

אלגברה

לינארית

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\ \eta & \iota & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & \omicron & \pi \\ \wp & \theta & \vartheta & \rho \\ \sigma & \varsigma & \tau & \upsilon \\ \omega & \xi & \psi & \zeta \end{pmatrix}$$

גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/linearit.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



לפתרון מלא בסרטון פלאש היכנסו ל- www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תוכן

פרק 1 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון.....	3
פרק 2 - העתקות (טרנספורמציות) לינאריות.....	11
פרק 3 - מטריצות והעתקות לינאריות.....	12
פרק 4 - דטרמיננטות.....	15

תרגילים – פרק 1**מרחבים וקטוריים****סימונים:**

R^n - המרחב הוקטורי של כל הוקטורים הממשיים מממד n מעל השדה הממשי R .

$M_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R .

$P_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R .

$F[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f: R \rightarrow R)$ מעל השדה R .

תת-מרחבים

(1) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של R^3 :

א. $W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$

ב. $W = \{(a, b, c) \mid a = c\}$

ג. $W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\}$

ד. $W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\}$

ה. $W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\}$

ו. $W = \{(a, b, c) \mid b = a + d, c = a + 2d\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

ז. $W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של $M_n[R]$:

א. $W = \{A \mid A = A^T\}$, כלומר, W מורכב מן המטריצות הסימטריות.

ב. W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B .

כלומר, $W = \{A \mid AB = BA\}$.

ג. $W = \{A \mid |A| = 0\}$, כלומר, W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס.

ד. $W = \{A \mid A^2 = A\}$, כלומר, W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן.

ה. W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

ו. W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס, כלומר,

$W = \{A \mid AB = 0\}$

ז. $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$, כלומר, W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס.

ח. W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $P_n[R]$.

א. $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$, כלומר, W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש.

ב. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

ג. $W = \{p(x) \mid \deg(p) \leq 4\}$, כלומר, W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4 .

ד. W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x .

ה. W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n כאשר $4 \leq n \leq 7$.

ו. $W = \{p(x) \mid p(0) = 1\}$.

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $F[R]$.

א. $W = \{f(x) \mid f(-x) = f(x)\}$ כלומר, לכל x ממשי W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.

ב. $W = \{f(x) \mid |f(x)| \leq M\}$ כלומר, לכל x ממשי W מורכב מכל הפונקציות החסומות.

ג. W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

ד. W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

ה. W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

ו. $W = \left\{ f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 4 \right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב $[0,1]$).

ז. $W = \{f(x) \mid f'(x) = 0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ח. $W = \{f(x) \mid f'(x) = 1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ט. $W = \{f(x) \mid f(x) = f(x+1)\}$.

(5) בדוק האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$ הוא תת מרחב של C^3 :

א. מעל השדה הממשי R .

ב. מעל שדה המרוכבים C .

צירופים לינאריים, מרחב נפרש, תלות לינארית

(6) נתונים הוקטורים הבאים :

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), u_2 = (0, 1, 1, -5, 3), u_3 = (2, -5, 3, 1), u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

א. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?ב. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלוייה לינארית ?א. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?ב. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה

כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

א. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?ב. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?ג. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה

כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

$$ד. נתון $v = (4, 12, k, -2k)$$$

א. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?ב. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$.ג. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהייה תלוייה לינארית.

$$ה. נתון $v = (a, b, c, d)$$$

א. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?ב. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?ג. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהייה תלוייה לינארית ?

$$ו. הבע את הוקטור $(2, -3, 3, 1)$ כצירוף לינארי של u_1 , u_2 ו- u_3 .$$

בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

ז. הבע את הוקטור $(7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4 . בכמה אופנים

ניתן לעשות זאת?

(7) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. בדוק האם המטריצות תלויות לינארית מעל $M_2[R]$.

2. במידה והמטריצות תלויות רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.

3. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B, C\}$?

(8) נתונים הפולינומים הבאים:

$$p_1(x) = 4 + x + x^2 + 5x^3, p_2(x) = 11x - 5x^2 + 3x^3,$$

$$p_3(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3, p_4(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3$$

1. בדוק האם הפולינומים תלויים לינארית מעל $P_3[R]$.

2. במידה והפולינומים תלויים לינארית רשום כל פולינום כצירוף לינארי של

שאר הפולינומים.

3. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1, p_4\}$?

(9) עהוא איזה ערכים של a, b, c הוקטורים הבאים תלויים לינארית:

$$\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$$

(10) נתון כי קבוצת הוקטורים $\{u, v, w\}$ בלתי תלויה לינארית ב- $V[F]$.

בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות לינארית, במידה שכן רשום כל וקטור כצירוף

של הוקטורים האחרים:

$$\text{א. } \{u - v, u - w, u + v - 2w\}$$

$$\text{ב. } \{u + 2v + 3w, 4u + 5v + 6w, 7u + 8v + 9w\}$$

$$\text{ג. } \{u + v, v + w, w\}$$

(11) בדוק האם הוקטורים $\{(1, i, i - 1), (i + 1, i - 1, -2)\}$ תלויים לינארית ב- C^3

א. מעל C . ב. מעל R .

בסיס ומימד**בדיקה האם קבוצת וקטורים מהווה בסיס למרחב**(12) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

(1) $\{ (1,0,1), (0,0,1) \}$

(2) $\{ (1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1) \}$

(3) $\{ (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) \}$

(13) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2 \times 2}[R]$:

(1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

(2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$

(3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(14) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

(1) $\{ 1+x, x^2+2x+3 \}$

(2) $\{ 1+x, x^2+2x+3, 2x+4x^3, x-x^3 \}$

(3) $\{ 1+2x+3x^3, 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2 \}$

(15) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T = \{ (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4) \}$ א. האם T בסיס ל- R^3 .ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים בלתי תלויה לינארית ב- T .ג. השלם את T' לבסיס של

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגניות

(16) לפניך 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad (1)$$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (1).

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (2).

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (3).

(א) מצא בסיס וממד ל- U , W ו- V .

(ב) (1) מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$. (2) מצא ממד ל- $U \cap V$.

(ג) מצא בסיס ל- $U \cap V$.

(17) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid a = c, b = d\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(18) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(19) נתון $U = \{v \in R^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(20) נתון $U = \{A \in M_{2 \times 2}[R] \mid A = A^T\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(21) נתון $U = \left\{ A \in M_{2 \times 2}[R] \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(22) נתון $U = \{p(x) \in P_3[R] \mid p(1) = 0\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת מרחב(23) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1,1,-1,2), (3,-1,7,4), (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1,-1,1,1), (1,0,2,-1), (1,1,3,-3), (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U .ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V .ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$.ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.(24) לפניכם תת מרחב של המרחב $M_{2 \times 2}[R]$:

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .(25) לפניכם תת מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{span}\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

(26) מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצות הבאות וציין את דרגת

המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

וקטורי קואורדינטות, שינוי בסיס(27) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{ (1,1,0), (0,1,0), (0,1,1) \} , \quad B_2 = \{ (1,0,1), (0,1,1), (0,0,1) \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1} \right)^{-1} \quad (3) \quad [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1} \quad (2) \quad [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2} \quad (1)$$

(27) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1 = \{ 1+x, x, x+x^2 \} , \quad B_2 = \{ 1+x^2, x+x^2, x^2 \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.(28) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B . סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E . סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E . סמן מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

תרגילים – פרק 2

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

(1) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות:

- א. מצא מטריצה אופיינית.
- ב. מצא פולינום אופייני.
- ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- ה. מצא וקטורים עצמיים.
- ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה, כלומר מצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
- ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון חשב A^{2009} .
- ט. מצא את הפולינום המינימלי.
- י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\boxed{F = C, F = R}$$

$$\boxed{F = C, F = R}$$

* בסעיפים 5,6 עליך לפתור פעם מעל C ופעם מעל R .

- (2) א. הגדר את המושג דימיון מטריצות.
 ב. ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי:
 1. $|A| = |B|$. 2. $tr(A) = tr(B)$. 3. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(3) הוכח שאם $P^{-1}AP = B$ אז $A^n = PB^nP^{-1}$.

תרגילים – פרק 3
העתקות (טרנספורמציות) לינאריות

העתקות לינאריות

(1) הגדר והדגם את המושג העתקה (טרנספורמציה) לינארית. הגדר את המושג אופרטור לינארי.

(2) עבור כל אחת מההעתקות הבאות, קבע האם היא העתקה לינארית.

$$T(x, y) = (x + y, x - y) \quad ; \quad T : R^2 \rightarrow R^2 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x + y - 2z, x + 2y + z, 2x + 2y - 3z) \quad ; \quad T : R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(x, y, z) = (2x + z, |y|) \quad ; \quad T : R^3 \rightarrow R^2 \quad (3)$$

$$T(x, y) = (xy, y, z) \quad ; \quad T : R^2 \rightarrow R^3 \quad (4)$$

$$T(x, y, z) = (x + 1, x + y, y + z) \quad ; \quad T : R^3 \rightarrow R^3 \quad (5)$$

$$(B \in M_n[R]) \quad T(A) = BA + AB \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (6)$$

$$T(A) = A + A^T \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (7)$$

$$T(A) = |A| \cdot I \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (8)$$

$$T(A) = A \cdot A^T \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (9)$$

$$T(A) = A^{-1} \quad ; \quad T : M_n[R] \rightarrow M_n[R] \quad (10)$$

$$T(a + bx + cx^2 + dx^3) = a + bx + cx^2 \quad ; \quad T : P_3[R] \rightarrow P_2[R] \quad (11)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) \quad ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_n[R] \quad (12)$$

$$T(p(x)) = p'(x) + p''(x) \quad ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_n[R] \quad (13)$$

$$T(p(x)) = p^2(x) \quad ; \quad T : P_n[R] \rightarrow P_{2n}[R] \quad (14)$$

$$(F = C, F = R) \quad T(z) = \bar{z} \quad ; \quad T : C[F] \rightarrow C[F] \quad (15)$$

(3) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה) ההעתקה הבאה תהיה לינארית:

$$T(x, y) = (m^2 x^{2m}, y^{2m} + x) ; T : R^2 \rightarrow R^2$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

א. $T : R^3 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1, 1, 0) = (1, 2, 3)$, $T(0, 1, 1) = (4, 5, 6)$, $T(0, 0, 1) = (7, 8, 9)$.

ב. $T : R^3 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$, $T(0, 1, 1) = (1, 2, 1)$, $T(0, 0, 1) = (0, 1, 1)$.

ג. $T : R^4 \rightarrow R^3$ כך ש- $T(1, 2, -1, 0) = (0, 1, -1)$, $T(-1, 0, 1, 1) = (1, 0, 0)$, $T(0, 4, 0, 2) = (2, 2, -2)$.

ד. $T : P_2[R] \rightarrow P_2[R]$ כך ש- $T(1) = 4$, $T(4x + x^2) = x$, $T(1 - x) = x^2 + 1$.

תמונה וגרעין של העתקות לינאריות

(5) נתונה העתקה לינארית $T : V \rightarrow U$. הגדר והדגם את המושגים:

א. הגרעין של ההעתקה - $\text{Ker} T$. ב. התמונה של ההעתקה - $\text{Im} T$.

ג. משפט הממד להעתקות (השתמש במושגים הדרגה של העתקה - $\text{rank} T$ והאיפוס של

העתקה - $\text{null} T$)

(6) עבור כל אחת מההעתקות הבאות מצא בסיס וממד לגרעין ולתמונה:

$$T(x, y, z, t) = (x + y, y - 4z + t, 4x + y + 4z - t) , T : R^4 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - 4y - z, x + y, y - z, x + 4z) , T : R^3 \rightarrow R^4 \quad (2)$$

$$T(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 6 & 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} , T : R^4 \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T(A) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot A , T : M_2[R] \rightarrow M_2[R] \quad (4)$$

$$T(p(x)) = p(x+1) - p(x+4) , T : P_2[R] \rightarrow P_2[R] \quad (5)$$

$$D(p(x)) = p'(x) , D : P_3[R] \rightarrow P_3[R] \quad (6)$$

(7) מצא העתקה לינארית $T: R^3 \rightarrow R^3$ אשר תמונתה נפרשת על ידי $\{(4,1,4), (-1,4,1)\}$.

(8) מצא העתקה לינארית $T: R^4 \rightarrow R^3$ אשר הגרעין שלה נפרש על ידי $\{(0,1,1,1), (1,2,3,4)\}$.

(9) א. נתונה העתקה לינארית $T: V \rightarrow U$. הוכח כי אם $\dim \text{Im} T = \dim \text{Ker} T$ אז הממד של V זוגי.
ב. האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T: R^4 \rightarrow R^3$?

העתקות לינאריות חח"ע ולא חח"ע, העתקות לינאריות על, איזומורפיזם

(9) הסבר את המושגים העתקה לינארית חד-חד ערכית (חח"ע) והעתקה לינארית על. כמו כן הסבר את המושג איזומורפיזם והעתקה הפוכה.

(10) עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבע האם היא חח"ע, האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, z - x) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (1)$$

$$T(x, y, z) = (x - y + z, y + z, x + 2z) \quad , \quad T: R^3 \rightarrow R^3 \quad (2)$$

$$T(a + bx + cx^2) = (a + b + c, a - b, b - 2c) \quad , \quad T: P_2[R] \rightarrow R^3 \quad (3)$$

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a - b + (c + d)x + (a - c)x^2 + dx^3 \quad , \quad T: M_2[R] \rightarrow P_3[R] \quad (4)$$

הערה: העתקה חח"ע נקראית גם לא סינגולרית

פעולות עם העתקות לינאריות

(11) תהיינה $S: R^3 \rightarrow R^2$ ו- $T: R^3 \rightarrow R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי:

$$T(x, y, z) = (x, 4x - y, x + 4y - z) \quad , \quad S(x, y, z) = (x - z, y)$$

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

$$ST \quad (5) \quad TS \quad (4) \quad 4S - 10T \quad (3) \quad 4S \quad (2) \quad S + T \quad (1)$$

$$S^2 \quad (10) \quad S^{-1} \quad (9) \quad T^{-2} \quad (8) \quad T^{-1} \quad (7) \quad T^2 \quad (6)$$

תרגילים – פרק 4

דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(6)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(9)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}^{(8)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{(11)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(10)}$$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(6)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(4)}$$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$(5) \text{ נתון: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \text{ . חשב:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}^{(2)} \quad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}^{(1)}$$

$$(6) \text{ א. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{ב. הוכח כי}$$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n . חשב את הדטרמיננטה של

המטריצה הנתונה :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (3) \quad a_{ij} = \begin{cases} j & i=j+1 \\ n & i=1, j=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (2) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & i=j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad (1)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & \text{אחרת} \end{cases} \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix} \quad (6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases} \quad (*7)$$

* בסעיף 7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3, b=1, c=2$ ומצא :

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

$$|-2A^2 A^T \text{adj} B| \quad (4) \quad |-A^{-2} B^T A^3| \quad (3) \quad |4A^2 B^3| \quad (2) \quad |ABA^{-1} B^T| \quad (1)$$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1}APQ = B$ הוכח: $|A| = |B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB + 3I = 0$, $|A| = 2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2 - 2A^{-1} = 0$, $A + 3B = 0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 2. $|adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A| = 0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A| = 128$, $2AB = B^T A^2$, מצא את n .

ז. נתונים: $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$, $\det(A_{n \times n}) = 2$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{rcl} (1) & x + 2y = 5 & (2) \quad x + z = 3 \\ & 3x + 4y = 11 & 4x + y + 8z = 21 \\ & & 2x + 3z = 8 \\ (3) & x + 2z + 5t = 8 & \\ & -2x - 6y = -8 & \\ & 5x + 3y - 7z + 4t = 5 & \\ & 2x + 5y + 44z = 51 & \end{array}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} kx + y + z + t + r &= 1 \\ x + ky + z + t + r &= 1 \\ x + y + kz + t + r &= 1 \\ x + y + z + kt + r &= 1 \\ x + y + z + t + kr &= 1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x = y = z = t = r$.

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{(3)} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{(1)}$$

(14) נתון :

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב: (1) $(adj A)_{1,5}$ (2) $(A^{-1})_{1,5}$ (15) א. הוכח שאם $|A| = 1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם

מספרים שלמים.

ב. נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.ג. נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.ד. נתון: A, B הפיכות. C, D לא הפיכות.האם המטריצות הבאות הפיכות: (1) $C + D$ (2) $A + B$ (3) AD (4) CD (5) AB ?(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה :

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודה :

1. $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$ 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$.ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3, 3, -2)$, $(-1, 3, 1)$, $(1, 1, -1)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1, 2)$, $(3, 4)$, $(5, 8)$.

הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

פתרונות – פרק 4

$$(1) \quad ad - bc \quad (1) \quad 29 \quad (3) \quad -1 \quad (4) \quad -1 \quad (5) \quad -3 \quad (6) \quad -14 \quad (7) \quad 24 \quad (8) \quad 234 \quad (9) \quad -300 \quad (10) \quad 9$$

$$(11) \quad 6 \quad (12) \quad 0 \quad (1) \quad 0 \quad (2) \quad 0 \quad (3) \quad 3 \quad (4) \quad 24 \quad (5) \quad 44 \quad (6) \quad 104 \quad (3) \quad 1 \quad (120) \quad 2 \quad 114 \quad (3) \quad 6$$

$$(5) \quad (1) \quad -8 \quad (2) \quad 16 \quad (3) \quad 9 \quad (7) \quad (1) \quad n! \quad (2) \quad (-1)^{n-1} n! \quad (3) \quad (-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$$

$$(4) \quad 2 \cdot 3^{n-2} \quad (6) \quad 1 \quad (5) \quad (a-b)^{n-1} [a + (n-1)b]$$

$$(7) \quad D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}, D_2 = a^2 - bc, D_3 = a^3 - 2abc$$

$$(1) \quad D_n = 2^{n+1} - 1 \quad (2) \quad D_{20} = 2^{21} - 1 \quad (8) \quad 0 \quad (9) \quad 4 \quad (1) \quad 2 \quad 2^{13} \quad (3) \quad -8 \quad (4) \quad -2^{11}$$

$$(10) \quad (1) \quad 81/32 \quad (2) \quad |A| = 18, |B| = -2/3 \quad (3) \quad 7 \quad (4) \quad 4^n \quad (11) \quad (1) \quad x = 1, y = 2$$

$$(2) \quad x = 1, y = 1, z = 2 \quad (3) \quad x = y = z = t = 1 \quad (12) \quad (1) \quad k \neq 1, k \neq -4 \quad (2) \quad k = -2$$

ג. לא.

$$(13) \quad adj(A) = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad adj(A) = A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(3) \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, adj(A) = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(14) \quad (1) \quad 240 \quad (2) \quad 0.5 \quad (15) \quad (1) \quad \text{לא} \quad (2) \quad \text{לא} \quad (3) \quad \text{לא} \quad (4) \quad \text{לא} \quad (5) \quad \text{כן} \quad (16) \quad k = 0$$

$$(17) \quad (1) \quad 1 \quad (2) \quad 14 \quad (3) \quad 22 \quad (4) \quad 3x - y + 4z + 2 = 0 \quad (5) \quad 2$$

