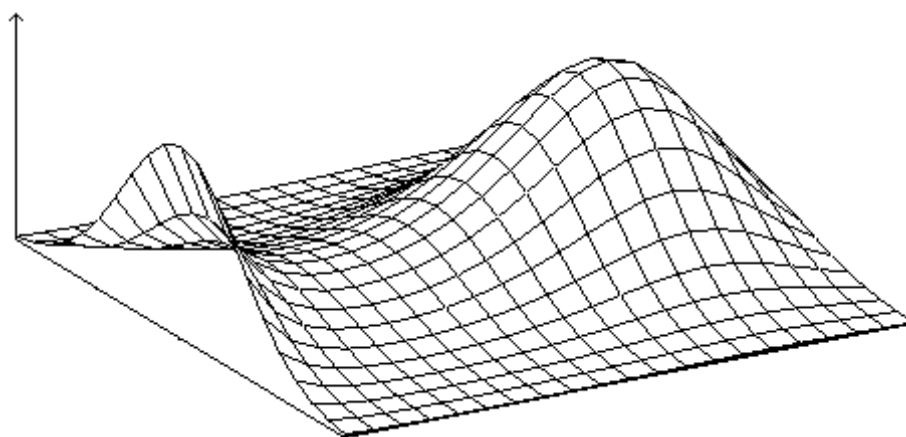


מתמטיקה לפיזיקאים

2



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (חדו"א 2) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva2.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

פרק 1 - אינטגרלים כפולים	4
פרק 2 - שימושי האינטגרל הכפול	8
פרק 3 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)	10
פרק 4 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)	13
פרק 5 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם	15
פרק 6 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות	17
פרק 7 - החלפת משתנים באינטגרל משולש (יקוביאן)	18
פרק 8 - אינטגרלים קויים ושימושיהם (אורך ומסה של עקום, עבודה)	19
פרק 9 - אי תלות במסלול, שדות משמרים	23
פרק 10 - משפט גרין	26
פרק 11 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם	28
פרק 12 - משפט הדיברגנץ (גאוס)	30
פרק 13 - משפט סטוקס (משפט גרין במרחב)	32
נספח - משטחים ממעלה שנייה	34
פרק 14 - משוואות מסדר ראשון	37
פרק 14.1 - משוואות הנתנות להפרדת משתנים	37
פרק 14.2 - משוואות הומוגניות	38
פרק 14.3 - משוואות מהצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$	40
פרק 14.4 - משוואות מדויקות	41
פרק 14.5 - הפיכת משוואה לא מדויקת למשוואה מדויקת (גורם אינטגרציה)	42
פרק 14.6 - משוואה לינארית	44
פרק 14.7 - משוואת ברנולי	45
פרק 14.8 - משוואת ריקטי	46
פרק 14.9 - משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה	47
פרק 15 - משוואות לינאריות מסדר שני	48
פרק 15.1 - משוואה חסרה מסדר שני (הורדת סדר המשוואה)	48
פרק 15.2 - משוואות מסדר שני, לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים	49
פרק 15.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - השוואת מקדמים ...	50
פרק 15.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - וריאציית פרמטרים	51
פרק 15.5 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים - שיטה אופרטוריות	52
פרק 16 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות	53
נספח נוסחאות	58

פרק 1 - אינטגרלים כפולים

(1) חשב את האינטגרלים :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi \, dr \quad (3) \quad \int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2) \quad \int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

(2) באינטגרל $\iint_D f(x, y) dx dy$ הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :

(1) D – משולש בעל הקודקודים : $B(1,1), A(1,0), O(0,0)$

(2) D – משולש בעל הקודקודים : $B(-2,1), A(2,1), O(0,0)$

(3) D – טרפז בעל הקודקודים : $C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0)$

(4) D – עיגול $x^2 + y^2 \leq 1$

(5) D – עיגול $x^2 + y^2 \leq y$

(6) $D = \{ (x, y) | y \leq 1, y \geq x^2 \}$

(7) $D = \{ (x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \}$

(3) החלף סדר אינטגרציה באינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad (3) \quad \int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy dx \quad (2) \quad \int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx \quad (6) \quad \int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad (5) \quad \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy dx \quad (4)$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$(1) \iint_D xy^2 dx dy \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י הפרבולה } y^2 = 4x \text{ והישר } x=1.$$

$$(2) \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}} \text{ כאשר } D \text{ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה}$$

של המעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה (2,2) .

$$(3) \iint_D |xy| dx dy \text{ כאשר } D \text{ עיגול בעל הרדיוס } a \text{ שמרכזו בראשית .}$$

$$(4) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$$

כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=3a, y=a, y=x+a, y=x$ ($a>0$).

$$(5) \iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA \text{ כאשר } D \text{ התחום הכלוא בין } x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}.$$

(5) חשב את האינטגרלים הבאים (רמז : שנה את סדר האינטגרציה) :

$$(1) \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy \quad (2) \int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy$$

$$(3) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2} y dx dy \quad (x, y \geq 0) \quad (4) \int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx$$

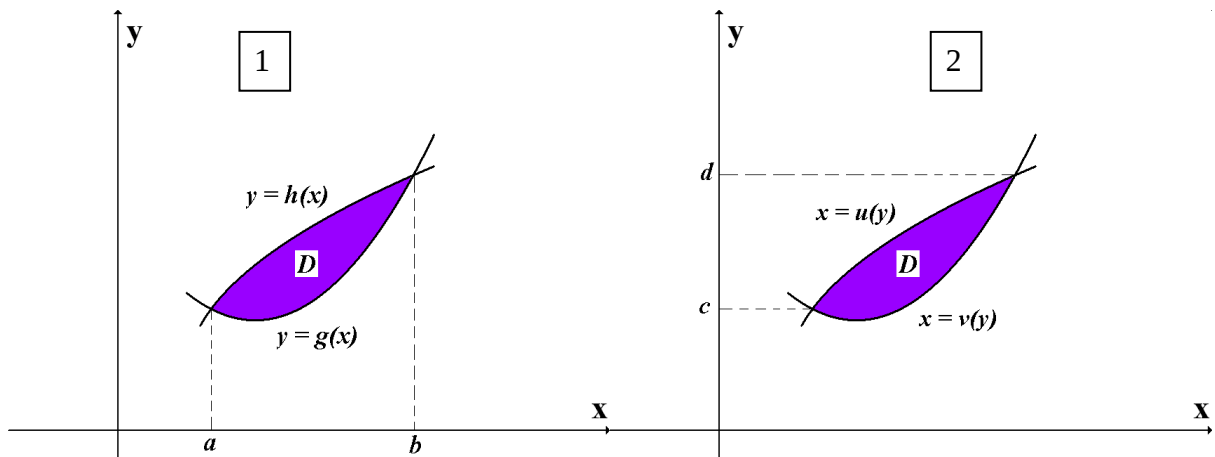
הערות סימון:

1

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dy dx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

2

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



לתשומם לבכם, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dx dy \quad \text{כך} \quad \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx$$

הוא חילופי. כלומר הרישום $dx dy$ והרישום $dy dx$ הוא זהה.

פתרונות – פרק 1

$$a^3/3 \pi (3) \quad 1/40 (2) \quad 1 (1) \quad (1)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx \quad (1) \quad (2)$$

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (4)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \quad (7)$$

$$= \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (2) \quad \int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx \quad (1) \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \quad (4) \quad \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$0 (5) \quad 14a^4 (4) \quad \frac{a^4}{2} (3) \quad 8 - \frac{16\sqrt{2}}{3} (2) \quad \frac{32}{21} (1) \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) (4) \quad \frac{1}{4}(e - 2) (3) \quad \frac{241}{60} (2) \quad \frac{1}{3}(e^8 - 1) (1) \quad (5)$$

פרק 2 - שימושי האינטגרל הכפול

(1) חשב את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים הבאים :

$$(a > 0) \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (2) \quad x + y = 2, \quad x^2 - 4y = 4 \quad (1)$$

$$x + y = 3, \quad y^2 = 4x \quad (4) \quad y^2 = 9 - x, \quad y^2 = 9 - 9x \quad (3)$$

(2) חשב את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים הבאים :

$$z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (1)$$

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad y = x^2 \quad (2)$$

$$(x > 0) \quad z = 0, \quad z = x^2 + y, \quad y = 0.5x, \quad y = 2x, \quad y = \frac{2}{x} \quad (3)$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad 2y^2 = x \quad (4)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y \quad (5)$$

$$z = x + y, \quad z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (6)$$

(3) ללוח דק בצורת משולש, שקודקודיו הם $(0,0)$, $(1,0)$ ו- $(0,1)$, יש פונקציית

$$\text{צפיפות } \delta(x, y) = xy.$$

(1) חשב את מסת הלוח. (2) חשב את מרכז הכובד של הלוח.

(4) ללוח דק בצורת מלבן $R = \{(x, y) \mid -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}\}$, יש פונקציית

צפיפות קבועה (הלוח הומוגני). חשב את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר z .

בטא את תשובתך באמצעות המסה M של הלוח.

(5) מצא את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2 + z^2 = 4$ הנמצא מעל למלבן

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\} \text{ שבמישור } xy.$$

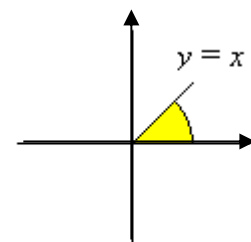
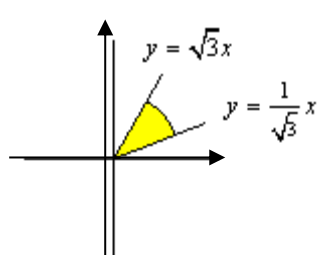
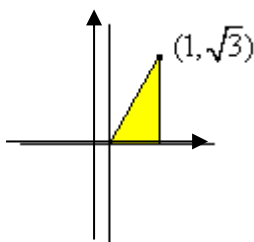
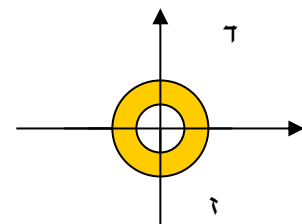
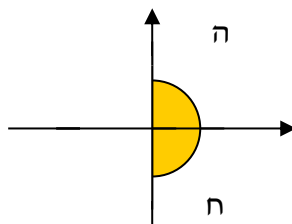
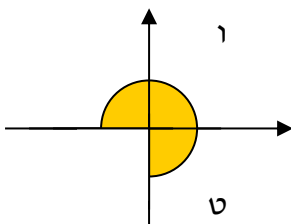
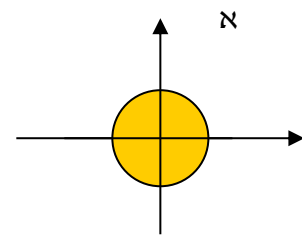
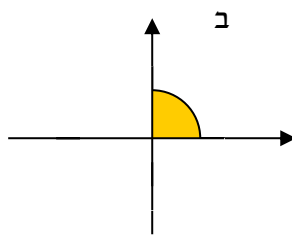
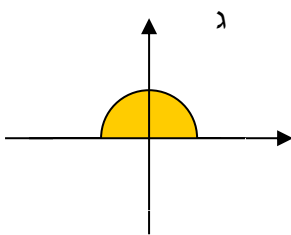
פתרונות – פרק 2

$$\begin{array}{llllll}
 {}^{64}/_3 (4) & 32 (3) & a^2 ({}^{15}/_8 - 2 \ln 2) (2) & {}^{64}/_3 (1) & (1) \\
 36 (6) & {}^{8}/_3 (5) & 16 {}^{1}/_5 (4) & {}^{17}/_6 (3) & {}^{88}/_{105} (2) & {}^{5}/_6 (1) (2) \\
 & & & & ({}^{2}/_5, {}^{2}/_5) (2) & {}^{1}/_{24} (1) (3) \\
 & & & & & \frac{M(a^2+b^2)}{12} (4) \\
 & & & & & \frac{1}{6} \pi (5\sqrt{5} - 1) (5)
 \end{array}$$

פרק 3 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

(1) חשב $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$ כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

לתשומת לבך: לכל המעגלים רדיוס 4. בסעיף ד למעגל הקטן רדיוס 1.
בסעיף ט אל תחשב את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.



(2) חשב את האינטגרלים הבאים תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות :

$$\begin{array}{ll}
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx & (1) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx & (2) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy & (3) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy & (4) \\
 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy & (5) \\
 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy & (6) \\
 \int_0^2 \int_0^x y dy dx & (7) \\
 \int_0^2 \int_0^x y dy dx & (8) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy & (9) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy & (10) \\
 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx & (11) \\
 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx & (12) \\
 \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy & (13) \\
 \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy & (14) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx & (15) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx & (16) \\
 \int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy & (17) \\
 \int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy & (18) \\
 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx & (19) \\
 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx & (20) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy & (21) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy & (22)
 \end{array}$$

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים חשב את **נפח הגוף** המתואר :

(1) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ לבין הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

(2) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2y$ בין החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמעלה לבין מישור - xy מלמטה.

(3) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = x$ בין הפרבולואיד $z = 1 - x^2 - y^2$ מלמעלה לבין מישור - xy מלמטה.

(4) חשב את **שטח התחום** החסום על ידי: $x^2 + y^2 = 2x$, $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$.

פתרונות – פרק 3

$$32\pi \text{ (6)} \quad \frac{64\pi}{3} \text{ (5)} \quad 42\pi \text{ (4)} \quad \frac{64\pi}{3} \text{ (3)} \quad \frac{32\pi}{3} \text{ (2)} \quad \frac{128\pi}{3} \text{ (1)} \quad (1)$$

$$\frac{32\pi}{9} \text{ (8)} \quad \frac{16\pi}{3} \text{ (7)}$$

$$2\pi \text{ (6)} \quad \pi a^2 \text{ (5)} \quad \frac{\pi}{2} \text{ (4)} \quad \frac{\pi}{8} \text{ (3)} \quad \pi \text{ (2)} \quad \frac{\pi}{2} \text{ (1)} \quad (2)$$

$$\frac{\pi(e-1)}{4e} \text{ (12)} \quad \frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e} \text{ (11)} \quad \pi(4-\pi) \text{ (10)} \quad \pi \ln \frac{e}{2} \text{ (9)} \quad \frac{4}{3} \text{ (8)} \quad 36 \text{ (7)}$$

$$\pi \text{ (16)} \quad \pi \ln \frac{4}{e} \text{ (15)} \quad -\frac{4}{5} \text{ (14)} \quad \frac{\pi}{2} + 1 \text{ (13)}$$

$$\frac{5\pi}{32} \text{ (3)} \quad \frac{32}{9} \text{ (2)} \quad \frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3} \text{ (1)} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (4)}$$

פרק 4 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

(1) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$ כאשר R הוא

התחום המוגבל על ידי הישרים $y=3-x$, $y=1-x$, $y=x-1$, $y=x$.

(2) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy} dA$ כאשר R הוא

התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=x$, $y=0.5x$, $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$.

(3) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$ כאשר R הוא

התחום בצורת משולש שקודקודיו הם: $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

(4) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y) dA$ כאשר R הוא

התחום בצורת מקבילית שקודקודה הם: $A(-1,3)$, $B(1,-3)$, $C(3,-1)$, $D(1,5)$.

(5) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2} dA$ כאשר R הוא

התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(6) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2 dA$ כאשר R הוא

התחום המוגבל על ידי העקומות $y=\frac{1}{x}$, $y=\frac{2}{x}$, $xy^2=1$, $xy^2=2$.

(7) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y} dA$ כאשר $R = \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1\}$.

פתרונות – פרק 4

$$\begin{array}{cccc}
 192 \text{ (4)} & 1 - \frac{1}{2} \sin 2 \text{ (3)} & \frac{1}{2}(e^2 - e) \ln 2 \text{ (2)} & \frac{1}{4} \ln 3 \text{ (1)} \\
 & e - \frac{1}{e} \text{ (7)} & \frac{3}{4} \text{ (6)} & 96\pi \text{ (5)}
 \end{array}$$

פרק 5 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xzdydx dz \quad (1)$$

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dx dz dy \quad (2)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}, \iiint_B xyz^2 dV \quad (3)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq 1+x+y\}, \iiint_B 6xy dV \quad (4)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy dx dz \quad (2)$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz \quad (3)$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx \quad (4)$$

(3) חשב את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים הבאים :

$$z = 1+x+y, z=0, x+y=1, x=0, y=0 \quad (1)$$

$$z=0, z=x^2+y^2, y=1, y=x^2 \quad (2)$$

$$(x \geq 0) z=0, z=x^2+y, y=0.5x, y=2x, y=\frac{2}{x} \quad (3)$$

$$z=0, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 2y^2 = x \quad (4)$$

$$(z \geq 0) x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z=y \quad (5)$$

$$z=x+y, z=6, x=0, y=0, z=0 \quad (6)$$

- (4) חשב את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r . הנח שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונית למרחק הנקודה מבסיס הגליל, כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$).

- (5) חשב את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה) $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$ סביב ציר z . בטא את תשובתך באמצעות המסה M של התיבה.

פתרונות – פרק 5

$$\begin{array}{llll}
 \frac{65}{28} (4) & \frac{27}{4} (3) & \frac{1}{3}(e^3 - 1) (2) & 1 (1) \quad (1) \\
 \frac{\sin^2 4}{2} (4) & 4 (3) & 3e - 6 (2) & 2 \sin 4 (1) \quad (2) \\
 36 (6) & \frac{8}{3} (5) & 16^{\frac{1}{5}} (4) & \frac{17}{6} (3) & \frac{88}{100} (2) & \frac{5}{6} (1) \quad (3) \\
 & & & & (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{2h}{3}) & M = \frac{1}{2} \pi k h^2 r^2 \quad (4) \\
 & & & & & \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) \quad (5)
 \end{array}$$

פרק 6 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

$$(1) \text{ חשב } \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dz dy dx$$

$$(2) \text{ חשב } \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx$$

$$(3) \text{ א) חשב } \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx$$

$$(3) \text{ ב) חשב } \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx$$

$$(4) \text{ גוף כלוא בגליל } x^2 + y^2 = 9 \text{ בין מישור- } xy \text{ מלמטה לבין מחצית פני הכדור}$$

$$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \text{ מלמעלה. חשב את הנפח של הגוף ואת המרכז שלו.}$$

$$(5) \text{ חשב את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

$$\text{מלמעלה ועל ידי החרוט } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ מלמטה.}$$

$$(6) \text{ מצא את הנפח של התחום מעל מישור- } xy \text{ החסום על ידי הפרבולואיד}$$

$$z = x^2 + y^2 \text{ והגליל } x^2 + y^2 = a^2.$$

פתרונות – פרק 6

$$(1) \quad \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad \frac{24\pi - 32}{9} \quad (3) \quad \frac{32\pi}{5} \quad (4) \quad \frac{32\pi}{5} \quad (5) \quad \frac{24\pi - 32}{9} \quad (6) \quad \frac{32\pi}{5}$$

$$(4) \quad V = \frac{122}{3} \pi, (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1107/488)$$

$$(5) \quad V = \frac{64}{3} \pi (2 - \sqrt{2}), (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1.5 / (2 - \sqrt{2}))$$

$$(6) \quad \frac{\pi}{2} a^4$$

פרק 7 - החלפת משתנים באינטגרל משולש (יקוביאן)

(1) חשב את $\iiint_G (z-y)^2 xy dV$ כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים

$$. xy=4, xy=2, z=y+1, z=y, x=3, x=1$$

(2) חשב את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) חשב את $\iiint_G x^2 dV$ כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(4) חשב את נפח התחום המוגבל על ידי המשטחים

$$. y=4z^2, y=z^2, y=4x-12, y=4x, y=2z, y=z$$

(5) חשב את $\iiint_G \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} dV$ כאשר G הוא הכדור שמרכזו

בנקודה $(1, 2, 4)$ ורדיוסו 1.

פתרונות – פרק 7

$$2 \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \pi abc \quad (2)$$

$$\frac{4}{15} \pi a^3 bc \quad (3)$$

$$\frac{105}{32} \quad (4)$$

$$\pi \quad (5)$$

פרק 8 - אינטגרלים קויים ושימושיהם (אורך ומסה של עקום, עבודה)

* מומלץ בחום לעיין בנספח "הצגות פרמטריות של עקומים חשובים" שבעמ' 70.

I אינטגרל קוי מסוג I

$$(1) \text{ חשב } \int_C f(x, y) ds$$

א. $C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$; $f(x, y) = 1 - x^2$

ב. $C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi$; $f(x, y) = x$

ג. C קטע של ישר המחבר את $O(0,0)$ עם $A(1,2)$; $f(x, y) = x + y$

ד. C היקפו של $\triangle OAB$: $O(0,0), A(0,1), B(1,0)$; $f(x, y) = x + y^2$

$$(2) \text{ חשב } \int_C f(x, y, z) ds$$

א. $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \pi$; $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

ב. $C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, z = \frac{1}{3}t^3, 0 \leq t \leq 3$; $f(x, y, z) = x^3 + 3z$

(3) חשב את אורך העקום $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

(4) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t$ ($0 \leq t \leq \pi$)

חשב את מסת הסליל אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$)

II אינטגרל קוי מסוג II

(5) חשב:

א. $C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$; $\int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy$

ב. $C: x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$; $\int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy$

(6) חשב $\int_C y dx + x^2 dy$ כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$

ו- C נתון ע"י המשוואה: א. $y = 2x$ ב. $y = x^2$

(7) חשב $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)dx + (y-x)dy$ אם העקום נתון על ידי :

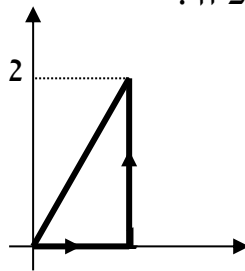
א. הפרבולה $y^2 = x$.

ב. קו ישר.

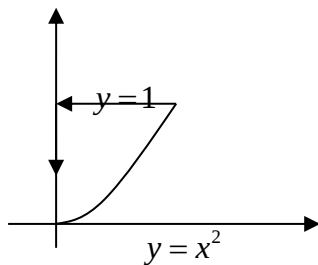
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.

ד. העקום : $x = 2t^2 + t + 1$, $y = t^2 + 1$.

(8) חשב $\int_C x^2 y dx + x dy$ כאשר המסלול C מתואר בציור:



(9) חשב $\int_C (x - y^2) dx + dy$ כאשר המסלול C מתואר בציור:



(10) אם $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$

חשב את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$ לאורך המסלולים :

א. $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$.

ב. הקווים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

(11) חשב את האינטגרל הקווי $\int_C F \cdot dr$, כאשר :

$$F(x, y) = (x^2 y^3, -y\sqrt{x}), \quad r(t) = (t^2, -t^3), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad \text{א.}$$

$$F(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz), \quad r(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad \text{ב.}$$

(12) א. חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $F(x, y) = x^3 y \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$

על חלקיק שנע על הפרבולה $y = x^2$ מ- $(-2, 4)$ עד $(1, 1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$ עד $(-2, 4)$.

(13) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $F(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$

על חלקיק הנע לאורך העיקול $r(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 1$).

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

פתרונות – פרק 8

$$(1) \text{ א. } \pi \quad \text{ב. } \frac{16}{3} \quad \text{ג. } \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \text{ד. } \frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$$

$$(2) \text{ א. } \sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3}) \quad \text{ב. } \frac{567}{2}$$

$$(3) 6$$

$$(4) \sqrt{5}k\pi^2$$

$$(5) \text{ א. } \frac{1}{3} \quad \text{ב. } \frac{4}{3}$$

$$(6) \text{ א. } \frac{28}{3} \quad \text{ב. } \frac{32}{3}$$

$$(7) \text{ א. } \frac{34}{3} \quad \text{ב. } 11 \quad \text{ג. } 14 \quad \text{ד. } \frac{32}{3}$$

$$(8) \frac{1}{2}$$

$$(9) \frac{4}{5}$$

$$(10) \text{ א. } 2 \quad \text{ב. } -3 \quad \text{ג. } \frac{6}{5}$$

$$(11) \text{ א. } -\frac{59}{105} \quad \text{ב. } \frac{6}{5} - \sin 1 - \cos 1$$

$$(12) \text{ א. } 3 \quad \text{ב. } -3$$

$$(13) 1$$

פרק 9 - אי תלות במסלול, שדות משמרים

(1) קבע האם F הוא שדה משמר. אם כן, מצא פונקציה ϕ כך ש- $\nabla \phi = F$.

א. $F(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y)$

ב. $F(x, y) = xe^y \mathbf{i} + ye^x \mathbf{j}$

ג. $F(x, y) = (2x \cos y - y \cos x, -x^2 \sin y - \sin x)$

ד. $F(x, y, z) = z^2 \mathbf{i} + e^{-y} \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k}$

ה. $F(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 3z^2) \mathbf{k}$

ו. $F(x, y, z) = (z, 2yz, y^2)$

(2) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1, 2)$ ו- $(3, 4)$.

ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

(3) חשב את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2y^2)dy$

(4) חשב את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3)dx + (x^2 - 4xy^3)dy$

(5) יהי $F(x, y) = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j}$. מצא את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע

על $y = \sqrt{1-x^2}$ מ- $(1, 0)$ ל- $(-1, 0)$.

(6) חשב את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} (2xz^3 + 6y)dx + (6x - 2yz)dy + (3x^2z^2 - y^2)dz$

תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

(7) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$ ונתונים 3 מסלולים :

$$L_1: x^2 + y^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$L_2: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{בכיוון השלילי (עם כיוון השעון).}$$

$$L_3: (x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

חשב: א. $\oint_{L_1} \mathbf{F} dr$ ב. $\oint_{L_2} \mathbf{F} dr$ ג. $\oint_{L_3} \mathbf{F} dr$

(8) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$

ונתונים 2 מסלולים מ- $(2, 0)$ ל- $(-2, 0)$:

$$L_1: x^2 + y^2 = 4, y \geq 0 \quad L_2: x^2 + y^2 = 4, y \leq 0$$

א. חשב: $\oint_{L_1} \mathbf{F} dr$, $\oint_{L_2} \mathbf{F} dr$

ב. הוכח כי $\mathbf{F}$ משמר בחצי הטבעת $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\hat{x} + g(x, y, z)\hat{y} + h(x, y, z)\hat{z}$$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

פתרונות – פרק 9

(1) א. $\phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2$. ב. השדה אינו משמר.

ג. $\phi(x, y) = x^2 \cos y - y \sin x$. ד. $\phi(x, y, z) = xz^2 - e^{-y}$

ה. $\phi(x, y, z) = xyz + z^3$. ו. השדה אינו משמר.

(2) ב. 236

(3) -58

(4) 5

(5) -2

(6) $15 =$ עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1, -1, 1)$ ל- $(2, 1, -1)$ לאורך C .

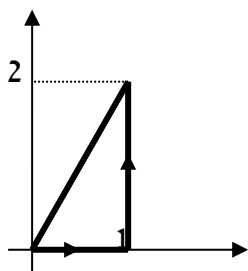
(7) א. 2π . ב. -2π . ג. 0 .

(8) א. $L_1 : \pi$, $L_2 : -\pi$

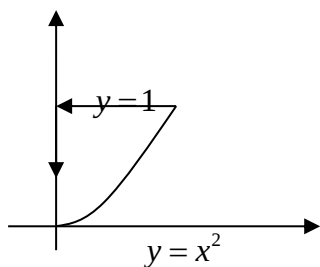
פרק 10 - משפט גרין

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט גרין, כלומר חשב את האינטגרל $\oint_C f dx + g dy$ ואת האינטגרל $\iint_R (g_x - f_y) dA$ והראה שהם שווים זה לזה.

(1) $\oint_C x^2 y dx + x dy$; המסלול C מתואר בציור :



(2) $\oint_C (x - y^2) dx + dy$; המסלול C מתואר בציור :



(3) $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$;

C הוא ריבוע שקודקודיו : $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ בכיוון החיובי. ריקי

(4) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$ על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון

ומשלים הקפה אחת.

(5) חשב את האינטגרל $\int_C \left(e^y - \tan \frac{x}{2} \right) dx + (xe^y + y \cos y^2) dy$ כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y = 8 - x^2$, $y = x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

(6) חשב את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + (e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy) dy$

כאשר C הוא חצי האליפסה $\{x^2 + 4y^2 = 4, y \geq 0\}$ מהנקודה $(2, 0)$ לנקודה

$(-2, 0)$.

(7) א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C נתון ע"י: $\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$.

ב. חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

פתרונות – פרק 10

(1) הערך המשותף הוא 0.5

(2) הערך המשותף הוא 0.8

(3) הערך המשותף הוא 8

(4) 1.5π

(5) $0.5 \sin 64$

(6) $\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4}$

(7) ב. πab

פרק 11 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

I אינטגרל משטחי מסוג I

בכל אחד מהתרגילים (1)-(5) חשב את האינטגרל המשטחי.

$$(1) \iint_S x^2 yz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y \text{ מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2]$$

$$(2) \iint_S x dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z \text{ , } 0 \leq x \leq 2 \text{ , } 0 \leq z \leq 2$$

$$(3) \iint_S yz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3 \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1$$

$$(4) \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ , } z \geq 0$$

$$(5) \iint_S xyz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$$

$$\text{המקיים } 1 \leq u \leq 2 \text{ , } 0 \leq v \leq \pi/2$$

$$(6) \text{ חשב את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס } R$$

$$(7) \text{ היריעה הדקה } S \text{ היא חלק הפרבולואיד } z = x^2 + y^2 \text{ שמתחת למישור } z = 1$$

$$\text{וצפיפותה } \delta(x, y, z) = \delta_0 \text{ קבועה. חשב את מסת היריעה.}$$

II אינטגרל משטחי מסוג II

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \text{ חשב את האינטגרל (8)-(12)}$$

ובניסוח אחר :

$$\text{בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את השטף של שדה הזרימה } \mathbf{F} \text{ דרך } S.$$

($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

$$(8) \quad S \text{ הוא פני הקובייה הנקבעת ע"י } \mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k}$$

המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

$$(9) \quad S \text{ הוא פני הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 1, \mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$$

$$(10) \quad S \text{ הוא פני הפירמידה הנקבעת ע"י } \mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$$

המישורים: $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

$$(11) \quad S \text{ חלק הפרבולואיד } z = 4 - x^2 - y^2 \text{ שבו } z \geq 0, \mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$(12) \quad \mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k}$$

S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

פתרונות – פרק 11

$$(1) \quad 171\sqrt{14} \quad (2) \quad \frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6} \quad (3) \quad \pi\sqrt{2} / 4$$

$$(4) \quad 16\pi \quad (5) \quad 93 / \sqrt{10} \quad (6) \quad 4\pi R^2$$

$$(7) \quad \frac{\pi\delta_0}{6} (5\sqrt{5} - 1) \quad (8) \quad \frac{11}{6} \quad (9) \quad \frac{8\pi}{3}$$

$$(10) \quad 27 \quad (11) \quad 12\pi \quad (12) \quad -16\pi$$

פרק 12 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט הדיברגנץ, כלומר חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ ואת האינטגרל $\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV$ והראה שהם שווים זה לזה. ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S). (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G הנקבעת ע"י

המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(2) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G הנקבעת ע"י

המישורים: $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$ בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$.

חשב את השטף של השדה הוקטורי $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ דרך S .

כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

(5) חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$\mathbf{F} = (z^2 - x)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:

$x=0, x=3, z=4-y^2, z=0$.

(6) חשב את $\iint_S xz^2 dydz + (x^2y - z^3)xydzdx + (2xy + y^2z)dxdy$

כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z=0$.

(7) יהי S משטח פתוח $x^2 + z^2 = 16$, $0 \leq y \leq 4$ (גליל ללא הבסיסים).

חשב את השטף דרך S של השדה הוקטורי $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + x^5\mathbf{k}$.

כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

(8) חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2 \right) \mathbf{i} + 2x \arctan y \mathbf{j} - \frac{2xz(1+y) + 1+y^2}{1+y^2} \mathbf{k}$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$ שבו $z \geq 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

מתקיים

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\begin{aligned} \iiint_G \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ \iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ \iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV &= \iint_S f dydz + g dzdx + h dx dy \end{aligned}$$

פתרונות – פרק 12

(1) הערך המשותף הוא $\frac{11}{6}$

(2) הערך המשותף הוא $\frac{8}{3}\pi$

(3) הערך המשותף הוא 27

(4) 279π

(5) 16

(6) $\frac{2\pi a^5}{5}$

(7) 0

(8) -4π

פרק 13 - משפט סטוקס (משפט גרין במרחב)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים, כלומר חשב את האינטגרל $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$ ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ והראה שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$ שבו $z \geq 0$.

$$\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k} \quad (2)$$

S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

(3) $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה

החסום על ידי המישורים $y = 2$, $2x + z = 6$, ושאינו כלול

א. במישור xy .

ב. במישור $y = 2$.

ג. במישור $2x + z = 6$.

(4) חשב את האינטגרל $\oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz$ כאשר C העקומה בצורת

מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

(5) חשב את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$

ו- C היא שפת המשולש שקודקודיו הם $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ וכיוונה

הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

(6) חשב את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ כאשר $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

ו- S הוא החלק של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$

ומעל למישור xy .

(7) חשב את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ כאשר $\mathbf{F} = (x - z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$

ו- S הוא משטח החרוט $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ מעל למישור xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S \left((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{n} dS$$

פתרונות – פרק 13

(2) הערך המשותף הוא -16π

(4) -90

(6) 0

(1) הערך המשותף הוא 12π

(3) הערך המשותף הוא (א) -6 (ב) -9 (ג) -18

(5) -1

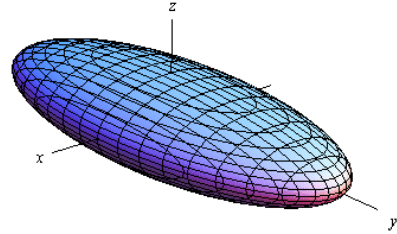
(7) 12π

נספח - משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

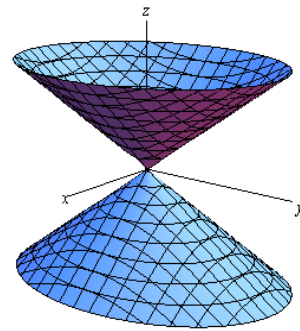
תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$ נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.



חרוט אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

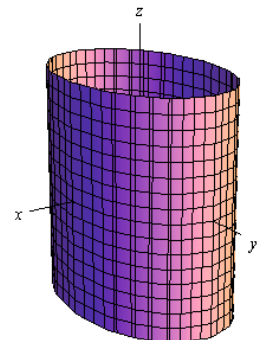
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. * מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

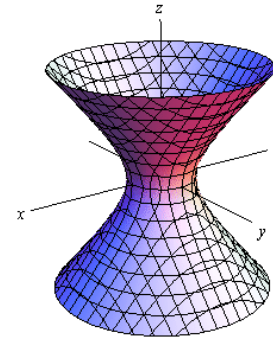


גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים. * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

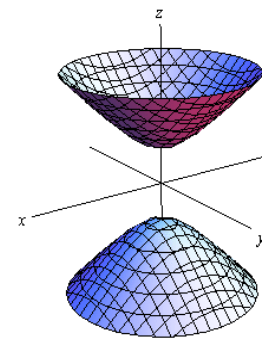


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

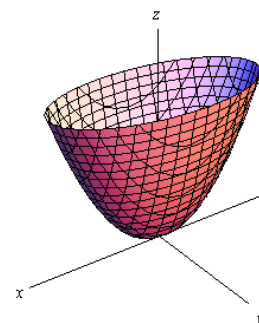
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי

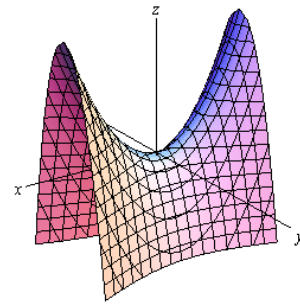
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



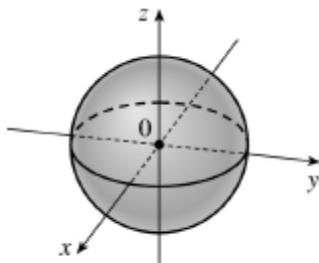
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

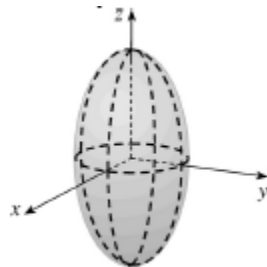
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

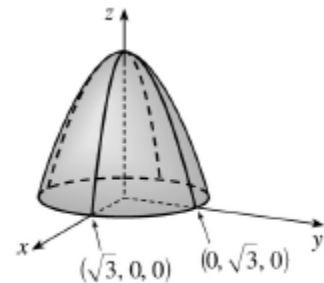
דוגמאות שונות



$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

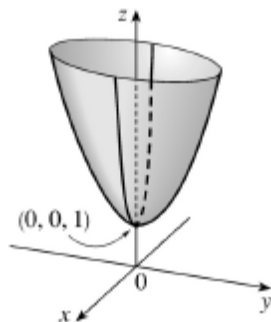


$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$

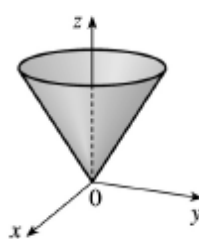


$$z = 3 - x^2 - y^2$$

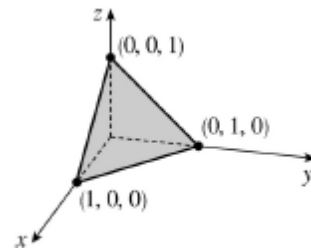
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$x + y + z = 1$$

פרק 14 - משוואות מסדר ראשון

פרק 14.1 - משוואות הנתנות להפרדת משתנים

(1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הניתנת להפרדת משתנים וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y} \quad (2)$$

$$(1-x)y' = y^2 \quad (3)$$

$$yy'\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} = 0 \quad (4)$$

$$y(2)=1 ; (x-1)\frac{dy}{dx} = 4y \quad (5)$$

$$y(1)=-1 ; \frac{dy}{dx} = xy + 3y - 3x - 9 \quad (6)$$

$$(x^2y - 2 + 2x^2 - y)dx - (xy^2 - 4 - 4x + y^2)dy = 0 \quad (7)$$

$$dy = 2t(y^2 + 4)dt \quad (8)$$

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2x + 2 \quad (9)$$

$$y(\pi)=1 ; y' + y^2 \sin x = 0 \quad (10)$$

$$y(0)=4 ; \frac{dy}{dx} = y \sec^2 x \quad (11)$$

תשובות:

- (1) $y = \pm\sqrt{x^2 + k}$ (2) $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3 + k}$ (3) $y = \frac{1}{\ln|1-x|-c}$, $y=0$
- (4) $\sqrt{1+y^2} = -\sqrt{1+x^2} + c$ (5) $\frac{1}{4}\ln|y| = \ln|x-1|$ (6) $\ln|y-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln 4 - 3.5$
- (7) $\frac{x^2}{2} + x = \frac{y^2}{2} + c$, $y=-2$ (8) $y = 2 \tan(2t^2 + k)$ (9) $x = 1 + \tan(t + c)$
- (10) $y = -\frac{1}{\cos x}$ (11) $\ln|y| = \tan x + \ln 5$ (12) $\frac{1}{-2y^2} = \sqrt{1+x^2} - 1.5$

www.GooL.co.il לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל-

כתב ופתר - גיא סלומון ©

פרק 14.2 - משוואות הומוגניות

(1) הגדר והדגם את המושג פונקציה הומוגנית של שני משתנים.

(2) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית הומוגנית וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(y^3 + x^3)dx + xy^2dy = 0 \quad (3)$$

$$y' = \frac{4y - 3x}{2x - y} \quad (4)$$

$$y^2 + x^2 y' = xyy' \quad (5)$$

$$(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0 \quad (6)$$

$$\left(x - y \cos \frac{y}{x}\right)dx + x \cos \frac{y}{x} dy = 0 \quad (7)$$

$$y' = \frac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}} \quad (8)$$

$$y(1) = 0 ; \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0 \quad (9)$$

$$(2x^2t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2t + 2xt^2)dx = 0 \quad (10)$$

$$(11) \text{ נתונה המשוואה } (y^2 + x^2)dx + xy^n dy = 0 .$$

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של n שמצאת בסעיף א.

תשובות:

$$(3) -\ln|x| = \frac{1}{6} \ln|2(y/x)^3 + 1| + c, y = -\frac{x}{2^{1/3}}$$

$$(4) \ln|x| = \frac{1}{4} \ln|(y/x) - 1| - \frac{5}{4} \ln|(y/x) + 3| + c, y = x, y = -3x$$

$$(5) -\ln|x| = \ln|(y/x)| - (y/x) + c, y = 0$$

$$(6) -\ln|x| = \frac{1}{4} \ln|2(y/x)^2 + 4| + c, y = 0, y = -2x$$

$$(7) \ln|x| = -\sin(y/x) + c \quad (8) \ln\left(1 + e^{(x/y)^2}\right) = \ln|y| + c, y = 0 \quad (9) \ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c$$

$$(10) \ln|t| = -\frac{1}{2} \ln|(x/t) - (x/t)^2| + c, x(t) = 0, x(t) = t$$

$$(11) n = 1, \ln|x| = -\frac{1}{4} \ln\left(1 + 2\left(x/y\right)^2\right) + c$$

פרק 14.3 - משוואות מהצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

(1) הסבר כיצד פותרים משוואות מן הצורה $(a_1x + b_1y + c_1)dx + (a_2x + b_2y + c_2)dy = 0$

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x+y}{2+x+y} \quad (2)$$

$$(x+2y+3)dx + (2x+4y-1)dy = 0 \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y-x+5}{2x-y-4} \quad (4)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{3+x+2y}{1+x+y} \quad (5)$$

$$(2x+y-3)dx + (x+y-1)dy = 0 \quad (6)$$

תשובות:

$$(2) \quad x = \frac{1}{2}(x+y+1) + \frac{1}{4}\ln(2(x+y+1)+1) + \frac{1}{4} + c, \quad y = -x-1.5$$

$$(3) \quad 0 = 14y - (x+2y+3)^2 + k$$

$$(4) \quad \ln|x-1| = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right| - \frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right| + c, \quad y = x-3, \quad y = -x-1$$

$$(5) \quad \ln|x-1| = \frac{1}{4}\left[-(2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right| + (-2+\sqrt{2})\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right| \right] + c,$$

$$y = \sqrt{0.5}x - 2 - \sqrt{0.5}, \quad y = -\sqrt{0.5}x - 2 + \sqrt{0.5}$$

$$(6) \quad \ln|x-2| = \frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right) + c$$

פרק 14.4 - משוואות מדויקות

(1) הסבר מהי משוואה דיפרנציאלית מדויקת וכיצד פותרים אותה
פתור את המשוואות הבאות :

$$(2x^3 + 3y)dx + (3x + y - 1)dy = 0 \quad (2)$$

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)dy = 0 \quad (3)$$

$$(y \cos x + 2xe^y)dx + (\sin x + x^2 e^y - 1)dy = 0 \quad (4)$$

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y \cos^2 x dy = 0 \quad (5)$$

$$\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right)dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0 \quad (6)$$

$$(2x^2 t - 2x^3)dt + (4x^3 - 6x^2 t + 2xt^2)dx = 0 \quad (7)$$

(8) נתונה המשוואה $(3x^2 + ye^{xy})dx + (2y^3 + kxe^{xy})dy = 0$ באשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת.

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שמצאת בסעיף א.

תשובות:

$$(2) 0.5x^4 + 3yx + 0.5y^2 - y = c \quad (3) e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c \quad (4) y \sin x + x^2 e^y - y = c$$

$$(5) x - \frac{y^2 \cos 2x}{2} - \frac{y^2}{2} = c \quad (6) \ln|x+y| + (x+1)y^2 + 2x - \ln|x| = c$$

$$(7) x^2 t^2 - 2x^3 t + x^4 = c \quad (8) k=1, \quad x^3 + e^{xy} + \frac{y^4}{2} = c$$

פרק 14.5 - הפיכת משוואה לא מדויקת למשוואה מדויקת (גורם אינטגרציה)

(1) הסבר מהו גורם אינטגרציה והראה כיצד ניתן בעזרתו להפוך משוואה לא מדויקת למשוואה מדויקת.

(2) הראה שהמשוואה $x^2y^3 + x(1+y^2)y' = 0$ אינה מדויקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

(3) הראה שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y} - 2e^{-x} \sin x\right)dx + \left(\frac{\cos y + 2e^{-x} \cos x}{y}\right)dy = 0$

אינה מדויקת ופתור אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x .

(4) הראה שהמשוואה $(x+2)\sin y dx + x \cos y dy = 0$ אינה מדויקת ופתור אותה בעזרת גורם אינטגרציה xe^x .

(5) פתור את המשוואה $(x^2 + y^2 + x)dx + (xy)dy = 0$.

(6) פתור את המשוואה $(x - x^2 - y^2)dx + ydy = 0$.

(7) פתור את המשוואה $(2xy^3 + y^4)dx + (xy^3 - 2)dy = 0$.

(8) פתור את המשוואה $(y^2 - y)dx + xdy = 0$.

(9) פתור את המשוואה $(y - xy^2)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$.

(10) פתור את המשוואה $y' = \frac{3yx^2}{x^3 + 2y^4}$.

תשובות:

$$(2) \ 0.5x^2 + \frac{y^{-2}}{-2} + \ln|y| = c \quad (3) \ e^x \sin y + 2y \cos x = c \quad (4) \ \sin y \cdot e^x \cdot x^2 = c$$

$$(5) \ 0.25x^4 + 0.5x^2y^2 + \frac{x^3}{3} = c \quad (6) \ \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - x = c \quad (7) \ x^2 + xy + \frac{1}{y^2} = c$$

$$(8) \ x - \frac{x}{y} = c \quad (9) \ -\ln x - \frac{1}{xy} + y = c \quad (10) \ -\frac{x^3}{y} + \frac{2y^3}{3} = \frac{1}{3}$$

פרק 14.6 - משוואה לינארית

(1) הגדר משוואה לינארית מסדר ראשון והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x \quad (2)$$

$$xy' = y + x^3 + 3x^2 - 2x \quad (3)$$

$$(x-2)y' = y + 2(x-2)^3 \quad (4)$$

$$x^3y' + (2-3x^2)y = x^3 \quad (5)$$

$$y(0)=1 ; \frac{dy}{dt} + y = 2 + 2t \quad (6)$$

$$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 5e^{\cos x} \quad (7)$$

$$y' - 2y \cot x = 1 \quad (8)$$

$$z(\pi) = 0 ; x^2z' + 2xz = \cos x \quad (9)$$

תשובות:

$$(2) y = 2 + C \cdot e^{-x^2} \quad (3) y = x \left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + C \right] \quad (4) y = (x-2) [x^2 - 4x + C]$$

$$(5) y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}} \quad (6) y = 2t + e^{-t} \quad (7) y = \frac{1}{\sin x} [-5e^{\cos x} + C]$$

$$(8) y = \sin^2 x [-\cot x + C] \quad (9) z = \frac{\sin x}{x^2}$$

פרק 14.7 - משוואות ברנולי

(1) הגדר את משוואות ברנולי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$x^2 y' + 2xy - y^3 = 0 \quad (2)$$

$$(x^2 + 1)y' - 2xy - y^2 = 0 \quad (3)$$

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 y^{1/2} \quad (4)$$

$$y(1) = 2.5 ; y' - \left(\frac{1}{x} + 5x^4 \right) y = -x^3 y^2 \quad (5)$$

$$z' - \cot x \cdot z = \frac{1}{\sin x} z^3 \quad (6)$$

תשובות:

$$(2) \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x} + c \cdot x^4}} \quad (3) \quad y = \frac{x^2 + 1}{-x + C} \quad (4) \quad y = x^2 \left(\frac{x}{2} + C \right)^2 \quad (5) \quad y = \frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5} + e}$$

$$(6) \quad z = \pm \sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x + C}}$$

פרק 14.8 - משוואת ריקטי

(1) הגדר את משוואת ריקטי והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^x\right)y + y^2 \quad (2)$$

$$y' = -(1+x+x^2) - (2x+1)y - y^2 \quad (3)$$

$$y' = 1 + x^2 - 2xy + y^2 \quad (4)$$

$$y' = 1 + x + 2x^2 \cos x - (1 + 4x \cos x)y + 2y^2 \cos x \quad (5)$$

תשובות:

$$(2) \quad y(x) = -x + \frac{1}{1 + Ce^x} \quad (3) \quad y(x) = -0.5e^x + \frac{e^x}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}}$$

$$(4) \quad y(x) = x + \frac{1}{-x + C} \quad (5) \quad y(x) = x + \frac{1}{\cos x - \sin x + Ce^x}$$

פרק 14.9 - משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה

בתת-פרק זה מסמנים $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

(1) הגדר משוואה מסדר ראשון וממעלה גבוהה והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$4x^2 p^2 - 4x^2 p - 2xy - y^2 = 0 \quad (2)$$

$$x^2 p^2 + xyp - 6y^2 = 0 \quad (3)$$

$$xyp^2 + (x^2 + xy + y^2)p + x^2 + xy = 0 \quad (4)$$

$$y = 2px + p^4 x^2 \quad (5)$$

$$xp^2 - 2yp + 4x = 0 \quad (6)$$

$$6p^2 y^2 + 3px - y = 0 \quad (7)$$

תשובות:

$$(2) \quad (y - 2x - \sqrt{x} \cdot c_1) \cdot \left(\ln|y| + \frac{1}{2} \ln|x| - c_2 \right) = 0$$

$$(3) \quad (\ln|y| - 2\ln|x| - c_1) \cdot (\ln|y| + 3\ln|x| - c_2) = 0$$

$$(4) \quad (y + 0.5x - \frac{c_1}{x}) \cdot (\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} - c_2) = 0, \quad x > 0 \quad (5) \quad y = \pm 2\sqrt{cx} + c^2$$

$$(6) \quad y = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{2}{c} \quad (7) \quad 6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2 + 3\left(\frac{c}{y^2}\right)x - y = 0$$

פרק 15 - משוואות לינאריות מסדר שני

פרק 15.1 - משוואה חסרה מסדר שני (הורדת סדר המשוואה)

(1) הגדר משוואה חסרה מדר שני והסבר כיצד ניתן לפתור אותה.

פתור את המשוואות הבאות :

$$x^2 y'' + xy' = \frac{1}{x} \quad (2)$$

$$y'' \tan x - 1 = y' \quad (3)$$

$$2xy'y'' - (y')^2 + 1 = 0 \quad (4)$$

$$y'' x \ln x = y' \quad (5)$$

$$xy'' = x^2 e^x + y' \quad (6)$$

$$yy'' + (y')^2 = 0 \quad (7)$$

$$2y''y - (y')^2 = 1 \quad (8)$$

$$x^3 y'' + x^2 y' = 1 \quad (9)$$

תשובות:

$$(2) \quad y = \frac{1}{x} + C_1 \cdot \ln x + C_2 \quad (3) \quad y = -x + C_1 \cdot \cos x + C_2$$

$$(4) \quad y = \pm \frac{2}{3C_1} (C_1 x + 1)^{3/2} + C_2 ; \quad y = \pm x + C_3$$

$$(5) \quad y = C_1(x \ln x - x) + C_2 ; \quad y = C_3 \quad (6) \quad y = e^x(x-1) + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2$$

$$(7) \quad \frac{y^2}{2} = cx + k ; \quad y = c \quad (8) \quad y = \frac{1}{c} \left[\frac{c^2(x+k)^1}{4} + 1 \right] \quad (9) \quad \cot y = -(cx+k) ; \quad y = c$$

פרק 15.2 - משוואות מסדר שני, לינאריות, הומוגניות עם מקדמים קבועים

(1) הגדר משוואה לינארית הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים והסבר כיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' - 100y = 0 \quad (2)$$

$$y'' - 4y' = 0 \quad (3)$$

$$y'' - 8y' + 7y = 0 \quad (4)$$

$$z(0) = 1, z'(0) = 1 ; 4z'' + z' - 5z = 0 \quad (5)$$

$$y'' - 2y' + y = 0 \quad (6)$$

$$4 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + 4 \frac{\partial x}{\partial t} + x(t) = 0 \quad (7)$$

$$y'' + 4y = 0 \quad (8)$$

$$y'' + 10y = 0 \quad (9)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 1 ; y'' - 2y' + 10y = 0 \quad (10)$$

$$5y'' + 8y' + 4y = 0 \quad (11)$$

תשובות:

$$\begin{aligned} (2) \quad y &= c_1 e^{10x} + c_2 e^{-10x} & (3) \quad y &= c_1 + c_2 e^{4x} & (4) \quad y &= c_1 e^x + c_2 e^{7x} & (5) \quad z &= e^x \\ (6) \quad y &= c_1 e^x + c_2 x e^x & (7) \quad x(t) &= c_1 e^{-t/2} + c_2 t e^{-t/2} & (8) \quad y &= e^{-5x} [c_1 \cos 10x + c_2 \sin 10x] \\ (9) \quad c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x & & (10) \quad y &= e^2 \sin 3x & (11) \quad y &= e^{-4x/5} \left[c_1 \cos \left(\frac{2}{5} x \right) + c_2 \sin \left(\frac{2}{5} x \right) \right] \end{aligned}$$

פרק 15.3 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים -

השוואת מקדמים

(1) הסבר והדגם כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת השוואת המקדמים.
פתור את המשוואות הבאות:

$$y'' + 5y' + 6y = 22x + 16x^2 \quad (2)$$

$$y(0) = 2, y'(0) = 7; y'' - 2y' + y = e^{2x} \quad (3)$$

$$y'' - y' - 2y = 4 \sin 2x \quad (4)$$

$$y'' - 2y = xe^{-x} \quad (5)$$

$$y'' - y = 3e^{2x} \cos x \quad (6)$$

$$y'' + 3y' = 9x \quad (7)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 2x^2 + e^x + 2xe^x + 4e^{3x} \quad (8)$$

$$z'' + z = \sin x \quad (9)$$

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \quad (10)$$

$$y'' - 2y' = 6x^2 - 2x \quad (11)$$

$$x'' + 5x' + 6x = e^{-t} + e^{-2t} \quad (12)$$

$$y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \sin 2x \quad (13)$$

תשובות:

$$(2) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2 \quad (3) y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$$

$$(4) y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5} \sin 2x - \frac{3}{5} \cos 2x \quad (5) y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$$

$$(6) y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x + \frac{3}{10} e^{2x} \cos x + \frac{3}{5} e^{2x} \sin x \quad (7) c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2} x^2 - x$$

$$(8) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x} \quad (9) z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x \cos x$$

$$(10) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x \quad (11) y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3$$

$$(12) x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + te^{-2t} \quad (13) y = e^{-x} \sin 2x$$

פרק 15.4 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים -

וריאצית פרמטרים

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטת וריאצית הפרמטרים.

פתור את המשוואות הבאות :

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x} \quad (2)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x \quad (3)$$

$$y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1} \quad (4)$$

$$y(1) = 0, y'(1) = 0 ; y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad (5)$$

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{-x}} \quad (6)$$

$$y'' + 4y = \sec 2x \quad (7)$$

תשובות:

$$(2) y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \cdot x + \sin x \cdot \ln |\sin x|$$

$$(3) y = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} - e^{-2x} \frac{x^2}{2} \left[\ln x - \frac{1}{2} \right] + x^2 e^{-x} [\ln x - 1]$$

$$(4) y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} - e^{-x} \left[\frac{6(\sqrt{x+1})^5}{5} - \frac{6(\sqrt{x+1})^3}{3} \right] + x e^{-x} [2(x+1)^{3/2}]$$

$$(5) y = e^x - x e^x + x e^x \ln x \quad (x > 0)$$

$$(6) y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + e^x \ln(1+e^{-x}) + e^{2x} [\ln(1+e^{-x}) - (1+e^{-x})]$$

$$(7) y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x \ln |\cos 2x| + \sin 2x \cdot x$$

פרק 15.5 - משוואה לא הומוגנית, לינארית, מסדר שני עם מקדמים קבועים -

שיטה אופרטורית

(1) הסבר כיצד פותרים משוואה לא הומוגנית מסדר שני עם מקדמים קבועים בשיטה האופרטורית.

פתור את המשוואות הבאות :

$$(D^2 - D - 2)y = 4e^{-2x} + 10e^x + 11 \quad (2)$$

$$(D^2 - 2D + 1)y = 10e^{4x} + e^x - 1 \quad (3)$$

$$(D^2 + D - 2)y = 4e^x + e^{10x} + 14 \quad (4)$$

$$(D^2 + 4)y = \sin 5x \quad (5)$$

$$(D^2 - 4)y = \sin x \cos x \cos 2x \quad (6)$$

$$(D^2 + D - 2)y = \cos x - 3\sin x \quad (7)$$

$$(D^2 + 2D - 3)y = 2 \cos x \cos 2x \quad (8)$$

$$\boxed{(aD^2 + bD + c)y = Q(x) \Leftrightarrow ay'' + by' + cy = Q(x)} \text{ - הערת סימון}$$

תשובות:

$$(2) \ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5 \quad (3) \ y = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{10}{9} e^{4x} + x^2 e^x - 1$$

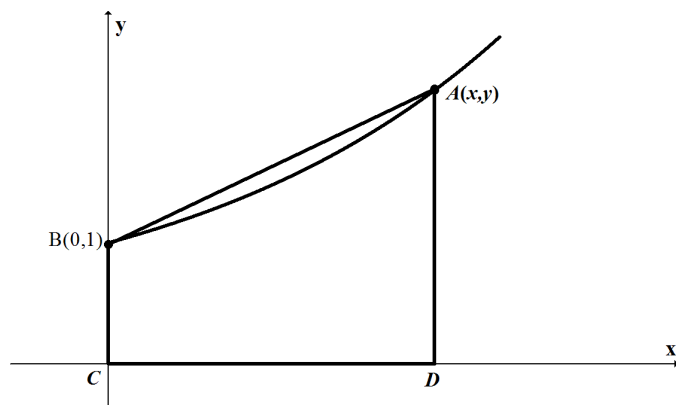
$$(4) \ y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - 4x e^x + \frac{1}{72} e^{10x} + 7 \quad (5) \ y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{21} \sin 5x$$

$$(6) \ y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} - \frac{1}{80} \sin 4x \quad (7) \ y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \sin x$$

$$(8) \ y = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{1}{5} \cos x + \frac{1}{30} \sin 3x - \frac{1}{15} \cos 3x$$

פרק 16 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

- (1) על עקום מסוים ידוע שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x, y) על העקום שווה ל- $-\frac{x}{y}$. מצא את משוואת העקום.
- (2) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1, 3)$ ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x, y) שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$. מצא את משוואת העקום.
- (3) מצא את משוואת העקום העובר דרך הנקודה $(1, 2)$ ושכל נקודה (x, y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2 - x^2}$.
- (4) מצא את משוואת העקום שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.
- (5) מצא את משוואת העקום ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.
- (6) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2, 4)$. נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x, y)$ שעליו ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים שווה לשיעור ה- y של הנקודה A .
- (7) מצא את משוואת העקום המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3, 4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.
- (8) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x, y) שבין נקודה זו וציר x נחצה ע"י ציר y . מצא את משוואת עקום זה.
- (9) מצא את העקום העובר דרך הנקודה $(0, 1)$ כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר y , המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x, y)$ והקטע OM מהראשית O ל- M הוא משולש שווה שוקיים שבסיסו הקטע MN . N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר y . צייר מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.
- (10) נתון עקום העובר בנקודה $(0, 1)$. בכל נקודה A שעל העקום שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז $ABCD$ הנראה בציור. מהי משוואת העקום.



11 מצא את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות הבאות :

א $2\ln x + \ln y = c$

ב $xy = c$

ג $x^2 + 2y^2 = c$

בפרט, מצא את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2 + 2y^2 = 9$ בנקודה $(1,2)$. שרטט.

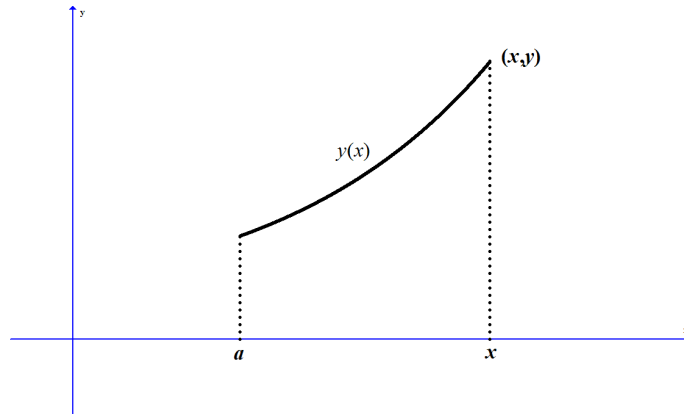
ד $x^2 + y^2 = cx$

12 מצא את משפחת העקומות היוצרות זווית של 45 מעלות עם משפחת המעגלים $x^2 + y^2 = c$.

13 שטח S מוגבל ע"י עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = a$ ו x משתנה (ראה ציור).

ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות $(a, y(a))$ ו- $(x, y(x))$.

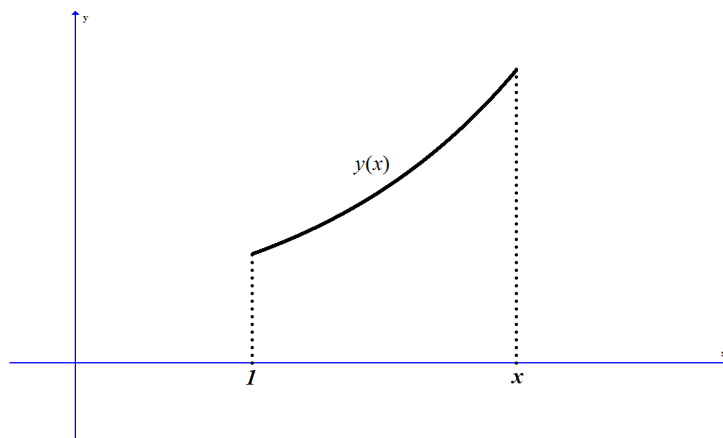
מצא את משוואת העקום.



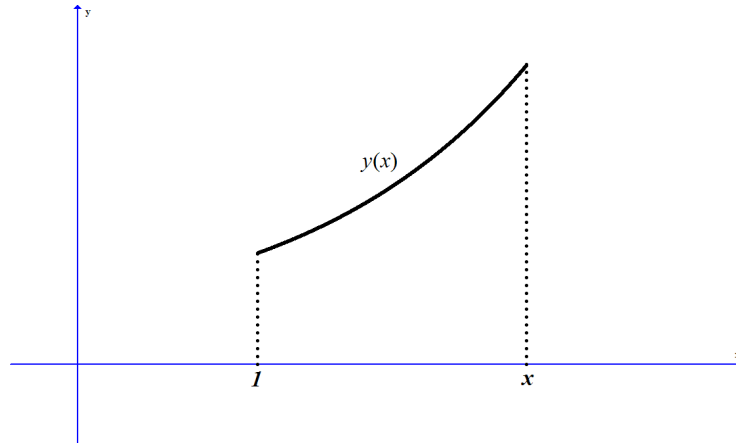
14 שטח S מוגבל ע"י עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$ ו x משתנה.

ידוע כי $y(1) = 2$ (ראה ציור).

האם קיים עקום כזה ששטחו של S שווה ל- $2y(x)$.



- 15) שטח S מוגבל ע"י עקום $y = y(x)$, ציר ה- x , $x = 1$ ו x משתנה. ידוע כי $y(1) = 2$ (ראה ציור). האם קיים עקום כזה ששטחו של S שווה ל- $y(x) - 2$.



- 16) נניח שכמות $y(t)$ גדלה (דועכת) אקספוננציאלית (מעריכית), כלומר בכל רגע קצב הגידול (הדעיכה) שלו פרופורציונלי לערכו. נניח שבזמן התחלתי מסוים $t = 0$ הכמות היא y_0 ונניח שקבוע הפרופורציה הוא k מצא נוסחה עבור הכמות בכל זמן t .
- 17) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה. ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
- כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
 - כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
 - באיזה שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?

- הנח שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- 18) האוכלוסיה בעיר מסוימת גדלה מעריכית. בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים ואחרי 4 שנים היו 440 אלף תושבים.
- מצא את אחוז הגידול השנתי
 - מצא כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת) היו בעיר 550 אלף תושבים.

- 19) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית שנתית של 4%. כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5000 ש"ח.
- כמה כסף הפקיד האדם.
 - כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7000 ש"ח?

- 20) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית. בספירה ראשונה היו 1000 חיות. בספירה שנייה שנעשתה כעבור 20 חודשים היו 1400 חיות בר. מצא אחרי כמה חודשים החל מהספירה הראשונה היו בשמורה 2000 חיות בר?

- 21) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5750 שנים. ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.
- כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1000 שנים מכמות התחלתית של 100 גרם?
 - כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם מכמות התחלתית של 100 גרם?
- 22) בבריכה אחת יש 240 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב- 4% כל שבוע. בבריכה שנייה יש 200 טון דגים וכמות הדגים שבה גדלה ב- 10% כל שבוע.
- בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?
 - בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

23) בזמן $t = 0$ יש במיכל 2 ק"ג מלח מומסים ב-500 ליטר מים. נניח שמי מלח בריכוז של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים מוזרמים לתוך המיכל, בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב. חשב את כמות המלח במיכל לאחר 10 דקות.

24) סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע $t = 0$ כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כח של 20 ק"ג על הסירה. אם משקל החותר והסירה הוא 480 ק"ג וההתנגדות (ק"ג) שווה ל- $1.75v$ באשר v נמדדת ב- מטר/שעה, מצא את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.

25) חוק הקירור של ניוטון קובע כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונאלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה השווה ל- 30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל- 70 מעלות.

- א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?
- ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?

26) נתון מיכל בצורת גליל שרדיוס בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונאלי לשורש מגובהם. נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני המים וב- k את קבוע הפרופורציה.

- א. רשום מד"ר עבור גובה פני המים, $h(t)$. מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?
- ב. ידוע כי $k = -2\pi$. פתור את המד"ר. תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

27) כדור שלג שרדיוסו ההתחלתי 4 ס"מ נמס כך שהקצב שבו רדיוסו קטן פרופורציונאלי לשטח פניו. לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל- 3 ס"מ.

- א. רשום נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t .
- ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $1/64$ מנפחו ההתחלתי?

28) מבלון מלא אוויר שרדיוסו R מתחיל לצאת אוויר. קצב יציאת האוויר הוא $-3V(t)$ כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t . הוכח כי כעבור $\ln 2$ שניות ייקטן נפח הבלון לכדי שמינית מנפחו התחלתי?

תשובות:

- (1) $x^2 + y^2 = k$ (2) $2xy + x^2 = 7$ (3) $x^3 - 3y^2x = 11$ (4) $x^2 + y^2 = k$
 (5) $y^2 = ax$ (6) $y = 2xe^{x-2}$ (7) $y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2}$
 (8) $2x^2 + y^2 = k$ (9) $2 = y + \sqrt{y^2 + x^2}$ (10) $y = 2e^{x^2/4} - 1$
 (11) (א) $2y^2 - x^2 = k$ (ב) $y^2 - x^2 = k$ (ג) $y = ax^2$, $y = 2x^2$
 (ד) $y = m(x-c)^2$ $y > 0$ (12) $\ln|x| + \frac{1}{2} \ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1\right) = -\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$
 (13) $y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k}x + C\right)$ (14) לא (15) כן (16) $y(t) = y_0 e^{kt}$
 (17) (א) $4 \cdot e^{0.02 \cdot 30} \approx 7.28_{mil}$ (ב) $4 \cdot e^{0.02 \cdot (-6)} \approx 4.51_{mil}$ (ג) 2106 שנים
 (18) (א) 2% (ב) 15.92 שנים (19) (א) 4093.65 ש"ח (ב) 13.41 שנים
 (20) 40.77 חודשים (21) (א) 88.69 גרם (ב) 19188 שנים
 (22) (א) 3.04 שנים (ב) 14.6 שנים (23) (א) 26.75 ק"ג (ב) 0.942 דקות
 (24) (א) 4.09 מטר לשנייה (ב) 72 שניות (ג) 10 מטר לשנייה (25) (א) $43\frac{1}{3}$
 (ב) $\sqrt{2} + 2$ (26) (א) $h(0) = 4$, $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$ (ב) 1.13 שעות
 (27) (א) $R(t) = \frac{12}{2t+3}$ (ב) 4.5 שעות

נספח נוסחאות

הצגות פרמטריות של עקומים חשובים

דוגמה	הצגה פרמטרית	עקום
$y = x^2 \ (1 \leq x \leq 2)$ $\Downarrow$ $x = t, y = t^2 \ (1 \leq t \leq 2)$	$x = t, y = f(t) \ (a \leq t \leq b)$	$y = f(x) \ (a \leq x \leq b)$
$x = y^2 \ (1 \leq y \leq 2)$ $\Downarrow$ $y = t, x = t^2 \ (1 \leq t \leq 2)$	$y = t, x = f(t) \ (a \leq t \leq b)$	$x = f(y) \ (a \leq y \leq b)$
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = r \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = -2 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = -r \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = b \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = -5 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = -b \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
ישר פרמטרי מהנק' $(1, 2)$ לנק' $(3, 4)$ $x = 1 + 2t$ $y = 2 + 2t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במישור מהנק' (x_0, y_0) לנק' (x_1, y_1)
ישר פרמטרי מ- $(1, 2, 3)$ ל- $(4, 7, 9)$ $x = 1 + 3t$ $y = 2 + 5t$ $z = 3 + 6t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במרחב מהנק' (x_0, y_0, z_0) לנק' (x_1, y_1, z_1)

נוסחאות - גיאומטריה אנליטית במישור ובמרחב (וקטורים)

במישור

מרחק בין 2 נקודות במישור (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

שיפוע ישר העובר דרך 2 נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m : $y - y_1 = m(x - x_1)$

ישר דרך (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

תנאי שהישר $y = m_1x + n_1$ יהיה מאונך לישר $y = m_2x + n_2$: $m_1 \cdot m_2 = -1$

תנאי שהישר $y = m_1x + n_1$ יהיה מקביל לישר $y = m_2x + n_2$: $m_1 = m_2$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

הזווית החדה α בין הישר $y = m_1x + n_1$ לישר $y = m_2x + n_2$: $\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$

מעגל שמרכזו בנקודה (a, b) ורדיוסו R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

משוואת אליפסה קנונית : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ כאשר a ו- b חוצי הצירים של האליפסה.

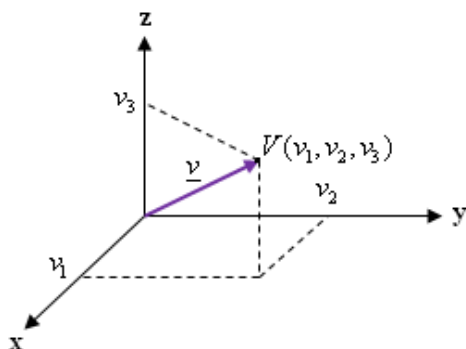
משוואת היפרבולה קנונית : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ כאשר a הוא חצי הציר הממשי.

משוואת פרבולה קנונית : $y^2 = 2px$

במרחב (וקטורים)

מרחק בין 2 נקודות (x_1, y_1, z_1) ו- (x_2, y_2, z_2) : $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

ההצגה האלגברית של וקטור



על כל נקודה $V(v_1, v_2, v_3)$ במרחב התלת-ממדי

ניתן להסתכל כעל חץ שמוצאו בראשית הצירים

$O(0, 0, 0)$ וסופו בנקודה V . חץ זה נקרא וקטור

ומסומן $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

* מקובל לרשום $\vec{v}$ או $\mathbf{v}$ במקום $\underline{v}$.

ההצגה האלגברית של וקטור בעזרת וקטורי הצירים

וקטורי הצירים הם הוקטורים: $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

המסומנים גם כך $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$

או כך $\hat{x} = (1, 0, 0)$, $\hat{y} = (0, 1, 0)$, $\hat{z} = (0, 0, 1)$

או כך $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$

ההצגה של וקטור $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ בעזרת וקטורי הצירים היא $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

פעולות בין וקטורים:

נתונים שני וקטורים: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

כפל וקטור בסקלר: $k \cdot \vec{a} = k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$

חיבור וקטורים: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ $(\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b})$

מכפלה וקטורית של וקטורים: $\vec{a} \times \vec{b} = ((a_2b_3 - a_3b_2), -(a_1b_3 - a_3b_1), (a_1b_2 - a_2b_1))$

גודל וקטור $\vec{a}$ (אורך הוקטור): $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

הנירמול של וקטור $\vec{a}$: $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(a_1, a_2, a_3)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

כיוון וקטור במרחב

יהיו α, β, γ שלוש הזוויות שיוצר הוקטור $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ עם הצירים x, y, z בהתאמה.

$$1. a_1 = |\vec{a}| \cos \alpha, a_2 = |\vec{a}| \cos \beta, a_3 = |\vec{a}| \cos \gamma$$

$$2. \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

3. הוקטור $\hat{a} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ הוא וקטור יחידה בכיוון $\vec{a}$.

משוואת ישר פרמטרי במישור דרך $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$:

$$\underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u} \quad (\underline{a} = A, \underline{u} = B - A)$$

or

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

or

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

משוואת ישר פרמטרי במרחב דרך $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u} \quad (\underline{a} = A, \underline{u} = B - A)$$

or

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

or

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1), \quad z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

זווית בין שני ישרים

נתונים שני ישרים : $L_1 : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ ו- $L_2 : \underline{x} = \underline{b} + s\underline{v}$

$$\cos \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|}{|\underline{u}| |\underline{v}|} : \text{הזווית } \alpha \text{ בין הישרים מקיימת}$$

משוואת מישור : $ax + by + cz + d = 0$ כאשר $\vec{v} = (a, b, c)$ וקטור נורמל (מאונך) למישור.

משוואת מישור דרך 3 נקודות : $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$:

$$\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 0$$

מרחק נקודה ממישור

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} : \text{מרחק הנקודה } (x_0, y_0, z_0) \text{ מהמישור } ax + by + cz + d = 0$$

זווית בין ישר ומישור

נתונים : ישר $L : \underline{x} = \underline{r} + t\underline{u}$ ומישור $ax + by + cz + d = 0$.

$$\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|}{|\underline{u}| |\underline{v}|} : \text{הזווית } \alpha \text{ בין הישר למישור מקיימת} \quad \underline{v} = (a, b, c) \text{ כאשר}$$

הערה :

הישר $\underline{x} = t(a, b, c)$ מאונך למישור $ax + by + cz + d = 0$.

לפיכך, אם הישר $L : \underline{x} = \underline{r} + t \cdot \underline{u}$ מקביל למישור אז $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.

זווית בין שני מישורים

$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \quad a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 : \text{נתונים שני מישורים}$$

$$\cos \alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} : \text{הזווית } \alpha \text{ שבין המישורים מקיימת}$$

גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\arctan(0) = 0$	$\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \coth f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c \quad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c \quad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases} \\ \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases} \\ \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \\ \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

נוסחאות - אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

<u>טור מקלורן</u>	<u>תחום התכנסות</u>
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$-\infty < x < \infty$
$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$	$-1 < x \leq 1$
$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$	$-1 \leq x \leq 1$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots$	$-1 < x < 1$
$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$ $= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$	$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$ $-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$ $-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$ $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$