יום 81 צינורות ומודדים את קוטרם, בכדי לבדוק, בעזרת מבחן סטטיסטי, האם מכונת הייצור מכוילת כנדרש או שקוטר הצינורות קטן מהדרוש.
- א. רשום את ההשערות ואת ככל ההכרעה ברמת מובהקות של 5% .
- ב. אם ביום כלשהו מכונת הייצור התקלקלה והיא מייצרת את הצינורות בקוטר שתוחלתו 48 מ"מ בלבד (סטית התקן לא השתנתה), מה ההסתברות שהתקלה לא תתגלה בביקורת האיכות? כיצד נקראת הסתברות זו?
- ג. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם רמת המובהקות תגדל.
- ד. הסבר ללא חישוב כיצד התשובה לסעיף ב תשתנה אם התוחלת האמיתית היא 47 ולא 48 מ"מ.

י. הקשר בין רווח סמך לבדיקת השערות

1. חוקר מעוניין לבדוק השפעת דיאטה חדשה על רמת הסוכר בדם. ידוע כי מספר מיליגרם הסוכר בסמ"ק דם הוא משתנה מקרי שמתפלג נורמלית עם סטיית תקן 10 מ"ג. נלקח מדגם של 100 נבדקים שניזונו מדיאטה זו. נמצא כי ממוצע מספר המיליגרם סוכר היא 112.6 מ"ג לסמ"ק.

א. בנה רווח סמך ברמת סמך 95% לתוחלת רמת הסוכר בדם אצל הניזונים מדיאטה זו.

ב. ידוע שתוחלת רמת הסוכר בדם באוכלוסיה היא 113 מ"ג לסמ"ק. האם לדעתך ניתן להסיק על סמך תוצאת סעיף א שהדיאטה משפיעה על רמת הסוכר בדם? הסבר.

2. חוקר רצה לבדוק את ההשערות הבאות:

$$H_0 : \mu = 90$$

$$H_1 : \mu \neq 90$$

החוקר בנה רווח סמך לתוחלת ברמת סמך של 95% וקיבל את רווח הסמך הבא: (87,97). אם החוקר מעוניין לבצע בדיקת השערות ברמת מובהקות של 1% האם ניתן להגיע למסקנה ע"ס רווח הסמך? נמקו.

3. במטרה לבדוק האם קיים הבדל בין חברת X לחברת Y מבחינת ממוצע המחירים לשיחות בינ"ל. נגדמו באקראי 7 מדינות ועבור כל מדינה נבדקה עלות דקת שיחה. בהנחה והמחירים מתפלגים נורמלית בנו רווח סמך לממוצע ההפרשים שיבדוק את השערות המחקר ברמת מובהקות של 5%

להלן התוצאות:

המדינה	X	Y
ארה"ב	1.5	1.4
קנדה	2.1	2
הולנד	2.2	1.9
פולין	3	3.1
מצרים	3.5	3.2
סין	3.2	3.2
יפן	4.2	4.2

תשובות סופיות לבדיקת השערות

פרק א' – בדיקת השערות לתוחלת

שונות האוכלוסיה ידועה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	נדחה H_0
<u>שאלה 3</u>	
נדחה H_0	

שונות האוכלוסיה לא ידועה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נדחה H_0	נקבל H_0

פרק ב' – בדיקת השערות על פרופורציה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נדחה H_0	נדחה H_0
<u>שאלה 3</u>	
נקבל H_0	

פרק ג' – בדיקת השערות להפרש פרופורציות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	א. נדחה H_0
	ב. נדחה H_0

פרק ד' – בדיקת השערות להפרש תוחלות**שונות האוכלוסייה ידועות**

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	נדחה H_0

שונות האוכלוסייה לא ידועות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	נדחה H_0

פרק ה' – בדיקת השערות במדגמים מזווגים

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	נקבל H_0

פרק ו' – בדיקת השערות על שונות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נדחה H_0	א. נדחה H_0

פרק ז' בדיקת השערות לשתי שונות

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
נקבל H_0	א. נקבל H_0
	ב. נקבל H_0

פרק ח' – מובהקות התוצאה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
מעל 0.0668	0.0228
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 5</u>
א. 0.0455	נקבל H_0

פרק ט' – טעויות ועוצמה

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 2</u>
ב. נדחה H_0	ב. 0.8051
ג. 1	
<u>שאלה 3</u>	<u>שאלה 4</u>
א. 0.4404	0.1446

פרק י' – הקשר בין בדיקת השערות לרווח סמך

<u>שאלה 1</u>	<u>שאלה 3</u>
(110.64, 114.56)	(-0.241, 0.041)