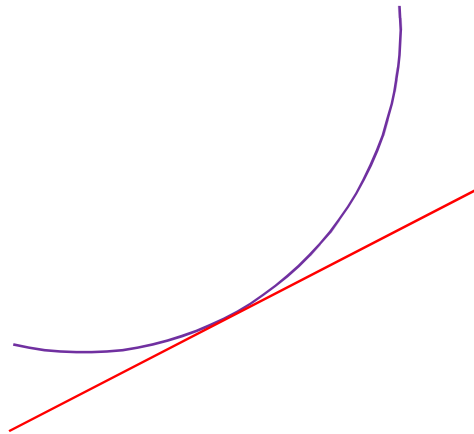


מתמטיקה

שימושית



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הקורס מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה - אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva1.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

4	פרק 1 - פונקציה ממשית
6	פרק 2 - חישוב נגזרת של פונקציה
9	פרק 3 - חישוב נגזרת של פונקציות מיוחדות
11	פרק 4 - חקירת פונקציה
16	פרק 5 - פתרון משוואות (משפט ערך הביניים, משפט רול, משפט ניוטון רפסון)
17	פרק 6 - טורי טיילור/מקלורן
22	פרק 7 - אינטגרלים מידיים
23	פרק 8 - אינטגרלים כמעט מידיים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"
24	פרק 9 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים
25	פרק 10 - אינטגרלים בשיטת ההצבה
26	פרק 11 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות (פירוק לשברים חלקיים)
27	פרק 12 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות
30	פרק 13 - האינטגרל המסויים (כולל אי שוויונים עם אינטגרלים וסכום רימן)
33	פרק 14 - המשפט היסודי של החדו"א (גזירת האינטגרל)
34	פרק 15 - אינטגרלים לא אמיתיים
35	פרק 16 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות
37	פרק 17 - נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות
40	פרק 18 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים
42	פרק 19 - נגזרת מכוונת וגרדיאנט
44	פרק 20 - פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים
46	פרק 21 - נוסחת טיילור לפונקציה של שני משתנים, הדיפרנציאל השלם
48	פרק 22 - קיצון של פונקציה של שני משתנים (רגיל)
50	פרק 23 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם), שיטת הריבועים הפחותים
52	פרק 24 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגרנג')
54	פרק 25 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים (כופלי לגרנג')
56	פרק 26 - קיצון של פונקציה בשני משתנים בקבוצה סגורה וחסומה
57	פרק 27 - אינטגרלים כפולים
61	פרק 28 - שימושי האינטגרל הכפול
63	פרק 29 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)
66	פרק 30 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)
67	פרק 31 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם
69	פרק 32 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

70	פרק 33 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן).....
71	פרק 34 - אינטגרלים קויים ושימושיהם.....
75	פרק 35 - שדות משמרים ; אי תלות במסלול.....
78	פרק 36 - משפט גרין.....
80	פרק 37 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם.....
82	פרק 38 - משפט הדיברגנץ (משפט גאוס).....
85	פרק 39 - משפט סטוקס (משפט גרין במרחב).....
87	פרק 40 - וקטורים.....
96	פרק 41 - מספרים מורכבים.....
101	נפסח - דפי נוסחאות.....

תרגילים - פרק 1**פונקציה ממשית****(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :**

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1) \quad y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (2) \quad y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3)$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad (4) \quad y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad (5) \quad y = \sqrt{x-4} \quad (6)$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad (7) \quad y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad (8) \quad y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9)$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad (10) \quad y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11) \quad y = e^{x^2+x+1} \quad (12)$$

$$y = \log_x(x+4) \quad (13) \quad y = \tan(10x) \quad (14) \quad y = \cot(4x) \quad (15)$$

$$y = \arctan(x+4) \quad (16) \quad y = \arcsin(x-4) \quad (17) \quad y = \arccos(x+1) \quad (18)$$

(2) נתונות הפונקציות הבאות : $f(x) = x-4$, $g(x) = x^2$, $h(x) = \frac{4}{x}$.**חשב את הפונקציות המורכבות הבאות :**

$$f(g(1)) \quad (1) \quad h(g(f(5))) \quad (2) \quad f(g(x)) \quad (3) \quad h(f(x)) \quad (4) \quad f(f(x)) \quad (5) \quad h(h(x)) \quad (6)$$

(3) בתרגילים הבאים הוכח שהפונקציה הנתונה היא חח"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x-1}{3} \quad (1) \quad f(x) = \frac{x+1}{x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad (3) \quad f(x) = x^2 - 4 \quad (x \geq 0) \quad (4)$$

(4) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות הן אי זוגיות ואיזה זוגיות :

$$y = 4x^3 \quad (1) \quad y = x^4 + x^{10} \quad (2) \quad y = 1 \quad (3) \quad y = \frac{1}{x} \quad (4) \quad y = x^2 + \sin^2 x \quad (5) \quad y = 2^x \quad (6) \quad y = \ln x + x^2 \quad (7) \quad y = \sin x \cdot \cos x \quad (8)$$

(5) מצא את המחזור של כל אחת מהפונקציות הבאות :

$$y = 2 \sin x \quad (1) \quad y = 5 + 3 \sin(4x+1) \quad (2) \quad y = \tan \frac{x}{3} \quad (3) \quad y = \sin^2 x \quad (4)$$

(6) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת* ושרטט את גרף הפונקציה.

$$y = |x-2| \quad (1) \quad y = 3|x+1| \quad (2) \quad y = x^2 + 2|x-1| \quad (3) \quad y = \frac{|x|}{x} \quad (4)$$

*** יש הקוראים לפונקציה "מפוצלת", פונקציה "מוטלאת" או פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקריים".**

פתרונות – פרק 1**(1)**

$$\begin{array}{lllll}
 x \neq 2, -1 \quad (5) & x \neq 0, 1, -1 \quad (4) & x \text{ כל} \quad (3) & x \neq \pm 2 \quad (2) & x \text{ כל} \quad (1) \\
 x < -2 \text{ או } x > 1 \quad (10) & -1 < x < 1 \quad (9) & x \text{ כל} \quad (8) & x \leq -2 \text{ או } x \geq 1 \quad (7) & x \geq 4 \quad (6) \\
 x \neq \frac{\pi}{4} \cdot k \quad (15) & x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}k \quad (14) & 0 < x \neq 1 \quad (13) & x \text{ כל} \quad (12) & 0 < x \neq 1 \quad (11) \\
 & & -2 < x < 0 \quad (18) & 3 < x < 5 \quad (17) & x \text{ כל} \quad (16)
 \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{llllll}
 x \quad (6) & x-8 \quad (5) & \frac{4}{x-4} \quad (4) & x^2-4 \quad (3) & 4 \quad (2) & -3 \quad (1)
 \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{ll}
 y \neq 3, \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3} \quad (3) & y \neq 1, \quad f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} \quad (2) \\
 y \geq -4, \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} \quad (4) & y \text{ כל}, \quad f^{-1}(x) = 3x+1 \quad (1)
 \end{array}$$

(4)

זוגיות – 2, 3, 5, 8 אי זוגיות – 1, 4 כלליות – 6, 7.

(5)

$$\begin{array}{llll}
 \pi \quad (4) & 3\pi \quad (3) & \frac{\pi}{2} \quad (2) & 2\pi \quad (1)
 \end{array}$$

(6)

$$\begin{array}{ll}
 y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \quad (2) & y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \quad (1)
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad (4) & y = \begin{cases} x^2+2x-2 & x \geq 1 \\ x^2-2x+2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)
 \end{array}$$

תרגילים - פרק 2**גזירה של פונקציה**

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 29-27 גזור פעם אחת):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

פתרונות - פרק 2

$$\begin{aligned}
 & f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2) \\
 & f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1) \\
 & f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4) \\
 & f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3) \\
 & f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6) \\
 & f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5) \\
 & f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8) \\
 & f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7) \\
 & f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10) \\
 & f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9) \\
 & f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12) \\
 & f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11) \\
 & f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13) \\
 & f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad (15) \\
 & f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 + 2x}{x^4} \right) \quad (14) \\
 & f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16) \\
 & f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17) \\
 & f'(x) = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}} \quad (18) \\
 & f'(x) = \frac{2 - 5x}{3 \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1 + 5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19) \\
 & f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3) \quad (20)
 \end{aligned}$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}, \quad f''(x) = \frac{2x + 3}{2(-x^2 - 3x - 2)^{3/2}} \quad (25)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (26)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (27)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (29)$$

תרגילים - פרק 3

נגזרות של פונקציות מיוחדות

נגזרת הפונקציה ההפוכה

(1) הוכח, בעזרת כלל הנגזרת של הפונקציה ההפוכה, את הנוסחאות הבאות :

$$(1) \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (2) \quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (3) \quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

נגזרות מסדרים גבוהים, נוסחת לייבניץ

(2) חשב את הנגזרת ה- n , $f^{(n)}(x)$, של הפונקציות הבאות :

$$(1) \quad y = \frac{1}{x+a} \quad (2) \quad y = \frac{2x+3}{x^2-3x+2} \quad (3) \quad y = \frac{x}{(x^2-1)(x-2)} \quad (4) \quad y = \frac{x^4}{x^2-1}$$

(3) חשב את הנגזרת העשירית, $y^{(10)}$, של הפונקציות הבאות :

$$(1) \quad y = x^3 e^x \quad (2) \quad y = x^3 \sin 5x$$

נגזרת של פונקציה סתומה

(4) גזור את הפונקציות הסתומות הבאות ומצא את y' :

$$(1) \quad x^2 + y^5 - y = 1 \quad (2) \quad 4 \ln x + 10 \ln y = y^2 \quad (3) \quad xy = \sinh \frac{y}{x}$$

$$(4) \quad x^y - xy = 10 \quad (5) \quad x^y - y^x = 1 \quad (6) \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

(5) נתונה פונקציה סתומה $xy - y^3 + x^2 - x = 0$. מצא את ערך y'' בנקודה $y = 1$.

נגזרת של פונקציה הנתונה בצורה פרמטרית

(6) חשב את הנגזרת הראשונה והשנייה של הפונקציות הבאות הנתונות בצורה פרמטרית.

$$(1) \quad \begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = t \cos t \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x(t) = t \cos t \\ y(t) = t^2 - 1 \end{cases}$$

נגזרת של פונקציה מן הצורה $h(x)^{g(x)}$

(7) גזור את הפונקציות הבאות :

$$(1) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (2) \quad f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (3) \quad f(x) = (\cos x)^{\ln x}$$

פתרונות - פרק 3**(2)**

$$y^{(n)} = (-1)^n n! (x+a)^{-n-1} \quad (1)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left(-5(x-1)^{-n-1} + 7(x-2)^{-n-1} \right) \quad (2)$$

$$y^{(n)} = (-1)^n n! \left(-\frac{1}{2}(x-1)^{-n-1} - \frac{1}{6}(x+1)^{-n-1} + \frac{2}{3}(x-2)^{-n-1} \right) \quad (3)$$

$$y' = 2x - \frac{1}{2} \left((x-1)^{-2} - (x+1)^{-2} \right) \quad (4)$$

$$y'' = 2 + \left((x-1)^{-3} - (x+1)^{-3} \right)$$

$$y^{(n)} = \frac{1}{2} (-1)^n n! \left((x-1)^{-n-1} - (x+1)^{-n-1} \right) \quad (n > 2)$$

(3)

$$(e^x \cdot x^3)^{(10)} = e^x [x^3 + 103x^2 + 456x + 120 \cdot 6] \quad (1)$$

$$(\sin 5x \cdot x^3)^{(10)} = -5^{10} x^3 \sin 5x + 6 \cdot 5^{10} x^2 \cos 5x + 54 \cdot 5^9 x \sin 5x - 24 \cdot 5^9 \cos 5x \quad (2)$$

(4)

$$y' = \frac{-y(x^2 + \cosh \frac{y}{x})}{x(x^2 - \cosh \frac{y}{x})} \quad (3) \quad y' = \frac{-4y}{x(10 - 2y^2)} \quad (2) \quad y' = \frac{2x}{1 - 5y^4} \quad (1)$$

$$y' = \frac{y - \sqrt{y}}{\sqrt{x} - x} \quad (6) \quad y' = \frac{y^x \ln y - x^{y-1} y}{x^y \ln x - y^{x-1} x} \quad (5) \quad y' = \frac{y(1 - x^{y-1})}{x^y \ln x - x} \quad (4)$$

$$-\frac{1}{8}, -1 \quad (5)$$

(6)

$$y'(x) = \frac{\cos t - t \sin t}{1 - \cos t} \quad (1)$$

$$y''(x) = \frac{(-2 \sin t - t \cos t)(1 - \cos t) - \sin t(\cos t - t \sin t)}{(1 - \cos t)^3}$$

$$y'(x) = \frac{2t}{\cos t - t \sin t} \quad (2)$$

$$y''(x) = \frac{2(\cos t - t \sin t) - 2t(-2 \sin t - t \cos t)}{(\cos t - t \sin t)^3}$$

(7) ראה פתרון שאלות 37-39 בפרק 6.

תרגילים - פרק 4**חקירת פונקציה**

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים*, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות**, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול***, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3)$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (15)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (27)$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (26)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3 \quad (30) \quad (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \quad (0 \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

הערות:

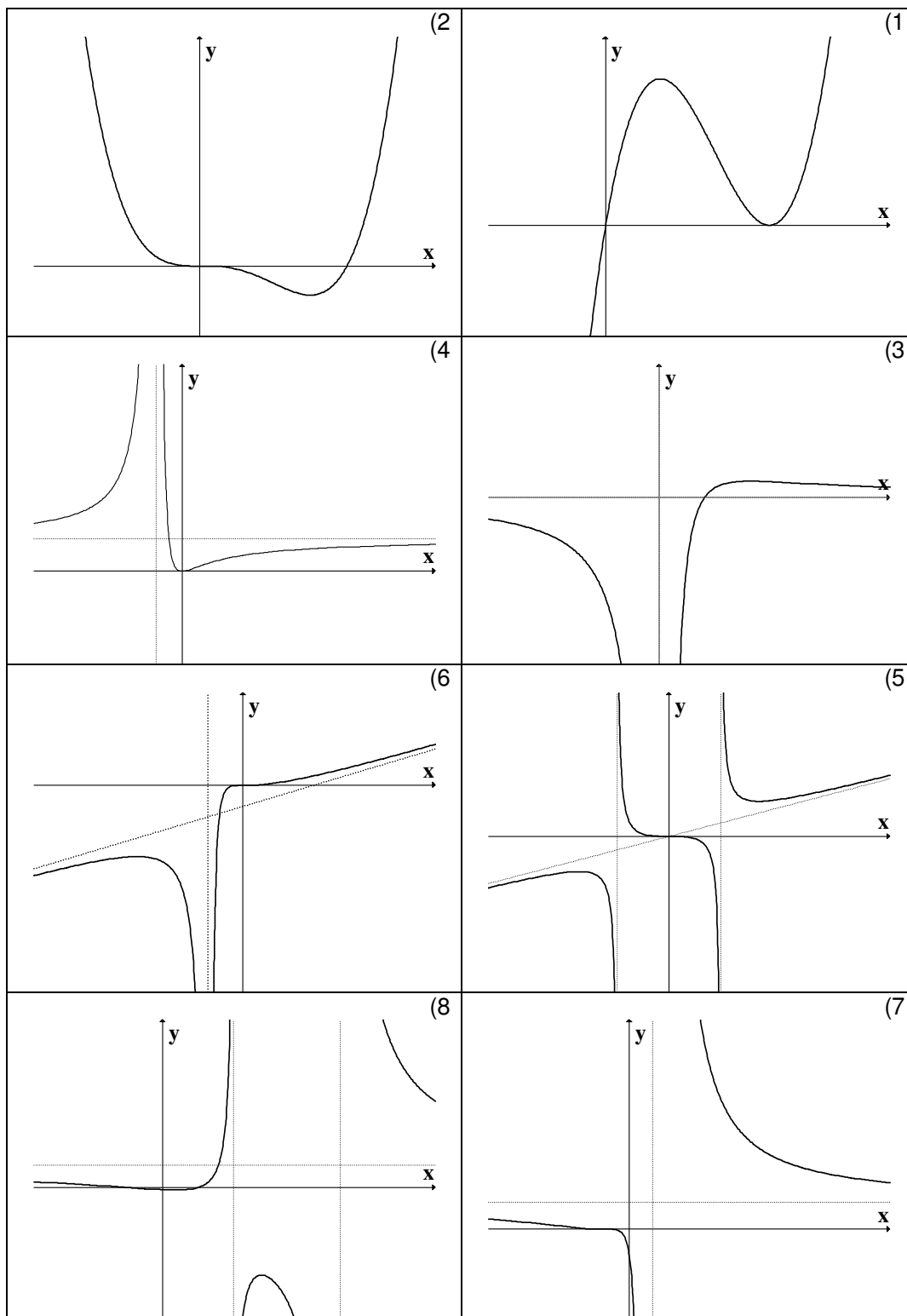
* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר x . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

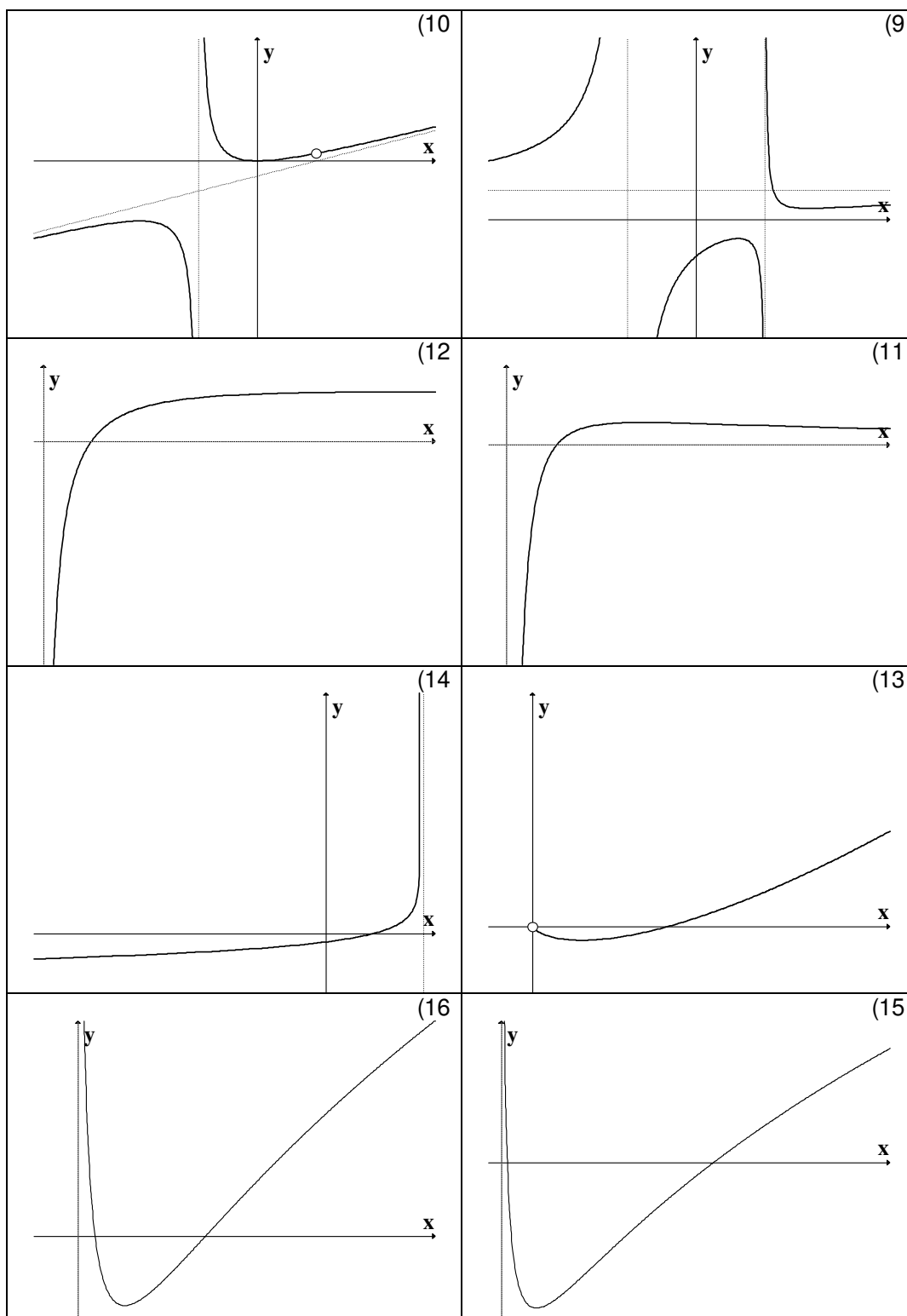
** בתרגילים 1,2,28,29,30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).

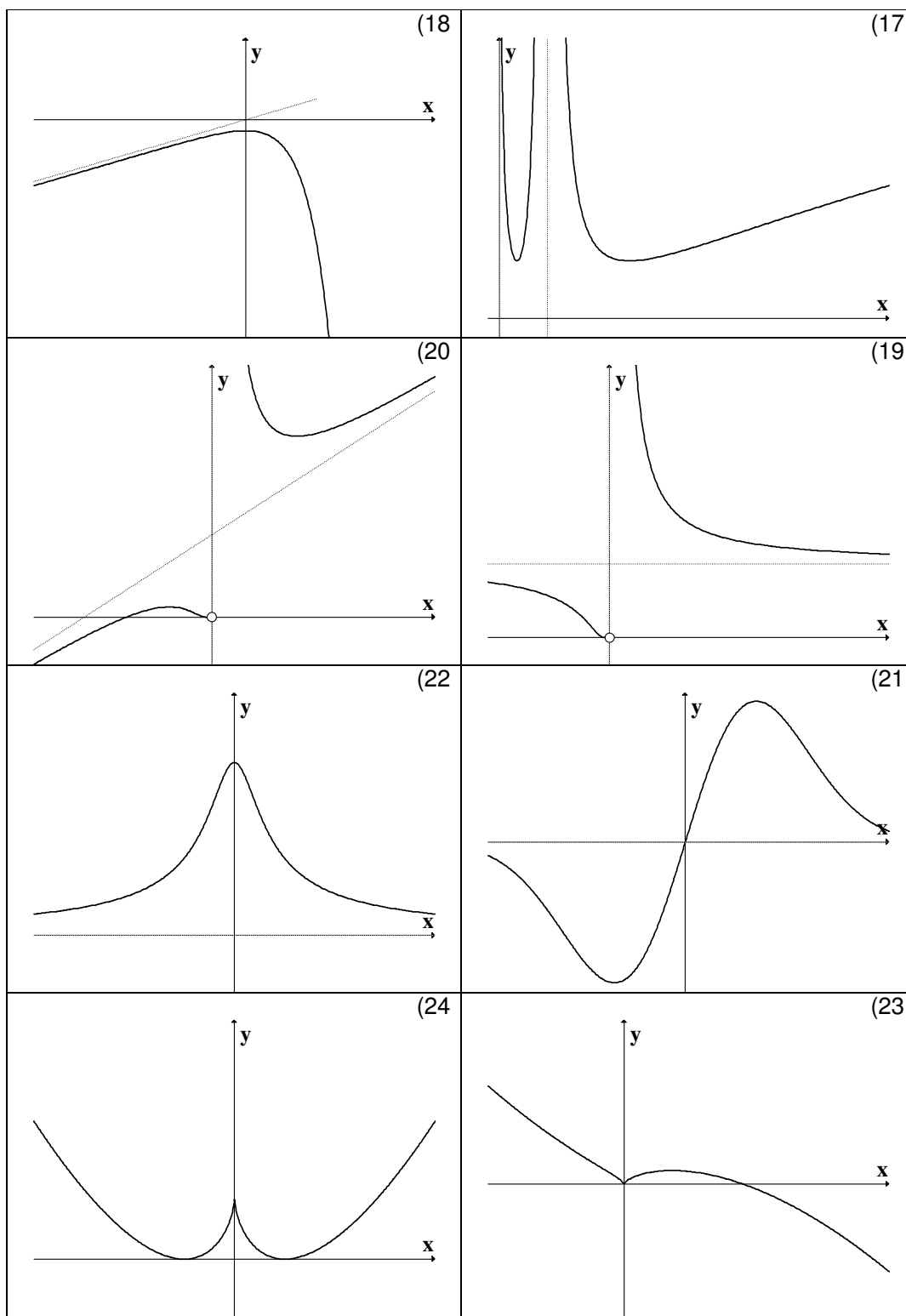
*** בתרגילים 9,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

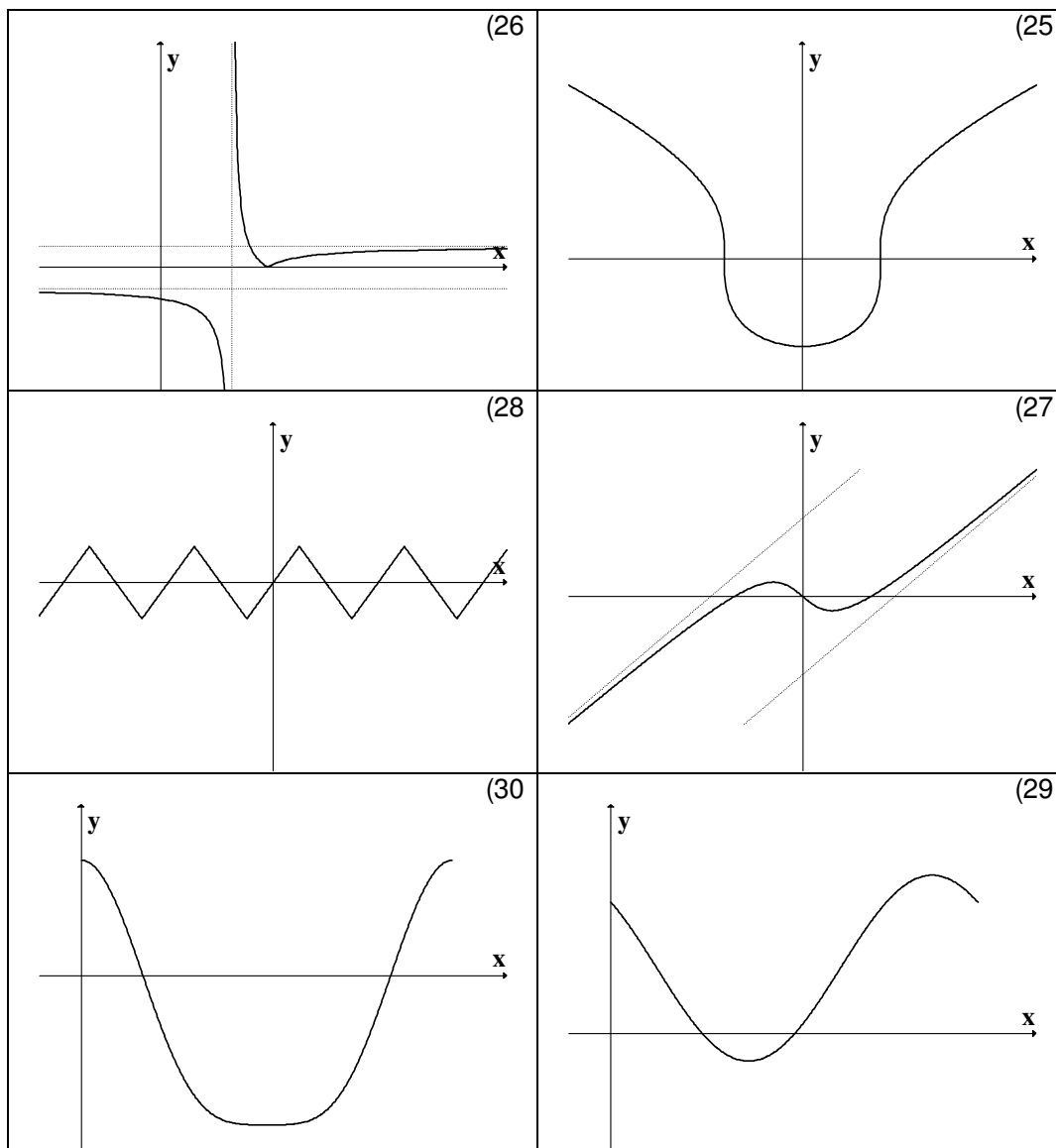
פתרונות - פרק 4

(1)









תרגילים - פרק 5**פתרון משוואות (משפט ערך הביניים, מונוטוניות (משפט רול), ניוטון רפסון)**

(1) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק פתרון אחד :

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (4) \quad x - 0.25 \sin x = 7 \quad (3) \quad x^2 = -\ln x \quad (2) \quad x^3 + 4x - 1 = 0 \quad (1)$$

(2) נתונה המשוואה $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ונתון כי $b^2 < 3ac$.

מהו מספר הפתרונות של המשוואה? הוכח את תשובתך.

(3) עבור כל אחת מהמשוואות הבאות מצא את מספר הפתרונות ופתור אותה.

$$x^2 + x \sin x = 1 - \cos x \quad (4) \quad \ln(x+5) - 4 = x \quad (3) \quad \arctan x - x = 0 \quad (2) \quad e^{x-1} = x \quad (1)$$

(4) תהי f פונקציה גזירה לכל x המקיימת: $f(0) = 1, f(1) = 2, f'(x) \leq 1$.

הוכח שלמשוואה $f(x) + \sin x = 4x$ יש בדיוק פתרון אחד.

(5) הוכח שלמשוואות הבאות יש בדיוק שני פתרונות :

$$1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (3) \quad 4x^3 + 5x - \frac{1}{x} = 0 \quad (2) \quad e^x - 5x = 0 \quad (1)$$

(6) בכל אחת מהמשוואות הבאות מצא קשר בין הפרמטרים על מנת שלמשוואות יהיה בדיוק פתרון אחד (הנח שכל הפרמטרים שונים מאפס).

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (2) \quad ax^2 + bx + c = 0 \quad (1)$$

$$(n > 4, \text{ odd}) \quad ax^n + bx^{n-2} + cx^{n-4} - d = 0 \quad (4) \quad x + a \cos(bx) = 1 \quad (3)$$

(7) פתור את המשוואות הבאות (סעיפים 2,3 בשיטת ניוטון רפסון) :

$$-4x^3 + 21x^2 - 48x + 28 = 0 \quad (3) \quad 1 + 4x^4 = 8x^3 \quad (2) \quad 7x^3 - 33x^2 + 21x + 61 = 0 \quad (1)$$

פתרונות - פרק 5

(2) פתרון יחיד. (3) $x = 1$ (1) $x = 0$ (2) $x = -4$ (3) $x = 0$ (4) $x = 0$.

$$\frac{1}{ab} < -1 \text{ או } \frac{1}{ab} > 1 \quad (3) \quad 4b^2 - 12ac < 0 \quad (2) \quad b^2 - 4ac = 0 \quad (1) \quad (6)$$

$$b^2(n-2)^2 - 4anc(n-4) < 0 \quad (4)$$

(7) (1) פתרון מדויק $x = -1$. (2) פתרונות מקורבים $x = 0.5576, x = 1.9672$.

(3) פתרון מקורב $x = 0.8459$

תרגילים - פרק 6**טור טיילור/מקלורן**

(1) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = 0$ (טור מקלורן) של הפונקציות הבאות :
 * תוכל להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח שבעמוד האחרון.

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (12) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (11) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (14) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (18) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (17) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (16)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (21) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (20) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (19)$$

$$f(x) = \arctan(x/3) \quad (24) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (23) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (22)$$

הערות : לפתרון סעיפים 16,17 עליך להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
 לפתרון סעיפים 18,19,23,24 עליך להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.

(2) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב $x = x_0$ של הפונקציות הבאות :

$$(x_0 = \frac{\pi}{2}) f(x) = \sin x \quad (3) \quad (x_0 = 2) f(x) = \frac{1}{x} \quad (2) \quad (x_0 = 1) f(x) = \ln x \quad (1)$$

(3) מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות הבאות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (3) \quad f(x) = \tan x \quad (2) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (1)$$

(4) חשב את סכום הטורים הבאים :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

(5) חשב את ערך הגבול בתרגילים הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(6) חשב בשגיאה הקטנה מ- 0.001 :

$$\arctan 0.25 \quad (3) \quad \sin 3^\circ \quad (2) \quad \frac{1}{e} \quad (1)$$

(7) חשב בעזרת n איברים ראשונים (שונים מאפס) בפיתוח לטור מקלורן והערך את השגיאה בחישוב :

$$(n=4) \ln 1.5 \quad (3) \quad (n=1) \cos 4^\circ \quad (2) \quad (n=3) \frac{1}{\sqrt{e}} \quad (1)$$

(8)

א. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ עבור $|x| \leq \frac{\pi}{6}$.ב. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\ln(1+x) \cong x$ עבור $|x| < 0.01$.ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$ עבור $|x| \leq 0.2$.

(9)

א. עבור אילו ערכי x , $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.001 .ב. עבור אילו ערכי x , $\arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$ בשגיאה הקטנה מ- 0.01 .

(10) חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ- ε .

$$(1) \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (\varepsilon = 0.0001) \quad (2) \int_0^{0.1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (\varepsilon = 0.001)$$

$$(3) \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (\varepsilon = 0.0001)$$

נוסחת השארית של לגרנז'

(11) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{64+x}$ סביב $x_0 = 0$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\sqrt[3]{66}$ והערך את השגיאה בקירוב.

(12) רשום את נוסחת טיילור מסדר ראשון לפונקציה $f(x) = \tan x$ סביב $x_0 = 0$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\tan 0.1$ והערך את השגיאה בקירוב.

(13) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt{x+4}$ סביב $x_0 = 0$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\sqrt{5}$ והערך את השגיאה בקירוב.

(14) רשום את נוסחת טיילור מסדר שני לפונקציה $f(x) = \sqrt[4]{x}$ סביב $x_0 = 16$,

כולל שארית לגרנז'. חשב בעזרת הנוסחה שקיבלת את $\sqrt[4]{15}$ והערך את השגיאה בקירוב.

הערה לגבי קירובים:

אם מבקשים קירוב שהוא **מדויק ל- n ספרות אחרי הנקודה**, אז עלינו לדרוש, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- 0.5×10^{-n} . למשל דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ- $0.0005 = 0.5 \times 10^{-3}$.
אני בספר לא השתמשתי בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

פתרונות - פרק 6

(1)

(1)

(2)

(3)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

(6)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

(5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

(4)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

(9)

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

(8)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

(7)

$$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$(-1 < x < 1)$$

$$\ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$(-1 \leq x < 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!}$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (11)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (10)$$

$$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n \quad (13)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (12)$$

$$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (15)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (14)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (17)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (16)$$

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (19)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (18)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (21)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (20)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (23)$$

(22)

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)}$$

(24)

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1} (2n+1)}$$

(2)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}} \quad (2)$$

$$(0 < x < 4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1} \quad (1)$$

$$(0 < x \leq 2)$$

(3)

$$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots \quad (3)$$

$$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots \quad (2)$$

$$1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots \quad (1)$$

(4)

$$\ln \frac{3}{2} \quad (9) \quad \ln 2 \quad (8) \quad \cos 1 \quad (7) \quad \sin 1 \quad (6) \quad \pi/4 \quad (5) \quad 2e \quad (4) \quad \sqrt{e} \quad (3) \quad e^{-2} \quad (2) \quad e \quad (1)$$

(5)

$$1/3 \quad (3)$$

$$1/3 \quad (2)$$

$$1/120 \quad (1)$$

(6)

$$47/192 \quad (3)$$

$$\pi/60 \quad (2)$$

$$53/144 \quad (1)$$

(7)

$$\frac{1}{160} \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \frac{77}{192} \quad (3)$$

$$1 \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \frac{\pi \cdot \pi}{4050} \quad (2)$$

$$\frac{5}{8} \quad \text{בשגיאה הקטנה מ-} \frac{1}{48} \quad (1)$$

(8)

$$(0.2)^6 / 6! \quad (2)$$

$$(0.01)^2 / 2 \quad (2)$$

$$(\pi/6)^5 / 5! \quad (1)$$

(9)

$$|x| < \sqrt[9]{9/100} \quad (2)$$

$$|x| < \sqrt[5]{3/25} \quad (1)$$

(10)

$$143/576 \quad (3)$$

$$39/400 \quad (2)$$

$$449/2250 \quad (1)$$

תרגילים - פרק 7**האינטגרל הלא מסוים (אינטגרל מיידי)**

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) & \int x^4 dx \quad (2) & \int 4dx \quad (1) \\
 \int 4x^{10} dx \quad (6) & \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) & \int \sqrt{x} dx \quad (4) \\
 \int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) & \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx \quad (8) & \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7) \\
 \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) & \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) & \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10) \\
 \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) & \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) & \int (4x+1)^{10} dx \quad (13) \\
 \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) & \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) & \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16) \\
 \int \frac{1}{4x} dx \quad (21) & \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) & \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19) \\
 \int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) & \int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23) & \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22) \\
 \int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27) & \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) & \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25) \\
 \int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (30) & \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (29) & \int (e^{x+1})^2 dx \quad (28) \\
 \int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33) & \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32) & \int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31) \\
 \int 2\sin 4x + \cos x dx \quad (36) & \int \sin \frac{x}{2} dx \quad (35) & \int \cos 4x dx \quad (34)
 \end{array}$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

תרגילים - פרק 8**האינטגרל הלא מסוים (הנגזרת כבר בפנים)**

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3)$$

$$\int \cot x dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5)$$

$$\int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9)$$

$$\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12)$$

$$\int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11)$$

$$\int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15)$$

$$\int \sin(x^2+1) x dx \quad (14)$$

$$\int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23)$$

$$\int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

* הערה : את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

תרגילים - פרק 9**האינטגרל הלא מסוים (אינטגרציה בחלקים)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \quad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int x \cos 2x dx \quad (4) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int \ln x dx \quad (7) \quad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \quad \int \arcsin x \quad (10) \quad \int \arctan x \quad (9)$$

$$\int x \arctan x \quad (14) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13) \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \quad \int \ln^2 x dx \quad (16) \quad \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \quad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19) \quad \int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad \int x \tan^2 x dx \quad (22) \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

(2) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int x^4 e^x dx$.

(3) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(4) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(5) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

תרגילים - פרק 10**האינטגרל הלא מסוים (שיטת ההצבה)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים (הצבות רגילות):

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \quad \int x^3(3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \quad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x^4 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \quad \int \ln^3 x dx \quad (14) \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \quad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \quad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \quad (21) \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \quad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \quad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

הערה: בחלק מהתרגילים, לאחר ההצבה, תידרש לאינטגרציה בחלקים.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

תרגילים - פרק 11**האינטגרל הלא מסוים (פונקציות רציונליות)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx & (1) & \int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx & (2) & \int \frac{dx}{x^2-4} & (3) \\
 \int \frac{2-x}{x^2+5x} dx & (4) & \int \frac{x}{x^2+5x+6} dx & (4) & \int \frac{x^2+x-1}{x^3-x} dx & (5) \\
 \int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6} dx & (6) & \int \frac{10x}{x^4-13x^2+36} dx & (7) & \int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)} dx & (8) \\
 \int \frac{5-x}{x^3+x^2} dx & (9) & \int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x} dx & (10) & \int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)} & (11) \\
 \int \frac{1}{x^2+2x+3} dx & (12) & \int \frac{1}{x^2+x+1} dx & (13) & \int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)} dx & (14) \\
 \int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)} dx & (15) & \int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)} dx & (16) & \int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx & (17) \\
 \int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2} dx & (18) & \int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1} dx & (19) & \int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4} dx & (20) \\
 \int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1} dx & (21) & \int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2} dx & (22) & \int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4} dx & (23)
 \end{array}$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\begin{array}{lll}
 \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x} & (1) & \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}} & (2) & \int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}} dx & (3) \\
 \int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1} dx & (4) & \int \frac{1}{1+e^x} dx & (5) & \int \sqrt{1+e^x} dx & (6)
 \end{array}$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

תרגילים - פרק 12**האינטגרל הלא מסוים (אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות)****אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{\sin^2 10x} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 4x} dx \quad (2) \quad \int (\sin 2x - 4 \cos \frac{x}{3}) dx \quad (1)$$

$$\int (\sin x + \cos x)^2 dx \quad (6)$$

$$\int (\cos^4 x - \sin^4 x) dx \quad (5) \quad \int (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{(\sin x \cos x)^2} dx \quad (9)$$

$$\int \tan^2 x dx \quad (8) \quad \int \sin x \cos x \cos 2x dx \quad (7)$$

$$\int (\sin^4 x + \cos^4 x) dx \quad (12) \quad \int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 2x) dx \quad (11) \quad \int \sin 7x \cos 5x dx \quad (10)$$

$$\int \cos^3 x dx \quad (15)$$

$$\int \sin^2 4x dx \quad (14)$$

$$\int \cos^2 x dx \quad (13)$$

$$\int \sin^4 2x dx \quad (18)$$

$$\int \cos^4 x dx \quad (17)$$

$$\int \sin^3 4x dx \quad (16)$$

$$\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x} dx \quad (20)$$

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad (19)$$

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx \quad (24)$$

$$\int \frac{1 + \cos^3 x}{\cos^2 \frac{x}{2}} dx \quad (23)$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 - \cos x} dx \quad (22)$$

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)**זכור:**

$$\int f(\sin x) \cdot \cos x dx = \int f(t) dt \quad \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ (x = \arcsin t) \end{array} \right.$$

$$\int f(\cos x) \cdot \sin x dx = \int f(t) (-dt) \quad \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ (x = \arccos t) \end{array} \right.$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \cos^3 x dx \quad (3) \quad \int (\cos^3 x + \cos x - 2) \sin x dx \quad (2) \quad \int (\sin^2 x + \sin x + 2) \cos x dx \quad (1)$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad (6) \quad \int \sin^4 x \cos^5 x dx \quad (5) \quad \int \sin^3 2x dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad (9) \quad \int \tan^5 x dx \quad (8) \quad \int \cos^5 x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{2 \sin x}{\cos 2x + 4 \cos x + 7} dx \quad (12) \quad \int \sin 2x \cdot e^{\cos x} dx \quad (11) \quad \int \frac{dx}{\sin x} \quad (10)$$

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)**זכור:**

$$\int f(\sin x, \cos x) dx = \int f\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2} dt \quad \left| \begin{array}{l} t = \tan \frac{x}{2} \\ (x = 2 \arctan t) \end{array} \right.$$

(3) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{\cos x}{2 - \cos x} dx \quad (3) \quad \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} \quad (2) \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} dx \quad (1)$$

אינטגרלים עם שורשים (בעזרת הצבה טריגונומטרית)

$\int f(\sqrt{a^2 - x^2}) dx$	$\left \begin{array}{l} x = a \sin t \\ (t = \arcsin \frac{x}{a}) \end{array} \right $	$= \int f(a \cos t) \cdot (a \cos t dt)$
$\int f(\sqrt{a^2 + x^2}) dx$	$\left \begin{array}{l} x = a \tan t \\ (t = \arctan \frac{x}{a}) \end{array} \right $	$= \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right) \cdot \left(\frac{a}{\cos^2 t} dt\right)$
$\int f(\sqrt{x^2 - a^2}) dx$	$\left \begin{array}{l} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos \frac{a}{x}) \end{array} \right $	$= \int f(a \tan t) \cdot \left(\frac{-a \sin t}{\cos^2 t} dt\right)$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \sqrt{4x^2 - 1} dx \quad (3)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}} dx \quad (2)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} \quad (1)$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} \quad (4)$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{3/2}} \quad (9)$$

$$\int \frac{dx}{(4 + x^2)^2} \quad (8)$$

$$\int \sqrt{-6x - x^2} dx \quad (7)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

תרגילים - פרק 13**האינטגרל המסויים**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \quad (3) \quad \int_1^2 \frac{4x+1}{2x^2+x+5} dx \quad (2) \quad \int_1^4 (x^2 - 4x + 1) dx \quad (1)$$

$$\int_0^\pi \cos^2 10x dx \quad (6) \quad \int_1^4 \frac{1}{x^2 + 4x + 1} dx \quad (5) \quad \int_1^e \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (4)$$

$$\int_{-1}^4 \sqrt{4+|x-1|} dx \quad (8) \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x^2} & x \geq 1 \end{cases} \quad \text{כאשר} \quad \int_0^4 f(x) dx \quad (7)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt[4]{\sin x}}{\sqrt[4]{\sin x} + \sqrt[4]{\cos x}} dx \quad (2) \quad \int_0^\pi \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \quad (1)$$

(3) נתונה פונקציה רציפה f . הוכח :

$$\text{א. אם } f \text{ זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

$$\text{ב. אם } f \text{ אי-זוגית אזי } \int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_{-4}^4 \frac{\sin x + 1}{x^2 + 1} dx \quad (2) \quad \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{x^3 + x^5} dx \quad (1)$$

(5) הוכח את אי השוויונים הבאים :

$$2 \leq \int_0^2 e^{x^2} dx \leq 2e^4 \quad (3) \quad 6 \leq \int_{-4}^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq 6\sqrt{17} \quad (2) \quad \frac{2}{41} \leq \int_{-1}^3 \frac{dx}{1+x^4} \leq 4 \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{14} \leq \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+4\sin^2 x} \leq \frac{\pi}{6} \quad (6) \quad 0.9 \leq \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{\ln x}} \leq 1 \quad (5) \quad \frac{1}{2}e^{-10} < \int_0^{10} \frac{e^{-x}}{x+10} dx < 1 \quad (4)$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \arctan\left(\frac{\sin x}{x+4}\right) dx \leq \frac{\pi^4}{6} \quad (9) \quad -\frac{1}{2} \leq \int_0^1 x \cdot \sin\left(\frac{\ln x}{x+1}\right) dx \leq \frac{1}{2} \quad (8) \quad \frac{2}{9} \leq \int_{-1}^1 \frac{dx}{8+x^3} \leq \frac{2}{7} \quad (7)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4}{n^3} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n} + \sin \frac{2}{n} + \dots + \sin \frac{n}{n}}{n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right\} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2+n^2} \right\} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n^2+1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}} \right\} \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} + \dots + \sqrt{2n}}{n^{3/2}} \right\} \quad (6)$$

(7) חשב את האינטגרלים הבאים על פי ההגדרה (של רימן):

$$\int_0^1 x dx \quad (1) \quad \int_0^1 x^2 dx \quad (2) \quad \int_0^1 x^3 dx \quad (3) \quad \int_0^\pi \sin x dx \quad (1)$$

* תוכל להיעזר בזהויות הבאות:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + n &= 0.5n(n+1) \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \\ \sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha &= \frac{\sin \frac{n}{2}\alpha \sin \frac{n+1}{2}\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

תרגילים - פרק 14**גזירת האינטגרל**

(1) צטט את המשפט היסודי (השני) של החדור"א.

(2) על סמך המשפט היסודי הוכח כי אם $f(x)$ רציפה ו- $a(x), b(x)$ גזירות, אזי:

$$1) I(x) = \int_a^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x)$$

$$2) I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t) dt \Rightarrow I'(x) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות:

$$I(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}} \quad (4) \quad I(x) = \int_2^{x^3+x} t \ln t dt \quad (3) \quad I(x) = \int_1^{x^3} \frac{\ln t}{t^2} dt \quad (2) \quad I(x) = \int_2^x e^{-t^2} dt \quad (1)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{x-4} \int_4^x e^{t^2} dt \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \frac{t dt}{\cos t}}{\sin^2 x} \quad (1)$$

$$(5) \text{ חקור את הפונקציה } F(x) = \int_0^x (t+1)^4 (t-1)^{10} dt \text{ לפי הפירוט הבא:}$$

תחום הגדרה, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות.

תרגילים - פרק 15**אינטגרלים לא אמיתיים (מוכללים)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{xdx}{(1+x^2)^2} \quad (1) \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} \quad (2) \quad \int_0^1 \sin \frac{1}{x} \cdot \frac{dx}{x^2} \quad (3) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2} \quad (5) \quad \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+5} \quad (6) \quad \int_1^{\infty} x^2 e^{-2x} dx \quad (7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2} \quad (8)$$

(2) בדוק את התכנסות או התבדרות האינטגרלים הבאים :

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^4+4x^2+5} dx \quad (1) \quad \int_1^{\infty} \frac{x^2+2x+1}{x^3+4x^2+5} dx \quad (2) \quad \int_1^{\infty} \frac{\arctan x}{1+x^4} dx \quad (3) \quad \int_3^{\infty} \frac{\sin x \cdot \ln x}{x^2\sqrt{x^2-4}} dx \quad (4)$$

$$\int_1^{\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x \right) dx \quad (5) \quad \int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{x} dx \quad (6) \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx \quad (7) \quad \int_{-\infty}^2 \frac{e^{3x}}{1+x^2} dx \quad (8)$$

(3) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = e^{2x}$, הישר $x=1$ וציר x עבור $x \leq 1$.(4) חשב את השטח בין גרף הפונקציה $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, ציר ה- y , ציר ה- x והישר $x=5$.

תרגילים - פרק 16**פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות**

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה (בסעיפים 7 ו-8 תאר את משטחי הרמה).

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 \quad (8) \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (7)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4} \quad (6) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1^+, 1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2 + z^2))}{xy^2} \quad (8) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy - y^2}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \quad (7)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (2) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (4) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (6) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (8) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2+yx+y^4} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt[3]{x^2 + y^2}} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - x^2 y^2 + 3y^2}{x^2 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2) \quad (7)$$

(5) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות בנקודה (0,0).

במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה, האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

פתרונות - פרק 16

(1) (1) $x \neq 0$, המישור ללא ציר y (2) $x > 0, y > 0$, הרביע הראשון ללא הצירים.(3) כל המישור. (4) $x^2 + y^2 \leq 1$, עיגול היחידה. (5) $y < x^2$ (6) $y \geq 0$, חצי המישור העליון. (7) ת.ה - כל המרחב. (8) ת.ה - כל המרחב.(2) (1) 1 (2) $\frac{1}{12}$ (3) 1 (4) 0 (5) אינסוף (6) $\frac{1}{2}$ (7) 2 (8) 5.

(3) בכל הסעיפים אין לפונקציה גבול. (4) (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 3 (6) 0 (7) 0 (8) 0.

(5) (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0) = 1$ הפונקציה תהיה רציפה. (2) הפונקציה רציפה.

תרגילים - פרק 17**נגזרות חלקיות, דיפרנציאביליות**

(1) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$(only f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \sin(xy) \quad (6)$$

$$f(x, y) = \arctan(2x + 3y) \quad (7)$$

$$f(r, \theta) = r \cos \theta \quad (8)$$

$$f(x, y, z) = xy^2 z^3 \quad (9)$$

$$f(u, v, t) = e^{uv} \sin ut \quad (10)$$

(2) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y) = \sin(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (4)$$

(3) 1 חשב את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

2 האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

3 האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(4) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה משאלה (3) בנקודה $(0,0)$

(5) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציות הבאות בנקודה $(0,0)$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{2x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

(6) בדוק את דיפרנציאביליות הפונקציה הבאה בתחום הגדרתה

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

הערת סימון:

$$\begin{array}{l} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f = f(x, y) \Rightarrow f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} \quad f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$

פתרונות - פרק 17

$$f_y = -6x^2y + 3 \quad f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2 \quad (1) \quad (1)$$

$$f_y = \frac{x^5}{y} \quad f_x = 5x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f_x = 2x \frac{y^4(\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2 \quad f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3 \quad (4)$$

$$f_y = \frac{-3x + 3y^2 - 2x^2y}{(x + y^2)^2} \quad f_x = \frac{x^2 + 2xy^2 + 3y}{(x + y^2)^2} \quad (5)$$

$$f_y = \cos(xy) \cdot x \quad f_x = \cos(xy) \cdot y \quad (6)$$

$$f_y = \frac{3}{1 + (2x + 3y)^2} \quad f_x = \frac{2}{1 + (2x + 3y)^2} \quad (7)$$

$$f_\theta = -r \sin \theta \quad f_r = \cos \theta \quad (8)$$

$$f_z = 3xy^2z^2 \quad f_y = 2xyz^3 \quad f_x = y^2z^3 \quad (9)$$

$$f_t = u \cdot e^{uv} \cdot \cos ut \quad f_v = u \cdot e^{uv} \cdot \sin ut \quad f_u = e^{uv} [v \sin ut + t \cos ut] \quad (10)$$

$$f_{xx} = 8 - 2y^2 \quad f_x = 8x - 2xy^2 + 4 \quad (1) \quad (2)$$

$$f_{yy} = -2x^2 \quad f_y = -2x^2y + 10$$

$$f_{yx} = -4xy \quad f_{xy} = -4xy$$

$$f_{xx} = 12x^2 \ln y \quad f_x = 4x^3 \ln y \quad (2)$$

$$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2} \quad f_y = \frac{x^4}{y}$$

$$f_{yx} = \frac{4x^3}{y} \quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$$

$$f_{xx} = -100 \sin(10x + 4y) \quad f_x = 10 \cos(10x + 4y) \quad (3)$$

$$f_{yy} = -16 \sin(10x + 4y) \quad f_y = 4 \cos(10x + 4y)$$

$$f_{yx} = -40 \sin(10x + 4y) \quad f_{xy} = -40 \sin(10x + 4y)$$

$$f_{xz} = y \quad f_{xy} = z \quad f_{xx} = 0 \quad f_x = yz \quad (4)$$

$$f_{yz} = x \quad f_{yy} = 0 \quad f_{yx} = z \quad f_y = xz$$

$$f_{zz} = 0 \quad f_{zy} = x \quad f_{zx} = y \quad f_z = xy$$

(3) 1 הנגזרות החלקיות בנקודה (0,0) שוות אפס.

(2) הפונקציה לא רציפה בנקודה (0,0).

(3) פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

(4) לא דיפרנציאבילית.

(5) 1 לא דיפרנציאבילית (2 דיפרנציאבילית).

(6) דיפרנציאבילית.

תרגילים - פרק 18

כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים

* בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

(1) נתון $x = 2u - v$, $y = u^2 + v^3$, $z = \ln(x^2 - y^2)$. חשב z_u , z_v .

(2) נתון $v = 4t + k^2$, $u = t^2 + 4m$, $z = e^{u-v}$. חשב $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial m}$, $\frac{\partial z}{\partial k}$.

(3) נתון $z = f(x^2 - y^2)$. הוכח $y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0$.

(4) נתון $z = f(xy)$. הוכח $x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0$.

(5) נתון $z = f\left(\frac{x}{y}\right)$. הוכח $x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0$.

(6) נתון $z = f(x - y, y - x)$. הוכח $z_x + z_y = 0$.

(7) נתון $w = f(x - y, y - z, z - x)$. הוכח $w_x + w_y + w_z = 0$.

(8) נתון $u = \sin x + f(\sin y - \sin x)$. הוכח $u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y$.

(9) נתון $z = y \cdot f(x^2 - y^2)$. הוכח $\frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}$.

(10) נתון $z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$. הוכח $x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z$.

(11) נתון $u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$. הוכח $xu_x + yu_y + zu_z = 2u$.

(12) נתון $h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax)$. הוכח $h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}$.

(13) נתון $u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$.

הוכח: א. $u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y}$. ב. $u_{xy} = u_{yx}$.

חשב: ג. $u_{xy}(1, \pi)$ אם ידוע ש- $f'(0) = 2$, $g'(0) = 1$.

$$(14) \text{ נתון } y = r \sin \theta, \quad x = r \cos \theta, \quad u = f(x, y)$$

$$א. \text{ הוכח } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

$$ב. \text{ הוכח } u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$$

$$ג. \text{ הוכח } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

$$(15) \text{ נתון } z = h(u, v) \text{ ונתון כי } u = f(x, y), \quad v = g(x, y) \text{ מקיימות את מישוואת}$$

$$קושי-רימן, כלומר מקיימות } u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

הוכח כי :

$$א. \quad u, v \text{ מקיימות את מישוואת לפלס. כלומר } u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$ב. \quad h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

$$(16) \text{ נתון } y = r \sinh s, \quad x = r \cosh s, \quad u = f(x, y)$$

$$\text{הוכח כי } (u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

פתרונות - פרק 18

$$(13) ג. -e$$

תרגילים - פרק 19
נגזרת מכוונת וגרדיאנט

* מומלץ בחום לעיין בנספח הוקטורים שבעמוד 71.

(1) תהי $f(x, y) = x^2 + y^2$.

א. חשב את הגרדיאנט של f ואת אורכו בנקודה $(3, 4)$. מהי משמעות התוצאה ?

ב. הראה שהגרדיאנט הוא נורמל לקו הגובה של f העובר דרך $(3, 4)$.

(2) תהי $f(x, y) = 3x^2y$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$.

(3) תהי $f(x, y) = x - \sin(xy)$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, \pi/2)$ בכיוון הוקטור $\vec{u} = \frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$.

(4) תהי $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + 5y^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 2)$ בכיוון וקטור היחידה, היוצר

זווית של 45° עם החלק החיובי של ציר x .

(5) תהי $f(x, y) = xy^2$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(1, 3)$ בכיוון לנקודה $(4, 5)$.

(6) תהי $f(x, y) = x^2y^2z$.

חשב את הנגזרת המכוונת של f בנקודה $(2, 1, 4)$ בכיוון הוקטור

$\vec{u} = 1 \cdot \mathbf{i} + 2 \cdot \mathbf{j} + 2 \cdot \mathbf{k}$

(7) אם הפוטנציאל החשמלי V בנקודה (x, y) נתון על ידי $V = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, מצא

את קצב השינוי של הפוטנציאל בנקודה $(3, 4)$ בכיוון הנקודה $(2, 6)$.

(8) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y) = e^x(\cos y + \sin y)$

בנקודה $(0, 0)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(9) מצא את הכיוון בו הנגזרת המכוונת של הפונקציה $f(x, y, z) = 2x^3y - 3y^2z$

בנקודה $(1, 2, -1)$ היא מקסימלית וחשב את ערכה.

(10) אם הטמפרטורה נתונה על ידי $f(x, y, z) = 3x^2 - 5y^2 + 2z^2$ ואתה נמצא

בנקודה $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\right)$ ורוצה להתקרר כמה שיותר מהר, באיזה כיוון עליך

ללכת?

הערות סימון

א. במישור R^2 : $\mathbf{i} = (1, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במישור בשתי דרכים : $\vec{u} = (x, y)$ או $\vec{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

למשל, $\vec{u} = (3, 4) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

במרחב R^3 : $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

ולכן ניתן לסמן וקטור במרחב בשתי דרכים : $\vec{v} = (x, y, z)$ או $\vec{v} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

למשל, $\vec{u} = (3, 4, 5) \Leftrightarrow \vec{u} = 3\cdot\mathbf{i} + 4\cdot\mathbf{j} + 5\cdot\mathbf{k}$

ב. יש המסמנים וקטור $\vec{u}$ גם כך $\underline{u}$ או כך $\mathbf{u}$.

ג. וקטור יחידה יסומן $\hat{\mathbf{u}}$.

פתרונות - פרק 19

(1) א. הגרדיאנט $(6, 8)$. אורך הגרדיאנט 10 .

(2) $48/5$ (3) $1/2$ (4) $7.5\sqrt{2}$ (5) $3\sqrt{13}$ (6) $88/3$

(7) $1/5\sqrt{5}$ (8) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור $(1, 1)$ ושווה ל- $\sqrt{2}$

(9) הנגזרת המכוונת מקסימלית בכיוון הוקטור $(12, 14, -12)$ ושווה ל- 22 .

(10) בכיוון הוקטור $(-2, 2, -2)$.

תרגילים - פרק 20**פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים****פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות**

(1) מצא את y' כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$. חשב את $y'(0)$.

(2) מצא את $y'(1)$ כאשר $e^{xy} + x^2 y^2 = 5x - 4$.

(3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$ כאשר $2 \ln x + \ln y = 1$.

(4) נתון $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y) \sin z = 0$ ($z = z(x, y) \geq 0$).

חשב את: $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

(5) נתון $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y) \sin z = -e^4$ ($y = y(x, z) \geq 0$).

חשב את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.

(6) נתון $z^3 - 2xz + y = 0$ ($z = z(x, y) \geq 0$). מצא $z_{xx}(1,1)$.

(7) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$.

מצא: (1) $z_{xx}(2,1)$ (2) $z_{xy}(2,1)$ (3) $z_{yy}(2,1)$.

(8) אם $u^2 - v = 3x + y$ ו- $u - 2v^2 = x - 2y$,

מצא את u_x, v_x, u_y, v_y .

(9) אם $w = u^3 + v^3$, $y = u^2 + v^2$, $x = u + v$, מצא את w_x, w_y .

שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)

$$(10) \text{ נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה } \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3 \quad (z < 0)$$

מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P בה $x = -2, y = 1$.

$$(11) \text{ מצא משוואה של מישור משיק למשטח } xyz = 8 \text{ בנקודה } (-2, 2, -2) \text{ וכן}$$

משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

$$(12) \text{ מצא מישור המשיק למשטח } x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2 \text{ המקביל למישור}$$

$$x + 8y + 18z = 0$$

$$(13) \text{ למשטח } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \text{ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.}$$

מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C בהתאמה. נסמן

$$O = (0, 0, 0) \text{ . הוכח } OA + OB + OC = a$$

(למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה)

פתרונות - פרק 20

$$(1) \quad y'(0) = \frac{1}{5}$$

$$(2) \quad y'(1) = 5$$

$$(3) \quad y'(e) = -\frac{2}{e^2}, \quad y''(e) = \frac{6}{e^3}$$

$$(4) \quad z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = -\frac{\sin 1}{2}$$

$$(5) \quad y_x(0, 0) = 0, \quad y_z(0, 0) = \frac{1}{2e^4}$$

$$(6) \quad z_x(1, 1) = -16$$

$$(7) \quad z_{xx}(2, 1) = z_{xy}(2, 1) = 1, \quad z_{yy}(2, 1) = 4$$

$$(8) \quad u_x = \frac{1-12v}{1-8uv}, \quad u_y = \frac{-4v-2}{1-8uv}, \quad v_x = \frac{2u-3}{1-8uv}, \quad v_y = \frac{-4u-1}{1-8uv}$$

$$(9) \quad w_x = -3uv, \quad w_y = 1.5(u+v)$$

$$(10) \quad 3x - 6y + 2z + 18 = 0$$

$$(11) \quad x - y + z + 6 = 0, \quad (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1)$$

$$(12) \quad x + 8y + 18z = 21, \quad x + 8y + 18z = -21$$

תרגילים - פרק 21**נוסחת טיילור של פונקציה בשני משתנים, הדיפרנציאל השלם****נוסחת טיילור**

פתח את הפונקציות הבאות לטור טיילור עד סדר שני סביב הנקודה (a, b) :

$$(a, b) = (1, 2) \quad f(x, y) = x^2 y + 3y - 2 \quad (1)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = (1 + y) \ln(1 + x - y) \quad (2)$$

$$(a, b) = (0, 0) \quad f(x, y) = e^{4y - x^2 - y^2} \quad (3)$$

$$(a, b) = (2, 1) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - y}{x + y^2}} \quad (4)$$

(5) בעזרת התוצאה של תרגיל 2, חשב בקירוב את $\ln(1.5)$.

(6) בעזרת התוצאה של תרגיל 3, חשב בקירוב את e^3 .

(7) בעזרת התוצאה של תרגיל 4, חשב בקירוב את $\sqrt[3]{2}$.

הדיפרנציאל השלם

(8) מחשבים את הנפח של גליל על סמך תוצאות המדידה של רדיוסו וגובהו.

ידוע שהשגיאה היחסית במדידת הרדיוס אינה עולה על 2%,

ושהשגיאה היחסית במדידת הגובה אינה עולה על 4%.

הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית בנפח המחושב.

(9) נתונות שתי צלעות במלבן : $a = 10_{cm}$, $b = 24_{cm}$.

חשב את השינוי המדויק ואת השינוי המקורב (בעזרת דיפרנציאל) של אורך

אלכסון המלבן אם את הצלע a יאריכו ב- 4_{mm} ואת הצלע b יקצרו ב- 1_{mm} .

(10) מודדים את האורך של תיבה, את רוחבה ואת גובהה. השגיאה היחסית בכל מדידה אינה עולה על 5%. הערך את השגיאה היחסית המקסימלית האפשרית באורך של אלכסון התיבה, המחושב לפי תוצאות המדידה.

(11) בעזרת הדיפרנציאל השלם, מצא בקירוב את הערך של $\sqrt[4]{15.09 + (0.99)^2}$.

פתרונות - פרק 21

$$f(x, y) = 6 + 4(x-1) + 4(y-2) + 2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-2) \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y - \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{3}{2}y^2 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 1 + 4y - x^2 + 14y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 1 + \frac{1}{3}(x-2) - \frac{1}{3}(y-1) - \frac{7}{81}(x-2)^2 + \frac{1}{9}(x-2)(y-1) \quad (4)$$

$$\frac{3}{8} \quad (5)$$

$$19 \quad (6)$$

$$\frac{101}{81} \quad (7)$$

$$8\% \quad (8)$$

$$(9) \text{ שינוי מדויק } 0.06472, \text{ שינוי מקורב } 0.06153.$$

$$5\% \quad (10)$$

$$2\frac{7}{3200} \quad (11)$$

תרגילים - פרק 22**קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)**

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפתח 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$

וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבוני, בארץ ובסין.
 עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8.
 מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוני, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות - פרק 22

- (1) $(-0.5, 1)$ אוכף ; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום ; $(-1, -2)$ מקסימום ; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוכף.
- (3) $(0, 0)$ אוכף ; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ מינימום ; $(1, 0)$ מקסימום ; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוכף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום . $(4, 4)$ מקסימום.
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום . (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$. (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$, רווח מקסימלי \$288 .

תרגילים - פרק 23**קיצון של פונקציה של שניים/שלושה משתנים (רמה מתקדמת)**
שיטת מינימום הריבועים הפחותים

מצא את נקודות הקיצון של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 1 + 2xy - x^2 - y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2)$$

$$(z = f(x, y)) \quad z^3 + z + xy - 2x - y + 2 = 0 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 6y^2 + 3x - 12y + 8 \quad (4)$$

$$(x, y, z > 0) \quad f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} \quad (5)$$

(6) מצא מרחק מינימלי בין הפרבולה $y = x^2 + 1$ לפרבולה $y = -x^2 + 2x$.
* לפתרון תרגיל זה נדרש יידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה כגון שיטת ניוטון רפסון.

שיטת הריבועים הפחותים

(7) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

בכל אחד מהסעיפים הבאים, מצא קו עקום מהצורה $y = h(x)$

כך ששכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי :

(א) $h(x) = ax + b$, הדגם עבור הנק' $(2, 2.5), (1, 0.8), (3, 3.2), (4, 3.5)$

(ב) $h(x) = ax^2 + bx$, הדגם עבור הנק' $(-1, 2), (2, 0), (0, -2)$

(ג) $h(x) = ax + \frac{b}{x}$, הדגם עבור הנק' $(10, 20.2), (6, 12.9), (4, 8.5), (0.5, 4)$

(ד) $h(x) = ax^2 + \frac{b}{x^2}$, הדגם עבור הנק' $(4, 33), (2, 8.5), (0.5, 2.3), (1, 4.5), (0.1, 90)$

(ה) $h(x) = ax^2 + bx + c$, הדגם עבור הנק' $(1, 4.5), (0.5, 2.3), (0, 0.8), (-1, 0.1), (-0.5, 0.12)$

(8) נתונות n נקודות: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

מצא ישר $y = ax + b$ כך ששכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר

והנקודות יהיה מינימלי. עליך להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה: בשאלות (7) ו-(8) ניתן להניח ש- a ו- b המתקבלים מפתרון המשוואות

נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f_a = 0, f_b = 0$

$$f(a, b) = \sum_{i=1}^n (h(x_i) - y_i)^2$$

פתרונות - פרק 23

(1) לכל t ממשי, מקסימום. (2) $(0,0)$ מקסימום.

(3) אין קיצון. (1,2) אוקף. (4) אין קיצון. (1,2) אוקף.

(5) מינימום. $(0.5, 1, 1)$ מינימום.

$$y = 0.88x + 0.3 \quad (\text{א.7}) \quad y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x \quad (\text{ב.7})$$

$$y = 2.032x + \frac{1.5039}{x} \quad (\text{ג.7}) \quad y = 2.06x^2 + \frac{0.9}{x^2} \quad (\text{ד.7})$$

$$y = 1.48x^2 + 2.196x + 0.824 \quad (\text{ה.7})$$

$$a = \frac{n \sum_{i=1}^n y_i x_i - \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n y_i x_i \sum_{i=1}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (8)$$

תרגילים - פרק 24**קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')****פונקציות של שני משתנים**

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$(5) \text{ נתונה בעיית הקיצון } \text{Max}\{xy\} \text{ s.t. } x + 3y = 12$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$(6) \text{ נתונה בעיית הקיצון } \text{Max}\{2x + y\} \text{ s.t. } \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(10) מווישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \text{ נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מווישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת

בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \text{ נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$f(x, y) = 4x + 6y \text{ תועלת דני}$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא

למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם

$P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף

(K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

פתרונות - פרק 24

- | | | | | | |
|---------------------|--|------|---------------------|--|------|
| $Max(0, \pm 1)$ | $\min(\pm 1, 0)$ | (2) | $Max(\pm 1, \mp 1)$ | $\min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7})$ | (1) |
| $Max(\pm 2, 1)$ | $\min(\pm 2, 1)$ | (4) | $Max(2, 3)$ | $\min(-2, -3)$ | (3) |
| | $Max(9, 36)$ | (6) | | $Max(6, 2)$ | (5) |
| $Max(\pm 1, \mp 1)$ | $\min(\pm \sqrt{1/7}, \pm \sqrt{1/7})$ | (8) | | $(6, 2)$ | (7) |
| | $\min(\sqrt{32}, \sqrt{8})$ | (10) | | $7 / \sqrt{45}$ | (9) |
| | $Max(2, 3)$ | (12) | | $Max(6, 2)$ | (11) |
| | | | $\min\{2K + L\}$ | $;\sqrt{K} + \sqrt{L} = 100$ | (13) |

תרגילים - פרק 25**קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')****פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ**

(1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(2) מצא על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.

(3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.
 ב. מצא נק' על המישור $-2x - 2y + z = 0$ שהיא הקרובה ביותר לנק' $(1, 2, 3)$.
 ג. בדוק תשובתך ע"י חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

(4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.

(5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$ למישור $3x + 4y + 12z = 288$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0, z_0) מהמישור $ax + by + cz + d = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוצים

(6) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

(7) מצא מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$ והמישור $z = x + y$ לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פסיקליים או גיאומטריים היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

פתרונות - פרק 25

- (1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
- (2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2, 4, 4)$.
- הנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2, -4, -4)$.
- (3) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3})$.
- (4) $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$.
- (5) מרחק קצר ביותר $\frac{256}{13}$. מרחק ארוך ביותר $\frac{320}{13}$.
- (6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
- (7) מרחק מינימלי $\frac{75}{17}$. מרחק מקסימלי 10.

תרגילים - פרק 26**קיצון מוחלט של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה**

(1) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7 \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור, בצורת}$$

$$\text{משולש שקודקודיו הם: } (0, 5), (3, 0), (0, 0).$$

(2) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור, בצורת}$$

$$\text{ריבוע שקודקודיו הם } (2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0).$$

(3) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא העיגול } x^2 + y^2 \leq 4.$$

(4) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור,}$$

$$R = \{(x, y) \mid x + y \geq -3, x \leq 0, y \leq 0\}.$$

(5) חשב את המקסימום המוחלט ואת המינימום המוחלט של

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y \text{ בתחום } R, \text{ כאשר } R \text{ הוא התחום הסגור,}$$

$$R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, 3x \geq -y\}$$

פתרונות - פרק 26

(1) מקסימום מוחלט 7. מינימום מוחלט -11.

(2) מקסימום מוחלט 3. מינימום מוחלט -1.

(3) מקסימום מוחלט $\frac{33}{4}$. מינימום מוחלט $-\frac{1}{4}$.

(4) מקסימום מוחלט 6. מינימום מוחלט -1.

(5) מקסימום מוחלט $1 + 6\sqrt{10}$. מינימום מוחלט $1 - 6\sqrt{10}$.

תרגילים - פרק 27**אינטגרלים כפולים**

(1) חשב את האינטגרלים :

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2 \sin^2 \varphi \, dr \quad (3) \quad \int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx \quad (2) \quad \int_0^1 \int_0^1 (x+y) dx dy \quad (1)$$

(2) באינטגרל $\iint_D f(x, y) dx dy$ הצב את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר :(1) D – משולש בעל הקודקודים : $B(1,1), A(1,0), O(0,0)$ (2) D – משולש בעל הקודקודים : $B(-2,1), A(2,1), O(0,0)$ (3) D – טרפז בעל הקודקודים : $C(0,1), B(1,2), A(1,0), O(0,0)$ (4) D – עיגול $x^2 + y^2 \leq 1$ (5) D – עיגול $x^2 + y^2 \leq y$

$$D = \{ (x, y) \mid y \leq 1, y \geq x^2 \} \quad (6)$$

$$D = \{ (x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \} \quad (7)$$

(3) החלף סדר אינטגרציה באינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy dx \quad (3) \quad \int_{-6}^2 \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy dx \quad (2) \quad \int_0^2 \int_x^{2x} f(x, y) dy dx \quad (1)$$

$$\int_1^e \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx \quad (6) \quad \int_1^2 \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy dx \quad (5) \quad \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x, y) dy dx \quad (4)$$

(4) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\iint_D xy^2 dx dy \quad (1) \quad \text{כאשר } D \text{ חסום ע"י הפרבולה } y^2 = 4x \text{ והישר } x=1.$$

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{4-x}} \quad (2) \quad \text{כאשר } D \text{ חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה}$$

של המעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה (2,2) .

$$\iint_D |x y| dx dy \quad (3) \quad \text{כאשר } D \text{ עיגול בעל הרדיוס } a \text{ שמרכזו בראשית .}$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy \quad (4)$$

כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=3a, y=a, y=x+a, y=x$ ($a>0$).

$$\iint_D \frac{\cos y}{y^2 + \pi^2} dA \quad (5) \quad \text{כאשר } D \text{ התחום הכלוא בין } x=-1, y=0, y=\pi, y=\pi\sqrt{x}.$$

(5) חשב את האינטגרלים הבאים (רמז : שנה את סדר האינטגרציה) :

$$\int_0^3 \int_1^{\sqrt{4-y}} (x+y) dx dy \quad (2)$$

$$\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{-x^3} dx dy \quad (1)$$

$$\int_0^4 \int_x^4 \sin(y^2) dy dx \quad (4) \quad (x, y \geq 0) \int_0^1 \int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2} y dx dy \quad (3)$$

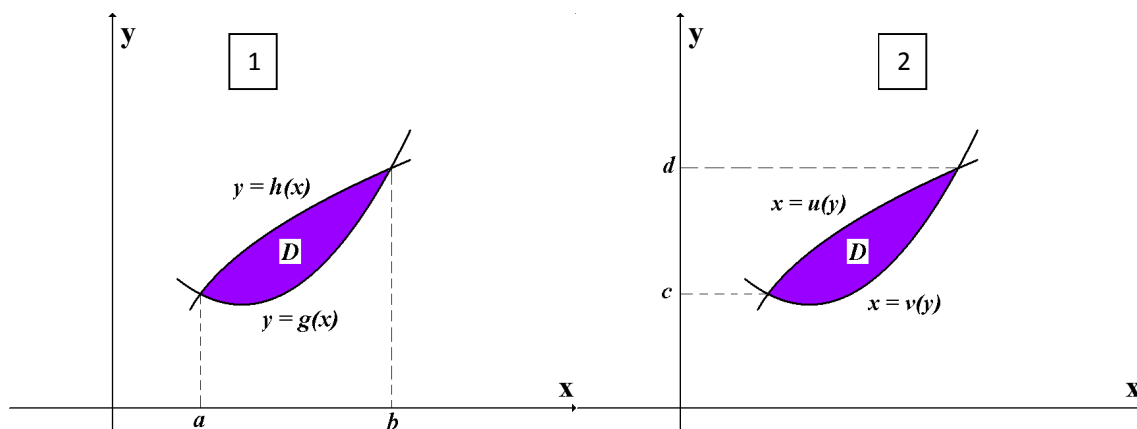
הערות סימון:

1

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dydx = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dydx = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy$$

2

$$\iint_D f(x, y) dA = \iint_D f(x, y) dxdy = \int_c^d \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dxdy = \int_c^d dy \int_{u(y)}^{v(y)} f(x, y) dx$$



לתשומם לבכם, ישנם מרצים שלא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל

$$\int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dxdy \quad \text{כך} \quad \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dydx$$

רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל

הוא חילופי. כלומר הרישום $dxdy$ והרישום $dydx$ הוא זהה.

פתרונות - פרק 27

$$\frac{a^3}{3}\pi \quad (3) \quad \frac{1}{40} \quad (2) \quad 1 \quad (1) \quad (1)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_y^1 f(x, y) dx \quad (1) \quad (2)$$

$$\int_0^2 dx \int_{x/2}^1 f(x, y) dy + \int_{-2}^0 dx \int_{-x/2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx \quad (2)$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (4)$$

$$\int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}^{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx \quad (6)$$

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y) dy \quad (7)$$

$$= \int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-1}^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx \quad (2) \quad \int_0^2 dy \int_{y/2}^y f(x, y) dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 f(x, y) dx \quad (1) \quad (3)$$

$$\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx \quad (4) \quad \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx \quad (3)$$

$$\int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx \quad (6) \quad \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx \quad (5)$$

$$0 \quad (5) \quad 14a^4 \quad (4) \quad \frac{a^4}{2} \quad (3) \quad 8 - \frac{16\sqrt{2}}{3} \quad (2) \quad \frac{32}{21} \quad (1) \quad (4)$$

$$\frac{1}{2}(1 - \cos 16) \quad (4) \quad \frac{1}{4}(e - 2) \quad (3) \quad \frac{241}{60} \quad (2) \quad \frac{1}{3}(e^8 - 1) \quad (1) \quad (5)$$

תרגילים - פרק 28
שימושי האינטגרל הכפול

(1) חשב את שטחי התחומים החסומים ע"י העקומים הבאים :

$$(a > 0) \quad xy = a^2, \quad x + y = \frac{5}{2}a \quad (2) \quad x + y = 2, \quad x^2 - 4y = 4 \quad (1)$$

$$x + y = 3, \quad y^2 = 4x \quad (4) \quad y^2 = 9 - x, \quad y^2 = 9 - 9x \quad (3)$$

(2) חשב את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים הבאים :

$$z = 1 + x + y, \quad z = 0, \quad x + y = 1, \quad x = 0, \quad y = 0 \quad (1)$$

$$z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = 1, \quad y = x^2 \quad (2)$$

$$(x > 0) \quad z = 0, \quad z = x^2 + y, \quad y = 0.5x, \quad y = 2x, \quad y = \frac{2}{x} \quad (3)$$

$$z = 0, \quad \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \quad 2y^2 = x \quad (4)$$

$$(z \geq 0) \quad x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, \quad z = y \quad (5)$$

$$z = x + y, \quad z = 6, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0 \quad (6)$$

(3) ללוח דק בצורת משולש, שקודקודיו הם $(0,0)$, $(1,0)$ ו- $(0,1)$, יש פונקציית

$$\delta(x, y) = xy.$$

(1) חשב את מסת הלוח. (2) חשב את מרכז הכובד של הלוח.

(4) ללוח דק בצורת מלבן $R = \{(x, y) \mid -\frac{b}{2} \leq y \leq \frac{b}{2}, -\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}\}$, יש פונקציית

צפיפות קבועה (הלוח הומוגני). חשב את מומנט ההתמד של הלוח סביב ציר z .
 בטא את תשובתך באמצעות המסה M של הלוח.

(5) מצא את שטח הפנים של חלק הגליל $x^2 + z^2 = 4$ הנמצא מעל למלבן

$$R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 4\} \text{ שבמישור } xy.$$

פתרונות - פרק 28

$$\begin{array}{llll}
 \frac{64}{3} (4) & 32 (3) & a^2 \left(\frac{15}{8} - 2 \ln 2 \right) (2) & \frac{64}{3} (1) \quad (1) \\
 36 (6) & \frac{8}{3} (5) & 16 \frac{1}{5} (4) & \frac{17}{6} (3) \quad \frac{88}{105} (2) & \frac{5}{6} (1) \quad (2) \\
 & & & \left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5} \right) (2) & \frac{1}{24} (1) \quad (3) \\
 & & & & \frac{M(a^2+b^2)}{12} (4) \\
 & & & & \frac{1}{6} \pi (5\sqrt{5} - 1) \quad (5)
 \end{array}$$

תרגילים - פרק 29

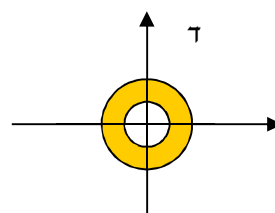
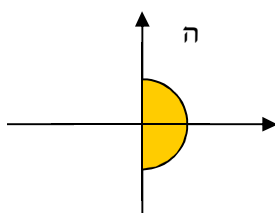
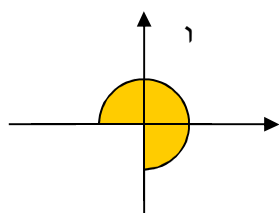
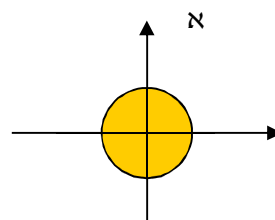
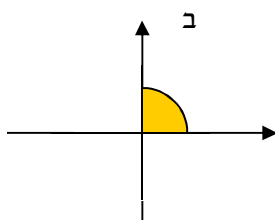
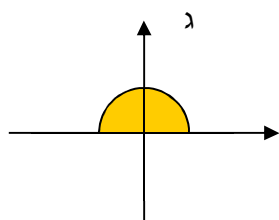
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

(1) חשב $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$ כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

לתשומת לבך: לכל המעגלים רדיוס 4. בסעיף ד למעגל הקטן רדיוס 1.

בסעיף ט אל תחשב את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר

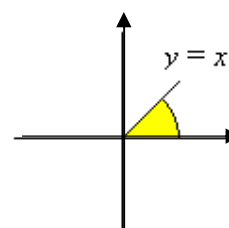
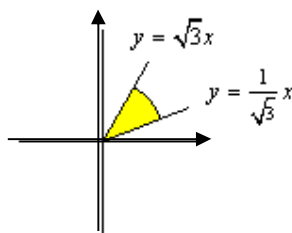
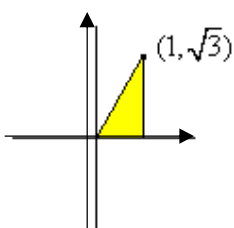
לקואורדינטות קוטביות.



ט

ח

ז



(2) חשב את האינטגרלים הבאים תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות :

$$\begin{array}{ll}
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy dx & (1) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy & (2) \\
 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy & (3) \\
 \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy & (4) \\
 \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx & (5) \\
 \int_0^2 \int_0^x y dy dx & (6) \\
 \int_0^6 \int_0^y x dx dy & (7) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2} dx dy & (8) \\
 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy dx & (9) \\
 \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 xy^2 dx dy & (10) \\
 \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx & (11) \\
 \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^1 \ln(x^2+y^2+1) dx dy & (12) \\
 \int_0^{\ln 2} \int_0^{\sqrt{\ln^2 2 - y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy & (13) \\
 \int_0^2 \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^0 \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx & (14) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2} dy dx & (15) \\
 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1) dx dy & (16)
 \end{array}$$

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים חשב את **נפח הגוף** המתואר :

(1) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ לבין הגליל $x^2 + y^2 = 1$.

(2) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 2y$ בין החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמעלה

לבין מישור - xy מלמטה.

(3) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = x$ בין הפרבולואיד $z = 1 - x^2 - y^2$

מלמעלה לבין מישור - xy מלמטה.

(4) חשב את **שטח התחום** החסום על ידי: $y = x\sqrt{3}$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$.

פתרונות - פרק 29

$$32\pi \text{ (6)} \quad \frac{64\pi}{3} \text{ (5)} \quad 42\pi \text{ (4)} \quad \frac{64\pi}{3} \text{ (3)} \quad \frac{32\pi}{3} \text{ (2)} \quad \frac{128\pi}{3} \text{ (1)} \quad (1)$$

$$\frac{32\pi}{9} \text{ (8)} \quad \frac{16\pi}{3} \text{ (7)}$$

$$2\pi \text{ (6)} \quad \pi a^2 \text{ (5)} \quad \frac{\pi}{2} \text{ (4)} \quad \frac{\pi}{8} \text{ (3)} \quad \pi \text{ (2)} \quad \frac{\pi}{2} \text{ (1)} \quad (2)$$

$$\frac{\pi(e-1)}{4e} \text{ (12)} \quad \frac{\pi}{2} \ln \frac{4}{e} \text{ (11)} \quad \pi(4-\pi) \text{ (10)} \quad \pi \ln \frac{e}{2} \text{ (9)} \quad \frac{4}{3} \text{ (8)} \quad 36 \text{ (7)}$$

$$\pi \text{ (16)} \quad \pi \ln \frac{4}{e} \text{ (15)} \quad -\frac{4}{5} \text{ (14)} \quad \frac{\pi}{2} + 1 \text{ (13)}$$

$$\frac{5\pi}{32} \text{ (3)} \quad \frac{32}{9} \text{ (2)} \quad \frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3} \text{ (1)} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ (4)}$$

תרגילים - פרק 30**החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)**

(1) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$ כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y = 3-x$, $y = 1-x$, $y = x-1$, $y = x$.

(2) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy} dA$ כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y = x$, $y = 0.5x$, $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$.

(3) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$ כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקודקודיו הם: $A(0,0)$, $B(2,0)$, $C(1,1)$.

(4) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y) dA$ כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקודקודה הם: $A(-1,3)$, $B(1,-3)$, $C(3,-1)$, $D(1,5)$.

(5) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2} dA$ כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

(6) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2 dA$ כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$, $xy^2 = 1$, $xy^2 = 2$.

(7) חשב את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y} dA$ כאשר $R = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$.

פתרונות - פרק 30

$$\begin{array}{cccc} \frac{1}{4} \ln 3 & (1) & \frac{1}{2}(e^2 - e) \ln 2 & (2) \\ 1 - \frac{1}{2} \sin 2 & (3) & e - \frac{1}{e} & (7) \\ 192 & (4) & \frac{3}{4} & (6) \\ & & 96\pi & (5) \end{array}$$

תרגילים - פרק 31**אינטגרלים משולשים ושימושיהם**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xz dy dx dz \quad (1)$$

$$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dx dz dy \quad (2)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}, \iiint_B xyz^2 dV \quad (3)$$

$$B = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq z \leq 1+x+y\}, \iiint_B 6xy dV \quad (4)$$

(2) חשב את האינטגרלים הבאים על ידי שינוי סדר אינטגרציה :

$$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dx dy dz \quad (1)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dy dx dz \quad (2)$$

$$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dx dy dz \quad (3)$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dy dz dx \quad (4)$$

(3) חשב את נפחי הגופים החסומים ע"י המשטחים הבאים :

$$z = 1+x+y, z=0, x+y=1, x=0, y=0 \quad (1)$$

$$z=0, z=x^2+y^2, y=1, y=x^2 \quad (2)$$

$$(x \geq 0) z=0, z=x^2+y, y=0.5x, y=2x, y=\frac{2}{x} \quad (3)$$

$$z=0, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, 2y^2 = x \quad (4)$$

$$(z \geq 0) x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, z=y \quad (5)$$

$$z=x+y, z=6, x=0, y=0, z=0 \quad (6)$$

- (4) חשב את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r . הנח שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונית למרחק הנקודה מבסיס הגליל, כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$).

- (5) חשב את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה) $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$ סביב ציר z . בטא את תשובתך באמצעות המסה M של התיבה.

פתרונות - פרק 31

$$\begin{array}{llll}
 \frac{65}{28} (4) & \frac{27}{4} (3) & \frac{1}{3}(e^3 - 1) (2) & 1 (1) \quad (1) \\
 \frac{\sin^2 4}{2} (4) & 4 (3) & 3e - 6 (2) & 2 \sin 4 (1) \quad (2) \\
 36 (6) & \frac{8}{3} (5) & 16\frac{1}{5} (4) & \frac{17}{6} (3) \quad \frac{88}{100} (2) & \frac{5}{6} (1) \quad (3) \\
 & & (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, \frac{2h}{3}) & M = \frac{1}{2} \pi k h^2 r^2 & (4) \\
 & & & \frac{1}{3} M (a^2 + b^2) & (5)
 \end{array}$$

תרגילים - פרק 32

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

$$(1) \text{ חשב } \int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dz dy dx$$

$$(2) \text{ חשב } \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 dz dy dx$$

$$(3) \text{ א) חשב } \int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx$$

$$(3) \text{ ב) חשב } \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \sqrt{x^2+y^2+z^2} dz dy dx$$

(4) גוף כלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$ בין מישור- xy מלמטה לבין מחצית פני הכדור $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ מלמעלה. חשב את הנפח של הגוף ואת המרכז שלו.

(5) חשב את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ מלמעלה ועל ידי החרוט $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ מלמטה.

(6) מצא את הנפח של התחום מעל מישור- xy החסום על ידי הפרבולואיד $z = x^2 + y^2$ והגליל $x^2 + y^2 = a^2$.

פתרונות - פרק 32

$$(1) \quad \frac{\pi}{3} \quad (2) \quad \frac{24\pi - 32}{9} \quad (3) \quad \frac{32\pi}{5} \quad (4) \quad \frac{122}{3}\pi$$

$$(4) \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1107/488), \quad V = \frac{122}{3}\pi$$

$$(5) \quad (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = (0, 0, 1.5/(2-\sqrt{2})), \quad V = \frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{2})$$

$$(6) \quad \frac{\pi}{2}a^4$$

תרגילים - פרק 33**החלפת משתנים באינטגרל משולש (יקוביאן)**

(1) חשב את $\iiint_G (z-y)^2 xy dV$ כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים

$$. xy = 4, xy = 2, z = y+1, z = y, x = 3, x = 1$$

(2) חשב את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) חשב את $\iiint_G x^2 dV$ כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

(4) חשב את נפח התחום המוגבל על ידי המשטחים

$$. y = 4z^2, y = z^2, y = 4x-12, y = 4x, y = 2z, y = z$$

(5) חשב את $\iiint_G \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2} dV$ כאשר G הוא הכדור שמרכזו

בנקודה $(1, 2, 4)$ ורדיוסו 1.

פתרונות - פרק 33

$$2 \ln 3 \quad (1)$$

$$\frac{4}{3} \pi abc \quad (2)$$

$$\frac{4}{15} \pi a^3 bc \quad (3)$$

$$\frac{105}{32} \quad (4)$$

$$\pi \quad (5)$$

תרגילים - פרק 34

אינטגרלים קויים ושימושיהם (אורך ומסה של עקום, עבודה)

* מומלץ בחום לעיין בנספח "הצגות פרמטריות של עקומים חשובים" שבעמ' 70.

אינטגרל קוי מסוג I

$$(1) \text{ חשב } \int_C f(x, y) ds$$

א. $C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$; $f(x, y) = 1 - x^2$

ב. $C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi$; $f(x, y) = x$

ג. C קטע של ישר המחבר את $O(0,0)$ עם $A(1,2)$; $f(x, y) = x + y$

ד. C היקפו של ΔOAB : $O(0,0), A(0,1), B(1,0)$; $f(x, y) = x + y^2$

$$(2) \text{ חשב } \int_C f(x, y, z) ds$$

א. $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \pi$; $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

ב. $C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, z = \frac{1}{3}t^3, 0 \leq t \leq 3$; $f(x, y, z) = x^3 + 3z$

(3) חשב את אורך העקום $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.

(4) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t$ ($0 \leq t \leq \pi$)

חשב את מסת הסליל אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$).

אינטגרל קווי מסוג II

(5) חשב:

א. $C: x = \cos t, y = \sin t \quad 0 \leq t \leq \pi/2; \int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy$

ב. $C: x = t, y = t^2 \quad 0 \leq t \leq 1; \int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy$

(6) חשב $\int_C y dx + x^2 dy$ כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$

ו- C נתון ע"י המשוואה: א. $y = 2x$ ב. $y = x^2$.

(7) חשב $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y) dx + (y-x) dy$ אם העקום נתון על ידי:

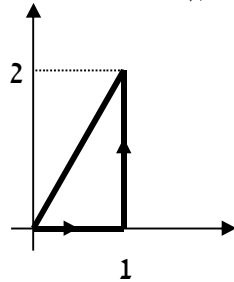
א. הפרבולה $y^2 = x$.

ב. קו ישר.

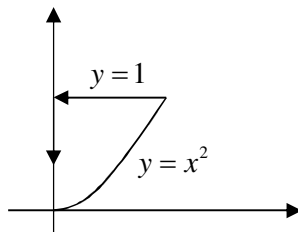
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.

ד. העקום: $x = 2t^2 + t + 1, y = t^2 + 1$.

(8) חשב $\int_C x^2 y dx + x dy$ כאשר המסלול C מתואר בציור:



(9) חשב $\int_C (x - y^2) dx + dy$ כאשר המסלול C מתואר בציור:



$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k} \quad \text{אם (10)}$$

חשב את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$ לאורך המסלולים:

א. $x=t, y=t^2, z=t^3$.

ב. הקווים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

(11) חשב את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר:

א. $F(x, y) = (x^2 y^3, -y\sqrt{x})$, $r(t) = (t^2, -t^3)$, $0 \leq t \leq 1$.

ב. $F(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz)$, $r(t) = (t^3, -t^2, t)$, $0 \leq t \leq 1$.

(12) א. חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y) = x^3 y \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$

על חלקיק שנע על הפרבולה $y = x^2$ מ- $(-2, 4)$ עד $(1, 1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$ עד $(-2, 4)$.

(13) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$

על חלקיק הנע לאורך העיקול $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 1$).

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

פתרונות - פרק 34

$$(1) \quad \pi \quad \text{ב.} \quad \frac{16}{3} \quad \text{ג.} \quad \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \text{ד.} \quad \frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$$

$$(2) \quad \sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3}) \quad \text{ב.} \quad \frac{567}{2}$$

$$(3) \quad 6$$

$$(4) \quad \sqrt{5}k\pi^2$$

$$(5) \quad \frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad \frac{4}{3}$$

$$(6) \quad \frac{28}{3} \quad \text{ב.} \quad \frac{32}{3}$$

$$(7) \quad \frac{34}{3} \quad \text{ב.} \quad 11 \quad \text{ג.} \quad 14 \quad \text{ד.} \quad \frac{32}{3}$$

$$(8) \quad \frac{1}{2}$$

$$(9) \quad \frac{4}{5}$$

$$(10) \quad 2 \quad \text{א.} \quad -3 \quad \text{ב.} \quad \frac{6}{5} \quad \text{ג.}$$

$$(11) \quad -\frac{59}{105} \quad \text{א.} \quad -\frac{6}{5} - \sin 1 - \cos 1 \quad \text{ב.}$$

$$(12) \quad 3 \quad \text{א.} \quad -3 \quad \text{ב.}$$

$$(13) \quad 1$$

תרגילים - פרק 35**אי תלות במסלול, שדות משמרים**

(1) קבע האם $\mathbf{F}$ הוא שדה משמר. אם כן, מצא פונקציה ϕ כך ש- $\nabla \phi = \mathbf{F}$.

א. $\mathbf{F}(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y)$

ב. $\mathbf{F}(x, y) = xe^y \mathbf{i} + ye^x \mathbf{j}$

ג. $\mathbf{F}(x, y) = (2x \cos y - y \cos x, -x^2 \sin y - \sin x)$

ד. $\mathbf{F}(x, y, z) = z^2 \mathbf{i} + e^{-y} \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k}$

ה. $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 3z^2) \mathbf{k}$

ו. $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, 2yz, y^2)$

(2) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1, 2)$ ו- $(3, 4)$.

ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

(3) חשב את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2 y^2) dy$

(4) חשב את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy$

(5) יהי $\mathbf{F}(x, y) = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j}$. מצא את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע

על $y = \sqrt{1-x^2}$ מ- $(1, 0)$ ל- $(-1, 0)$.

(6) חשב את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} (2xz^3 + 6y) dx + (6x - 2yz) dy + (3x^2 z^2 - y^2) dz$

תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

(7) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$ ונתונים 3 מסלולים :

$$L_1 : x^2 + y^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$L_2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{בכיוון השלילי (עם כיוון השעון).}$$

$$L_3 : (x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

חשב : א. $\oint_{L_1} \mathbf{F} dr$ ב. $\oint_{L_2} \mathbf{F} dr$ ג. $\oint_{L_3} \mathbf{F} dr$

(8) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$

ונתונים 2 מסלולים מ- $(2,0)$ ל- $(-2,0)$:

$$L_1 : x^2 + y^2 = 4, y \geq 0 \quad L_2 : x^2 + y^2 = 4, y \leq 0$$

א. חשב : $\oint_{L_1} \mathbf{F} dr$, $\oint_{L_2} \mathbf{F} dr$

ב. הוכח כי $\mathbf{F}$ משמר בחצי הטבעת $D = \{(x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\hat{x} + g(x, y, z)\hat{y} + h(x, y, z)\hat{z}$$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

פתרונות - פרק 35

(1) א. $\phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2$. ב. השדה אינו משמר.

ג. $\phi(x, y) = x^2 \cos y - y \sin x$. ד. $\phi(x, y, z) = xz^2 - e^{-y}$

ה. $\phi(x, y, z) = xyz + z^3$. ו. השדה אינו משמר.

(2) ב. 236

(3) -58

(4) 5

(5) -2

(6) $= 15$ עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1, -1, 1)$ ל- $(2, 1, -1)$ לאורך C .

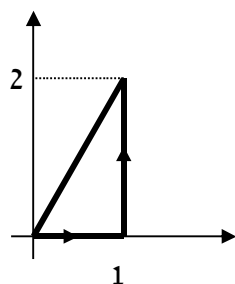
(7) א. 2π . ב. -2π . ג. 0.

(8) א. $L_1 : \pi$, $L_2 : -\pi$

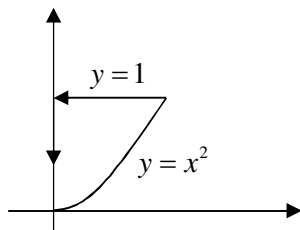
תרגילים - פרק 36**משפט גרין**

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט גרין, כלומר חשב את האינטגרל $\oint_C f dx + g dy$ ואת האינטגרל $\iint_R (g_x - f_y) dA$ והראה שהם שווים זה לזה.

(1) $\oint_C x^2 y dx + x dy$; המסלול C מתואר בציור :



(2) $\oint_C (x - y^2) dx + dy$; המסלול C מתואר בציור :



(3) $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$;

C הוא ריבוע שקודקודיו : $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ בכיוון החיובי. ריקי

(4) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$

על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון

ומשלים הקפה אחת.

(5) חשב את האינטגרל $\int_C \left(e^y - \tan \frac{x}{2} \right) dx + (xe^y + y \cos y^2) dy$ כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y = 8 - x^2$, $y = x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

(6) חשב את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + (e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy) dy$

כאשר C הוא חצי האליפסה $\{x^2 + 4y^2 = 4, y \geq 0\}$ מהנקודה $(2, 0)$ לנקודה

$(-2, 0)$.

(7) א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C נתון ע"י: $\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$.

ב. חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

פתרונות - פרק 36

(1) הערך המשותף הוא 0.5

(2) הערך המשותף הוא 0.8

(3) הערך המשותף הוא 8

(4) 1.5π

(5) $0.5 \sin 64$

(6) $\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4}$

(7) ב. πab

תרגילים - פרק 37אינטגרלים משטחיים ושימושיהםI אינטגרל משטחי מסוג I

בכל אחד מהתרגילים (1)-(5) חשב את האינטגרל המשטחי.

$$(1) \iint_S x^2 yz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y \text{ מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2]$$

$$(2) \iint_S x dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq z \leq 2$$

$$(3) \iint_S yz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3 \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1$$

$$(4) \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad z \geq 0$$

$$(5) \iint_S xyz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$$

$$\text{המקיים } 1 \leq u \leq 2, \quad 0 \leq v \leq \pi/2$$

$$(6) \text{ חשב את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס } R$$

$$(7) \text{ היריעה הדקה } S \text{ היא חלק הפרבולואיד } z = x^2 + y^2 \text{ שמתחת למישור } z = 1$$

$$\text{וצפיפותה } \delta(x, y, z) = \delta_0 \text{ קבועה. חשב את מסת היריעה.}$$

אינטגרל משטחי מסוג II

בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$

ובניסוח אחר :

בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את השטף של שדה הזרימה $\mathbf{F}$ דרך S .
($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

(8) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה הנקבעת ע"י

המישורים : $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(9) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(10) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה הנקבעת ע"י

המישורים : $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(11) $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$ שבו $z \geq 0$.

(12) $\mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k}$

S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

פתרונות - פרק 37

$$\pi\sqrt{2} / 4 \quad (3) \qquad \frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6} \quad (2) \qquad 171\sqrt{14} \quad (1)$$

$$4\pi R^2 \quad (6) \qquad 93 / \sqrt{10} \quad (5) \qquad 16\pi \quad (4)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (9) \qquad \frac{11}{6} \quad (8) \qquad \frac{\pi\delta_0}{6}(5\sqrt{5} - 1) \quad (7)$$

$$-16\pi \quad (12) \qquad 12\pi \quad (11) \qquad 27 \quad (10)$$

תרגילים - פרק 38
משפט הדיברגנץ (גאוס)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט הדיברגנץ, כלומר חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ ואת האינטגרל $\iiint_G \text{div} \mathbf{F} dV$ והראה שהם שווים זה לזה. ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S). (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y \mathbf{j} - xz^2 \mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G הנקבעת ע"י המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(2) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2 \mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G הנקבעת ע"י המישורים: $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$ בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$.

חשב את השטף של השדה הוקטורי $\mathbf{F} = x^3 \mathbf{i} + y^3 \mathbf{j} + z^2 \mathbf{k}$ דרך S .
 כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

(5) חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$\mathbf{F} = (z^2 - x)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:
 $x=0, x=3, z=4-y^2, z=0$

$$(6) \text{ חשב את } \iint_S xz^2 dydz + (x^2y - z^3)xydzdx + (2xy + y^2z)dxdy$$

כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי $z = 0$, $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

(7) יהי S משטח פתוח $x^2 + z^2 = 16$, $0 \leq y \leq 4$ (גליל ללא הבסיסים).

חשב את השטף דרך S של השדה הוקטורי $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + x^5\mathbf{k}$.

כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

(8) חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^2y}{1+y^2} + 6yz^2 \right) \mathbf{i} + 2x \arctan y \mathbf{j} - \frac{2xz(1+y) + 1+y^2}{1+y^2} \mathbf{k}$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$ שבו $z \geq 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים}$$

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\begin{aligned} \iiint_G \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ \iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ \iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV &= \iint_S f dydz + g dzdx + h dxdy \end{aligned}$$

פתרונות - פרק 38

$$(1) \text{ הערך המשותף הוא } \frac{11}{6}$$

$$(2) \text{ הערך המשותף הוא } \frac{8}{3}\pi$$

$$(3) \text{ הערך המשותף הוא } 27$$

$$(4) 279\pi$$

$$(5) 16$$

$$(6) \frac{2\pi a^5}{5}$$

$$(7) 0$$

$$(8) -4\pi$$

תרגילים - פרק 39**משפט סטוקס (משפט גרין במרחב)**

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים, כלומר
 חשב את האינטגרל $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$ ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ והראה
 שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$; S חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$ שבו $z \geq 0$.

$$\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k} \quad (2)$$

S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

(3) $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה

החסום על ידי המישורים $y = 2$, $2x + z = 6$, ושאינו כלול

א. במישור xy .

ב. במישור $y = 2$.

ג. במישור $2x + z = 6$.

(4) חשב את האינטגרל $\oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz$ כאשר C העקומה בצורת

מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

(5) חשב את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$

ו- C היא שפת המשולש שקודקודיו הם $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ וכיוונה

הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

(6) חשב את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ כאשר $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

ו- S הוא החלק של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$ ומעל למישור- xy .

(7) חשב את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ כאשר $\mathbf{F} = (x-z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$

ו- S הוא משטח החרוט $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ מעל למישור- xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S ((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS$$

פתרונות - פרק 39

- | | |
|--|------------------------------|
| (1) הערך המשותף הוא 12π | (2) הערך המשותף הוא -16π |
| (3) הערך המשותף הוא א) 6- ב) 9- ג) 18- | (4) -90 |
| (5) -1 | (6) 0 |
| (7) 12π | |

תרגילים - פרק 40

וקטורים

הערה: אנו נסמן את הוקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים: $\vec{u}, \mathbf{u}$.

את גודל הוקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.

גודל וקטור נקרא גם אורך הוקטור וגם הנורמה של הוקטור.

(1) מצא את x, y, z אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$, $\underline{v} = (z - 2, y + 1, x - 3)$.

(2) נתונים הוקטורים: $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{w} = (2, 6, -5)$. חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$ ד. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

ו. $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$ ז. $|\underline{u}|$ ח. $d(\underline{u}, \underline{v})$ ט. $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$ י. $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

* בסעיפים ז, ח, י הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(3) נתונות הנקודות: $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$. מצא את הוקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ ב. $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$ ג. $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(4) א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר $x = (1, 2, 3) + t(4, 5, 6)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x, y, z .

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות $x = 1 + 2t$, $y = 10$, $z = 4 - t$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(5) נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו- B 2. B ו- C 3. A ו- C

ב. מי מבין הנקודות $D = (4, 2, -1)$ ו- $E(7, 7, -3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת

בסעיף הקודם.

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC .

(6) א. מצא במרחב הצגה פרמטרית של ציר ה- x , ציר ה- y וציר ה- z .

ב. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודה $(4, 5, 6)$ ומקביל לציר z .

(7) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1, 2, 3)$ והמאונך לישר

$$\underline{x} = (1, 2, 0) + s(1, -2, 4)$$

(8) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר ℓ_2 העובר דרך הנקודה $P(-4, 1, 1)$, מאונך לישר

$$\ell_1: (2, -3, 1) + t(1, 4, -3)$$

(9) א. נתונה הצגה פרמטרית של מישור $\underline{x} = (1, -2, 3) + t(2, 0, 1) + s(-4, 1, 5)$

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x, y, z .

ב. נתונה הצגה של מישור בעזרת קואורדינטות $x = 1 + 2t - s, y = 10 + t, z = 4 - t + s$

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(10) א. 1. הראה ששלוש הנקודות $(2, 0, 5), (0, 1, -2), (1, 1, 0)$ אינן נמצאות על ישר אחד ומצא

הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א.

ג. האם הנקודה $(4, 2, 1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א?

(11) נתונות הנקודות: $A(1, 1, 3), B(1, 2, 0), C(1, 1, 1)$

א. מצא הצגה פרמטרית של הישר, המחבר את B עם C הראה כי הנקודה A לא נמצאת על

הישר הזה.

ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C .

ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C .

(12) נתונה תיבה $ABCD A'B'C'D'$ כמתואר בציור.

$$\text{נתון: } 6 = |AA'|, |AD| = 2, |\overline{AB}| = 4, |C'F| = FB'$$

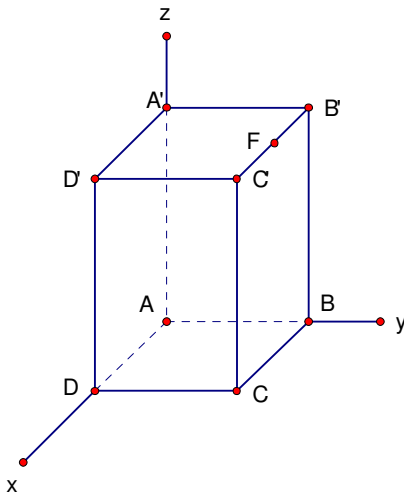
א. מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר

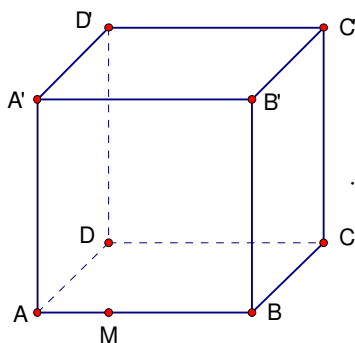
דרך הנקודה F ומאונך למישור העובר

העובר דרך $A'DB$.

ב. מצא את מרחק הנקודה F מהמישור העובר

העובר דרך $A'DB$.





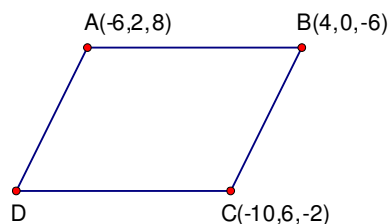
(13) בתיבה $ABCD A' B' C' D'$ נתונים הקודקים :

$$A(7, -9, 5), B(1, -3, -7), C(-5, -1, -3), C'(-1, 7, -1)$$

הנקודה M מחלקת את המקצוע AB כך ש- $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MA}$.

א. חשב: $|\overrightarrow{MC}|, |\overrightarrow{MA}|$.

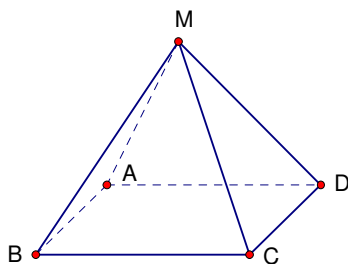
ב. חשב את שטח המשולש $\Delta A' MC$.



(14) נתונה מקבילית $ABCD$ (ראה ציור).

א. מצא את קודקוד D .

ב. מצא את הזווית בין אלכסוניה של המקבילית.



(15) נתונה פירמידה שבסיסה מקבילית $ABCD$

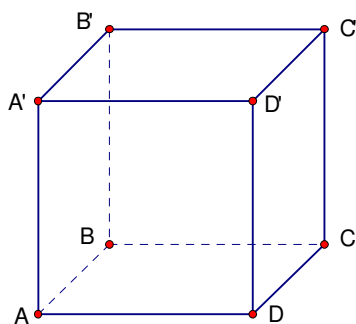
וקודקודה M (ראה ציור). נתון :

$$A(3, 6, -1), B(-1, 2, -3), C(7, 6, -3), M(4, -3, -4.5)$$

א. מצא את גודל זווית $\angle ABC$.

ב. מצא את שטח בסיס הפירמידה.

ג. מצא את נפח הפירמידה.



(16) נתונה תיבה $ABCD A' B' C' D'$.

$$\text{נתון: } A(1, 2, 0), C(4, 0, 1), D(2, 2, -1), B'(9, 12, 8)$$

חשב את נפח התיבה.

(17) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם :

נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.

א. $\underline{x} = (1, 0, 1) + t(1, 2, 0)$, $\underline{x} = (1, 1, 0) + s(2, 4, 0)$

ב. $\underline{x} = (-2, 2, 4) + u(6, 6, 1)$, $\underline{x} = (1, -1, 0) + t(12, -3, 1)$

ג. $\underline{x} = (1, 1, 2) + t(1, 2, -1)$, $\underline{x} = (2, 3, 1) + s(2, 4, -2)$

ד. $\underline{x} = (1, -1, 0) + t(0, 2, -4)$, $\underline{x} = (2, 0, 3) + s(-1, -3, 1)$

במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.

במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.

(18) נתונים שני ישרים :

$$\ell_1 : (x, y, z) = (4, 3, 1) + t(1, -3, 2)$$

$$\ell_2 : (x, y, z) = (5, -1, 4) + m(-1, 3, 5)$$

א. הראה כי הישרים מצטלבים.

ב. מצא משוואה של מישור שמכיל את ℓ_2 ומקביל ל- ℓ_1 .

ג. חשב את המרחק בין הישרים.

(19) נתונים שני ישרים :

$$\ell_1 : (x, y, z) = (3, 1, 1) + u(2, -1, -2)$$

$$\ell_2 : (x, y, z) = (3, 9, -6) + m(6, 2, -1)$$

א. מהו המצב ההדדי של הישרים?

ב. אם הישרים מקבילים או נחתכים, מצא את משוואת המישור המכיל אותם.

אם הישרים מצטלבים מצא את המרחק ביניהם.

(20) נתונות ארבע נקודות: $P(k, 0, 0)$, $Q(0, 4, 0)$, $R(0, k, 3)$, $S(1, 1, -1)$

א. הראה שלא קיים ערך של k עבורו הישרים PQ ו- SR מקבילים.

ב. מצא עבור איזה ערך של k הישרים אורתוגונליים (מאונכים) זה לזה,

ומצא את המרחק ביניהם במקרה זה.

(21) הישר ℓ_1 עובר דרך הנקודות $(6,1,3)$ ו- $(5,2,3)$.

הצגה פרמטרית של הישר ℓ_2 היא: $(2, k+1, 3) + t(k^2 - 9, -7, 0)$: ℓ_2 .

א. עבור איזה ערך של k הישרים מקבילים (לא מתלכדים)?

ב. עבור איזה ערך של k הישרים מתלכדים?

ב. מצא משוואה של מישור π , המכיל את הישר ℓ_1 ומקביל לציר ה- z .

ג. עבור k שמצאת בתת סעיף א.1, מצא את המרחק של ℓ_2 מהמישור π .

(22) נתונות ארבע נקודות: $A(1,1,-1)$, $B(-1,k,3)$, $C(0,-4,0)$, $D(k,0,0)$

הישר ℓ_1 מחבר את הנקודה A עם הנקודה B .

הישר ℓ_2 מחבר את הנקודה C עם הנקודה D .

א. מצא עבור איזה ערך של k הישרים מאונכים זה לזה.

ב. עבור הערך של k שמצאת בסעיף א., מצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1

ומקביל לישר ℓ_2 .

(23) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר:

חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.

א. $2x - 3y + 4z - 5 = 0$, $\underline{x} = (1, 0, 2) + t(-1, 2, 2)$.

ב. $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $\underline{x} = (-3, 0, 4) + t(4, -2, -6)$.

ג. $2x - 14y + 10z = -6$, $\underline{x} = (2, 1, -2) + t(-2, 2, 0)$.

במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר

למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

(24) ידוע כי הישר ℓ עובר דרך הנקודות $A(4, -6, 5)$ ו- $B(4+k, 3, 2)$

ונתון מישור $\pi : x - 4y - kz - 5 = 0$.

א. עבור איזה ערך של k הישר מקביל למישור?

ב. המישור π חותך את ציר ה- x בנקודה C .

עבור k שמצאת בסעיף א, חשב את הזווית בין המישור π לבין $\overline{BC}$.

(25) נתונים ישר: $\ell: (2, 1, -1) + t(0, a, -1)$ ומישור: $\pi: x - 2y - 4z = 4$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a יהיה הישר מוכל במישור?

ב. מצא משוואה של מישור המכיל את הישר ℓ ומאונך למישור π .

(26) נתונים שני ישרים ומישור:

$$\ell_1: (x, y, z) = (2, 1, 1) + t(1, -1, -1)$$

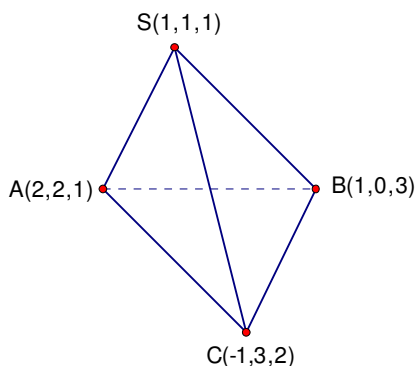
$$\ell_2: (x, y, z) = (3, -1, 2) + s(-2, 1, 1)$$

$$\pi: x - y + 2z = 3$$

א. קבע את המצב ההדדי בין כל אחד מהישרים למישור.

ב. מצא את הנקודות על הישר ℓ_2 שמרחקן מראשית הצירים הוא $\sqrt{18}$.

(27) בצוור משמאל נתון טטראדר $SABC$.



א. הוכח כי אחד המקצועות דרך S , ניצב למישור

הנקבע על-ידי שני המקצועות האחרים דרך S .

ב. מצא את משוואות המישור הנ"ל.

ג. חשב את הזווית שבין המקצוע AC לבין מישור

המשולש $\triangle SAB$.

(28) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם:

מקבילים, מתלכדים או נחתכים.

א. $x - 2y + 2z - 10 = 0$, $2x + y + 2z - 4 = 0$

ב. $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $4x - 10y + 6z - 8 = 0$

ג. $2x - 14y + 10z = -6$, $x - 7y + 5z = -3$

במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם. במקרה בו הם נחתכים מצא את

הזווית ביניהם ואת הישר החיתוך ביניהם.

(29) א. נתונים שני מישורים: $x + 2y - z = 7$, $2x + 3y - 4z = 10$

מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך ℓ_1 של שני המישורים.

ב. נתון: $\ell_2: (6, 2, -2) + s(2, -1, 1)$. מהו המצב ההדדי בין ℓ_1 ו- ℓ_2 .

(30) נתונים שני מישורים: $x - y + 2z - 7 = 0$, $2x + y - 3z + 1 = 0$.

א. מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך ℓ של שני המישורים.

ב. עבור איזה ערך של הפרמטר C , יקביל הישר ℓ למישור $\pi: 4x - y + Cz - 1 = 0$?

ג. עבור C שמצאת בסעיף ב, חשב את מרחק הישר ℓ מהמישור π .

(31) נתונים שני מישורים: $x + y + 2z = 6$, $x - 3y + 4z = -10$ ונקודה $M(1, 8, -3)$.

הישר ℓ הוא ישר החיתוך של המישורים הנ"ל.

א. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה M וניצב לישר ℓ .

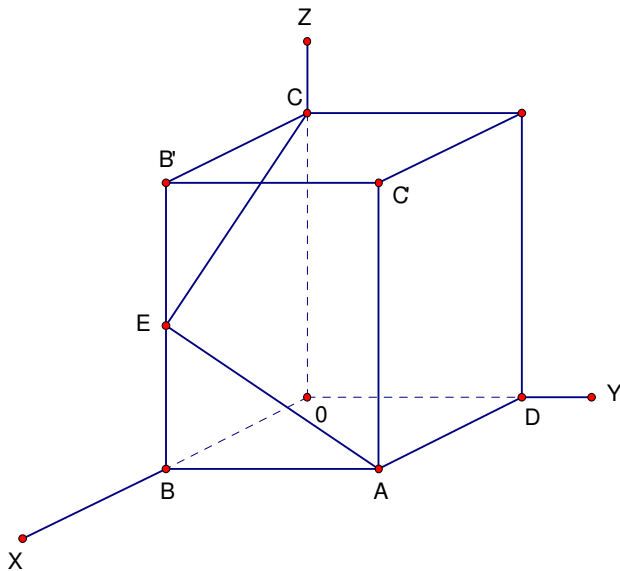
ב. מצא את מרחק הנקודה M מהישר ℓ .

(32) הישר $\ell: (0, -2, 1) + t(-3, 4, m)$ מקביל למישור $\pi_1: x - 2y - 4z = 4$.

א. מצא את הקבוע m .

ב. הנקודה $N(2, -1, 4)$ נמצאת על המישור π_1 ויוצרת עם הישר ℓ מישור π_2 .

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישורים π_1 ו- π_2 .



(33) אחד מקודקודי קוביה נמצא

בראשית הצירים.

אמצע BB' , $|AB| = 1$, E

א. חשב את זווית $\angle CEA$.

ב. חשב את הזווית בין שני

המישורים AEC ו- $BODA$.

(34) נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: (1, 2, 3) + t(3, -12, 18)$$

$$\ell_2: (2, 5, -1) + u(-4, 16, -24)$$

א. הראה כי הישרים קובעים מישור יחיד ומצא את משוואתו.

ב. מצא משוואת מישור, המקביל למישור שמצאת ב-א, ועובר דרך הנקודה $(0, -1, 0)$.

פתרונות - פרק 40

לתשומת לבכם!

הצגה פרמטרית של ישר (או מישור) היא לא יחידה. ייתכן למשל, שהישר הפרמטרי שאתם תקבלו "ייראה" שונה מהישר שאני קיבלתי. בכל אופן אם תבצעו בדיקה תוכלו לראות שהם מתלכדים.

$$(1) \quad x = 5, y = -2, z = 6$$

$$(2) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } (-6, 2, 8) & \text{ב. } (-2, 1, 3) & \text{ג. } (-17, 7, 24) & \text{ד. } (2.5, -1, -3.5) \end{array}$$

$$\text{ה. } (9.5, 9.5, -18) \quad \text{ו. } (19, 19, -36) \quad \text{ז. } \frac{1}{\sqrt{26}}(-3, 1, 4) \quad \text{ח. } 12.5698$$

$$\text{ט. } 14 \quad \text{י. } \left(-\frac{19}{7}, \frac{19}{14}, \frac{57}{14}\right)$$

$$(3) \quad \begin{array}{lll} \text{א. } (5, 7, 1) & \text{ב. } (-8, -16, 8) & \text{ג. } (8, 12, 0) \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t & \text{ב. } \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1) \end{array}$$

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } (1, -3, 0) + t(3, 5, -1) & \text{א. } (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3) \\ \text{א. } (1, -3, 0) + t(2, 2, 2) & \text{ב. הנקודה } D \end{array}$$

$$\text{ג. } 35.477^\circ$$

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } t(0, 0, 1), t(0, 1, 0), t(1, 0, 0) & \text{ב. } (4, 5, 6) + t(0, 0, 1) \end{array}$$

$$(7) \quad (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$$

$$(8) \quad (-4, 1, 1) + t(83, -32, -15)$$

$$(9) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } x = 1 + 2t - 4s, y = -2 + s, z = 3 + t + 5s & \text{ב. } (1, 10, 4) + t(2, 1, -1) + s(-1, 0, 1) \end{array}$$

$$(10) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5) & \text{א. } -2x + 3y + z - 1 = 0 \\ \text{ב. למשל: } (0, 0, 1), (-0.5, 0, 0) & \text{ג. לא} \end{array}$$

$$(11) \quad \begin{array}{lll} \text{א. } (1, 2, 0) + t(0, -1, 1) & \text{ב. } 1.4142 & \text{ג. } y - z + 2 = 0 \end{array}$$

$$(12) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } (1, 4, 6) + t(6, 3, 2) & \text{ב. } \frac{18}{7} \end{array}$$

$$(13) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } |\overline{MC}| = \sqrt{152}, |\overline{MA'}| = \sqrt{108} & \text{ב. } 59.396 \end{array}$$

$$(14) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } D(-20, 8, 12) & \text{ב. } 81.62^\circ \end{array}$$

$$(15) \quad \begin{array}{lll} \text{א. } 26.565^\circ & \text{ב. } S = 24 & \text{ג. } V = 32 \end{array}$$

$$(16) \quad V = 72$$

$$(17) \quad \begin{array}{lll} \text{א. } \text{מקבילים, } 1.095 & \text{ב. } \text{מצטלבים, } 4.07 & \text{ג. } \text{מתלכדים} \end{array}$$

$$\text{ד. נחתכים בנקודה } (1, -3, 4). \text{ זווית בין הישרים } 47.6^\circ.$$

$$(18) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 3x + y = 14 & \text{ב. } 0.31622 \end{array}$$

- (19) א. מצטלבים ב. 10
- (20) ב. $d = \frac{2}{15}, k = 0.8$
- (21) א. 1. $k = -4$ א. 2. $k = 4$ ב. $x + y = 7$ ג. 5.65685
- (22) א. $k = 2$ ב. $8x - 4y + 5z + 1 = 0$
- (23) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל ג. חותך בנקי $(3.5, -0.5, -2)$, זווית בין הישר למישור 40.78°
- (24) א. $k = 9$ ב. 14.67°
- (25) א. $a = 2$ ב. $10x + y + 2z - 19 = 0$
- (26) א. ℓ_1 מוכל, ℓ_2 חותך. ב. $(-1, 1, 4), (\frac{11}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3})$
- (27) א. $SC \perp SAB$ ב. $2x - 2y - z + 1 = 0$ ג. 64.76°
- (28) א. המישורים נחתכים. ישר החיתוך: $(0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$. זווית 63.612° .
ב. המישורים מקבילים, המרחק ביניהם: 0.324 ג. המישורים מתלכדים.
- (29) א. $(9, 0, 2) + t(-5, 2, -1)$ ב. מצטלבים
- (30) א. $(2, -5, 0) + t(1, 7, 3)$ ב. $C = 1$ ג. 2.8284
- (31) א. $5x - y - 2z = 3$ ב. 5.07
- (32) א. $m = -8$ ב. $(2, -1, 4) + t(-4, 4, -8)$
- (33) א. 78.463° ב. 35.26°
- (34) א. $2x - 10y - 7z + 39 = 0$ ב. $2x - 10y - 7z - 10 = 0$

תרגילים - פרק 41**מספרים מרוכבים**

(1) פתור את המשוואות הבאות ומצא את z .

$$(1) z^2 + 9 = 0 \quad (2) z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (3) z^2 - 6z + 13 = 0$$

(2) חשב:

$$(1) (i\sqrt{2})^6 \quad (2) (i^5 - i^{13})^2 \quad (3) (4+i) - (2+10i) \quad (4) (-4-i)(2-3i)$$

(3) חשב (כתוב את התוצאה בצורה $z = x + yi$):

$$(1) \frac{5}{2+i} \quad (2) \frac{1+i}{1-3i} \quad (3) \frac{i}{1-i} - \frac{1}{(i+1)^2}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות ומצא את המספר המרוכב z :

$$(1) \bar{z} - 1 = 2z - 6i \quad (2) \bar{z}z - 5\bar{z} = 10i \quad (3) (1+i)z^2 + 2z - i + 1 = 0$$

(5) כתוב את המספרים הבאים בצורה קוטבית:

$$(1) 1 + \sqrt{3}i \quad (2) -1 - i \quad (3) -3 - \sqrt{3}i \quad (4) 1 - i$$

$$(5) 1 + i \quad (6) \sqrt{3} - i \quad (7) \sqrt{3}i \quad (8) -8$$

(6) חשב:

$$(1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} \quad (2) (1 + \sqrt{3}i)^9 \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$$

$$(4) \sqrt[5]{-8} \quad (5) \sqrt[5]{1} \quad (6) \sqrt[3]{-8}$$

(7) א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

ב. הראה כי אם z הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי: $z^6 = 1$.

(8) נתונה המשוואה $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה הנתונה.

ב. הוכח כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר

מדומה טהור.

$$(9) \quad \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^4 = 1 \quad \text{פתור את המשוואה}$$

$$(10) \quad \text{א. מצא את שלושת הפתרונות של המשוואה } z^3 = i.$$

ב. הראה שמכפלת שלושת הפתרונות היא i .

ג. הראה שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת

שני הפתרונות האחרים.

$$(11) \quad \text{א. פתור את המשוואה } z^5 = -16(\sqrt{3} - i).$$

ב. הוכח כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצא את מנת הסדרה.

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$ כאשר q מנת הסדרה.

$$(12) \quad \text{נתון } w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i.$$

$$\text{א. מצא את פתרונות המשוואה } z^3 = w^3.$$

ב. הראה כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא w^3 .

$$(13) \quad \text{נתונה המשוואה } (iz+1)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i.$$

$$\text{א. מצא את פתרונות המשוואה } z_1 \text{ ו- } z_2.$$

$$\text{ב. הראה כי } \left| \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2} \right| = \sqrt{3.25}.$$

$$(14) \quad \text{נתונה המשוואה } (z-1)^3 = 1. \quad \text{הוכח ששכום שורשיה הוא 3.}$$

$$(15) \quad \text{נתונה המשוואה } z^3 = -\sqrt{3} + i.$$

$$\text{א. מצא את שורשי המשוואה: } z_1, z_2, z_3.$$

$$\text{ב. מצא את הסכום } |z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3.$$

$$\text{ג. הראה כי הסכום } (z_1)^9 + (z_2)^9 + (z_3)^9 \text{ הוא מספר מדומה טהור.}$$

(16) נתונה המשוואה $z^2 + |z|^2 - 2ti = 18s^2$, z הוא מספר מרוכב.

כאשר s ו- t הם מספרים ממשיים שונים מאפס. z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה.

א. הבע את פתרונות המשוואה באמצעות s ו- t .

ב. נתון $z_1 \cdot z_2 = -18i$. מצא את הפרמטרים s ו- t .

(17) א. פתור את המשוואה $\bar{z} \cdot i + (\bar{z})^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0$.

ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א., הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית שכל איבריה

שונים מאפס. הפרש סדרה זו הוא: $1 + \frac{1}{16}i$. האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.

חשב את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$

באשר d נקרא הפרש הסידרה.

(18) נתון: $u = (3 - 2i, 4i, 1 + 6i)$, $v = (5 + i, 2 - 3i, 7 + 2i)$. מצא:

$$u \cdot v \quad (3) \quad 2i \cdot u - v \quad (2) \quad 4u + v \quad (1)$$

$$|v| \quad (6) \quad |u| \quad (5) \quad u \cdot u \quad (4)$$

פתרונות - פרק 41

$$(1) \quad \pm 3i \quad (2) \quad 2 \pm i \quad (3) \quad 3 \pm 2i \quad (2) \quad -8 \quad (1) \quad (2) \quad 0 \quad (3) \quad -9i \quad (4) \quad -11 + 10i$$

$$(3) \quad 2 - i \quad (2) \quad -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \quad (3) \quad -\frac{1}{2} + i$$

$$(4) \quad (1) \quad z = -1 + 2i \quad (2) \quad z = 1 + 2i, z = 4 + 2i \quad (3) \quad z = i, z = -1$$

$$(5) \quad (1) \quad 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \quad (2) \quad \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) \quad (3) \quad \sqrt{12}(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$$

$$(4) \quad \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) \quad (5) \quad \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \quad (6) \quad 2(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$$

$$(6) \quad (1) \quad \frac{1}{32}i \quad (2) \quad -2^9 \quad (3) \quad -1 \quad (8) \quad \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \quad (8) \quad 8(\cos \pi + i \sin \pi) \quad (6) \quad (1) \quad \frac{1}{32}i \quad (2) \quad -2^9 \quad (3) \quad -1$$

$$\cdot 8^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (4)$$

$$\cdot 1^{\frac{1}{5}} \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{5} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

$$\cdot 8^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2 \quad (6)$$

$$\cdot z_1 = \text{cis} 60^\circ, z_2 = \text{cis} 240^\circ, z_3 = \text{cis} 120^\circ, z_4 = \text{cis} 300^\circ \quad (7)$$

$$\cdot z = 0, z = 1, z = -1 \quad (9) \quad \cdot z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3} + i, z_3 = -1 - \sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3} - i \quad (8)$$

$$\cdot z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_3 = -i \quad (10)$$

$$\cdot q = \text{cis} 72^\circ \quad \cdot z_n = 2\text{cis}[30^\circ + (n-1)72^\circ] \quad n = 1, 2, 3, 4, 5 \quad (11)$$

$$\cdot 1 + (1 + \sqrt{3})i, -1 + (1 - \sqrt{3})i \quad (13) \quad \cdot z_1 = \text{cis} 45^\circ, z_2 = \text{cis} 165^\circ, z_3 = \text{cis} 285^\circ \quad (12)$$

$$\cdot 24i \quad \cdot z_3 = \sqrt[3]{2}\text{cis} 290^\circ, z_2 = \sqrt[3]{2}\text{cis} 170^\circ, z_1 = \sqrt[3]{2}\text{cis} 50^\circ \quad (15)$$

$$\cdot z_1 = 0 \quad (17) \quad \cdot t = 9, s = \pm 1 \quad \cdot z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i, z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i \quad (16)$$

$$\cdot (17 - 7i, 2 + 13i, 11 + 26i) \quad (18) \quad \cdot a_1 = -8.5 \quad \cdot z_2 = -0.5 + 0.5i,$$

$$\cdot \sqrt{92} \quad \cdot \sqrt{66} \quad \cdot 20 + 35i \quad \cdot (-1 + 5i, -10 + 3i, -19) \quad (19)$$

נוסחאות - גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\arctan(0) = 0$	$\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \coth f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases} \\ \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases} \\ \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \\ \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

נוסחאות - אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן

תחום התכנסות

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n \quad \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \ (m > 0) \\ -1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0) \\ -1 < x < 1 \ (m \leq -1) \end{array}$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots \quad m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$$
