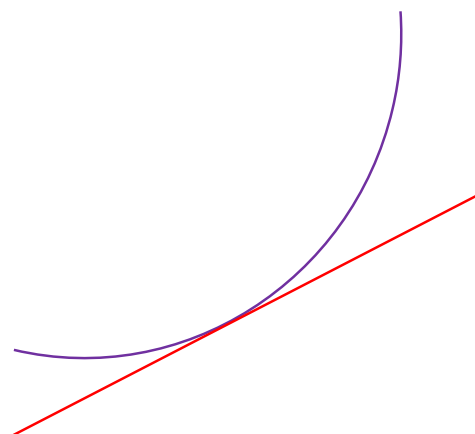


מתמטיקה א'
המכללה האקדמית נתניה
מנהל עסקים



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת המתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במתמטיקה א' והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva1.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תוכן

פרק 1 - חישוב נגזרת של פונקציה.....	
פרק 2 - בעיות משיקים.....	
פרק 3 - חקירת פונקציה.....	
פרק 4 - חקירת פונקציה ("שאלות מסביב" והוכחת אי שוויונים).....	
פרק 5 - בעיות מינימום ומקסימום כלכליות.....	
פרק 6 - בעיות מינימום ומקסימום כלכליות.....	
פרק 7 - קיצון של פונקציה של שני משתנים (רגיל).....	
פרק 8 – תכנון ליניארי.....	
פרק 9 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות.....	

תרגילים – פרק 1

גזירה של פונקציה

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 29-27 גזור פעם אחת) :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

פתרונות – פרק 1

$$\begin{aligned}
 & f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2) \\
 & f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1) \\
 & f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4) \\
 & f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3) \\
 & f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6) \\
 & f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5) \\
 & f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8) \\
 & f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7) \\
 & f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10) \\
 & f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9) \\
 & f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12) \\
 & f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11) \\
 & f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13) \\
 & f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad (15) \\
 & f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 + 2x}{x^4} \right) \quad (14) \\
 & f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16) \\
 & f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17) \\
 & f'(x) = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}} \quad (18) \\
 & f'(x) = \frac{2 - 5x}{3 \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1 + 5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19) \\
 & f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}, \quad f''(x) = \frac{2x + 3}{2(-x^2 - 3x - 2)^{3/2}} \quad (25)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (26)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (27)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (29)$$

תרגילים – פרק 2

בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)

(1) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(4) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את a ו- c .

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

(6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.

(7) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3, 4)$.

(8) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.

(9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.

א) $y = x^2 - 2x + 1$ ב) $y = \sqrt{x}$ בנקודה $(-3, 1)$

(10) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:

$$y = x^2 \text{ ו- } y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$$

(11) מצא את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.

(12) מצא את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.

(13) הוכח שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

פתרונות – פרק 2

- (1) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.
- (2) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.
- (3) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.
- (4) נקודת ההשקה היא $(0, \frac{1}{2})$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.
- (5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.
- (6) משוואת המשיק היא $y = 1$.
- (7) משוואת המשיק היא $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.
- (8) $k = 1.5$, נקודת ההשקה $(1,1)$.
- (9) א) $(0,1)$, $y = -2x + 1$, $(4,9)$, $y = 6x - 15$.
- ב) המשיק: $(9,3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.
- (10) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$.
- (11) 71.57°
- (12) 71.56°

תרגילים – פרק 3

חקירת פונקציה

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים*, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות**, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול***, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3) \quad f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2) \quad f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5) \quad f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9) \quad f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8) \quad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11) \quad f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (15) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14) \quad f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17) \quad f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21) \quad f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (27) \quad f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (26) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3 \quad (30) \quad f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \quad f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

$(0 \leq x \leq 2\pi)$ $(0 \leq x \leq \pi)$

הערות:

* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר x . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

** בתרגילים 1, 2, 28, 29, 30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).

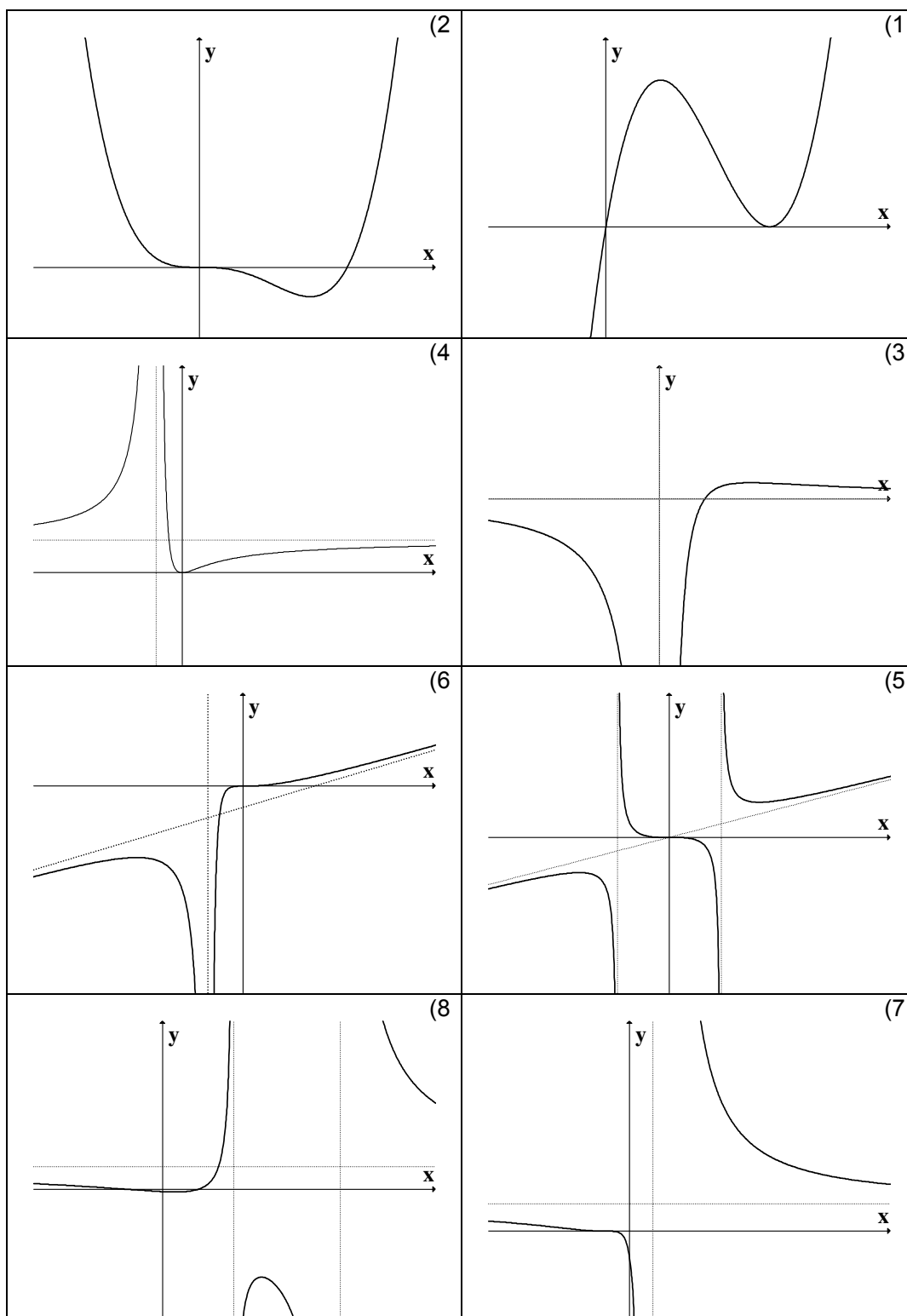
*** בתרגילים 9, 17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

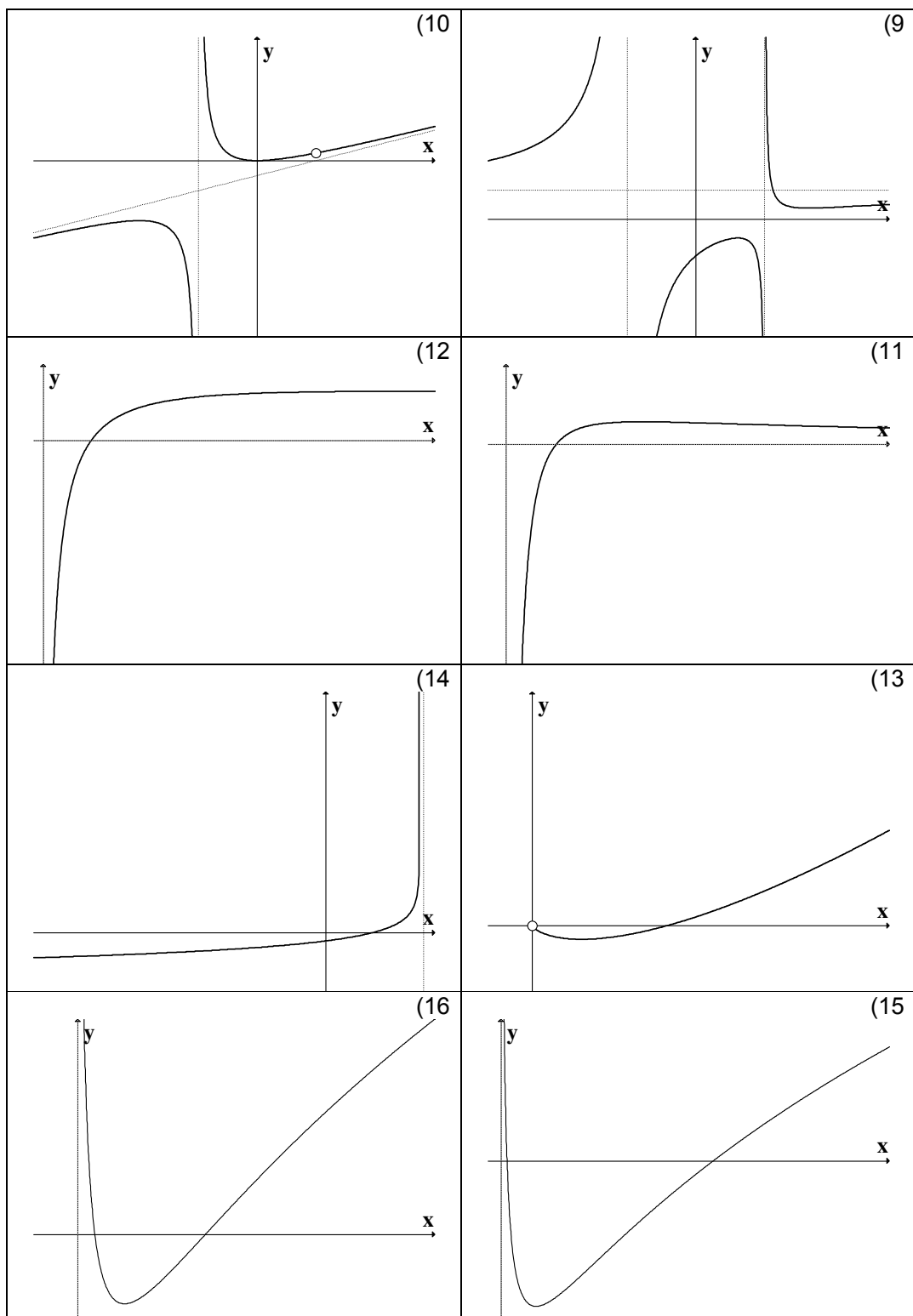
פתרונות – פרק 3

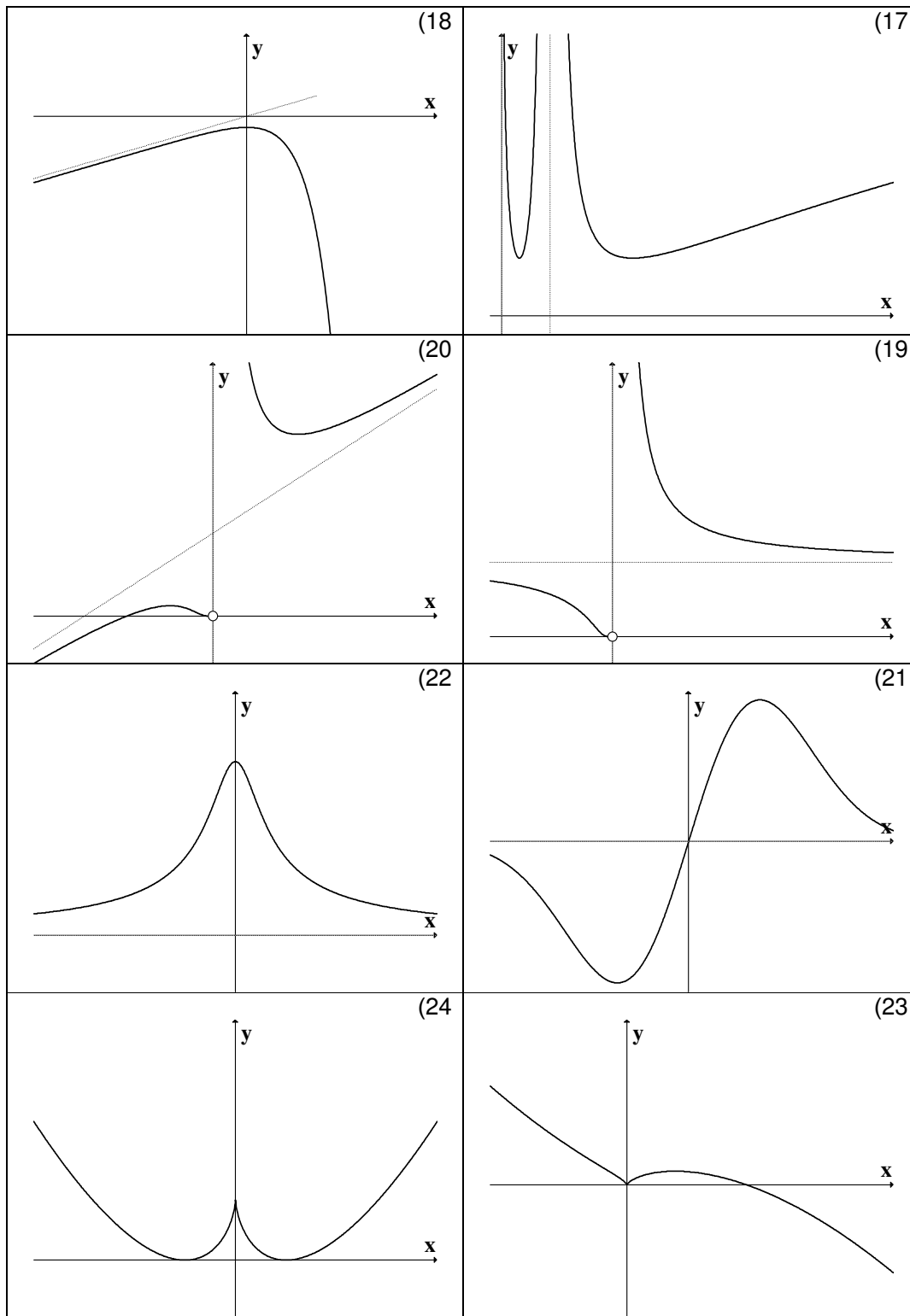
(1)

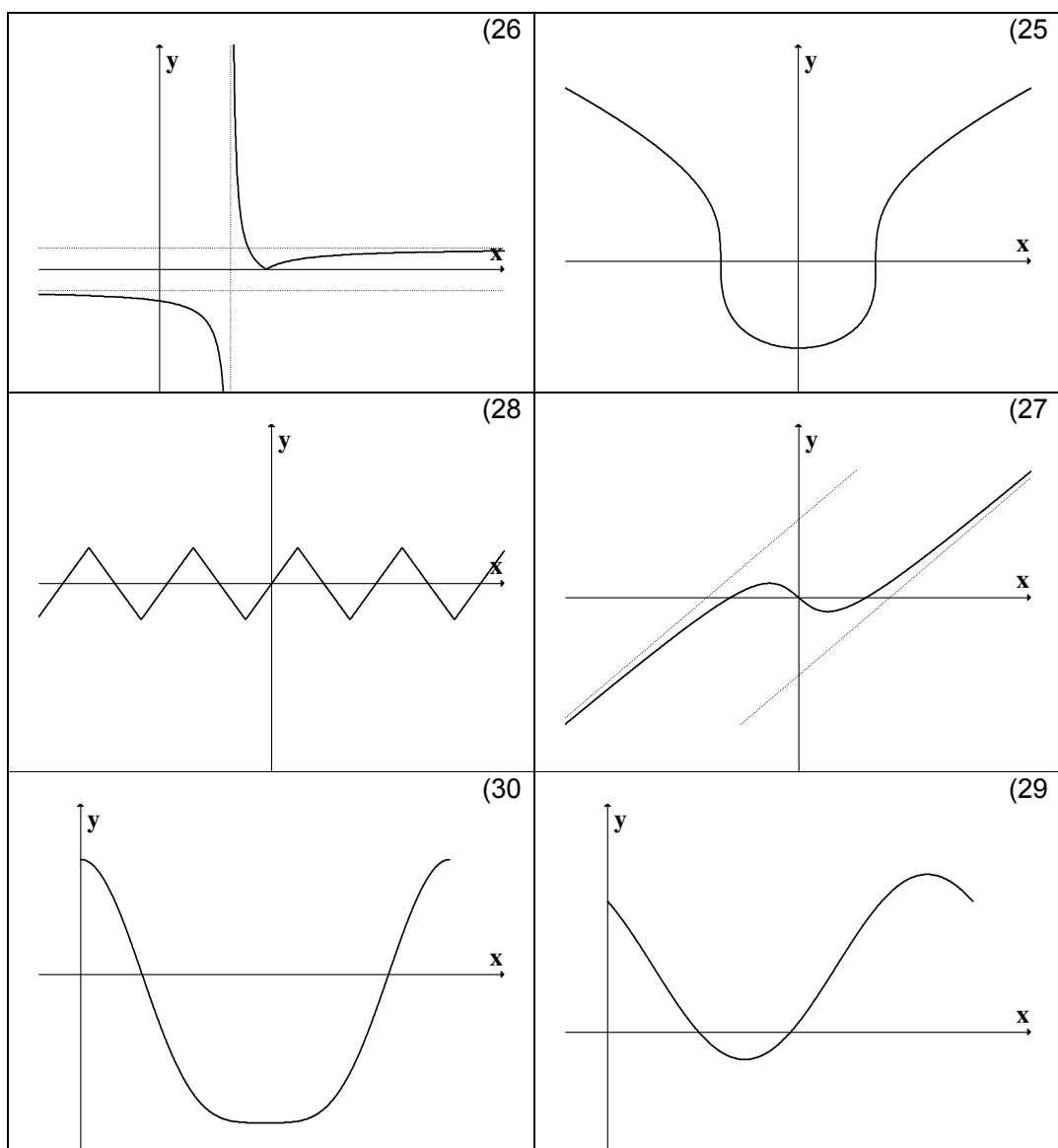


לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©







תרגילים – פרק 4

חקירת פונקציה – "שאלות מסביב"

(1)

א) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .

ב) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת קיצון.

מצא את הקבועים a, b .

ג) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$. ידוע שהנקודה $x = 1$ נקודת פיתול. מצא את הקבוע a .

ד) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$. ידוע שהנקודה $(1, 2)$ נקודת פיתול.

מצא את הקבועים a, b .

ה) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x = 3$ הוא 33.

מצא את a .

ו) נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + bx^2$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3, 9)$ הוא 12.

מצא את a, b .

ז) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^3 + x^2}{2x^3 + x + 6}$. ידוע שהישר $y = 4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

ח) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 4}{x}$. ידוע שהישר $y = 0.5x + 1$ אסימפטוטה לגרף

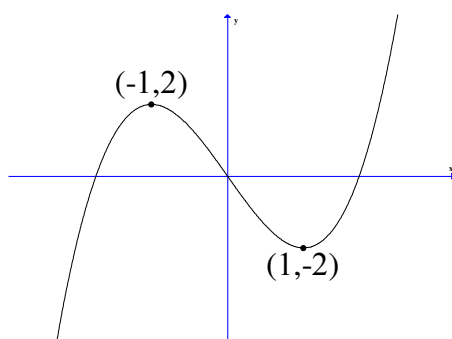
הפונקציה. מצא את a ואת b .

ט) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{x^2 + ax + 6}$ ידוע שהישר $x = 1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(2) לפניך גרף הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x$

- א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 5$.
- ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 2$.
- ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x) = 0.5$.
- ד. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק פתרון אחד.
- ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות.
- ו. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שלושה פתרונות.
- ז. האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון.
- ח. מצא את התחומים בהם הפונקציה היא ח"ע.



(3) הוכח את אי השוויונים הבאים לגבי התחום הרשום לידם:

$$(1) \quad (-\infty < x < \infty) \quad 8x^3 \leq 3x^4 + 6x^2 \quad (2) \quad (0 < x < \frac{\pi}{3}) \quad x < 2 \sin x$$

$$(3) \quad (x > 0) \quad \sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} \quad (4) \quad (x \geq 0) \quad \ln(x+1) \leq x$$

פתרונות – פרק 4

(1)

- | | | |
|-----------------------|--------------------|------------------------------|
| א) $a = -\frac{2}{3}$ | ב) $b = 6, a = -4$ | ג) $a = -\frac{1}{3}$ |
| ד) $b = 3, a = -1$ | ה) $a = 1$ | ו) $a = \frac{2}{3}, b = -1$ |
| ז) $a = 8$ | ח) $a = 0.5$ | ט) $a = -7$ |

(2)

- | | | |
|------------------------|-----------------------------|-----------------|
| א) 1 | ב) 2 | ג) 3 |
| ד) $k > 2$ או $k < -2$ | ה) $k = \pm 2$ | ו) $-2 < k < 2$ |
| ז) לא | ח) $-1 < x < 1$ או $x < -1$ | או $x > 1$ |

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילים - פרק 5

בעיות מקסימום ומינימום כלכליות

1. הגדר והדגם את הפונקציות הכלכליות הבאות :

פונקציית ביקוש, פונקציית פדיון (הכנסות), פונקציית עלות (הוצאות), פונקציית עלות ממוצעת, פונקציית רווח, פונקציית שולית ובמיוחד פונקציית עלות שולית.

2. כאשר חברת "יוטבתה" מוכרת x ליטר שוקו ליום היא יכולה לקבל מחיר של

$$p(x) = -\frac{1}{4}x + 10 \text{ שקל לליטר.}$$

- מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
 - מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
 - מהי הכמות הנמכרת ביום אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
 - שרטט את הגרף של פונקציית הביקוש ומצא את תחום ההגדרה שלה.
 - פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנה את נוסחת הפונקציה כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר כפונקציה של מחירו.
3. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
 - אם $x = 20$ מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
 - אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?
4. פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- מהו התחום של פונקציית הפדיון?
 - שרטט את הגרף של פונקציית הפדיון.
 - מצא את פונקציית הביקוש ושרטט את הגרף שלה.
5. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$ שקל ליחידה.

- מצא את תחום הפונקציה.
 - מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
 - מצא את פונקציית הפדיון השולי.
 - לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי ומהו?
6. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$ האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי ומהו?

7. פונקצית הביקוש למוצר מסוים נתונה ע"י: $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- מצא את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.
- מהו הביקוש במקרה זה?
- מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאת? מה משמעותו?

8. פונקצית ההוצאות של יצרן המייצר x ק"ג קפה ביום היא $C(x) = 5x + 150$.

- שרטט גרף של פונקצית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
- מצא כמה ק"ג קפה מייצר היצרן אם ההוצאות הן 1000 ₪.
- מהן ההוצאות אם מייצרים 20 ק"ג קפה?
- מצא את פונקצית ההוצאה השולית.

9. פונקצית העלות של יצרן כובעים היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- חשב את העלות הממוצעת ליום אם הוא מייצר 40 כובעים.
- כמה כובעים עליו לייצר כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
- חשב את העלות השולית ליום עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק מכך?

10. פונקצית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- חשב את העלות כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
- חשב את העלות השולית כאשר $x = 100$?
- חשב כמה תעלה יחידת מוצר נוספת כאשר היצור יעבור מ- $x = 100$ ל- $x = 101$ והשווה עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
- מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

11. לייצרן פונקצית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$ ופונקצית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

- מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.
- מהו המקסימום במקרה זה?

12. לייצרן פונקצית ביקוש $P(Q) = 20$ ופונקצית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.
- מהו המקסימום במקרה זה?

13. לייצרן פונקצית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$ ופונקצית עלות שולית

$MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$.

- מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

14. לייצר פונקצית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$ ופונקצית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$.

מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

מהו המקסימום במקרה זה?

15. לייצרן פונקצית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$. מצא את פונקצית העלות אם

ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$ אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

16. א. הוכח שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית.

הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכח שאם מחיר המוצר קבוע אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית

שווה למחיר המוצר.

17. יעל נוהגת לעשות שופינג בכל יום בכיכר המדינה. לאחרונה החליטה יעל לשכור

דירה לחודש (30 יום). אם הדירה נמצאת במרחק x ק"מ מכיכר המדינה דמי

השכירות החודשיים הינם $P(x) = 60 - 4x$. בכל יום יעל נוסעת הלוך ושוב לכיכר

המדינה. הוצאות הנסיעה לק"מ אחד נתונות על-ידי $D(x) = \frac{x^2}{180} + \frac{2}{3x}$.

א. רשום את ההוצאה הכוללת של יעל, $TC(x)$.

ב. באיזה מרחק מכיכר המדינה על יעל לשכור את דירתה?

ג. שרטט גרף איכותי של $TC(x)$. הדגש את שיעורי נקודת הקיצון.

תרגילים – פרק 6

פונקציות בשני משתנים לכלכלנים

עקומות שוות ערך, נגזרות חלקיות

עקומות שוות ערך

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

(2)

א. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f .

ב. נגדיר $f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases}$. הנח כי $x, y \geq 0$.

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x, y) = 4, 12$ עבור הפונקציה הנתונה.

ג. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$

(3)

תהי $u(x, y) = (x + p)(y + q)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ פונקצית תועלת של פרט.

הנקודות $(1, 6)$, $(3, 2)$, $(0, 14)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

א. מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקצית התועלת.

ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?
עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

נגזרות חלקיות

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$(only f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3)$$

תרגילים - פרק 7

קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4.$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$

וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
 עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8.
 מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות - פרק 7

- (1) $(-0.5, 1)$ אוקף ; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום ; $(-1, -2)$ מקסימום ; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוקף.
- (3) $(0, 0)$ אוקף ; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ מינימום ; $(1, 0)$ מקסימום ; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוקף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום. (6) $(4, 4)$ מקסימום.
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום. (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$. (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1=10\$$, $P_2=12\$$, רווח מקסימלי \$288 .

פרק 8 - אלגברה: תכנון לינארי

שאלה 1

חקלאי צריך לתכנן את עיבוד שדותיו לעונה החקלאית, כך שרווחיו יהיו מקסימליים. המשאבים העובדים לרשותו הם: שטח של 10 דונמים, 2800 מ"ק מים ו-364 ימי עבודה. הוא החליט לנצל את כל משאביו לגידול עגבניות ופלפל. הצרכים והרווחים לדונם, לגידולים אלה, נתונים בטבלה שלפניך:

רווחים לדונם	ימי עבודה לדונם	מים לדונם	
800 שקל	14 יום	350 מ"ק	עגבניות
1400 שקל	42 יום	210 מ"ק	פלפל

- כתוב את מערכת האילוצים ואת פונקציית המטרה לבעיה.
- מצא על כמה דונמים צריך החקלאי לגדל עגבניות ועל כמה דונמים הוא צריך לגדל פלפל, כדי שרווחיו יהיו מקסימליים.
- מצא מה יהיו הרווחים המקסימליים של החקלאי.

שאלה 2

לרשות נגריה 3 מ"ק עצים, 21 מ"ר דיקט ו-104 ימי עבודת פועל. לייצור ארון מטבח דרושים 0.2 מ"ק עץ, 1 מ"ר דיקט ו-12 ימי עבודת פועל. לייצור ארון בגדים דרושים 0.4 מ"ק עץ, 3 מ"ר דיקט ו-5 ימי עבודת פועל. הרווח ממחירת ארון מטבח הוא 1000 שקל וממחירת ארון בגדים 1500 שקל. כמה ארונות וכמה ארונות בגדים כדאי לנגריה לייצר, כדי שרווחיה יהיו מקסימליים?

שאלה 3

מפעל מייצר שני סוגי שולחנות: שולחן אוכל ושולחן סלוני.

תהליך הייצור מורכב משלושה שלבים עיקריים: חיתוך, עיבוד וצביעה.

במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את ציוד החיתוך 16 שעות לכל היותר, את ציוד העיבוד אפשר להפעיל 18 שעות לכל היותר, ואת ציוד הצביעה - 12 שעות לכל היותר.

אותו ציוד משמש לייצור שני סוגי השולחנות. פירוט הזמן הדרוש לכל שלב בייצור שולחן אחד נתון בטבלה שלפניך:

	חיתוך	עיבוד	צביעה
שולחן אוכל	2 שעות	1 שעה	1 שעה
שולחן סלוני	1 שעה	3 שעות	1 שעה

רווח המפעל מכל שולחן אוכל הוא 200 שקל, ומכל שולחן סלוני הוא 350 שקל.

א. כמה שולחנות מכל סוג על המפעל לייצר במחזור ייצור אחד, כדי שרווחיו יהיו מקסימליים?

ב. באחד ממחזורי הייצור התקלקלה מכונת הצביעה לשעה אחת, ולכן היה אפשר להפעילה רק 11 שעות. האם תשובתך לסעיף א' תשתנה לגבי מחזור ייצור זה? נמק.

שאלה 4

במפעל פועלות שלוש מכונות: M_1, M_2, M_3 , המשמשות להכנת שני סוגי מוצרים.

כל אחד מהמוצרים חייב לעבור עיבוד בכל אחת משלוש המכונות.

במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את המכונה M_1 14 שעות לכל היותר,

את המכונה M_2 אפשר להפעיל 30 שעות לכל היותר,

ואת המכונה M_3 - 12.5 שעות לכל היותר.

הזמן הדרוש לייצור 1 ק"ג מוצר מכל סוג בכל אחת מהמכונות והרווח הנקי ממכירתו של 1 ק"ג מוצר נתונים בטבלה שלפניך:

	M_1	M_2	M_3	רווח נקי
מוצר ראשון	1 שעה	3 שעות	4 שעות	70 שקל
מוצר שני	1 שעה	1 שעה	10 שעות	100 שקל

א. מצא את הכמות בק"ג שיש לייצר מכל סוג במחזור ייצור אחד, כדי לקבל רווח מקסימלי.

ב. איזה מכונה לא נוצלה עד תום במקרה שהתקבל הרווח המקסימלי? נמק.

שאלה 5

ועד עובדים מעוניין להזמין במפעל מזון חבילות שי, המכילות שקיות צ'יפס וחפיסות שוקולד. הוועד החליט כי כל חבילה תכיל לכל היותר 20 פריטים, משקלה יהיה לפחות 3000 גרם ונפחה - לפחות 4800 סמ"ק.

המשקל, הנפח והמחיר של הצ'יפס ושל השוקולד רשומים בטבלה שלפניך:

משקל	נפח	מחיר	
שקית צ'יפס	100 גרם	600 סמ"ק	2 שקלים
חפיסת שוקולד	300 גרם	150 סמ"ק	3 שקלים

- רשום את מערכת האילוצים ופונקציית המטרה, ושרטט את התחום האפשרי של הבעיה.
- מצא כמה שקיות צ'יפס וכמה חפיסות שוקולד צריך הוועד להכניס לחבילה כך שמחירה יהיה מינימלי.
- כעבור שנה, פנה הוועד למפעל המזון, וביקש מהמפעל להרכיב את חבילות השי. כל הנתונים והאילוצים נשארו כמו שהיו בשנה הקודמת. כיצד צריך המפעל להרכיב את החבילה, כדי שמחירה יהיה מקסימלי?

שאלה 6

אדם שעושה דיאטה צריך לבלוע כל יום לפחות 80 מיליליטר מחומר B , ולפחות 36 מיליליטר מחומר C . חומרים אלה נמצאים במיץ עגבניות ובמיץ ענבים, אבל במיצים אלה יש גם חומר D , העלול להזיק לדיאטה ואסור לבלוע ממנו יותר מ-60 מיליליטר ליום.

בטבלה שלפניך נתונים במיליליטרים הכמויות של החומרים B , C ו- D בכוס מיץ עגבניות ובכוס מיץ ענבים.

D	C	B	
5	2	20	כוס מיץ עגבניות
5	6	4	כוס מיץ ענבים

כוס מיץ עגבניות עולה 10 אגורות. כוס מיץ ענבים עולה 50 אגורות.

- הראה בשרטוט את התחום האפשרי של הבעיה.
- כמה כוסות מיץ מכל סוג על האדם לשתות ביום, כך שהוצאתו הכספית ליום תהיה מינימלית?
- הוסף לשרטוט את קו הגובה המתאים להוצאה כספית יומית של 340 אגורות, וקבע על-פיו כמה כוסות שלמות מכל סוג על האדם לשתות, אם בכוונתו להוציא 340 אגורות ליום.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלה 7

מכון הרזיה ממליץ לאכול רק עוף וסלט ירקות. בטבלה שלפניך נתונים מספר הקלוריות, כמויות הויטמינים, והמחיר לכל מנת עוף ולכל מנת סלט.

מספר קלוריות	מיליגרם ויטמין I	מיליגרם ויטמין II	מחיר מנה בשקלים
מנת עוף	120	3	3
מנת סלט	30	1	6

לפי תנאי הדיאטה של מכון ההרזיה, אדם חייב לצרוך ביום אחד לכל היותר 900 קלוריות, לפחות 13 מיליגרם ויטמין I ולפחות 33 מיליגרם ויטמין II.

- שרטט את התחום האפשרי של הבעיה.
- מצא כמה מנות עוף וכמה מנות סלט על האדם לאכול ביום אחד, כדי לעמוד בתנאי הדיאטה של המכון במחיר מינימלי.

שאלה 8

נתונים האילוצים:

$$\begin{aligned} y + 2 &\geq 0 \\ x - 7 &\leq 0 \\ x + y &\leq 10 \\ y &\leq 2x + 4 \end{aligned}$$

- שרטט את התחום האפשרי של הבעיה.
- מצא את הערך המינימלי שמקבלת פונקציית המטרה $f(x, y) = 10x - 5y$ בתחום האפשרי.
- הראה כי פונקציית המטרה מקבלת ערך מינימלי בקטע (ולא בקודקוד בודד).

שאלה 9

חיה מסוימת חייבת לאכול, לצורך דיאטה, במשך תקופה מסוימת שני סוגי מזון בלבד, מזון מסוג א' ומזון מסוג ב'.

התכולה של יחידת מזון אחת מכל סוג נתונה בטבלה שלפניך :

מחיר יחידת מזון בשקלים	מיליגרם ויטמינים ליחידת מזון	גרם חלבונים ליחידת מזון	גרם פחמימות ליחידת מזון	
0.7	6	4	12	סוג א'
1.5	6	1	8	סוג ב'

לפי תנאי הדיאטה על החיה לאכול במשך יממה לפחות 12 גרם פחמימות, 6 גרם חלבונים ו-18 מיליגרם ויטמינים.

מצא כמה יחידות מזון מכל סוג על החיה לאכול ביממה כדי לקיים את תנאי הדיאטה כך שההוצאה הכספית תהיה מינימלית.

שאלה 10

נתונים האילוצים :

$$y \leq 2x + 3$$

$$x + 2y \leq 21$$

$$x + 7y \geq 21$$

$$y \leq 7$$

א. שרטט את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.

ב. מצא את הערך המקסימלי שמקבלת פונקציית המטרה $f(x, y) = 16x - 8y$ בתחום זה.

ג. מצא שני פתרונות אפשריים, שעבורם מקבלת פונקציית המטרה את הערך 8.

שאלה 11

נתונה מערכת האילוצים :

$$2y + 5x \geq 0$$

$$2y - x \leq 12$$

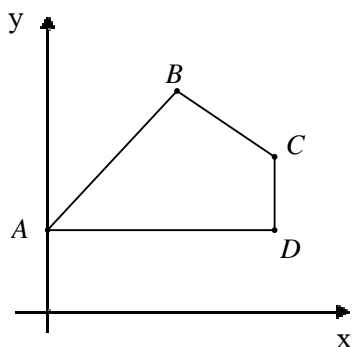
$$x + y \leq 10$$

$$y \geq 2\frac{1}{2}$$

פונקציית המטרה היא : $f(x, y) = 10x - 10y$.

- שרטט את התחום האפשרי המתקבל ממערכת האילוצים.
- באיזה נקודה בתחום מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי?
- תן דוגמא לשתי נקודות השייכות לתחום האפשרי, ושעבורן הערך של פונקציית המטרה הוא -20 .

שאלה 12



פנים מרובע $ABCD$ וקווי השפה שלו מתארים את התחום המתקבל ממערכת האילוצים :

$$y \leq x + 3$$

$$y \geq 3$$

$$y \leq -\frac{1}{2}x + 12$$

$$x \leq 10$$

- מצא את שיעורי הקודקודים A, B, C, D .
- פונקציית המטרה, $f(x, y) = mx + 10y$, מקבלת בתחום ערך מקסימלי לאורך כל הקטע BC . חשב את m , ומצא את הערך המקסימלי של פונקציית המטרה.
- מצא את הערך המינימלי שמקבלת פונקציית המטרה בתחום נתון.

שאלה 13

נתונים האילוצים:

$$y \geq 0, \quad x \geq 0$$

$$y \leq 2x + 4$$

$$y \leq -2x + 8$$

$$y \geq 2x - 4$$

פונקציית המטרה היא: $f(x, y) = 3x - y + 6$

- א. קווקו בשרטוט מדויק את התחום האפשרי של הבעיה.
ב. הוסף לשרטוט את קו הגובה שבו ערך פונקציית המטרה הוא 5.
ג. באיזו נקודה בתחום האפשרי מקבלת פונקציית המטרה ערך מקסימלי?

שאלה 14

מצא ערך מינימלי של הפונקציה $f(x, y) = 2x - y$ כאשר האילוצים הם:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ y \geq 0 \\ y \geq 6 - 2x \end{cases}$$

שאלה 15

- לרשותו של איכר יש מקסימום 100 דונם קרקע.
עליו לחלקם לשני גידולים, כך שהכנסתו השנתית תהיה מקסימלית.
סה"כ ימי עבודה לשנה, שעומדים לרשות האיכר לגידול הגידולים, הוא 420 ימים.
גידול א' דורש 2 ימי עבודה לדונם (לשנה), וגידול ב' דורש 7 ימי עבודה לדונם (לשנה).
ההכנסה הצפויה היא 10,000 שקל לדונם לגידול א' ו-30,000 שקל לדונם לגידול ב'.
כמה דונמים יש להקדיש לכל גידול, כדי שהכנסתו של האיכר תהיה מקסימלית?

שאלה 16

בית חרושת מייצר שני סוגי סיבים.

עיבוד של טונה אחת של סיב א' דורש 8 שעות במכונת ניקוי ו-5 שעות במכונת עיבוד.

עיבוד של טונה אחת של סיב ב' דורש 6 שעות במכונת ניקוי ו-15 שעות במכונת עיבוד.

כל מכונה יכולה להיות מופעלת 45 שעות לכל היותר בשבוע עבודה. הרווח של המפעל הוא 15 אלף שקל לכל טונה מסוג א' ו-20 אלף שקל לכל טונה מסוג ב'.

כמה טונות מכל סוג כדי למפעל לייצר בשבוע?

שאלה 17

למפעל נחושת יש שתי מכרות: מכרה I ומכרה II.

בכל אחד מן המכרות אפשר להפיק שלושה סוגי עפרות:

מכרה I יכול להפיק ביום עבודה 6 טונות עפרה א', 2 טונות עפרה ב' ו-4 טונות עפרה ג'.

מכרה II יכול להפיק ביום עבודה 2 טונות עפרה א', 2 טונות עפרה ב' ו-12 טונות עפרה ג'.

המפעל התחייב לספק לפחות 120 טונות של עפרה א', לפחות 80 טונות של עפרה ב', ולפחות 240 טונות של עפרה ג'.

הוצאות הפעלת המכרות ליום עבודה אחד באלפי שקלים הן 120 למכרה I ו-160 למכרה II.

כמה ימים יש להפעיל כל מכרה כדי לספק את הדרישה, כך שהוצאות ההפעלה יהיו מינימליות? חשב את ההוצאות המינימליות.

שאלה 18

מצא ערך מינימלי וערך מקסימלי של פונקציית המטרה $f(x, y) = x + 2y$

תחת האילוצים: $x \leq 2$, $x \geq y$, $x + y \leq 3$, $y + 2 \geq 0$.

שאלה 19

במפעל לייצור סלטים מייצרים שני סוגי סלטים : סלט מיונו וסלט חצילים.

תהליך הייצור מורכב משלושה שלבים עיקריים : קיצוץ, ערבוב ואריזה. פירוט הזמן הדרוש לכל שלב בייצור ק"ג אחד של סלט נתון בטבלה שלפניך :

קיצוץ	ערבוב	אריזה	
1 דקה	5 דקות	3 דקות	ק"ג סלט מיונו
2 דקות	4 דקות	1 דקה	ק"ג סלט חצילים

במחזור ייצור אחד אפשר להפעיל את ציוד הקיצוץ 12 שעות לכל היותר, את ציוד הערבוב אפשר

להפעיל 30 שעות לכל היותר, ואת ציוד האריזה – $14\frac{1}{2}$ שעות לכל היותר.

המכונות משמשות לייצור שני סוגי הסלטים. הרווח הנקי של המפעל על סלט מיונו הוא 6 שקלים לק"ג ועל סלט חצילים 10 שקלים לק"ג.

כמה ק"ג מכל סוג של סלט כדאי למפעל לייצר במחזור אחד, כדי להגיע לרווח מקסימלי?

פתרונות פרק 8 - אלגברה תכנון לינארי

- (1) א. $x \geq 0$; $y \geq 0$, $350x + 210y \leq 2800$, $14x + 42y \leq 364$, $x + y \leq 10$,
 ב. $f(x, y) = 800x + 1400y$ עגבניות: 2 דונם, פלפל: 8 דונם ג. 12,800 שקל
- (2) 7 ארונות מטבח, 4 ארונות בגדים
- (3) א. 4 שולחנות סלוניים, 6 שולחנות אוכל ב. לא תשתנה. כי האילוץ של מכונת הצביעה, גם הוא משתנה ל- $x + y \leq 1$, עדיין נמצא מחוץ לתחום.
- (4) א. 2.5 ק"ג מהמוצר הראשון, 11.5 ק"ג מהמוצר השני ב. M_2 לא נוצלה עד תום, כי במקרה של רווח מקסימלי עבדה רק 19 שעות
- (5) א. $100x + 300y \geq 3000$, $600x + 150y \geq 4800$, $x + y \leq 20$,
- (6) א. $f(x, y) = 2x + 3y$, $y \geq 0$; $x \geq 0$ ב. 6 שקיות ציפס, 8 חבילות שוקולד ג. 4 שקיות ציפס, 16 חבילות שוקולד
- (7) א. 9 כוסות מיץ עגבניות, 3 כוסות מיץ ענבים ג. 4 כוסות מיץ עגבניות, 6 כוסות מיץ ענבים.
- (8) א. 3 מנות עוף, 4 מנות סלט ירקות
- (9) א. מינימום: $f(x, y) = -20$ ג. מינימום בקטע AB שבציר
- (10) א. 2 יחידות מסוג א', ויחידה אחת מסוג ב'
- (11) א. $f(7, 2) = 96$ ג. נקודות בתחום על הקו $y = 2x - 1$
- לדוגמא: $(2, 3)$; $(3, 5)$; $(4, 7)$
- (12) א. $(7.5, 2.5)$ ג. לדוגמא: $(2, 4)$; $(1, 3)$; $(3, 5)$
- (13) א. $A(0, 3)$, $B(6, 9)$, $C(10, 7)$, $D(10, 3)$ ב. $m = 5$,
- מקסימום: $f(x, y) = 120$ ג. מינימום: $f(x, y) = 30$
- (14) א. $(3, 2)$
- (15) מינימום: $f(1, 4) = -2$
- (16) 56 דונם לגידול א', 44 דונם לגידול ב'
- (17) 4.5 טון מסיב א', 1.5 טון מסיב ב'
- (18) 30 ימים – מכרה I , 10 ימים – מכרה II , 5200 אלפי שקלים.
- (19) מינימום: $f(-2, -2) = -6$, מקסימום: $f(1.5, 1.5) = 4.5$
- (20) 2 ק"ג סלט מיונה, 5 ק"ג סלט חצילים

תרגילים – פרק 9

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

$$\begin{array}{llll} x + y = 3 & (4) & 2x + y = 3 & (3) \\ x - 4y = -7 & (2) & x + 10y = 11 & (1) \\ 2x + y = 4 & & x - y = 0 & \\ & & x - y = -1 & \\ & & 2x - 2y = 0 & \end{array}$$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{llll} x = 3 & (4) & 2x + y + z = 3 & (3) \\ x - 4y + z = -7 & (2) & x + 10y = 11 & (1) \\ 2x + y = 4 & & x - z = 0 & \\ & & x - y = -1 & \\ & & 2x - 2 = 0 & \\ z + t = 8 & & x + y + z = 5 & \\ & & x + y = 3 & \end{array}$$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & (1) \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(5) א. **הסבר והדגם** את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.
 ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}^{(*9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{R}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{C}$.

(6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

$$\begin{array}{lll} 8x - 4y = 10 & (3) & 4x + 8y = 20 & (2) & 2x + 3y = 8 & (1) \\ -6x + 3y = 1 & & 3x + 6y = 14 & & 5x - 4y = -3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x + 2y + 3z = 3 & (6) & x + 2y + 3z = -11 & (5) & 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 & (4) \\ 4x + 6y + 16z = 8 & & 2x + 3y - z = -5 & & 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5 & \\ 3x + 2y + 17z = 1 & & 3x + y - z = 2 & & 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 32 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 3x - 2y = 1 & (9) & 4x - 7y = 0 & (8) & x + 3y = 2 & (7) \\ -9x + 6y = -3 & & 8x - 14y = 2 & & 2x + y = -1 & \\ 6x - 4y = 2 & & -16x + 28y = 4 & & x - y = -2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x + 2y + 2z = 2 & (12) & x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 & (11) & x + 2y - 3z + 2t = 2 & (10) \\ 3x - 2y - z = 5 & & 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 & & 2x + 5y - 8z + 6t = 5 & \\ 2x - 5y + 3z = -4 & & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 & & 6x + 8y - 10z + 4t = 8 & \\ 2x + 8y + 12z = 0 & & & & & \end{array}$$

(7) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות :

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x + 2ky + z = 0 & (3) & x + ky + z = 1 & (2) & x - y + z = 1 & (1) \\ 3x + y + kz = 2 & & x + y + kz = 1 & & 5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \\ x + 9ky + 5z = -2 & & kx + y + z = 1 & & 3x - y + (k + 3)z = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x + ky + 3z = 2 & (6) & kx - y = 1 & (5) & 2x - y + z = 0 & (4) \\ kx - y + z = 4 & & (k - 2)x + ky = -2 & & x + 2y - z = 0 \\ 3x + y + (2 + k)z = 0 & & (k^2 - 1)z = 9 & & 5x + (1 - k)y + k^2z = 1 \end{array}$$

(8) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות :

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} 3x + 4y - z = 2 & (3) & 2x - 3y + z = 1 & (2) & 2x + ky = 3 & (1) \\ kx - 2y + z = -1 & & 4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k & & (k + 3)x + 2y = k^2 + 5 \\ x + 8y - 3z = k & & & & 6x + 3ky = 7k^2 + 2 \\ 2x + 6y - 2z = 0.5k + 1 & & & & \end{array}$$

(9) מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות :

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x + y - z + t = 1 & (3) & 2x + 4y + az = -1 & (2) & x + 2y - 4z = b & (1) \\ ax + y + z + t = b & & x + 2y + 4z = -4 & & 7x - 10y + 16z = 7 \\ 3x + 2y + at = 1 + a & & x + 2y - 4z = 0 & & 2x - ay + 3z = 1 \\ & & x + 2y + 6z = -2b & & \end{array}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות :

$$\begin{aligned} x + az &= 1 \\ y + 2z &= 2 \\ bx + cy + dz &= 3 \end{aligned}$$

א. מצא תנאי עבור a, b, c, d כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b, c, d כך שלכל a למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל השדה $\mathbf{F}$.

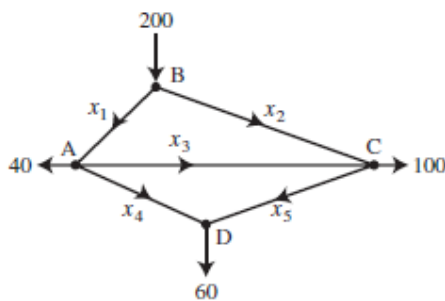
$$\begin{array}{ll} z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 1 + 4i & (2) & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ iz_1 + z_2 + (1 + i)z_3 = 2 + i & & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ (-1 + 3i)z_1 + (3 - i)z_2 + (2 + 4i)z_3 = 5 - i & & 3x_1 + x_3 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbb{C}, \mathbf{F} = \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbb{Z}_5}$$

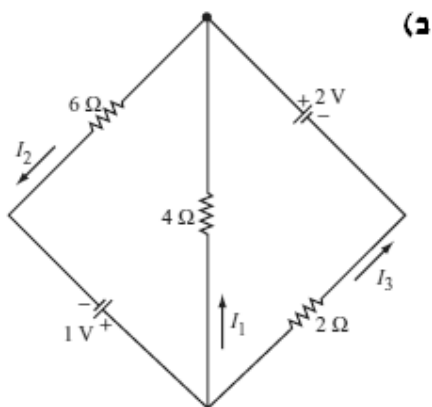
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases} \quad (12) \text{ נתונה המערכת:}$$

- א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
 ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
 ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת: 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
 ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
 ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.
 ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
 ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$. האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.
 ח. מצא לאיזה ערך של k , $(1, 0, 0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

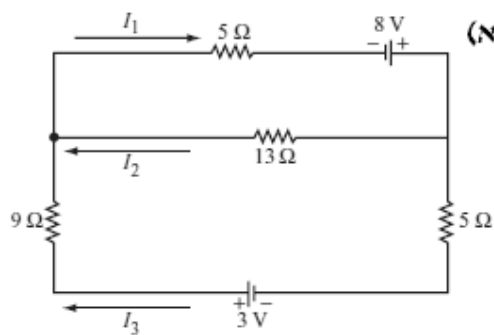


- (13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.
 א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.
 ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.
 ג. מהו הערך המינימלי של x_1 אם ידוע ש- $x_4 = 0$.

- (14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם):



(ב)



* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.

פתרונות – פרק 9

(1) (1 ו-3) שקולות ו-2 (4) שקולות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{(4)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1 \quad (2) \quad R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad (2) \quad R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad (1) \quad (4)$$

(5) ב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$F=\mathbb{R} \qquad F=\mathbb{C}$

(6)

$$(x, y) = (5 - 2t, t) \quad (2) \qquad (x, y) = (1, 2) \quad (1)$$

$$\phi \quad (4) \qquad \phi \quad (3)$$

$$(x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (6) \qquad (x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (5)$$

$$\phi \quad (8) \qquad (x, y) = (-1, 1) \quad (7)$$

$$(x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (10) \qquad (x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t\right) \quad (9)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (12) \qquad \phi \quad (11)$$

(7)

$$k = 1 \text{ ג. } k = -2 \text{ ב. } k \neq 1, k \neq -2 \text{ א.} \quad (2) \qquad k = -2 \text{ ג. } k = 1 \text{ ב. } k \neq 1, k \neq -2 \text{ א.} \quad (1)$$

$$k = 1, k = -0.4 \text{ ב. } k \neq 1, k \neq -0.4 \text{ א.} \quad (4) \qquad k = -1 \text{ ג. } k = \frac{4}{7} \text{ ב. } k \neq -1, k \neq \frac{4}{7} \text{ א.} \quad (3)$$

$$. k = \pm 1, k = -2 \text{ ב. } k \neq \pm 1, k \neq -2 \text{ א.} \quad (5)$$

$$. k = -1, k = -3, k = 2 \text{ ג. } k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2 \text{ א.} \quad (6)$$

$$(8) \quad k = -1 \text{ א. } k \neq \pm 1 \text{ ג. } k = 1 \text{ ב. } k = 3 \text{ ד. } k \neq 3 \text{ ז. } k \neq 1 \text{ ח. } k = 1 \text{ ט. } k = 1$$

(9)

$$(1) \text{ א. } a \neq 2 \text{ ב. } a = 2, b \neq -3 \text{ ג. } a = 2, b = -3$$

$$(2) \text{ ב. } b \neq 2.5 \text{ או } a \neq -6 \text{ ג. } a = -6, b = 2.5$$

$$(3) \text{ ב. } a = 2, b \neq 2 \text{ ג. } a = 2, b = 2 \text{ או } a \neq 2$$

$$(10) \text{ א. } ab + 2c \neq d \text{ ב. } b = 0, c = 1.5, d = 3$$

(11)

$$(1) \quad (x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 0) \quad (2) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{C}} = ((-1+i)t + 1+i, 3, t) \quad (z_1, z_2, z_3)_{F=\mathbb{R}} = (2, 3, -1)$$

$$(12) \text{ א. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix} \text{ ב. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ג. } k \neq -1, k \neq 2 \text{ ד. } k = -1 \text{ ז. } k = 2$$

$$\tau. \quad (x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$$

$$\text{ה. } k = \pm 2 \text{ ו. } k = -2 \text{ ז. } k = 2, \text{ לא, } k = -2 \text{ ח. } k = -2$$

$$(13) \text{ א. } x_3 \text{ ו- } x_5 \text{ חופשיים. } x_1 = 100 + x_3 - x_5, x_2 = 100 - x_3 + x_5, x_4 = 60 - x_5$$

$$\text{ב. } x_3 \text{ חופשי. } x_1 = 40 + x_3, x_2 = 160 - x_3, x_4 = 0, x_5 = 60$$

ג. 40

$$(14) \text{ א. } I_1 = \frac{255}{317}, I_2 = \frac{97}{317}, I_3 = \frac{158}{317} \text{ ב. } I_1 = \frac{5}{22}, I_2 = \frac{7}{22}, I_3 = \frac{6}{11}$$