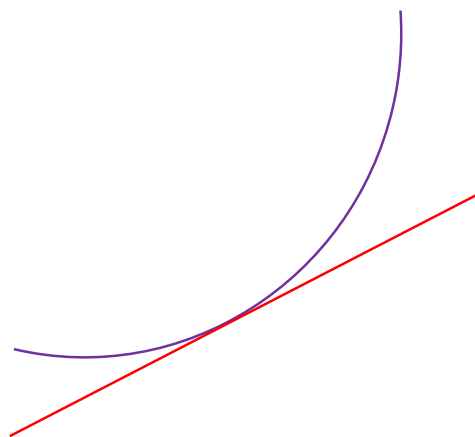


מתמטיקה א'



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במתמטיקה א' (חדו"א 1) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva1.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

פרק 1 – פונקציות (לינאריות, ריבועיות, מעריכיות ולוגריתמיות).....	3
פרק 2 - גבול של פונקציה.....	5
פרק 3 - רציפות של פונקציה, משפט ערך הביניים.....	9
פרק 4 - חישוב נגזרת של פונקציה.....	15
פרק 5 - בעיות משיקים.....	20
פרק 6 - חקירת פונקציה.....	25
פרק 7 - בעיות מקסימום ומינימום.....	33
פרק 8 - שימושי הנגזרת.....	44

תרגילים – פרק 1

פונקציות (לינאריות, ריבועיות, מעריכיות ולוגריתמיות)

שאלה 1 - ישרים וגרפים של פונקציות

נגדיר $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , 0 \leq x \leq 2 \\ -1.5x+7 & , 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

א. שרטט את הגרף של $f(x)$.

ב. מצא את הערך של $f(2)$, $f(4)$ ו- $f(8)$.

ג. הגרף של $h(x) = \frac{6+x}{x}$ פוגש בנקודה אחת את הגרף של $f(x)$.

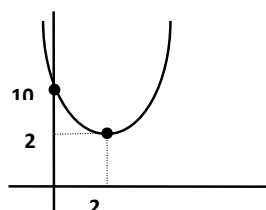
הראה גרפית את המצב המתואר לעיל ומצא את הנקודה בעזרת חישוב מתאים.

שאלה 2 - פונקציה ריבועית

באיור שלפניך גרף של פונקציה ריבועית

$f(x) = ax^2 + bx + c$. על הגרף סימנו את

הקדקוד ואת החיתוך עם ציר y .



א. מצא את a, b, c .

ב. 1. הישר $y = x$ חותך את הגרף של $f(x)$.

שרטט ומצא את נקודות החיתוך.

2. לאילו ערכי x מתקיים $f(x) \leq x$? הסתמך רק על הגרף שציירת בסעיף הקודם.

שאלה 3 - הפונקציה המעריכית וכללי חזקות

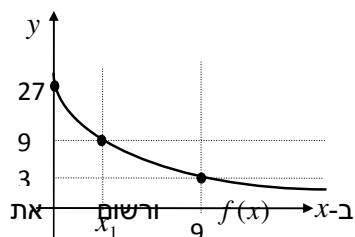
(אין להיעזר בלוגריתמים או במחשבון)

באיור שלפניך גרף הפונקציה $f(x) = a \cdot b^{-x}$, $x \geq 0$.

א. מצא את a ו- b . הצב

הנוסחה ל- f באופן הבא: $f(x) = a \cdot b^{-x/n}$.

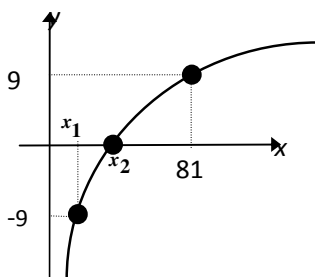
ב. מצא את x_1 .



שאלה 4 - הפונקציה הלוגריתמית וכללי לוגריתמוס

(אין להיעזר במחשבון)

באיור שלפניך גרף הפונקציה $f(x) = \log_3(Ax)$ העובר בנקודה $(81, 9)$.



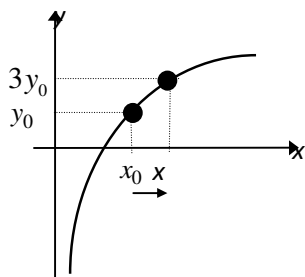
א. מצא את הקבוע A והצב אותו ב- $f(x)$.

ב. מצא את x_1, x_2 .

ג. הנך נמצא בנקודה (x_0, y_0) . על מנת להכפיל את

ערך הפונקציה ל- $3y_0$ עליך להגדיל את x_0 ל- x .

בטא את הערך של x במונחי x_0 .



שאלה 5 - אחוזים (וקצת כללי חזקות ולוגריתמוס)

דני קנה רכב חדש. עברו 4 שנים והרכב איבד 50% מערכו. עברו שנתיים נוספות וערך הרכב היה

50000 ש"ח. מה היה ערכו ההתחלתי של הרכב?

תרגילים – פרק 2

גבול של פונקציה

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה) :

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד) :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x - 6} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad (1)$$
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 - x} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x - 4} \quad (5)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x - 2)(x - 5)} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2 - x)^2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)^2}{x - 2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2 - x) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x} \right)^x \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} \right)^{10x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4} \right)^{4x^2} \quad (7)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (ע"י שימוש בכלל הסנדויץ') :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפוצלת) :

$$(a=1) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (2) \quad (a=0) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=\infty) \quad f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad (a=0) \quad f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty) \quad f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

הערה חשובה מאוד !

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות (ראה פרק 8). בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

פתרונות – פרק 2

(1)								
					40 (4	2 (3	$\frac{11}{12}$ (2	21 (1
(2)								
					$n-1$ (4	6 (3	$\frac{10}{8.5}$ (2	$\frac{5}{6}$ (1
(3)								
		$\frac{1}{3}$ (7	$\frac{3}{4}$ (6	$\frac{1}{6}$ (5	$\frac{3}{8}$ (4	$\frac{-1}{12}$ (3	4 (2	$\frac{1}{2}$ (1
(4)								
1 (9	4 (8	$\frac{1}{8}$ (7	$\frac{1}{2}$ (6	$\frac{1}{2}$ (5	$\frac{1}{2}$ (4	$\frac{1}{2}$ (3	$\frac{3}{4}$ (2	$\frac{3}{4}$ (1
(5)								
0 (9	ϕ (8	∞ (7	∞ (6	$-\infty$ (5	ϕ (4	$-\infty$ (3	ϕ (2	ϕ (1
						$-\infty$ (12	ϕ (11	1 (10
(6)								
-3 (9	-1 (8	1 (7	-5 (6	0 (5	$-\infty$ (4	4 (3	$-\frac{\pi}{2}$ (2	0 (1
$e^{\frac{1}{3}}$ (18	$\ln 3$ (17	2 (16	$\frac{1}{9}$ (15	4 (14	0 (13	0.25 (12	$\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (11	1.5 (10
	$\frac{a-b}{2}$ (26	1/2 (25	-1/2 (24	1/2 (23	$k/2$ (22	2.5 (21	(**) (20	0 (19
(7)								
e (9	e^{30} (8	e^{-12} (7	e (6	e^3 (5	e^{-1} (4	e^2 (3	1 (2	$e^{\frac{1}{2}}$ (1
(8)								
1 (9	4 (8	0.75 (7	0 (6	0 (5	3 (4	0.75 (3	0 (2	0 (1
								0 (10
(9)								
				-1 (5	1 (4	ϕ (3	ϕ (2	4 (1

(**) בשאלה 6 תרגיל 20 יש להפריד לשלושה מקרים :

$$\lim = \sqrt[5]{\frac{a}{b}} \Leftarrow b \neq 0 \text{ (I)}$$

$$\lim = \infty \Leftarrow a > 0, b = 0 \text{ (II)}$$

$$\lim = -\infty \Leftarrow a < 0, b = 0 \text{ (III)}$$

תרגילים – פרק 3
רציפות ומשפט ערך הביניים

רציפות

(1) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" * שלהן :
 (בסעיפים 3 ו-4 שרטט את גרף הפונקציה).

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ 2 & x = 0 \\ 1 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (6) \qquad f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2-x & 1 \leq x < 2 \\ x-3 & x \geq 2 \end{cases} \quad (5)$$

* נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.
 למשל, נקודת התפר בתרגיל 1 היא $x = 0$.

(2) מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x-1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x-2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיף 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל (פרק 8).

(3) מה צריך להיות הערך של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות

בתחום הגדרתן :

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x} + x^2 & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \quad (2) \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{2x} & 0 < x < \pi \quad (1) \\ a \cos x & x \geq \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \quad (4) \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{2^{\frac{1}{x}} - 2}{2^{\frac{1}{x}} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיפים 3 ו- 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל (פרק 8).

(4) עבור כל אחת מהפונקציות בשאלה (1) רשום עבור כל נקודת אי רציפות מאיזה סוג היא.

(5) הוכח או הפרך:

1. סכום שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

2. הפרש שתי פונקציות לא רציפות הוא פונקציה לא רציפה.

3. מכפלת שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

4. מנתן של שתי פונקציות לא רציפות היא פונקציה לא רציפה.

(6) ידוע ש- f רציפה ו- g לא רציפה. האם $f + g$ רציפה? הוכח את טענתך.

משפט ערך הביניים (של קושי)

(7) צטט את משפט ערך הביניים של קושי והסבר אותו גרפית.

(8) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות פתרון אחד:

$$(1) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 = -\ln x \quad (3) \quad x - 0.25 \sin x = 7$$

(9) הוכח שלמשוואה $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ יש לפחות פתרון אחד.

(10) הוכח שלמשוואות הבאות יש לפחות שני פתרונות:

$$(1) \quad e^x - 5x = 0 \quad (2) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0$$

(11) תהי f פונקציה רציפה לכל x המקיימת: $f(0) = 1, f(1) = 2$.

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש לפחות פתרון אחד.

(12) מצא קטע שאורכו אינו עולה על יחידה אחת בו למשוואה $x^2 = 10 - \frac{1}{x}$ יש פתרון.

(13) נגדיר $f(x) = x^2 + \frac{1}{x-1}$.

א. חשב $f(0), f(2)$.

ב. האם ניתן להסיק לפי משפט ערך הביניים שלמשוואה $x^2 + \frac{1}{x-1} = 0$ יש פתרון בקטע $(0, 2)$.

פתרונות – פרק 3

(1) (1) לא רציפה. (2) לא רציפה. (3) רציפה. (4) רציפה. (5) רציפה בנק': $x = 0, 1$, לא רציפה

בנקודה $x = 2$. (6) רציפה בנק' $x = 1$. לא רציפה בנק' $x = 2$. (7) (1) $k = 1$. (2) $k = 4$.

(3) (1) $k = \frac{2}{3}$. (2) $k = -1$. (3) $a = 0, b = \frac{1}{2}$. (4) $a = 1, b = 2$ או $a = 2, b = 1$.

(3) (1) $a = -2e^{-1}, b = e^{-1}$. (2) $a = e/3, b = -e/3$. (3) (1) סליקה. (2) סליקה. (5) מסוג

ראשון. (6) סליקה. (12) $[0.1, 1]$. (13) א. $f(0) = -1, f(2) = 5$. ב. לא.

תרגילים – פרק 4

גזירה של פונקציה

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 29-27 גזור פעם אחת) :

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

פתרונות – פרק 4

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x + 10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x + 10)^3} \quad (2) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4) \quad (3)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6) \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8) \quad (7)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10) \quad (9)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12) \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (13)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (15) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad (16)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 + 2x}{x^4} \right) \quad (17)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2-1)^{5/3}} \quad (20)$$

$$f'(x) = \frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (20)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}, \quad f''(x) = \frac{2x + 3}{2(-x^2 - 3x - 2)^{3/2}} \quad (25)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (26)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (27)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (29)$$

תרגילים – פרק 5

בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)

(1) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(4) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את a ו- c .

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

(6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.

(7) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3, 4)$.

(8) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.

(9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.

א) $y = x^2 - 2x + 1$ ב) $y = \sqrt{x}$ בנקודה $(-3, 1)$

(10) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:

$$y = x^2 \quad \text{ו-} \quad y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$$

(11) מצא את הזווית בין הפונקציות $y = f(x) = x^2$ ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$.

(12) מצא את הזווית בין המעגל $x^2 + y^2 = 8$ והפרבולה $y^2 = 2x$.

(13) הוכח שהאליפסה $x^2 + 2y^2 = 8$ וההיפרבולה $x^2 - y^2 = 2$ נחתכות בזווית ישרה.

פתרונות – פרק 5

(1) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

(2) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

(3) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.

(4) נקודת ההשקה היא $(0, \frac{1}{2})$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

(5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

(6) משוואת המשיק היא $y = 1$.

(7) משוואת המשיק היא $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$.

(8) $k = 1.5$, נקודת ההשקה $(1,1)$.

(9) א) $(0,1)$, $y = -2x + 1$, $(4,9)$, $y = 6x - 15$.

ב) המשיק: $(9,3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

(10) $y = 2x - 1$, $y = -2x - 1$.

(11) 71.57°

(12) 71.56°

תרגילים – פרק 6

חקירת פונקציה

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים*, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות**, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול***, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3)$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2\ln x - 3 \quad (15)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17)$$

$$f(x) = 4\ln^2 x - 4\ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2\arctan x \quad (27)$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (26)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8\cos x + 2\cos 2x - 3 \quad (30) \\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$f(x) = 2\cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \\ (0 \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

הערות:

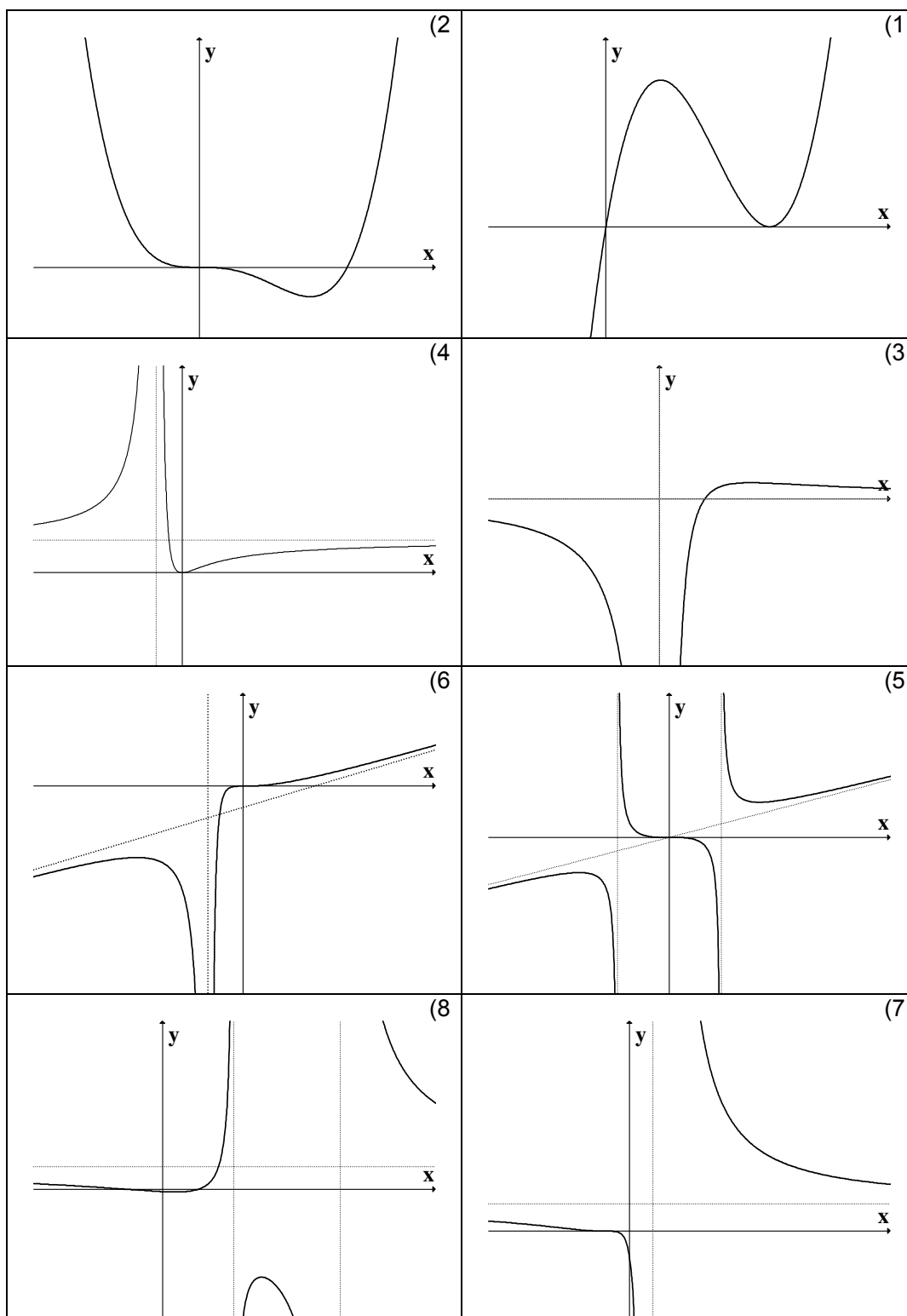
* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר x . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

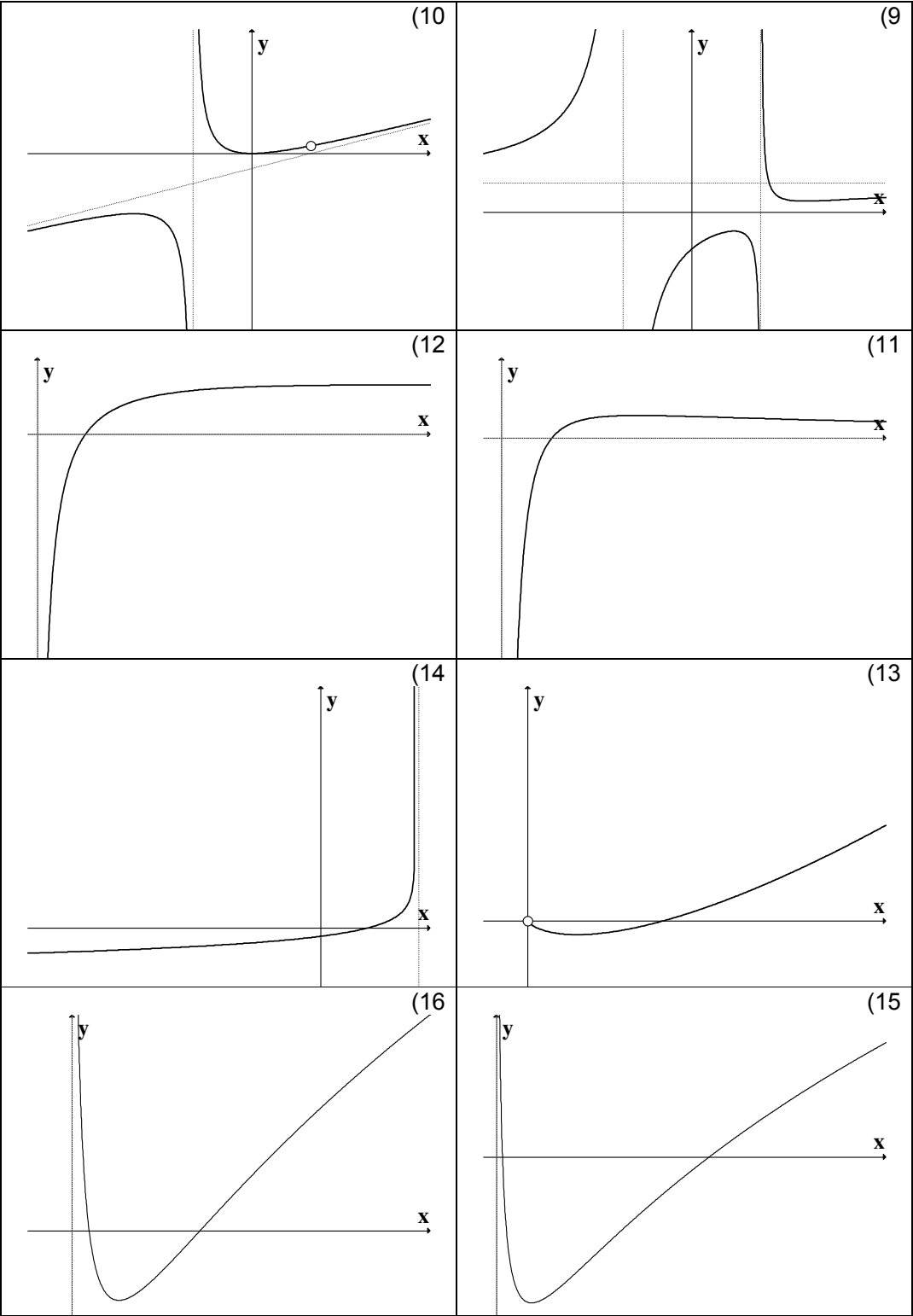
** בתרגילים 1,2,28,29,30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).

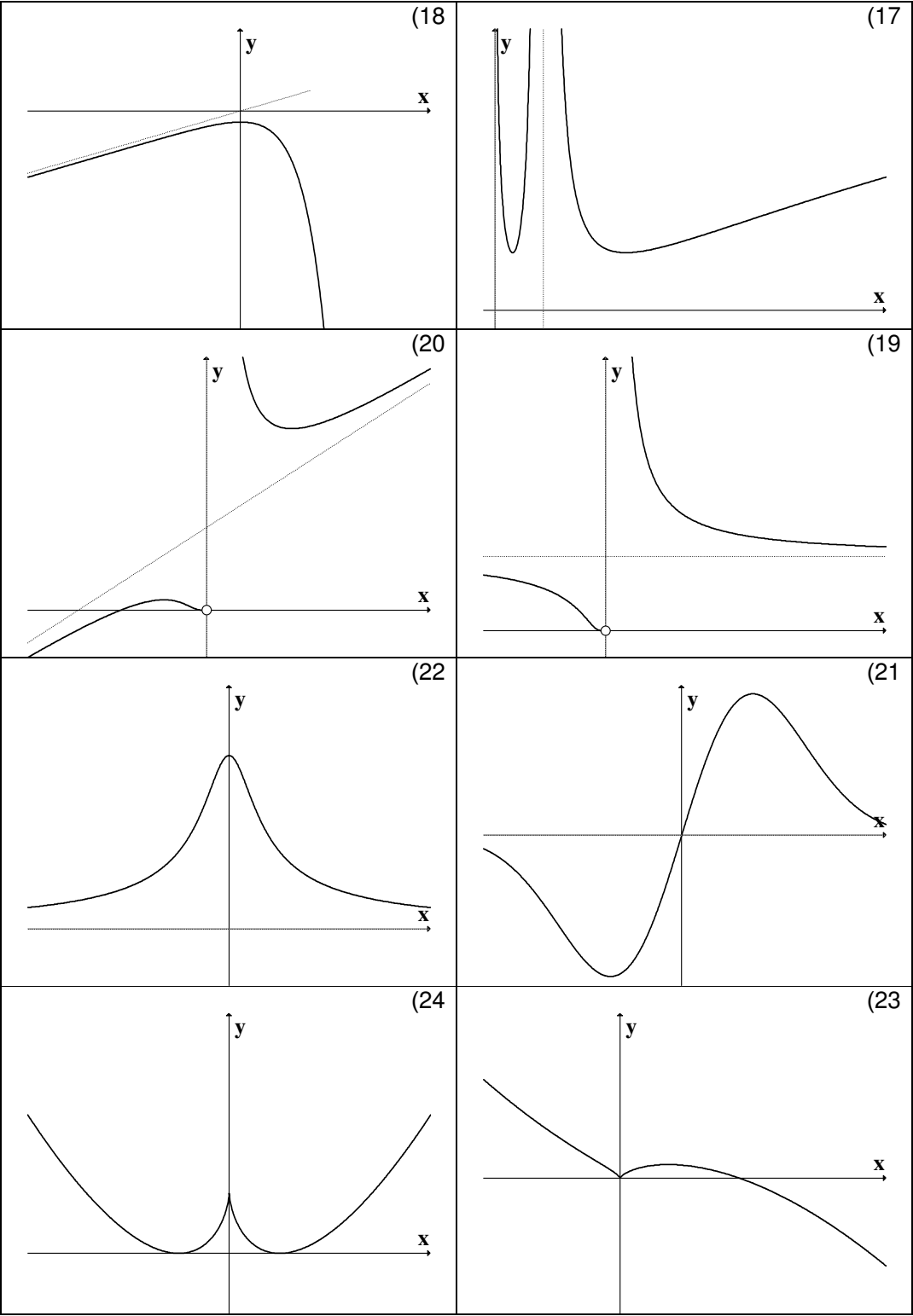
*** בתרגילים 9,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

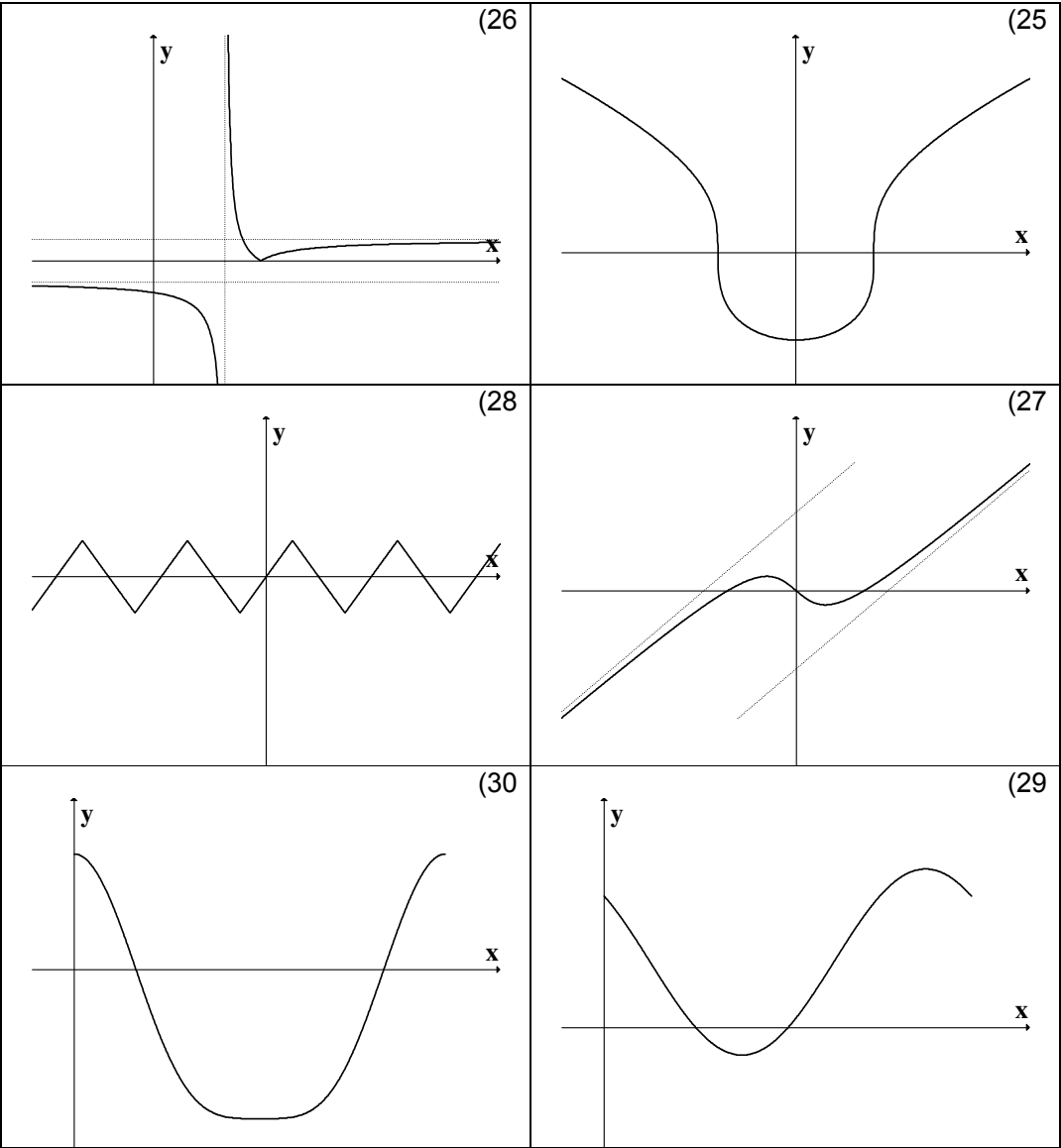
פתרונות – פרק 6

(1)







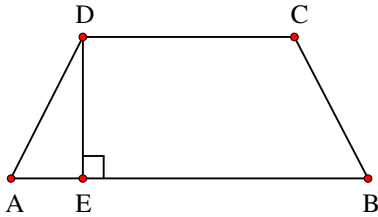


תרגילים – פרק 7

בעיות מקסימום ומינימום

הערה: בפרק זה, סומנו התרגילים הקשים יותר בכוכבית *

בעיות בהנדסת המישור



(1) בטרפז שווה-שוקיים ABCD ($AB \parallel CD$) אורך השוק

הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ.

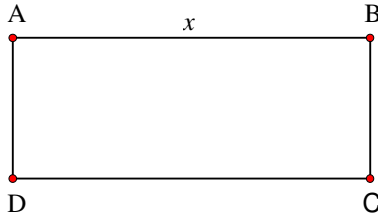
DE הוא הגובה מקדקוד D (ראה ציור).

מה צריך להיות אורך הקטע DE כדי ששטח הטרפז

יהיה מקסימלי?

(2) נתון מלבן ABCD. נסמן ב- x את אחת מצלעות

המלבן (ראה ציור).



(א) אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ בטא באמצעות x

את שטח המלבן.

(ב) אם היקף המלבן הוא p מצא מה צריכים להיות

אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי

(הבע את אורכי הצלעות באמצעות p).

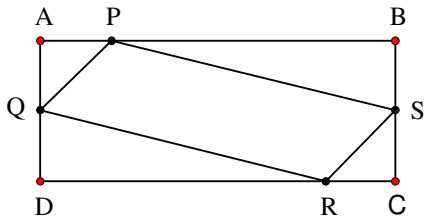
(3) נתון מלבן ABCD כך ש- $AD = BC = 5$ ס"מ,

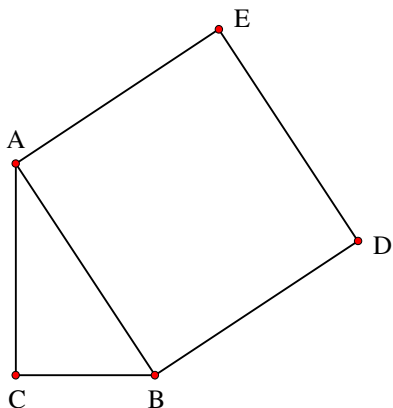
$AB = CD = 10$ ס"מ. על צלעות המלבן מקצים

קטעים: $AP = AQ = CS = CR = x$: (ראה ציור).

מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח

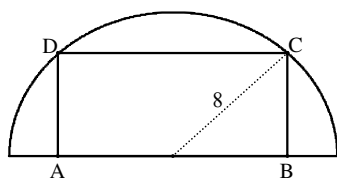
המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?





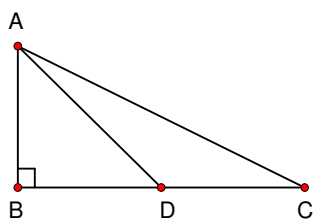
(4)

במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) סכום
אורכי הניצבים הוא 8 ס"מ. על היתר AB בונים
ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים,
כדי ששטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי.



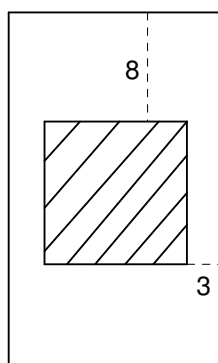
(5)

בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס"מ חוסמים מלבן
ABCD, כך שהצלע AB של המלבן מונחת
על הקוטר, והקדקודים C ו-D מונחים על
הקשת (ראה ציור). מה צריך להיות אורך
הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



(6)

במשולש ישר-זווית $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$), סכום
אורכי הניצבים הוא 30 ס"מ. AD הוא תיכון לניצב
BC (ראה ציור).
חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים, על
מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.



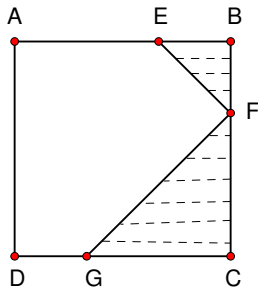
(7)

בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ"ר.
רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס"מ,
ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס"מ.
מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד,
כדי שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח
המקווקו בציור).

(8) בריבוע ABCD הנקודות E , F , G נמצאות על הצלעות

AB , BC , DC בהתאמה, כך ש- $BE = BF$, $CF = CG$

(ראה ציור).



נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס"מ.

א. סמן ב- x את BF ואת BE , והבע באמצעות x את

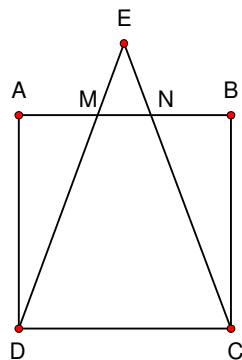
הסכום של שטחי המשולשים EBF ו- FCG (השטח

המקווקו בציור).

ב.1. מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא

מינימלי.

ב.2. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.



(9*) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס"מ. E היא נקודה

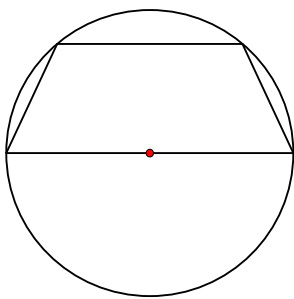
כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא שוו"ש

($ED = EC$). שוקי המשולש חותכים את הצלע AB

בנקודות M ו- N (ראה ציור). מצא מה צריך להיות

אורך הקטע AM כדי שהסכום של שטחי המשולשים

EMN , AMD , BNC יהיה מינימלי.



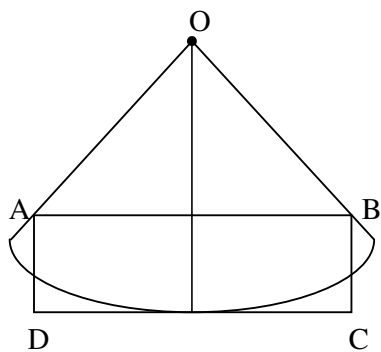
(10*) נתון מעגל שרדיוסו R . במעגל זה חסום טרפז שוו"ש,

כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה

ציור). מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה, הבע

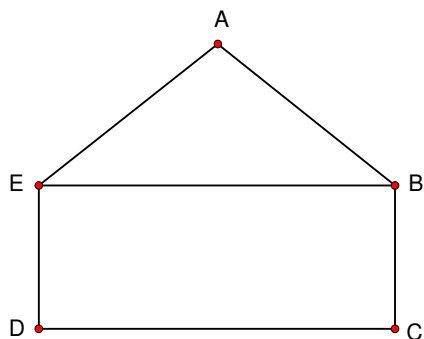
באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז ששטחו

מקסימלי.



(11) נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ.

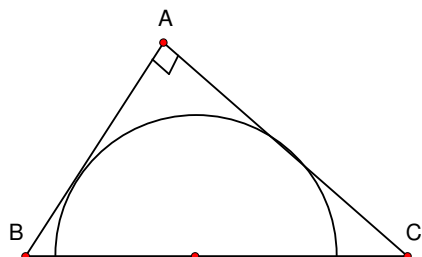
בונים מלבן ABCD, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC בנקודת האמצע שלה, והקודקודים A ו-B נמצאים על הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור). מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.



(12) ABCDE הוא מחומש המורכב ממשולש ABE וממלבן EBCD.

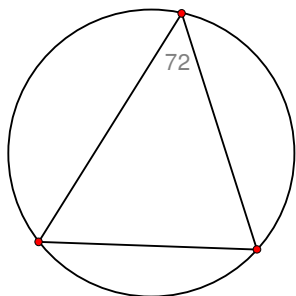
(ראה ציור).

נתון: $BC = 2$ ס"מ, $AB = AE = 4$ ס"מ. מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.



(13) מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית ABC

החוסמים חצי מעגל שרדיוסו R כמתואר בציור. מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא מינימלי?



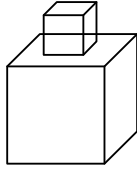
(14) במעגל שרדיוסו R חסומים משולשים כך שהגודל של

אחת הזוויות בכל אחד מהמשולשים הוא $\frac{2\pi}{5}$.

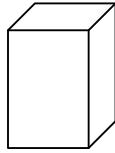
מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.

בעיות בהנדסת המרחב

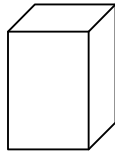
- (15) גובהו של "מגדל" הבנוי שמתי קוביות) לאו דווקא
שוות) הוא 8 ס"מ. מה צריך להיות אורך המקצוע ש
הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי
הקוביות) יהיה מינימלי ?



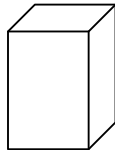
- (16) בונים תיבה שגובהה y ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך
צלעו x ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת
מהדפנות הצדדיות שווה ל- 12 ס"מ. מה צריך להיות
אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



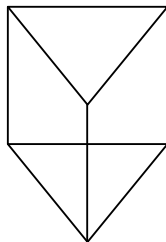
- (17) יש לבנות תיבה פתוחה מלמעלה, שבסיסה ריבוע
ושטח פניה 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב
מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות
שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס
וגובה) שנפחה מקסימלי.



- (18) יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה,
שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק. מהו האורך
המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?



- (19) מחוט שאורכו a ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת
ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות.
מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע
הבסיס x ואיזה חלק לגובה y כדי שיתקיים:
א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.
ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.



(20) מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות,

שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא a , מצא את נפחה

של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

(21) מכל הפירמידות הישרות, שבסיסן ריבוע ושטח

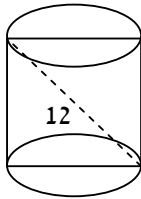
הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של

הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

(22) אלכסון החתך הציורי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה

ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס

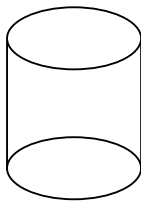
בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



(23) נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק.

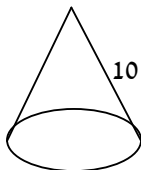
המיכל עשוי כולו מפח. הראה כי שטח הפח הוא

מינימלי כאשר רדיוס הבסיס הוא $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ מטר.



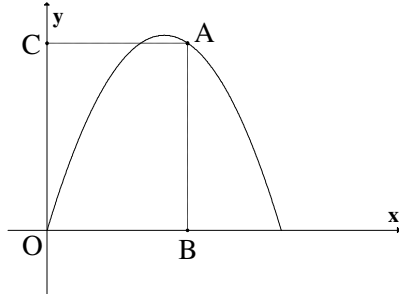
(24) מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10

ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?



בעיות בפונקציות וגרפים

(25) מנקודה A, הנמצאת על גרף הפונקציה



מורידים אנכים לצירים כך שנוצר

מלבן ABOC (ראה ציור).

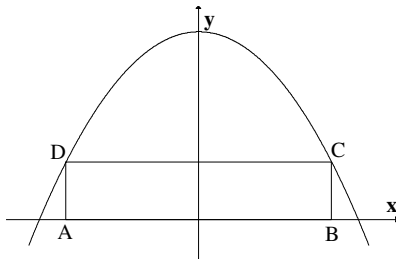
א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף

המלבן יהיה מקסימלי?

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף

המלבן יהיה מינימלי?

(26) בפרבולה $y = 9 - x^2$ חוסמים מלבן ABCD, כך

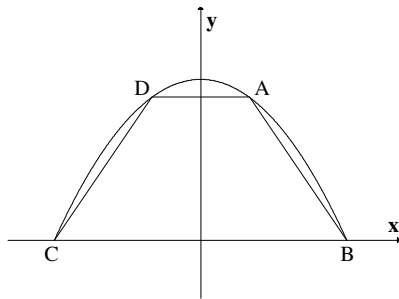


שהצלע AB מונחת על ציר ה- x (ראה ציור).

מה צריך להיות אורך הצלע CD כדי ששטח המלבן

יהיה מקסימלי?

(27) טרפז ABCD חסום בין גרף הפרבולה $y = 9 - x^2$

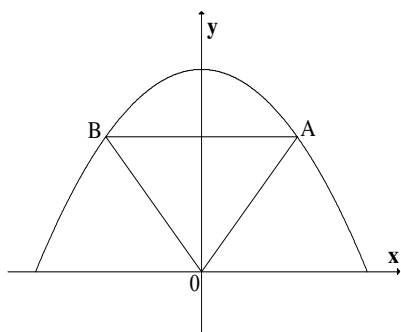


לבין ציר ה- x (ראה ציור).

א. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח

הטרפז ABCD יהיה מקסימלי?

ב. חשב את השטח המקסימלי של טרפז ABCD.



(28) נתונה הפרבולה $y = -x^2 + 12$. ישר המקביל לציר ה-

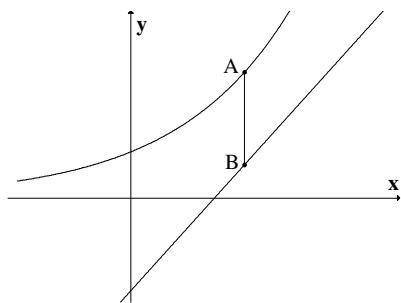
x חותך את הפרבולה בנקודות A ו-B (ראה ציור).

מחברים את הנקודות A ו-B עם ראשית הצירים, O.

א. מה צריך להיות אורך הקטע AB כדי ששטח

המשולש AOB יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB ?



(29) לפניך גרף של הפונקציה $y = e^x$ וגרף של הישר

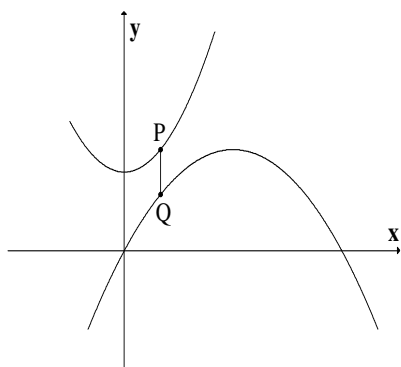
$y = e \cdot x - 2$. ישר המקביל לציר ה-y חותך את

הגרפים בנקודות A ו-B (ראה ציור).

א. מצא לאילו ערכי x אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ב. האם יש ערך של x שעבורו אורך הקטע AB הוא

מקסימלי?



(30) נתונים הגרפים של שתי פרבולות :

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 3x, \quad y = \frac{1}{2}x^2 + 7$$

קו מקביל לציר ה-y חותך את שתי הפרבולות

בנקודות P ו-Q (ראה ציור).

מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה, מצא את

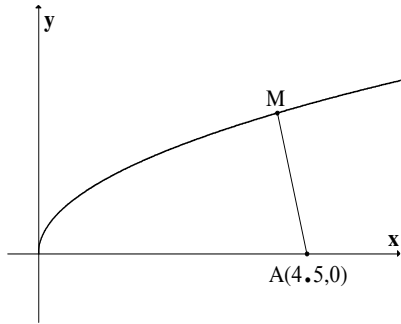
האורך המינימלי של הקטע PQ.

(31) נתון גרף הפונקציה $y = \sqrt{x}$. על ציר ה- x נתונה

הנקודה $A(4.5, 0)$ (ראה ציור).

מצא על גרף הפונקציה נקודה M , כך שריבוע המרחק

AM יהיה מינימלי.



(32) מצא על הישר $f(x) = 3x - 4$ את הנקודה הקרובה

ביותר לנקודה $(0, 1)$.

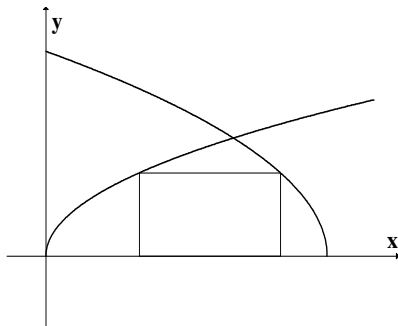
(33) בציור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$$g(x) = \sqrt{36 - 6x}, \quad f(x) = \sqrt{3x}$$

מלבן חסום בין הגרפים של הפונקציות ובין ציר ה- x ,

כמתואר בציור. מצא את השטח הגדול ביותר

האפשרי למלבן שחסום באופן זה.

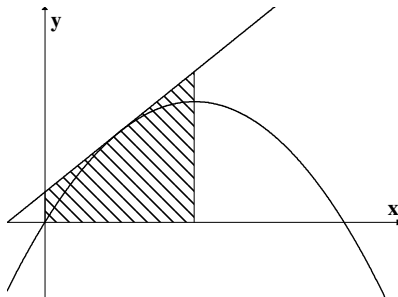


(34) דרך איזו נקודה על הפרבולה $y = -x^2 + 2x$ צריך

להעביר משיק, כדי ששטח הטרפז, הנוצר על ידי

המשיק והישרים: $x = 0$, $x = 1$ ו- $y = 0$ (השטח

המקווקו שבציור) יהיה מינימלי?



(35) נקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $y = x^2$ ברביע

הראשון. A היא הנקודה $(0, a)$ כאשר ידוע כי

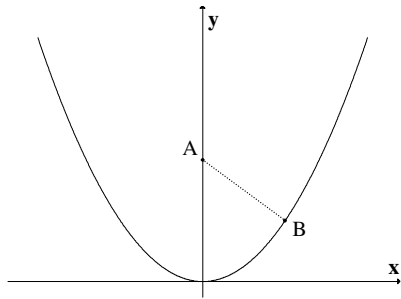
$a > 0.5$ (ראה ציור).

א. בטא באמצעות a את שיעורי הנקודה B, שעבורה

המרחק AB הוא מינימלי.

ב. מצא עבור איזה ערך של a המרחק המינימלי

הוא 2 .



(36) נתונה הפרבולה $y = x^2$, ונתון משיק לפרבולה

שמשוואתו היא $y = 6x - 9$. בנקודה (t, t^2) שעל

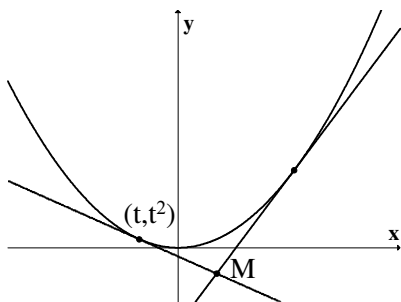
הפרבולה מעבירים משיק נוסף לפרבולה.

המשיקים נחתכים בנקודה M (ראה ציור).

א. הבע את משוואת המשיק הנוסף באמצעות t .

ב. מצא את t שעבורו אורך הקטע, המחבר את

הנקודה M עם קודקוד הפרבולה יהיה מינימלי.



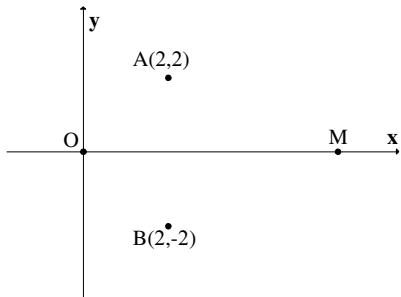
(37) במערכת צירים נתונות הנקודות A(2, 2) ו-

$B(2, -2)$. ראשית הצירים היא בנקודה O. M היא

נקודה על ציר ה-x בתחום $x > 0$. מה צריכים להיות

שיעורי הנקודה M, כדי שהסכום: $OM + MA + MB$

יהיה מינימלי?



פתרונות – פרק 7

- (1) $AE = 1.7_{cm}$ א. $(30 - x)$ ב. כל צלע שווה ל- $0.25p$ (3) $x = 3.75_{cm}$
- (4) $AC = BC = 4_{cm}$ (5) $AB = 2\sqrt{32}_{cm}$ (6) $B = 6_{cm}, BC = 24_{cm}$ (7) אורך: 40 ס"מ
- רוחב: 15 ס"מ. (8) א. $S = x^2 - 6x + 18$ ב. 1. $x = 3$ ב. 2. 9 סמ"ר. (9) $AM = 5/\sqrt{2}$
- (10) בסיס קטן $R = 4\sqrt{5}_{cm}$ (11) $4\sqrt{5}_{cm}$ (12) $12\sqrt{3}$ סמ"ר. (13) $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$
- (14) $\frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}, \frac{2\pi}{5}$ (15) 4 ס"מ. (16) 4 ס"מ. (17) צלע הבסיס: 5 ס"מ. גובה: 2.5
- ס"מ. (18) 120 ס"מ. (19) א. $x = \frac{1}{12}a, y = \frac{1}{6}a$ ב. $x = y = \frac{1}{9}a$ (20) $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$
- (21) $\frac{500}{3}$ סמ"ק. (22) גובה: $\sqrt{48}$ ס"מ. רדיוס: $\sqrt{24}$ ס"מ. (24) 403.1 סמ"ק.
- (25) א. $A(3, 6)$ ב. $A(0, 0)$ או $A(5, 5)$ (26) $CD = 2\sqrt{3}$ א. $A(1, 8)$ ב. 32.
- (28) א. $AB = 4$ ב. $S_{\Delta AOB} = 16$ א. $x = 1$ ב. איך. (30) $PQ = 4$
- (31) $M(4, 2)$ (32) $(1.5, 0.5)$ (33) 8 (34) $(0.5, 0.75)$
- (35) א. $B(\sqrt{(2a-1)/2}, (2a-1)/2)$ ב. 4.25 (36) א. $y = 2t \cdot x - t^2$ ב. $t = -3/37$
- (37) $M(0.845, 0)$

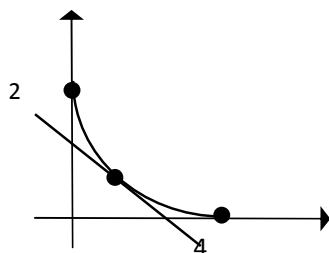
תרגילים – פרק 8

שימושי הנגזרת

שאלה 1 - משיק

לפניך גרף הפונקציה $f(x) = \frac{6}{x+2} - 1$ ברביע הראשון.

הישר $y = \frac{5}{3} - ax$ משיק לגרף בנקודה המודגשת.



א. מצא את נקודת ההשקה ואת הפרמטר a .

ב. השלם את גרף הפונקציה לכל $x \neq -2$.

ג. על הגרף של הפונקציה יש נקודה בה הישר המשיק יקביל לישר המשיק מסעיף א. מצא נקודה זו, מצא את משוואת המשיק הנ"ל והראה גרפית את המצב המתואר כאן.

שאלה 2 - חקירת פונקציה מלאה

נגדיר $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 4)^2$.

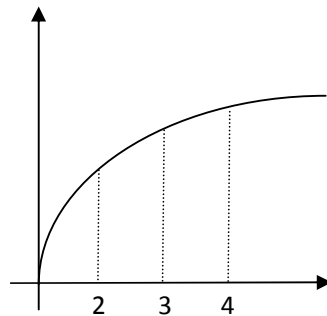
חקור את $f(x)$ חקירה מלאה לפי הפירוט הבא:

תחומי מונוטוניות, נקודות קיצון, תחומי קמירות וקעירות, נקודות פיתול, גרף.

שאלה 3 - תכונות של פונקציות מונוטוניות

- א. תהיינה $f(x)$; $g(x)$ פונקציות עולות.
הוכח, בשתי דרכים שונות, כי הפונקציה $2f(x) + 3g(x) + 4$ היא פונקציה עולה.
ב. תהיינה $f(x)$; $g(x)$ פונקציות יורדות. האם פונקציית המכפלה $f(x) \cdot g(x)$ היא בהכרח פונקציה יורדת? הוכח או הבא דוגמה נגדית.
ג. תהי $h(x)$ פונקציה עולה. הוכח, ללא שימוש בגזרות, כי הפונקציה $h(h(x))$ היא פונקציה עולה.

שאלה 4 - תכונות של פונקציה קעורה



א. תהי $u: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+$ פונקציה עולה וקעורה.

$$\text{הוכח כי } u(3) > \frac{u(2) + u(4)}{2}$$

- ב. נגדיר $f(x) = (2x)^b$ לכל $x > 0$. קבוע חיובי.
1. מצא תנאי על b על מנת שהפונקציה תהיה עולה וקעורה .
2. לפניך טענה. אם הטענה נכונה - הוכח אותה. אם הטענה שגויה הבא דוגמה נגדית .
הטענה: אם $g(x)$ עולה וקעורה אזי גם $(g(x))^5$ עולה וקעורה.

שאלה 5 - בעיית קיצון כלכלית

יעל נוהגת לעשות שופינג בכל יום בכיכר המדינה. לאחרונה החליטה יעל לשכור דירה לחודש (30 יום). אם הדירה נמצאת במרחק x ק"מ מכיכר המדינה דמי השכירות החודשיים הינם

$$P(x) = 60 - 4x$$

בכל יום יעל נוסעת הלוך ושוב לכיכר המדינה.

$$\text{הוצאות הנסיעה לק"מ אחד נתונות על-ידי } D(x) = \frac{x^2}{180} + \frac{2}{3x}$$

- א. רשום את ההוצאה הכוללת של יעל, $TC(x)$.
ב. באיזה מרחק מכיכר המדינה על יעל לשכור את דירתה?
ג. שרטט גרף איכותי של $TC(x)$. הדגש את שיעורי נקודת הקיצון.