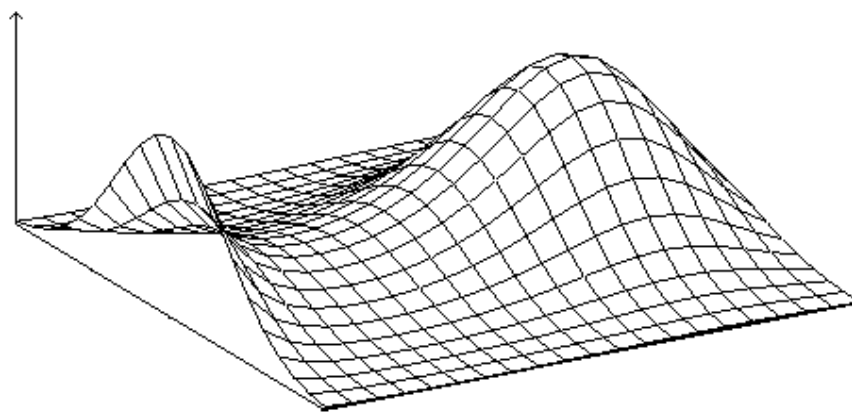


מתמטיקה 2



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (חדו"א 2) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva2.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

פרק 1 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים	4
פרק 2 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה).....	6
פרק 3 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג').....	8
פרק 4 - קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה.....	10
פרק 5 – אינטגרלים	11
פרק 6 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת).....	12
פרק 7 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות.....	18
פרק 8 - מטריצות	25
פרק 9 - דטרמיננטות	31
פרק 10 - מרחבים וקטורים	37
פרק 11 - העתקות (טרנספורמציות) לינאריות.....	45
נספח נוסחאות.....	48

פרק 1 - פונקציות בשני משתנים לכלכלנים

עקומות שוות ערך, נגזרות חלקיות

עקומות שוות ערך

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

(2)

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$ באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f .

$$\text{נגדיר } f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases} \text{ הנח כי } x, y \geq 0.$$

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x, y) = 4, 12$ עבור הפונקציה הנתונה.

שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$.

(3)

תהי $y \geq 0$, $x \geq 0$, $u(x, y) = (x + p)(y + q)$ פונקצית תועלת של פרט. הנקודות $(1, 6)$, $(3, 2)$, $(0, 14)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקציה התועלת. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות? עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

נגזרות חלקיות

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$(only f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3)$$

פרק 2 - קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4.$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפתח 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה (1, 2, 3) למישור $-2x - 2y + z = 0$ וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבוני, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוני, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות – פרק 2

- (1) $(-0.5, 1)$ אוכף ; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום ; $(-1, -2)$ מקסימום ; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכף.
- (3) $(0, 0)$ אוכף ; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ מינימום ; $(1, 0)$ מקסימום ; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוכף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום. (6) $(4, 4)$ מקסימום.
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום. (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$. (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1=10\$$, $P_2=12\$$, רווח מקסימלי $288\$$.

פרק 3 - קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(10) מוושלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = \ln x + \ln y$.

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוושלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוושלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל (x, y) נתונה על ידי $u(x, y) = xy$.

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח. לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

לדני תועלת $f(x, y) = 4x + 6y$.

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K = 2$, $P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף (K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

פתרונות – פרק 3

- | | | | | | |
|---------------------|--|------|---------------------|--|------|
| $Max(0, \pm 1)$ | $\min(\pm 1, 0)$ | (2) | $Max(\pm 1, \mp 1)$ | $\min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7})$ | (1) |
| $Max(\pm 2, 1)$ | $\min(\pm 2, 1)$ | (4) | $Max(2, 3)$ | $\min(-2, -3)$ | (3) |
| | $Max(9, 36)$ | (6) | | $Max(6, 2)$ | (5) |
| $Max(\pm 1, \mp 1)$ | $\min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7})$ | (8) | | $(6, 2)$ | (7) |
| | $\min(\sqrt{32}, \sqrt{8})$ | (10) | | $7 / \sqrt{45}$ | (9) |
| | $Max(2, 3)$ | (12) | | $Max(6, 2)$ | (11) |
| | | | $\min\{2K + L\}$ | $;\sqrt{K} + \sqrt{L} = 100$ | (13) |

פרק 4 - קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה

- (1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של
 $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת משולש שקודקודיו הם: $(0, 5), (3, 0), (0, 0)$.
- (2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של
 $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור, בצורת ריבוע שקודקודיו הם $(2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0)$.
- (3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של
 $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ בתחום R , כאשר R הוא העיגול $x^2 + y^2 \leq 4$.
- (4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של
 $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור,
 $R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}$.
- (5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של
 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$ בתחום R , כאשר R הוא התחום הסגור,
 $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$.

פתרונות – פרק 4

- (1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.
- (2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.
- (3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.
- (4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.
- (5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.

פרק 5 – אינטגרלים

האינטגרל הלא מסוים (אינטגרל מיידי)

***הערה: תרגילים עם פונקציות טריגונומטריות כגון סינוס וקוסינוס לא צריך!**

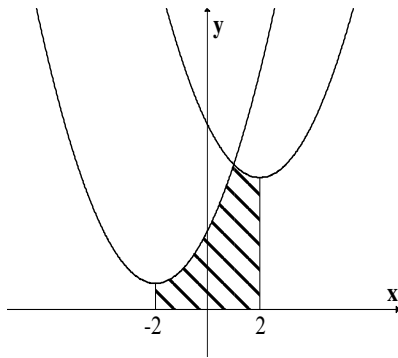
חשב את האינטגרלים הבאים :

- | | | |
|--|---|--|
| $\int \frac{1}{x^2} dx$ (3) | $\int x^4 dx$ (2) | $\int 4dx$ (1) |
| $\int 4x^{10} dx$ (6) | $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ (5) | $\int \sqrt{x} dx$ (4) |
| $\int (x^2 + 1)^2 dx$ (9) | $\int (\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}) dx$ (8) | $\int (2x^2 - x + 1) dx$ (7) |
| $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$ (12) | $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$ (11) | $\int (x^2 + 1)(x + 2) dx$ (10) |
| $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$ (15) | $\int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx$ (14) | $\int (4x + 1)^{10} dx$ (13) |
| $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$ (18) | $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$ (17) | $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$ (16) |
| $\int \frac{1}{4x} dx$ (21) | $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$ (20) | $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$ (19) |
| $\int \frac{1}{4x-1} dx$ (24) | $\int (1 + \frac{1}{x})^2 dx$ (23) | $\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$ (22) |
| $\int (e^{4x} + e^{-x}) dx$ (27) | $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$ (26) | $\int \frac{x+3}{x+2} dx$ (25) |
| $\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx$ (30) | $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$ (29) | $\int (e^{x+1})^2 dx$ (28) |
| $\int \frac{x^2}{1-x^2} dx$ (33) | $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$ (32) | $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$ (31) |
| $\int 2 \sin 4x + \cos x dx$ (36) | $\int \sin \frac{x}{2} dx$ (35) | $\int \cos 4x dx$ (34) |

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 6 - שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)

חישוב שטחים



(1) נתונות שתי פונקציות :

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$

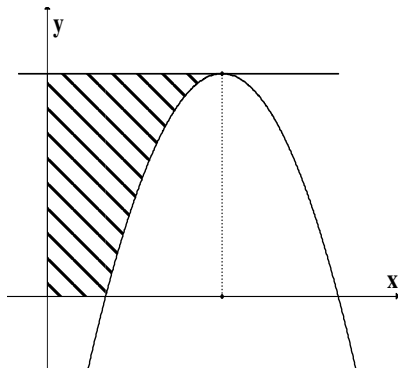
$$g(x) = x^2 - 4x + 14$$

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים

$$x = -2 \text{ ו- } x = 2 \text{ (השטח המקווקו בציר).}$$



(2) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 5$ (ראה ציור).

א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של

הפונקציה.

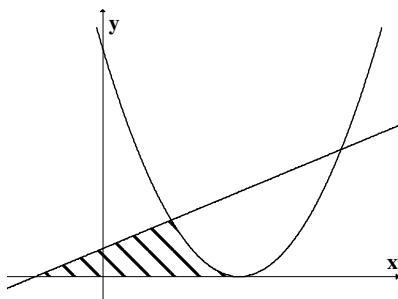
ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק

בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי

גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציר).



(3) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$ ונתון הישר

$$y = 0.5x + 0.5 \text{ (ראה ציור). מצא את השטח}$$

המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x

(השטח המקווקו בציר).

(4) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 18$$

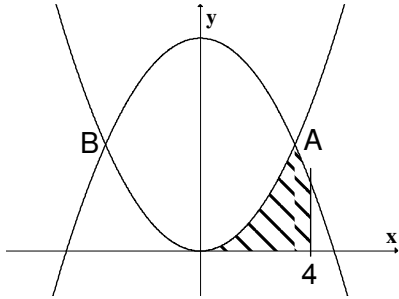
הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו-B

(ראה ציור).

א. מצא את שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.

ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי

הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה-x ועל

ידי הישר $x = 4$.

(5) נתונות שתי פונקציות :

$$y = -x^2 + 3x + 2$$

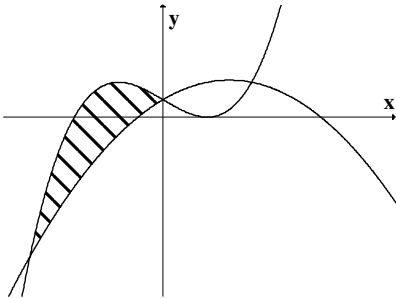
$$y = x^3 - 3x + 2$$

א. מצא את שיעורי ה-x של נקודות החיתוך בין

הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, השטח המקווקו בציור.

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + ax$.הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2,8)$ (ראה ציור).

א. מצא את ערך הפרמטר a.

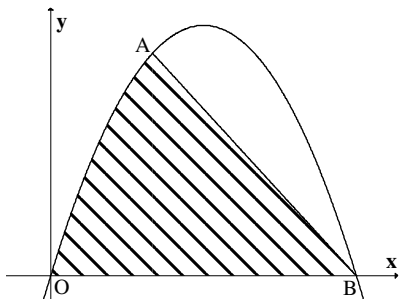
ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה $O(0,0)$

ובנקודה B. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר

ה-x.



(7)

בציור שלפניך נתונות שתי הפונקציות :

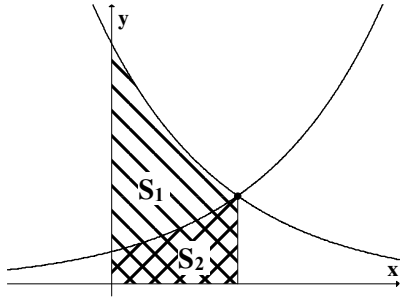
$$f(x) = e^{-x+2}$$

$$g(x) = e^x$$

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר y .

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

ג. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ (ראה ציור).



(8)

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{-2x}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

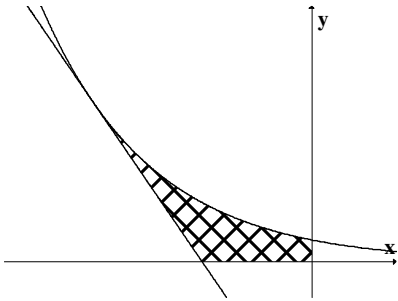
$$x = -1 \quad (\text{ראה ציור}).$$

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח

המקווקו בציור).



(9)

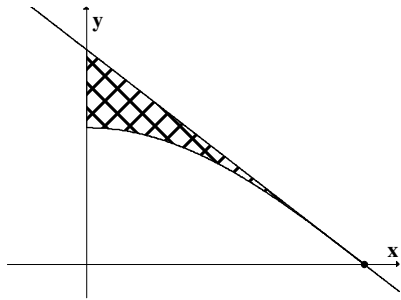
נתונה הפונקציה $y = \cos 2x$ בתחום $0 \leq x \leq 4$ (ראה ציור).

ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

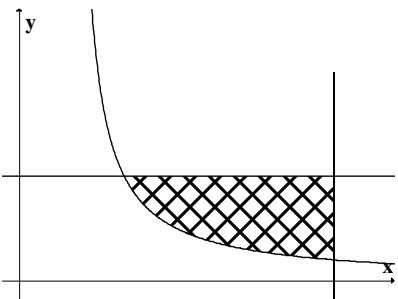


(10)

חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

$$y = \frac{1}{2x-1} \quad \text{ועל ידי הישרים } x = 3 \text{ ו- } y = 1$$

(השטח המקווקו בציור).

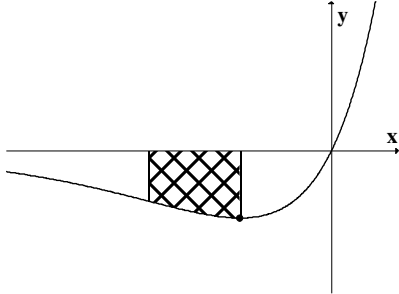


לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל-

כתב ופתר - גיא סלומון ☺

(11) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - e^x$.

לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.



א. מצא את שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך

לציר ה- x . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף

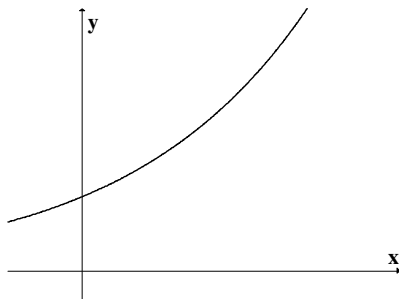
הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל

ידי הישר $x=a$, שווה ל- $3e^{2a} - e^a$, כאשר

$a < \ln 0.5$. מצא את הערך של a .

(12)

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}$ (ראה ציור).



שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A , הוא $\frac{e^2}{2}$.

א. מצא את שיעורי הנקודה A .

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה A .

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(13)

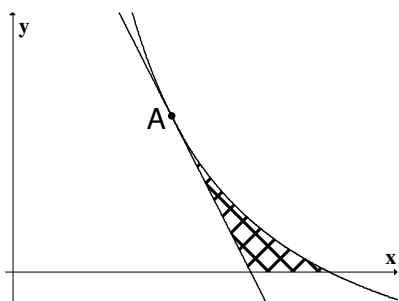
נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{8}{x} - 2$ בתחום $x > 0$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

$A(2, 2)$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,



על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו בצירור).

(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \sin x ; 0 \leq x \leq \pi$$

$$g(x) = \cos 2x ; 0 \leq x \leq \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15) נתונה הפונקציה $f(x) = tg^2 x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\frac{\pi}{4}$.

ב. הראה כי $\int tg^2 x dx = tgx - x + c$ ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x .

(16) דרך הנקודה $A(8,0)$ העבירו משיקים לפרבולה $y = x^2 - 10x + 25$.

א. מצא את משוואות המשיקים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.

(17)

נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + 4$ בתחום $x \geq 0$.

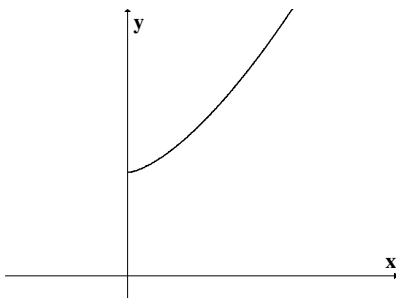
(ראה ציור)

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה

$(0,0)$ ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .



(18) א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \cos^3 x$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x ועל ידי גרף הפונקציה $y = \cos^2 x \cdot \sin x$

$$\text{בתחום } \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$

* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

(19) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.

(20) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.

(21) חשב את האינטגרלים הבאים: א. $\int_0^a \sqrt{x^2 - a^2} dx$ ב. $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy$

חישוב אורך עקום (קשת)

(22) חשב את אורך העקום הנתון בסעיפים הבאים:

$$(1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3) \quad (1 \leq x \leq 8) y = x^{2/3} \quad (2) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8) x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2) y = x^2 \quad (9) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \ln x \quad (8) \quad (0 \leq y \leq 4) x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

פרק 7 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות :

$$\begin{array}{llll} x + y = 3 & (4) & 2x + y = 3 & (3) \\ x - 4y = -7 & (2) & x + 10y = 11 & (1) \\ 2x + y = 4 & & x - y = 0 & \\ & & x - y = -1 & \\ & & 2x - 2y = 0 & \end{array}$$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{llll} x = 3 & (4) & 2x + y + z = 3 & (3) \\ x - 4y + z = -7 & (2) & x + 10y = 11 & (1) \\ 2x + y = 4 & & x - z = 0 & \\ & & x - y = -1 & \\ & & 2x - 2 = 0 & \\ z + t = 8 & & x + y + z = 5 & \\ & & x + y = 3 & \end{array}$$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & (1) \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

(5) א. הסבר והדגם את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.

ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}^{(*9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{R}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{C}$.

(6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

$$\begin{array}{lll} 8x-4y=10 & (3) & 4x+8y=20 & (2) & 2x+3y=8 & (1) \\ -6x+3y=1 & & 3x+6y=14 & & 5x-4y=-3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x+2y+3z=3 & (6) & x+2y+3z=-11 & (5) & 2x_1-x_2-3x_3=5 & (4) \\ 4x+6y+16z=8 & & 2x+3y-z=-5 & & 3x_1-2x_2+2x_3=5 & \\ 3x+2y+17z=1 & & 3x+y-z=2 & & 10x_1-6x_2-2x_3=32 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 3x-2y=1 & (9) & 4x-7y=0 & (8) & x+3y=2 & (7) \\ -9x+6y=-3 & & 8x-14y=2 & & 2x+y=-1 & \\ 6x-4y=2 & & -16x+28y=4 & & x-y=-2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x+2y+2z=2 & (12) & x_1+5x_2+4x_3-13x_4=3 & (11) & x+2y-3z+2t=2 & (10) \\ 3x-2y-z=5 & & 3x_1-x_2+2x_3+5x_4=2 & & 2x+5y-8z+6t=5 & \\ 2x-5y+3z=-4 & & 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4=0 & & 6x+8y-10z+4t=8 & \\ 2x+8y+12z=0 & & & & & \end{array}$$

(7) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x - y + z = 1 & (1) & x + ky + z = 1 & (2) & x + 2ky + z = 0 & (3) \\ 5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 & & 3x + y + kz = 2 & & 3x + y + kz = 2 & \\ 3x - y + (k + 3)z = 3 & & kx + y + z = 1 & & x + 9ky + 5z = -2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2x - y + z = 0 & (4) & kx - y = 1 & (5) & x + ky + 3z = 2 & (6) \\ x + 2y - z = 0 & & (k - 2)x + ky = -2 & & kx - y + z = 4 & \\ 5x + (1 - k)y + k^2z = 1 & & (k^2 - 1)z = 9 & & 3x + y + (2 + k)z = 0 & \end{array}$$

(8) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות :

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} 2x + ky = 3 & (1) & 2x - 3y + z = 1 & (2) & 3x + 4y - z = 2 & (3) \\ (k + 3)x + 2y = k^2 + 5 & & 4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k & & kx - 2y + z = -1 & \\ 6x + 3ky = 7k^2 + 2 & & & & x + 8y - 3z = k & \\ 2x + 6y - 2z = 0.5k + 1 & & & & & \end{array}$$

(9) מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות :

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x + 2y - 4z = b & (1) & 2x + 4y + az = -1 & (2) & x + y - z + t = 1 & (3) \\ 7x - 10y + 16z = 7 & & x + 2y + 4z = -4 & & ax + y + z + t = b & \\ 2x - ay + 3z = 1 & & x + 2y - 4z = 0 & & 3x + 2y + at = 1 + a & \\ x + 2y + 6z = -2b & & & & & \end{array}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות :

$$\begin{aligned} x + az &= 1 \\ y + 2z &= 2 \\ bx + cy + dz &= 3 \end{aligned}$$

א. מצא תנאי עבור a, b, c, d כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b, c, d כך שלכל a למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל השדה $\mathbf{F}$.

$$\begin{array}{ll} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 & \\ 3x_1 + x_3 = 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 1 + 4i & (2) \\ iz_1 + z_2 + (1 + i)z_3 = 2 + i \\ (-1 + 3i)z_1 + (3 - i)z_2 + (2 + 4i)z_3 = 5 - i \end{array}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbb{C}, \mathbf{F} = \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbb{Z}_5}$$

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases} \quad (12) \text{ נתונה המערכת:}$$

א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת: 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

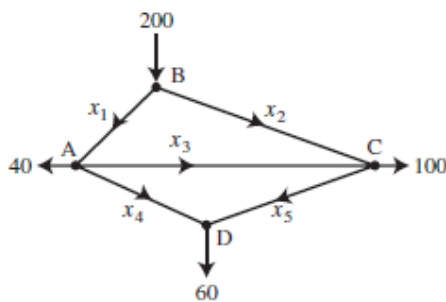
ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.

ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.

ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$. האם ייתכן

שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.

ח. מצא לאיזה ערך של k , $(1, 0, 0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.



(13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה

(במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.

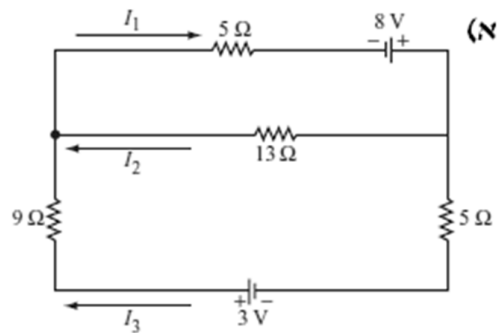
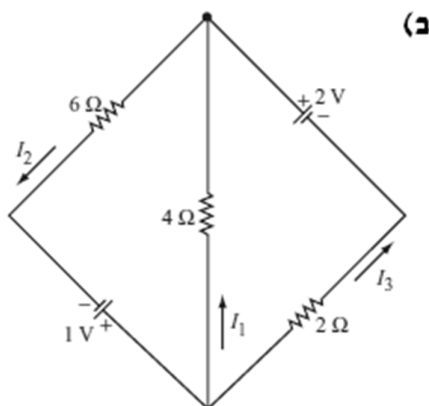
א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם

ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של x_1 אם ידוע ש- $x_4 = 0$.

(14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם):



* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.

תשובות:

(1) (1 ו-3) שקולות ו-2) (4) שקולות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{(4)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1 \quad (2) \quad R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad (2) \quad R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad (1) \quad (4)$$

5) ב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$F=\mathbb{R} \qquad F=\mathbb{C}$

(6)

$$(x, y) = (5 - 2t, t) \quad (2) \qquad (x, y) = (1, 2) \quad (1)$$

$$\phi \quad (4) \qquad \phi \quad (3)$$

$$(x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (6) \qquad (x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (5)$$

$$\phi \quad (8) \qquad (x, y) = (-1, 1) \quad (7)$$

$$(x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (10) \qquad (x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t\right) \quad (9)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (12) \qquad \phi \quad (11)$$

$$\text{א. } k = -2 \quad \text{ב. } k \neq 1, k \neq -2 \quad \text{ג. } k = 1 \quad \text{ד. } k \neq 1, k \neq -2 \quad (17) \quad k = 1$$

$$\text{א. } k = -1, k \neq \frac{4}{7} \quad \text{ב. } k = -1 \quad \text{ג. } k = \frac{4}{7} \quad \text{ד. } k \neq 1, k \neq -0.4 \quad (4)$$

$$\text{א. } k = \pm 1, k \neq -2 \quad \text{ב. } k = \pm 1, k = -2$$

$$\text{א. } k = -1, k = -3, k = 2 \quad \text{ג. } k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2$$

$$(8) \quad \text{א. } k = -1 \quad \text{ב. } k \neq \pm 1 \quad \text{ג. } k = 1 \quad \text{ד. } k \neq 3 \quad \text{ה. } k = 3 \quad \text{ו. } k \neq 1 \quad \text{ז. } k = 1$$

(9)

$$(1) \quad \text{א. } a \neq 2 \quad \text{ב. } a = 2, b \neq -3 \quad \text{ג. } a = 2, b = -3$$

$$(2) \quad \text{א. } a \neq -6, b = 2.5 \quad \text{ב. } a \neq -6 \text{ או } b \neq 2.5$$

$$(3) \quad \text{א. } a = 2, b \neq 2 \quad \text{ב. } a = 2, b = 2 \quad \text{ג. } a \neq 2 \text{ או } a = 2, b = 2$$

$$(10) \quad \text{א. } ab + 2c \neq d \quad \text{ב. } b = 0, c = 1.5, d = 3$$

(11)

$$(1) \quad (x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 0) \quad (2) \quad (z_1, z_2, z_3) = ((-1+i)t + 1+i, 3, t) \quad (z_1, z_2, z_3) = (2, 3, -1) \quad F=\mathbb{R}$$

$$(12) \quad \text{א. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ג. } 1. k \neq -1, k \neq 2 \quad 2. k = -1 \quad 3. k = 2$$

$$\tau. (x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$$

$$\text{ה. } k = \pm 2 \quad \text{ו. } k = -2 \quad \text{ז. } k = 2 \quad \text{ח. } k = -2 \quad \text{ט. } k = 2$$

$$(13) \quad \text{א. } x_3 \text{ ו- } x_5 \text{ חופשיים. } x_1 = 100 + x_3 - x_5, x_2 = 100 - x_3 + x_5, x_4 = 60 - x_5$$

$$\text{ב. } x_3 \text{ חופשי. } x_1 = 40 + x_3, x_2 = 160 - x_3, x_4 = 0, x_5 = 60$$

ג. 40

$$(14) \quad \text{א. } I_1 = \frac{255}{317}, I_2 = \frac{97}{317}, I_3 = \frac{158}{317} \quad \text{ב. } I_1 = \frac{5}{22}, I_2 = \frac{7}{22}, I_3 = \frac{6}{11}$$

פרק 8 - מטריצות

(1) נתונות מטריצות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

$$\begin{array}{llllll} B + AB & (5) & AE - B & (4) & AC - D & (3) & AB & (2) & A + B & (1) \\ E(B - A) & (10) & E(AC) & (9) & E^T B & (8) & (E + A^T)D & (7) & E(B + A) & (6) \end{array}$$

(2) מצא את x, y, z , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x + 2y & 3x - 2y \\ 2x - 5y & 2x + 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2z & 5 + z \\ -4 - 3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

$$\begin{array}{llllll} 2tr(D^2 - 2E) & (5) & 2D + 4EI_3 & (4) & 5C & (3) & E - D + I_3 & (2) & E + D & (1) \\ DABC & (10) & tr(C^T C) & (9) & I_2 BC & (8) & \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C & (7) & 4C^T + A & (6) \end{array}$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$ המבטאות את מערכת המשוואות

הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$.

$$\begin{array}{ll} 2x - 3y + z + t = 1 & (2) \quad 2x + y - z = 3 \quad (1) \\ 4x + y + 2z = 4 & x + 2y - 4z = 5 \\ y + z + t = 1 & 6x + 4y + z = 2 \\ x - 4z - 2y = 10 & \end{array}$$

(5) נתון :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות לינאריות :

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (5) \quad A\underline{x} = \underline{x} \quad (4) \quad A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (3) \quad A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (2) \quad A\underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

(6) מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$ ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.א. ידוע ש- A מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון :1. AA^T סימטרית. 2. $A + A^T$ סימטרית. 3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.ב. ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון :1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. $A^2 - B^2$ סימטרית. 3. $A^2 + B$ סימטרית.ג. ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$. מי מבין הבאים נכון :1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A - B)^2$ סימטרית.ד. ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$. הוכח :1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.ה. נתון : A, B, AB סימטריות מאותו סדר. הוכח כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix}$

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה איננה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z + 4t &= 1 & (2) \quad 2x - y + z &= 3 & (1) \\ x + 2y - z &= 0 & 3x - 2y + 2z &= 5 \\ y + z + t &= 1 & 5x - 3y + 4z &= 11 \\ x + 3y - z - 2t &= 0 \end{aligned}$$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X :

$$\begin{aligned} P^{-1}X^T P &= A & (3) \quad A^{-1}XC &= A^{-1}DC & (2) \quad AXC &= D & (1) \\ ABC^T X^{-1}BA^T C &= AB^T & (6) \quad (A - AX)^{-1} &= X^{-1}C & (5) \quad C^{-1}(A + X)D^{-2} &= I & (4) \end{aligned}$$

ב. נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

ג. נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

ד. נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^T B (I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(11) א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A - 3I)(A + 2I) = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ג. נתונים: $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. חשב את $p(A)$.

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- A והפיכה ובטא את A^{-1} בעזרת A

ו- I בלבד.

(12) נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I - A$ הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

(13) נתון: $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$. הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D כך ש- $D^{-1}AD = C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C (כלומר יחס הדימיון

הוא יחס טרנזיטיבי).

הערה

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

תשובות:

$$\begin{array}{llll} (5 & (4 & 4 \times 2 & (3 & (2 & 4 \times 6 & (1 & (1) \\ 6 \times 6 & (10 & 6 \times 4 & (9 & (8 & 6 \times 2 & (7 & 6 \times 6 & (6 \end{array}$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}^{(4)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}^{(7)} \quad \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}^{(6)} \quad 230 \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}^{(10)} \quad 63 \quad (9)$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{array}{lll} (4+k)x - 2y + 4z = 1 & (3) & -2y + 4z = 1 & (2) & 4x - 2y + 4z = 1 & (1) & (5) \\ x + (k-1)y + z = 2 & & x - 5y + z = 2 & & x - y + z = 2 & & \\ x - 6y + (3+k)z = 3 & & x - 6y - z = 3 & & x - 6y + 3z = 3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2x + y + z = 3 & (5) & 3x - 2y + 4z = 0 & (4) \\ -2x - 3y - 6z = 6 & & x - 2y + z = 0 & \\ 4x + y + z = 9 & & x - 6y + 2z = 0 & \end{array}$$

$$1, 2, 3 \text{ א. } 1, 2, 3 \text{ ב. } 2 \text{ ג. } 1, 2, 3 \quad (6)$$

(7)

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}^{(1)} \\
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(4)} \\
 & \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{(7)}
 \end{aligned}$$

$$k=1, k=-4 \quad (2) \quad k \neq 1, k \neq -2 \quad (1) \quad (8)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (2) \quad (x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (1) \quad (9)$$

$$CD^2 - A \quad (4) \quad (P^{-1})^T A^T P^T \quad (3) \quad D \quad (2) \quad A^{-1}DC^{-1} \quad (1) \quad (10)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad (6) \quad (A + C^{-1})^{-1} A \quad (5)$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad (7) \quad Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad (3) \quad X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I \quad (3) \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad (11)$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I \quad (2) \quad f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1) \quad (3)$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad (12)$$

פרק 9 - דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(6)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(9)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}^{(8)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{(11)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(10)}$$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(6)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(4)}$$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס :

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$(5) \text{ נתון: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \text{ . חשב:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}^{(2)} \quad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}^{(1)}$$

$$(6) \text{ א. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \text{ ב. הוכח כי}$$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n . חשב את הדטרמיננטה של

המטריצה הנתונה :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (3) \quad a_{ij} = \begin{cases} j & i=j+1 \\ n & i=1, j=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (2) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & i=j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad (1)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & \text{אחרת} \end{cases} \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix} \quad (6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases} \quad (*7)$$

* בסעיף (7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3, b=1, c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

$$|-2A^2 A^T \text{adj} B| \quad (4) \quad |-A^{-2} B^T A^3| \quad (3) \quad |4A^2 B^3| \quad (2) \quad |ABA^{-1} B^T| \quad (1)$$

(10) א. נתון: $APQ = B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2 - 2A^{-1} = 0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 2. $|adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A| = 0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A| = 128$, $2AB = B^T A^2$, מצא את n .

ז. נתונים: $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$, $\det(A_{n \times n}) = 2$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3} B^{-n} A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{rcl} x + 2z + 5t = 8 & (3) & x + z = 3 & (2) & x + 2y = 5 & (1) \\ -2x - 6y = -8 & & 4x + y + 8z = 21 & & 3x + 4y = 11 \\ 5x + 3y - 7z + 4t = 5 & & 2x + 3z = 8 \\ 2x + 5y + 44z = 51 \end{array}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} kx + y + z + t + r &= 1 \\ x + ky + z + t + r &= 1 \\ x + y + kz + t + r &= 1 \\ x + y + z + kt + r &= 1 \\ x + y + z + t + kr &= 1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x = y = z = t = r$.

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(14) נתון :

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב: (1) $(adj A)_{1,5}$ (2) $(A^{-1})_{1,5}$ (15) א. הוכח שאם $|A| = 1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם

מספרים שלמים.

ב. נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.ג. נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.ד. נתון: A, B הפיכות. C, D לא הפיכות.האם המטריצות הבאות הפיכות: (1) $C + D$ (2) $A + B$ (3) AD (4) CD (5) AB ?(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודה:

1. $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$ 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$.ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$.ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(1,1,-1), (-1,3,1), (3,3,-2)$.ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2), (3,4), (5,8)$.הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות:

$$9 \text{ (10) } -300 \text{ (9) } .234 \text{ (8) } .24 \text{ (7) } -14 \text{ (6) } -3 \text{ (5) } -1 \text{ (4) } -1 \text{ (3) } .29 \text{ (2) } ad-bc \text{ (1) (1)}$$

$$.6 \text{ (11) } .6 \text{ (2) } .0 \text{ (1) } .0 \text{ (3) } .3 \text{ (4) } .24 \text{ (5) } .44 \text{ (6) } .104 \text{ (7) } .120 \text{ (8) } .114 \text{ (9) } .6 \text{ (10) }$$

$$.(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}} \text{ (3) } .(-1)^{n-1}n! \text{ (2) } .n! \text{ (1) (7) } .9 \text{ (3) } .16 \text{ (2) } -8 \text{ (1) (5)}$$

$$.2 \cdot 3^{n-2} \text{ (6) } .1 \text{ (5) } .(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b] \text{ (4)}$$

$$.D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc \text{ (7) } \text{א.}$$

$$.2^{11} \text{ (4) } -8 \text{ (3) } .2^{13} \text{ (2) } .4 \text{ (1) (9) } .0 \text{ (8) } .D_{20} = 2^{21} - 1 \text{ (2) } .D_n = 2^{n+1} - 1 \text{ (1) ב.}$$

$$.x=1, y=2 \text{ (1) (11) } .4^n \text{ (2) } .7 \text{ (3) } .|A|=18, |B|=-2/3 \text{ (4) } .81/32 \text{ (5) } \text{ג.}$$

$$.k=-2 \text{ (1) ב. } .k \neq 1, k \neq -4 \text{ (2) א. (12) } .x=y=z=t=1 \text{ (3) } .x=1, y=1, z=2 \text{ (4) ד.}$$

ג. לא.

$$adj(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ (2) } adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ (1) (13) } A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, adj(A) = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \text{ (3)}$$

$$.k=0 \text{ (16) } \text{ב. } .k \neq 0 \text{ (15) } .0.5 \text{ (2) } .240 \text{ (1) (14) } .2 \text{ (3) } .4 \text{ (4) } .8 \text{ (5) } \text{א.}$$

$$.2 \text{ (17) } .1 \text{ (16) } .13 \text{ (15) } .2 \text{ (14) } .22 \text{ (13) } .3x-y+4z+2=0 \text{ (12) } \text{ג.}$$

פרק 10 - מרחבים וקטורים

סימונים:

- R^n - המרחב הוקטורי של כל הוקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R .
- $M_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R .
- $P_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R .
- $F[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f: R \rightarrow R)$ מעל השדה R .

תת-מרחבים

(1) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של R^3 :

א. $W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$

ב. $W = \{(a, b, c) \mid a = c\}$

ג. $W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\}$

ד. $W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\}$

ה. $W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\}$

ו. $W = \{(a, b, c) \mid b = a + d, c = a + 2d\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

ז. $W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של $M_n[R]$:

א. $W = \{A \mid A = A^T\}$, כלומר, W מורכב מן המטריצות הסימטריות.

ב. W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B .

כלומר, $W = \{A \mid AB = BA\}$.

ג. W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר, $W = \{A \mid |A| = 0\}$.

ד. W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W = \{A \mid A^2 = A\}$.

ה. W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

ו. W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס. כלומר,

$W = \{A \mid AB = 0\}$

ז. $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$, כלומר, W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס.

ח. W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $P_n[R]$.

א. $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$, כלומר, W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש.

ב. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

ג. $W = \{p(x) \mid \deg(p) \leq 4\}$, כלומר, W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4 .

ד. W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x .

ה. W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n כאשר $4 \leq n \leq 7$.

ו. $W = \{p(x) \mid p(0) = 1\}$.

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $F[R]$.

א. $W = \{f(x) \mid f(-x) = f(x)\}$ כלומר, לכל x ממשי W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.

ב. $W = \{f(x) \mid |f(x)| \leq M\}$ כלומר, לכל x ממשי W מורכב מכל הפונקציות החסומות.

ג. W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

ד. W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

ה. W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

ו. $W = \left\{ f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 4 \right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב $[0, 1]$).

ז. $W = \{f(x) \mid f'(x) = 0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ח. $W = \{f(x) \mid f'(x) = 1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ט. $W = \{f(x) \mid f(x) = f(x+1)\}$.

(5) בדוק האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$ הוא תת מרחב של C^3 :

א. מעל השדה הממשי R .

ב. מעל שדה המרוכבים C .

צירופים לינאריים, מרחב נפרש, תלות לינארית

(6) נתונים הוקטורים הבאים :

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), u_2 = (0, 11, -5, 3), u_3 = (2, -5, 3, 1), u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

א. 1. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?2. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלוייה לינארית ?ב. 1. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה

כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

ג. 1. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה

כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

$$d. \text{ נתון } v = (4, 12, k, -2k)$$

1. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$.3. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהייה תלוייה לינארית.

$$h. \text{ נתון } v = (a, b, c, d)$$

1. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?1. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?1. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהייה תלוייה לינארית ?

$$ו. \text{ הבע את הוקטור } (2, -3, 3, 1) \text{ כצירוף לינארי של } u_1, u_2 \text{ ו- } u_3.$$

בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

ז. הבע את הוקטור $(7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4 . בכמה אופנים

ניתן לעשות זאת?

(7) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. בדוק האם המטריצות תלויות לינארית מעל $M_2[R]$.

2. במידה והמטריצות תלויות רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יותר המטריצות.

3. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B, C\}$?

(8) נתונים הפולינומים הבאים:

$$p_1(x) = 4 + x + x^2 + 5x^3, p_2(x) = 11x - 5x^2 + 3x^3,$$

$$p_3(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3, p_4(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3$$

1. בדוק האם הפולינומים תלויים לינארית מעל $P_3[R]$.

2. במידה והפולינומים תלויים לינארית רשום כל פולינום כצירוף לינארי של

שאר הפולינומים.

3. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1, p_4\}$?

(9) עהוא איזה ערכים של a, b, c הוקטורים הבאים תלויים לינארית:

$$\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$$

(10) נתון כי קבוצת הוקטורים $\{u, v, w\}$ בלתי תלויה לינארית ב- $V[F]$.

בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות לינארית, במידה שכן רשום כל וקטור כצירוף

של הוקטורים האחרים:

$$\text{א. } \{u - v, u - w, u + v - 2w\}$$

$$\text{ב. } \{u + 2v + 3w, 4u + 5v + 6w, 7u + 8v + 9w\}$$

$$\text{ג. } \{u + v, v + w, w\}$$

(11) בדוק האם הוקטורים $\{(1, i, i-1), (i+1, i-1, -2)\}$ תלויים לינארית ב- C^3

א. מעל C . ב. מעל R .

בסיס ומימד

בדיקה האם קבוצת וקטורים מהווה בסיס למרחב

(12) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

$$(1) \{ (1, 0, 1), (0, 0, 1) \}$$

$$(2) \{ (1, 1, 2), (1, 2, 3), (3, 3, 4), (2, 2, 1) \}$$

$$(3) \{ (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9) \}$$

(13) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2 \times 2}[R]$:

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(3) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(14) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

$$(1) \{ 1+x, x^2+2x+3 \}$$

$$(2) \{ 1+x, x^2+2x+3, 2x+4x^3, x-x^3 \}$$

$$(3) \{ 1+2x+3x^3, 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2 \}$$

(15) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (2, 3, 4)\}$

א. האם T בסיס ל- R^3 .

ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים בלתי תלוייה לינארית ב- T .

ג. השלם את T' לבסיס של

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

(16) לפיך 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad (1)$$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (1).

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (2).

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (3).

(א) מצא בסיס וממד ל- U , W ו- V .

(ב) (1) מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$. (2) מצא ממד ל- $U \cap V$.

(ג) מצא בסיס ל- $U \cap V$.

(17) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid a = c, b = d\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(18) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(19) נתון $U = \{v \in R^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(20) נתון $U = \{A \in M_{2 \times 2}[R] \mid A = A^T\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(21) נתון $U = \left\{ A \in M_{2 \times 2}[R] \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(22) נתון $U = \{p(x) \in P_3[R] \mid p(1) = 0\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת מרחב(23) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U .ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V .ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$.ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.(24) לפניכם תת מרחב של המרחב $M_{2 \times 2}[R]$:

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .(25) לפניכם תת מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{span}\{1 + x - x^2 + 2x^3, 4 + x - x^2 + x^3, 2 - x + x^2 - 3x^3\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

(26) מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצות הבאות וציין את דרגת

המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

וקטורי קואורדינטות, שינוי בסיס(27) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} \quad (3) \quad [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1} \quad (2) \quad [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2} \quad (1)$$

(27) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1 = \{1+x, x, x+x^2\}, \quad B_2 = \{1+x^2, x+x^2, x^2\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.(28) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B . סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E . סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E . סמן מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

פרק 11 - העתקות (טרנספורמציות) לינאריות

העתקות לינאריות

(1) הגדר והדגם את המושג העתקה (טרנספורמציה) לינארית. הגדר את המושג אופרטור לינארי.

(2) עבור כל אחת מההעתקות הבאות, קבע האם היא העתקה לינארית.

$$T(x, y) = (x + y, x - y) \quad ; \quad T : R^2 \rightarrow R^2 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z) \quad ; \quad T : R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|) \quad ; \quad T : R^3 \rightarrow R^2 \quad (3)$$

$$T(x, y) = (xy, y, z) \quad ; \quad T : R^2 \rightarrow R^3 \quad (4)$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z) \quad ; \quad T : R^3 \rightarrow R^3 \quad (5)$$

$$(B \in M_n[R]) \quad T(A) = BA + AB \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (6)$$

$$T(A) = A + A^T \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (7)$$

$$T(A) = |A| \cdot I \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (8)$$

$$T(A) = A \cdot A^T \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (9)$$

$$T(A) = A^{-1} \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (10)$$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 \quad ; \quad T : P_3[R] \rightarrow P_2[R] \quad (11)$$

$$T(p(x)) = p(x + 1) \quad ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_n[R] \quad (12)$$

$$T(p(x)) = p'(x) + p''(x) \quad ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_n[R] \quad (13)$$

$$T(p(x)) = p^2(x) \quad ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_{2n}[R] \quad (14)$$

$$(F = C, F = R) \quad T(z) = \bar{z} \quad ; \quad T : C[F] \rightarrow C[F] \quad (15)$$

(3) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה) ההעתקה הבאה תהיה לינארית :

$$T(x, y) = (m^2 x^{2m}, y^{2m} + x) ; T : R^2 \rightarrow R^2$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

א. $T : R^3 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1, 1, 0) = (1, 2, 3)$, $T(0, 1, 1) = (4, 5, 6)$, $T(0, 0, 1) = (7, 8, 9)$.

ב. $T : R^3 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$, $T(0, 1, 1) = (1, 2, 1)$, $T(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$.

ג. $T : R^4 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1, 2, -1, 0) = (0, 1, -1)$, $T(-1, 0, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $T(0, 4, 0, 2) = (2, 2, -2)$.

ד. $T : P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ כך ש- $T(1) = 4$, $T(4x + x^2) = x$, $T(1 - x) = x^2 + 1$.

תמונה וגרעין של העתקות לינאריות

(5) נתונה העתקה לינארית $T : V \rightarrow U$. הגדר והדגם את המושגים :

א. הגרעין של ההעתקה - $KerT$. ב. התמונה של ההעתקה - ImT .

ג. משפט הממד להעתקות (השתמש במושגים הדרגה של העתקה - $rankT$ והאיפוס של העתקה - $nullT$)

(6) עבור כל אחת מההעתקות הבאות מצא בסיס וממד לגרעין ולתמונה :

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t) , T : R^4 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z) , T : R^3 \rightarrow R^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} , T : R^4 \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A , T : M_2[R] \rightarrow M_2[R] \quad (4)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x+4) , T : P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (5)$$

$$D(p(x)) = p'(x) , D : P_3[R] \rightarrow P_3[R] \quad (6)$$

(7) מצא העתקה לינארית $T: R^3 \rightarrow R^3$ אשר תמונתה נפרשת על ידי $\{(4,1,4), (-1,4,1)\}$.

(8) מצא העתקה לינארית $T: R^4 \rightarrow R^3$ אשר הגרעין שלה נפרש על ידי $\{(0,1,1,1), (1,2,3,4)\}$.

(9) א. נתונה העתקה לינארית $T: V \rightarrow U$. הוכח כי אם $\dim \text{Im} T = \dim \text{Ker} T$ אז הממד של V זוגי.

ב. האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T: R^4 \rightarrow R^3$?

העתקות לינאריות חח"ע ולא חח"ע, העתקות לינאריות על, איזומורפיזם

(9) הסבר את המושגים העתקה לינארית חד-חד ערכית (חח"ע) והעתקה לינארית על. כמו כן הסבר את המושג איזומורפיזם והעתקה הפוכה.

(10) עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבע האם היא חח"ע, האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, z - x) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b, b - 2c) \quad , \quad T: P_2[R] \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3 \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow P_3[R] \quad (4)$$

הערה: העתקה חח"ע נקראית גם לא סינגולרית

פעולות עם העתקות לינאריות

(11) תהיינה $S: R^3 \rightarrow R^2$ ו- $T: R^3 \rightarrow R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי:

$$T(x, y, z) = (x, 4x - y, x + 4y - z) \quad , \quad S(x, y, z) = (x - z, y)$$

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

$$ST \quad (5) \quad TS \quad (4) \quad 4S - 10T \quad (3) \quad 4S \quad (2) \quad S + T \quad (1)$$

$$S^2 \quad (10) \quad S^{-1} \quad (9) \quad T^{-2} \quad (8) \quad T^{-1} \quad (7) \quad T^2 \quad (6)$$

נספח נוסחאות

גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \coth f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

נוסחאות - אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1 \ (m > 0)$ $-1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \ (m \leq -1)$ $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$