

אלגברה

לינארית

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\ \eta & \iota & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & \omicron & \pi \\ \wp & \theta & \vartheta & \rho \\ \sigma & \varsigma & \tau & \upsilon \\ \omega & \xi & \psi & \zeta \end{pmatrix}$$

גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/linearit.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות.....	4
פרק 2 - מטריצות.....	11
פרק 3 - דטרמיננטות.....	17
פרק 4 - מרחבים וקטורים.....	23
פרק 5 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון.....	31
פרק 6 - וקטורים.....	32
פרק 7- וקטורים גיאומטריים.....	41
פרק 8 - וקטורים אלגבריים.....	51
פרק 9 - מספרים מרוכבים.....	68
פרק 10- טורים עם איברים קבועים.....	72
פרק 11 - טורי פונקציות וטורי חזקות.....	76

פרק 1 - פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות :

$$\begin{array}{llll} x + y = 3 & (4) & 2x + y = 3 & (3) \\ x - 4y = -7 & (2) & x + 10y = 11 & (1) \\ 2x + y = 4 & & x - y = 0 & \\ & & x - y = -1 & \\ & & 2x - 2y = 0 & \end{array}$$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{llll} x = 3 & (4) & 2x + y + z = 3 & (3) \\ x - 4y + z = -7 & (2) & x + 10y = 11 & (1) \\ 2x + y = 4 & & x - z = 0 & \\ & & x - y = -1 & \\ & & 2x - 2 = 0 & \\ z + t = 8 & & x + y + z = 5 & \\ & & x + y = 3 & \end{array}$$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{lll} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} & (1) \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין :

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} & (1) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} & (2) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} & (3) \end{array}$$

(5) א. **הסבר והדגם** את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.
 ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}^{(*9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$F=\mathbb{C}, F=\mathbb{R}$

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{R}$ ופעם מעל השדה $\mathbb{C}$.

(6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

$$\begin{array}{lll} 8x-4y=10 & (3) & 4x+8y=20 & (2) & 2x+3y=8 & (1) \\ -6x+3y=1 & & 3x+6y=14 & & 5x-4y=-3 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x+2y+3z=3 & (6) & x+2y+3z=-11 & (5) & 2x_1-x_2-3x_3=5 & (4) \\ 4x+6y+16z=8 & & 2x+3y-z=-5 & & 3x_1-2x_2+2x_3=5 & \\ 3x+2y+17z=1 & & 3x+y-z=2 & & 10x_1-6x_2-2x_3=32 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 3x-2y=1 & (9) & 4x-7y=0 & (8) & x+3y=2 & (7) \\ -9x+6y=-3 & & 8x-14y=2 & & 2x+y=-1 & \\ 6x-4y=2 & & -16x+28y=4 & & x-y=-2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x+2y+2z=2 & (12) & x_1+5x_2+4x_3-13x_4=3 & (11) & x+2y-3z+2t=2 & (10) \\ 3x-2y-z=5 & & 3x_1-x_2+2x_3+5x_4=2 & & 2x+5y-8z+6t=5 & \\ 2x-5y+3z=-4 & & 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4=0 & & 6x+8y-10z+4t=8 & \\ 2x+8y+12z=0 & & & & & \end{array}$$

(7) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות :

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x + 2ky + z = 0 & (3) & x + ky + z = 1 & (2) & x - y + z = 1 & (1) \\ 3x + y + kz = 2 & & x + y + kz = 1 & & 5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1 \\ x + 9ky + 5z = -2 & & kx + y + z = 1 & & 3x - y + (k + 3)z = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x + ky + 3z = 2 & (6) & kx - y = 1 & (5) & 2x - y + z = 0 & (4) \\ kx - y + z = 4 & & (k - 2)x + ky = -2 & & x + 2y - z = 0 \\ 3x + y + (2 + k)z = 0 & & (k^2 - 1)z = 9 & & 5x + (1 - k)y + k^2z = 1 \end{array}$$

(8) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות :

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} 3x + 4y - z = 2 & (3) & 2x - 3y + z = 1 & (2) & 2x + ky = 3 & (1) \\ kx - 2y + z = -1 & & 4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k & & (k + 3)x + 2y = k^2 + 5 \\ x + 8y - 3z = k & & & & 6x + 3ky = 7k^2 + 2 \\ 2x + 6y - 2z = 0.5k + 1 & & & & \end{array}$$

(9) מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות :

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{array}{lll} x + y - z + t = 1 & (3) & 2x + 4y + az = -1 & (2) & x + 2y - 4z = b & (1) \\ ax + y + z + t = b & & x + 2y + 4z = -4 & & 7x - 10y + 16z = 7 \\ 3x + 2y + at = 1 + a & & x + 2y - 4z = 0 & & 2x - ay + 3z = 1 \\ & & x + 2y + 6z = -2b & & \end{array}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות :

$$\begin{aligned} x + az &= 1 \\ y + 2z &= 2 \\ bx + cy + dz &= 3 \end{aligned}$$

א. מצא תנאי עבור a, b, c, d כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b, c, d כך שלכל a למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל השדה $\mathbf{F}$.

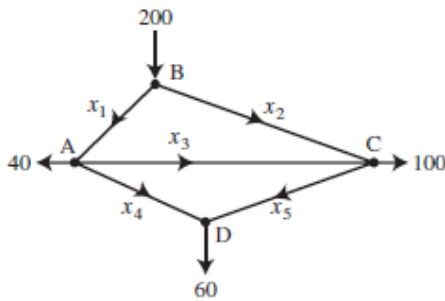
$$\begin{array}{lll} z_1 + iz_2 + (1 - i)z_3 = 1 + 4i & (2) & x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & (1) \\ iz_1 + z_2 + (1 + i)z_3 = 2 + i & & 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 2 \\ (-1 + 3i)z_1 + (3 - i)z_2 + (2 + 4i)z_3 = 5 - i & & 3x_1 + x_3 = 0 \end{array}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbb{C}, \mathbf{F} = \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbb{Z}_5}$$

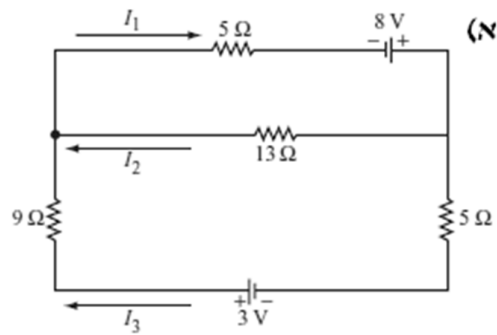
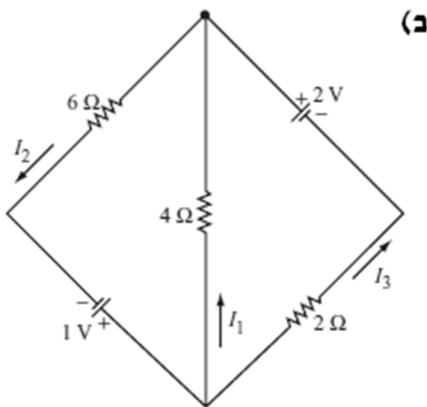
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x - 7y + (k^2 + 1)z = k^2 - 1 \\ 4x - 6y + (k + 2)z = 4 \end{cases} \quad (12) \text{ נתונה המערכת:}$$

- א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
 ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
 ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת: 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
 ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
 ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z = 0$.
 ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z = 0$.
 ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$. האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.
 ח. מצא לאיזה ערך של k , $(1, 0, 0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.



- (13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.
 א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.
 ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.
 ג. מהו הערך המינימלי של x_1 אם ידוע ש- $x_4 = 0$.

(14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם):



* בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.

פתרונות - פרק 1

(1) (1 ו-3) שקולות ו-2) (4 שקולות.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}^{(4)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1 \quad (2) \quad R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad (2) \quad R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad (1) \quad (4)$$

(5) ב.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(2)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

$F=\mathbb{R} \qquad F=\mathbb{C}$

(6)

$$(x, y) = (5 - 2t, t) \quad (2) \qquad (x, y) = (1, 2) \quad (1)$$

$$\phi \quad (4) \qquad \phi \quad (3)$$

$$(x, y, z) = (-1 - 7t, 2 + 2t, t) \quad (6) \qquad (x_1, x_2, x_3) = (1, -3, -2) \quad (5)$$

$$\phi \quad (8) \qquad (x, y) = (-1, 1) \quad (7)$$

$$(x, y, z, t) = (-a + 2b, 1 + 2a - 2b, a, b) \quad (10) \qquad (x, y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t\right) \quad (9)$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (12) \qquad \phi \quad (11)$$

$$\text{א. } k = -2 \quad \text{ב. } k \neq 1, k \neq -2 \quad \text{ג. } k = 1 \quad \text{ד. } k \neq 1, k \neq -2 \quad (17) \quad k = 1$$

$$\text{א. } k = -1, k \neq \frac{4}{7} \quad \text{ב. } k = -1 \quad \text{ג. } k \neq -1, k \neq -0.4 \quad \text{ד. } k = 1, k = -0.4 \quad (4)$$

$$\text{א. } k = \pm 1, k = -2 \quad \text{ב. } k \neq \pm 1, k \neq -2 \quad (5)$$

$$\text{א. } k = -1, k = -3, k = 2 \quad \text{ג. } k \neq -1, k \neq -3, k \neq 2 \quad (6)$$

$$(8) \quad \text{א. } k = -1 \quad \text{ב. } k \neq \pm 1 \quad \text{ג. } k = 1 \quad \text{ד. } k \neq 3 \quad \text{ה. } k = 3 \quad \text{ו. } k \neq 1 \quad \text{ז. } k = 1$$

(9)

$$(1) \quad \text{א. } a \neq 2 \quad \text{ב. } a = 2, b \neq -3 \quad \text{ג. } a = 2, b = -3$$

$$(2) \quad \text{א. } b \neq 2.5 \quad \text{ב. } a \neq -6 \quad \text{ג. } a = -6, b = 2.5$$

$$(3) \quad \text{א. } a = 2, b \neq 2 \quad \text{ב. } a = 2, b = 2 \quad \text{ג. } a \neq 2 \quad \text{ד. } a \neq 2$$

$$(10) \quad \text{א. } ab + 2c \neq d \quad \text{ב. } b = 0, c = 1.5, d = 3$$

(11)

$$(1) \quad (x_1, x_2, x_3) = (0, 3, 0) \quad (2) \quad (z_1, z_2, z_3) = ((-1+i)t + 1+i, 3, t) \quad (z_1, z_2, z_3) = (2, 3, -1) \quad F=\mathbb{R}$$

$$(12) \quad \text{א. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2 + 4 & k^2 - 4 \\ 0 & 0 & -k^2 + k + 2 & 4 - k^2 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2 + 1 & k^2 - 1 \\ 4 & -6 & k + 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ג. } 1. \quad k \neq -1, k \neq 2 \quad 2. \quad k = -1 \quad 3. \quad k = 2$$

$$\tau. \quad (x, y, z) = (1 + 0.2t, 0.8t, t)$$

$$\text{ה. } k = \pm 2 \quad \text{ו. } k = -2 \quad \text{ז. } k = 2 \quad \text{ח. } k = -2$$

$$(13) \quad \text{א. } x_3 \text{ ו- } x_5 \text{ חופשיים. } x_1 = 100 + x_3 - x_5, x_2 = 100 - x_3 + x_5, x_4 = 60 - x_5$$

$$\text{ב. } x_3 \text{ חופשי. } x_1 = 40 + x_3, x_2 = 160 - x_3, x_4 = 0, x_5 = 60$$

ג. 40

$$(14) \quad \text{א. } I_1 = \frac{255}{317}, I_2 = \frac{97}{317}, I_3 = \frac{158}{317} \quad \text{ב. } I_1 = \frac{6}{11}, I_2 = \frac{7}{22}, I_3 = -\frac{5}{22}$$

פרק 2 - מטריצות

(1) נתונות מטריצות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

$$\begin{array}{llllll} B+AB & (5) & AE-B & (4) & AC-D & (3) & AB & (2) & A+B & (1) \\ E(B-A) & (10) & E(AC) & (9) & E^T B & (8) & (E+A^T)D & (7) & E(B+A) & (6) \end{array}$$

(2) מצא את x, y, z , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

$$\begin{array}{llllll} 2tr(D^2 - 2E) & (5) & 2D + 4EI_3 & (4) & 5C & (3) & E - D + I_3 & (2) & E + D & (1) \\ DABC & (10) & tr(C^T C) & (9) & I_2 BC & (8) & \frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C & (7) & 4C^T + A & (6) \end{array}$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$ המבטאות את מערכת המשוואות

הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$.

$$\begin{array}{ll} 2x - 3y + z + t = 1 & (2) \quad 2x + y - z = 3 \quad (1) \\ 4x + y + 2z = 4 & x + 2y - 4z = 5 \\ y + z + t = 1 & 6x + 4y + z = 2 \\ x - 4z - 2y = 10 & \end{array}$$

(5) נתון :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות לינאריות :

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (5) \quad A\underline{x} = \underline{x} \quad (4) \quad A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (3) \quad A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (2) \quad A\underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

(6) מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T = A$ ואנטי-סימטרית אם $A^T = -A$.א. ידוע ש- A מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון :1. AA^T סימטרית. 2. $A + A^T$ סימטרית. 3. $A - A^T$ אנטי-סימטרית.ב. ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון :1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. $A^2 - B^2$ סימטרית. 3. $A^2 + B$ סימטרית.ג. ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB = -BA$. מי מבין הבאים נכון :1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A - B)^2$ סימטרית.ד. ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB = BA$. הוכח :1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB + B$ אנטי-סימטרית.ה. נתון : A, B, AB סימטריות מאותו סדר. הוכח כי $A^4 B^4 = B^4 A^4$.

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix}$.

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה איננה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z + 4t &= 1 & (2) & \quad 2x - y + z = 3 & (1) \\ x + 2y - z &= 0 & & \quad 3x - 2y + 2z = 5 \\ y + z + t &= 1 & & \quad 5x - 3y + 4z = 11 \\ x + 3y - z - 2t &= 0 \end{aligned}$$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X :

$$\begin{aligned} P^{-1}X^T P &= A & (3) & \quad A^{-1}XC = A^{-1}DC & (2) & \quad AXC = D & (1) \\ ABC^T X^{-1}BA^T C &= AB^T & (6) & \quad (A - AX)^{-1} = X^{-1}C & (5) & \quad C^{-1}(A + X)D^{-2} = I & (4) \end{aligned}$$

ב. נתון $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2 X (2B)^{-1} = B + I$.

ג. נתון $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T = B^{-1} + B$.

ד. נתון $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^T B (I + 2A)^{-2} = (7A)^{-2}$.

(11) א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2 - 5A - 2I = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A - 3I)(A + 2I) = 0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I .

ג. נתונים: $p(x) = x^3 - 4x^2 - 20x + 48$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

1. חשב את $p(A)$.

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- A והפיכה ובטא את A^{-1} בעזרת A

ו- I בלבד.

(12) נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4 = 0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I - A$ הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

(13) נתון: $\begin{cases} P^{-1}AP = B \\ Q^{-1}BQ = C \end{cases}$. הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D כך ש- $D^{-1}AD = C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C (כלומר יחס הדימיון

הוא יחס טרנזיטיבי).

הערה

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

פתרונות - פרק 2

$$\begin{array}{llll} (5 & (4 & 4 \times 2 & (3 & (2 & 4 \times 6 & (1 & (1) \\ 6 \times 6 & (10 & 6 \times 4 & (9 & (8 & 6 \times 2 & (7 & 6 \times 6 & (6 \end{array}$$

$$(x, y, z) = (2, 1, -1) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}^{(4)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}^{(1)} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}^{(7)} \quad \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}^{(6)} \quad 230 \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}^{(10)} \quad 63 \quad (9)$$

(4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{array}{lll} (4+k)x - 2y + 4z = 1 & (3) & -2y + 4z = 1 & (2) & 4x - 2y + 4z = 1 & (1) & (5) \\ x + (k-1)y + z = 2 & & x - 5y + z = 2 & & x - y + z = 2 & & \\ x - 6y + (3+k)z = 3 & & x - 6y - z = 3 & & x - 6y + 3z = 3 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 2x + y + z = 3 & (5) & 3x - 2y + 4z = 0 & (4) \\ -2x - 3y - 6z = 6 & & x - 2y + z = 0 & \\ 4x + y + z = 9 & & x - 6y + 2z = 0 & \end{array}$$

$$1, 2, 3 \text{ א. } 1, 2, 3 \text{ ב. } 2 \text{ ג. } 1, 2, 3 \quad (6)$$

(7)

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}^{(1)} \\
 & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(4)} \\
 & \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^{(7)}
 \end{aligned}$$

$$k=1, k=-4 \quad (2) \quad k \neq 1, k \neq -2 \quad (1) \quad (8)$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad (2) \quad (x, y, z) = (1, 2, 3) \quad (1) \quad (9)$$

$$. CD^2 - A \quad .4 \quad . (P^{-1})^T A^T P^T \quad .3 \quad . D \quad .2 \quad . A^{-1} D C^{-1} \quad .1 \quad .8 \quad (10)$$

$$BA^T C(B^{-1})^T BC^T \quad .6 \quad . (A + C^{-1})^{-1} A \quad .5$$

$$B = \frac{1}{245} \begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix} \quad .7 \quad Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix} \quad .ג \quad X = 4 \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .ב$$

$$. A^{-1} = \frac{1}{6} A - \frac{1}{6} I \quad .ב \quad A^{-1} = 0.5A - 2.5I \quad .א \quad (11)$$

$$. B^{-1} = -\frac{1}{48} B^2 + \frac{1}{12} B + \frac{5}{12} I \quad .2 \quad , \quad f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .1 \quad .ג$$

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 \quad .ב \quad (12)$$

פרק 3 - דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{(11)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(10)}$$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{(4)}$$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס :

$$\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(4)}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)}$$

$$(5) \text{ נתון: } \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4 \text{ . חשב:}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}^{(2)} \quad \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}^{(1)}$$

$$(6) \text{ א. הוכח כי } \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \text{ ב. הוכח כי}$$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n . חשב את הדטרמיננטה של

המטריצה הנתונה :

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i+j=n+1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (3) \quad a_{ij} = \begin{cases} j & i=j+1 \\ n & i=1, j=n \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases} \quad (2) \quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j=1 \\ 0 & i=j \neq 1 \\ j & i < j \\ -j & i > j \end{cases} \quad (1)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & \text{אחרת} \end{cases} \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 3 & 6 & \dots & 3(n-1) \end{pmatrix} \quad (6) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$a_{ij} = \begin{cases} a & i=j \\ b & i=j+1 \\ c & j=i+1 \end{cases} \quad (*7)$$

* בסעיף (7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3, b=1, c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

$$|-2A^2 A^T \text{adj} B| \quad (4) \quad |-A^{-2} B^T A^3| \quad (3) \quad |4A^2 B^3| \quad (2) \quad |ABA^{-1} B^T| \quad (1)$$

(10) א. נתון: $APQ = B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2 - 2A^{-1} = 0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 2. $|adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A| = 0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A| = 128$, $2AB = B^T A^2$, מצא את n .

ז. נתונים: $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$, $\det(A_{n \times n}) = 2$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3} B^{-n} A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{rcl} x + 2z + 5t = 8 & (3) & x + z = 3 & (2) & x + 2y = 5 & (1) \\ -2x - 6y = -8 & & 4x + y + 8z = 21 & & 3x + 4y = 11 \\ 5x + 3y - 7z + 4t = 5 & & 2x + 3z = 8 \\ 2x + 5y + 44z = 51 \end{array}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} kx + y + z + t + r &= 1 \\ x + ky + z + t + r &= 1 \\ x + y + kz + t + r &= 1 \\ x + y + z + kt + r &= 1 \\ x + y + z + t + kr &= 1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = \frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x = y = z = t = r$.

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

(14) נתון:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב: (1) $(adjA)_{1,5}$ (2) $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם

מספרים שלמים.

ב. נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A, B הפיכות. C, D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: (1) $C+D$ (2) $A+B$ (3) AD (4) CD (5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודה:

1. $(0,0), (5,2), (6,5), (11,6)$ 2. $(-1,0), (0,5), (1,-4), (2,1)$.

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0), (1,0,-2), (1,2,4), (7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2), (-1,3,1), (1,1,-1)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2), (3,4), (5,8)$.

הערה: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

פתרונות - פרק 3

9 (10) $ad - bc$ (1) 29 (2) 3 (3) -1 (4) -1 (5) -3 (6) -14 (7) 24 (8) 234 (9) -300 (10) 9

6 (11) 6 (2) 0 (1) 0 (2) 3 (3) 24 (4) 44 (5) 104 (6) 120 (1) 114 (2) 3 (3) 6

(5) (1) -8 (2) 16 (3) 9 (7) (1) $n!$ (2) $(-1)^{n-1}n!$ (3) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$

(4) $2 \cdot 3^{n-2}$ (6) 1 (5) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$

(7) $D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$, $D_2 = a^2 - bc$, $D_3 = a^3 - 2abc$ א

ב. 1. $D_n = 2^{n+1} - 1$ 2. $D_{20} = 2^{21} - 1$ (8) 0 (9) 4 (1) 2 2^{13} (3) -8 (4) -2^{11}

(10) ב. $81/32$ ג. $|A| = 18, |B| = -2/3$ ד. 7 ה. 4^n (11) 1 $x=1, y=2$

(2) 2 $x=1, y=1, z=2$ (3) $x=y=z=t=1$ (12) א. $k \neq 1, k \neq -4$ ב. $k = -2$

ג. לא.

$$\begin{aligned} \text{adj}(A) = A^{-1} &= \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{(2)} & \text{adj}(A) &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}^{(1)} \\ & & A^{-1} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (13)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}^{(3)}$$

(14) 1 240 (2) 0.5 (15) 1 לא (2) לא (3) לא (4) לא (5) כן. (16) $k=0$

(17) א. 1. ב. 2. א. 14. ב. 22 ג. $3x - y + 4z + 2 = 0$ ד. 2

פרק 4 - מרחבים וקטורים

סימונים:

- R^n - המרחב הוקטורי של כל הוקטורים הממשיים מממד n מעל השדה הממשי R .
- $M_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R .
- $P_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R .
- $F[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f: R \rightarrow R)$ מעל השדה R .

תת-מרחבים

(1) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של R^3 :

א. $W = \{(a, b, c) \mid a + b + c = 0\}$

ב. $W = \{(a, b, c) \mid a = c\}$

ג. $W = \{(a, b, c) \mid a = 3b\}$

ד. $W = \{(a, b, c) \mid a < b < c\}$

ה. $W = \{(a, b, c) \mid a = c^2\}$

ו. $W = \{(a, b, c) \mid b = a + d, c = a + 2d\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

ז. $W = \{(a, b, c) \mid b = a \cdot q, c = a \cdot q^2\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של $M_n[R]$:

א. $W = \{A \mid A = A^T\}$, כלומר, W מורכב מן המטריצות הסימטריות.

ב. W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B .

כלומר, $W = \{A \mid AB = BA\}$.

ג. W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר, $W = \{A \mid |A| = 0\}$.

ד. W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W = \{A \mid A^2 = A\}$.

ה. W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

ו. W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס. כלומר,

$W = \{A \mid AB = 0\}$

ז. $W = \{A \mid \text{tr}(A) = 0\}$, כלומר, W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס.

ח. W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $P_n[R]$.

א. $W = \{p(x) \mid p(4) = 0\}$, כלומר, W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש.

ב. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

ג. $W = \{p(x) \mid \deg(p) \leq 4\}$, כלומר, W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4 .

ד. W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x .

ה. W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n כאשר $4 \leq n \leq 7$.

ו. $W = \{p(x) \mid p(0) = 1\}$.

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $F[R]$.

א. $W = \{f(x) \mid f(-x) = f(x)\}$ כלומר, לכל x ממשי W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות.

ב. $W = \{f(x) \mid |f(x)| \leq M\}$ כלומר, לכל x ממשי W מורכב מכל הפונקציות החסומות.

ג. W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

ד. W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

ה. W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

ו. $W = \left\{ f(x) \mid \int_0^1 f(x) dx = 4 \right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב $[0, 1]$).

ז. $W = \{f(x) \mid f'(x) = 0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ח. $W = \{f(x) \mid f'(x) = 1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ט. $W = \{f(x) \mid f(x) = f(x+1)\}$.

(5) בדוק האם $W = \{(z_1, z_2, z_3) \mid z_2 = \bar{z}_1, z_3 = z_1 + \bar{z}_1\}$ הוא תת מרחב של C^3 :

א. מעל השדה הממשי R .

ב. מעל שדה המרוכבים C .

צירופים לינאריים, מרחב נפרש, תלות לינארית

(6) נתונים הוקטורים הבאים :

$$u_1 = (4, 1, 1, 5), u_2 = (0, 11, -5, 3), u_3 = (2, -5, 3, 1), u_4 = (1, 3, -1, 2)$$

א. 1. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?2. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_4\}$ תלוייה לינארית ?ב. 1. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_3\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה

כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

ג. 1. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?3. האם הקבוצה $\{u_1, u_2, u_4\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה

כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

$$d. \text{ נתון } v = (4, 12, k, -2k)$$

1. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?2. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$.3. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהייה תלוייה לינארית.

$$h. \text{ נתון } v = (a, b, c, d)$$

1. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?1. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1, u_2\}$?1. מה התנאים על a, b, c, d על מנת שהקבוצה $\{u_1, u_2, v\}$ תהייה תלוייה לינארית ?

$$ו. \text{ הבע את הוקטור } (2, -3, 3, 1) \text{ כצירוף לינארי של } u_1, u_2 \text{ ו- } u_3.$$

בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

ז. הבע את הוקטור $(7, 10, -2, 11)$ כצירוף לינארי של u_1, u_2, u_3 ו- u_4 . בכמה אופנים

ניתן לעשות זאת?

(7) נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. בדוק האם המטריצות תלויות לינארית מעל $M_2[R]$.

2. במידה והמטריצות תלויות רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יותר המטריצות.

3. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B, C\}$?

(8) נתונים הפולינומים הבאים:

$$p_1(x) = 4 + x + x^2 + 5x^3, p_2(x) = 11x - 5x^2 + 3x^3,$$

$$p_3(x) = 2 - 5x + 3x^2 + x^3, p_4(x) = 1 + 3x - x^2 + 2x^3$$

1. בדוק האם הפולינומים תלויים לינארית מעל $P_3[R]$.

2. במידה והפולינומים תלויים לינארית רשום כל פולינום כצירוף לינארי של

שאר הפולינומים.

3. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1, p_4\}$?

(9) עהוא איזה ערכים של a, b, c הוקטורים הבאים תלויים לינארית:

$$\{(c, 2, 4), (2, 4, a, 2), (c, b, 6), (b, 2, a)\}$$

(10) נתון כי קבוצת הוקטורים $\{u, v, w\}$ בלתי תלויה לינארית ב- $V[F]$.

בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות לינארית, במידה שכן רשום כל וקטור כצירוף

של הוקטורים האחרים:

$$\text{א. } \{u - v, u - w, u + v - 2w\}$$

$$\text{ב. } \{u + 2v + 3w, 4u + 5v + 6w, 7u + 8v + 9w\}$$

$$\text{ג. } \{u + v, v + w, w\}$$

(11) בדוק האם הוקטורים $\{(1, i, i-1), (i+1, i-1, -2)\}$ תלויים לינארית ב- C^3

א. מעל C . ב. מעל R .

בסיס ומימד

בדיקה האם קבוצת וקטורים מהווה בסיס למרחב

(12) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

$$(1) \{ (1, 0, 1), (0, 0, 1) \}$$

$$(2) \{ (1, 1, 2), (1, 2, 3), (3, 3, 4), (2, 2, 1) \}$$

$$(3) \{ (1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9) \}$$

(13) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2 \times 2}[R]$:

$$(1) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(2) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$$

$$(3) \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(14) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

$$(1) \{ 1+x, x^2+2x+3 \}$$

$$(2) \{ 1+x, x^2+2x+3, 2x+4x^3, x-x^3 \}$$

$$(3) \{ 1+2x+3x^3, 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2 \}$$

(15) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T = \{(1, 2, 3), (4, 5, 6), (7, 8, 9), (2, 3, 4)\}$

א. האם T בסיס ל- R^3 .

ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים בלתי תלויה לינארית ב- T .

ג. השלם את T' לבסיס של

מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית

(16) לפי 3 מערכות של משוואות הומוגניות:

$$\begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ 2x - 2y + 2z + 2w = 0 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x - y + z + w = 0 \\ x + 2z - w = 0 \\ x + y + 3z - 3w = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x + y - z + 2w = 0 \\ 3x - y + 7z + 4w = 0 \\ -5x + 3y - 15z - 6w = 0 \end{cases} \quad (1)$$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (1).

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (2).

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות (3).

א) מצא בסיס וממד ל- U , W ו- V .

ב) 1) מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$. 2) מצא ממד ל- $U \cap V$.

ג) מצא בסיס ל- $U \cap V$.

(17) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid a = c, b = d\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(18) נתון $U = \{(a, b, c, d) \in R^4 \mid c = a + b, d = b + c\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(19) נתון $U = \{v \in R^4 \mid v \cdot (1, -1, 1, -1) = 0\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(20) נתון $U = \{A \in M_{2 \times 2}[R] \mid A = A^T\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(21) נתון $U = \left\{ A \in M_{2 \times 2}[R] \mid A \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

(22) נתון $U = \{p(x) \in P_3[R] \mid p(1) = 0\}$. מצא בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד לתת מרחב

(23) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = \text{span}\{(1, 1, -1, 2), (3, -1, 7, 4), (-5, 3, -15, -6)\}$$

$$V = \text{span}\{(1, -1, 1, 1), (1, 0, 2, -1), (1, 1, 3, -3), (5, 1, 5, 8)\}$$

א. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצא בסיס, ממד ומשוואות ל- V .

ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$.

ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

(24) לפניכם תת מרחב של המרחב $M_{2 \times 2}[R]$:

$$U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

(25) לפניכם תת מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = \text{span}\{1 + x - x^2 + 2x^3, 4 + x - x^2 + x^3, 2 - x + x^2 - 3x^3\}$$

מצא בסיס וממד ל- U .

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

(26) מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצות הבאות וציין את דרגת

המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(1)}$$

וקטורי קואורדינטות, שינוי בסיס(27) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,1,1)\}, \quad B_2 = \{(1,0,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

$$[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} \quad (3) \quad [M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1} \quad (2) \quad [M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2} \quad (1)$$

(27) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1 = \{1+x, x, x+x^2\}, \quad B_2 = \{1+x^2, x+x^2, x^2\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.(28) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B . סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E . סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E . סמן מטריצה זו ב- $[M]_B^E$.

פרק 5 - ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

(1) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות :

- א. מצא מטריצה אופיינית.
- ב. מצא פולינום אופייני.
- ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- ה. מצא וקטורים עצמיים.
- ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה, כלומר מצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
- ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון חשב A^{2009} .
- ט. מצא את הפולינום המינימלי.
- י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (6) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5) \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$F = C, F = R$

$F = C, F = R$

* בסעיפים 5,6 עליך לפתור פעם מעל C ופעם מעל R .

- (2) א. הגדר את המושג דימיון מטריצות.
- ב. ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי :
1. $|A| = |B|$.
 2. $tr(A) = tr(B)$.
 3. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(3) הוכח שאם $P^{-1}AP = B$ אז $A^n = PB^nP^{-1}$.

פרק 6 - וקטורים

הערה: אנו נסמן את הוקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים: $\vec{u}$, $\mathbf{u}$.

את גודל הוקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.

גודל וקטור נקרא גם אורך הוקטור וגם הנורמה של הוקטור.

(1) מצא את x , y ו- z אם נתון ש- $\underline{u} = \underline{v}$ כאשר $\underline{u} = (4, -1, 2)$, $\underline{v} = (z-2, y+1, x-3)$.

(2) נתונים הוקטורים: $\underline{u} = (-3, 1, 4)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$, $\underline{w} = (2, 6, -5)$. חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u} - 2\underline{v}$ ד. $0.25\underline{v} - 0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v} - 0.5\underline{u} + 2\underline{w}$

ו. $2\underline{v} - \underline{u} + 4\underline{w}$ ז. $\underline{u} / |\underline{u}|$ ח. $d(\underline{u}, \underline{v})$ ט. $\underline{v} \cdot \underline{u} + 2\underline{w} \cdot \underline{v}$ י. $\text{proj}(\underline{u}, \underline{v})$

* בסעיפים ז, ח, י הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(3) נתונות הנקודות: $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$. מצא את הוקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$ ב. $2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$ ג. $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$

(4) א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר $x = (1, 2, 3) + t(4, 5, 6)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x , y ו- z .

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות $x = 1 + 2t$, $y = 10$, $z = 4 - t$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(5) נתונות הנקודות $A(1, -3, 0)$, $B(4, 2, -1)$, $C(3, -1, 2)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו- B 2. B ו- C 3. A ו- C

ב. מי מבין הנקודות $D = (4, 2, -1)$ ו- $E(7, 7, -3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת

בסעיף הקודם.

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC .

(6) א. מצא במרחב הצגה פרמטרית של ציר ה- x , ציר ה- y וציר ה- z .

ב. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודה $(4, 5, 6)$ ומקביל לציר z .

(7) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1, 2, 3)$ והמאונך לישר

$\underline{x} = (1, 2, 0) + s(1, -2, 4)$

(8) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר ℓ_2 העובר דרך הנקודה $P(-4,1,1)$, מאונך לישר

$$\ell_1: (2, -3, 1) + t(1, 4, -3) \text{ וחותך אותו.}$$

(9) א. נתונה הצגה פרמטרית של מישור $\underline{x} = (1, -2, 3) + t(2, 0, 1) + s(-4, 1, 5)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x, y, z .

ב. נתונה הצגה של מישור בעזרת קואורדינטות $x = 1 + 2t - s, y = 10 + t, z = 4 - t + s$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(10) א. 1. הראה ששלוש הנקודות $(1, 1, 0), (0, 1, -2), (2, 0, 5)$ אינן נמצאות על ישר אחד ומצא

הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידם.

2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א.

ג. האם הנקודה $(4, 2, 1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א?

(11) נתונות הנקודות: $A(1, 1, 3), B(1, 2, 0), C(1, 1, 1)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של הישר, המחבר את B עם C הראה כי הנקודה A לא נמצאת על

הישר הזה.

ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C .

ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C .

(12) נתונה תיבה $ABCD A' B' C' D'$ כמתואר בציור.

$$\text{נתון: } |AA'| = 6, |AD| = 2, |\overline{AB}| = 4, C'F = FB',$$

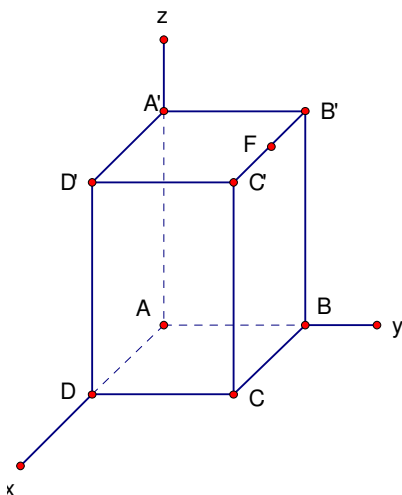
א. מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר

דרך הנקודה F ומאונך למישור העובר

העובר דרך $A'DB$.

ב. מצא את מרחק הנקודה F מהמישור העובר

העובר דרך $A'DB$.



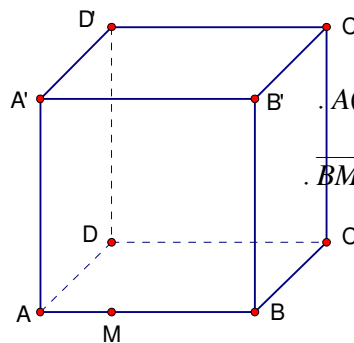
(13) בתיבה $ABCD A' B' C' D'$ נתונים הקודקודים :

$A(7, -9, 5), B(1, -3, -7), C(-5, -1, -3), C'(-1, 7, -1)$

הנקודה M מחלקת את המקצוע AB כך ש- $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MA}$.

א. חשב: $|\overrightarrow{MC}|, |\overrightarrow{MA}|$.

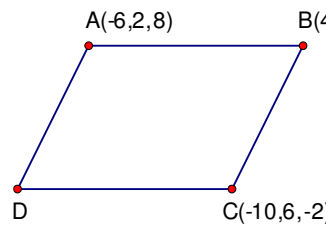
ב. חשב את שטח המשולש $\Delta A' MC$.



(14) נתונה מקבילית $ABCD$ (ראה ציור).

א. מצא את קודקוד D .

ב. מצא את הזווית בין אלכסוניה של המקבילית.



(15) נתונה פירמידה שבסיסה מקבילית $ABCD$

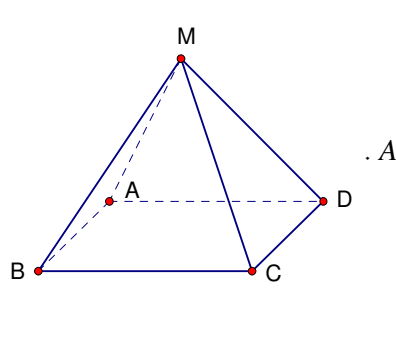
וקודקודה M (ראה ציור). נתון :

$A(3, 6, -1), B(-1, 2, -3), C(7, 6, -3), M(4, -3, -4.5)$

א. מצא את גודל זווית $\angle ABC$.

ב. מצא את שטח בסיס הפירמידה.

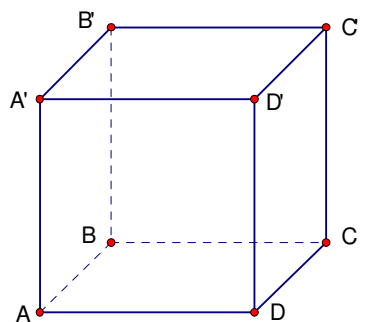
ג. מצא את נפח הפירמידה.



(16) נתונה תיבה $ABCD A' B' C' D'$.

נתון: $A(1, 2, 0), C(4, 0, 1), D(2, 2, -1), B'(9, 12, 8)$

חשב את נפח התיבה.



(17) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם :

נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.

א. $\underline{x} = (1, 0, 1) + t(1, 2, 0)$, $\underline{x} = (1, 1, 0) + s(2, 4, 0)$

ב. $\underline{x} = (-2, 2, 4) + u(6, 6, 1)$, $\underline{x} = (1, -1, 0) + t(12, -3, 1)$

ג. $\underline{x} = (1, 1, 2) + t(1, 2, -1)$, $\underline{x} = (2, 3, 1) + s(2, 4, -2)$

ד. $\underline{x} = (1, -1, 0) + t(0, 2, -4)$, $\underline{x} = (2, 0, 3) + s(-1, -3, 1)$

במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.

במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את המרחק ביניהם.

(18) נתונים שני ישרים :

$$\ell_1 : (x, y, z) = (4, 3, 1) + t(1, -3, 2)$$

$$\ell_2 : (x, y, z) = (5, -1, 4) + m(-1, 3, 5)$$

א. הראה כי הישרים מצטלבים.

ב. מצא משוואה של מישור שמכיל את ℓ_2 ומקביל ל- ℓ_1 .

ג. חשב את המרחק בין הישרים.

(19) נתונים שני ישרים :

$$\ell_1 : (x, y, z) = (3, 1, 1) + u(2, -1, -2)$$

$$\ell_2 : (x, y, z) = (3, 9, -6) + m(6, 2, -1)$$

א. מהו המצב ההדדי של הישרים?

ב. אם הישרים מקבילים או נחתכים, מצא את משוואת המישור המכיל אותם.

אם הישרים מצטלבים מצא את המרחק ביניהם.

(20) נתונות ארבע נקודות: $P(k, 0, 0)$, $Q(0, 4, 0)$, $R(0, k, 3)$, $S(1, 1, -1)$

א. הראה שלא קיים ערך של k עבורו הישרים PQ ו- SR מקבילים.

ב. מצא עבור איזה ערך של k הישרים אורתוגונליים (מאונכים) זה לזה,

ומצא את המרחק ביניהם במקרה זה.

(21) הישר ℓ_1 עובר דרך הנקודות $(6,1,3)$ ו- $(5,2,3)$.

הצגה פרמטרית של הישר ℓ_2 היא: $(2, k+1, 3) + t(k^2 - 9, -7, 0)$: ℓ_2 .

א. עבור איזה ערך של k הישרים מקבילים (לא מתלכדים)?

2. עבור איזה ערך של k הישרים מתלכדים?

ב. מצא משוואה של מישור π , המכיל את הישר ℓ_1 ומקביל לציר ה- z .

ג. עבור k שמצאת בתת סעיף א.1, מצא את המרחק של ℓ_2 מהמישור π .

(22) נתונות ארבע נקודות: $A(1,1,-1)$, $B(-1,k,3)$, $C(0,-4,0)$, $D(k,0,0)$

הישר ℓ_1 מחבר את הנקודה A עם הנקודה B .

הישר ℓ_2 מחבר את הנקודה C עם הנקודה D .

א. מצא עבור איזה ערך של k הישרים מאונכים זה לזה.

ב. עבור הערך של k שמצאת בסעיף א., מצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1

ומקביל לישר ℓ_2 .

(23) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר:

חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.

א. $2x - 3y + 4z - 5 = 0$, $\underline{x} = (1, 0, 2) + t(-1, 2, 2)$.

ב. $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $\underline{x} = (-3, 0, 4) + t(4, -2, -6)$.

ג. $2x - 14y + 10z = -6$, $\underline{x} = (2, 1, -2) + t(-2, 2, 0)$.

במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר

למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

(24) ידוע כי הישר ℓ עובר דרך הנקודות $A(4,-6,5)$ ו- $B(4+k,3,2)$

ונתון מישור $\pi: x - 4y - kz - 5 = 0$.

א. עבור איזה ערך של k הישר מקביל למישור?

ב. המישור π חותך את ציר ה- x בנקודה C .

עבור k שמצאת בסעיף א, חשב את הזווית בין המישור π לבין $\overline{BC}$.

(25) נתונים ישר: $\ell: (2, 1, -1) + t(0, a, -1)$ ומישור: $\pi: x - 2y - 4z = 4$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a יהיה הישר מוכל במישור?

ב. מצא משוואה של מישור המכיל את הישר ℓ ומאונך למישור π .

(26) נתונים שני ישרים ומישור:

$$\ell_1: (x, y, z) = (2, 1, 1) + t(1, -1, -1)$$

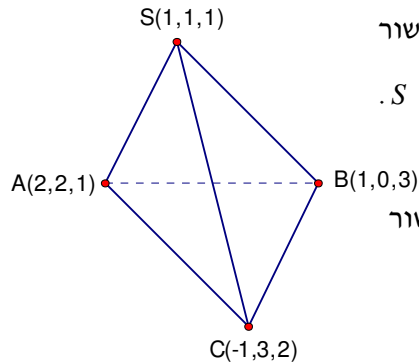
$$\ell_2: (x, y, z) = (3, -1, 2) + s(-2, 1, 1)$$

$$\pi: x - y + 2z = 3$$

א. קבע את המצב ההדדי בין כל אחד מהישרים למישור.

ב. מצא את הנקודות על הישר ℓ_2 שמרחקן מראשית הצירים הוא $\sqrt{18}$.

(27) בצויר משמאל נתון טטראדר $SABC$.



א. הוכח כי אחד המקצועות דרך S , ניצב למישור

הנקבע על-ידי שני המקצועות האחרים דרך S .

ב. מצא את משוואות המישור הנ"ל.

ג. חשב את הזווית שבין המקצוע AC לבין מישור

המשולש $\triangle SAB$.

(28) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם:

מקבילים, מתלכדים או נחתכים.

א. $x - 2y + 2z - 10 = 0$, $2x + y + 2z - 4 = 0$

ב. $2x - 5y + 3z - 6 = 0$, $4x - 10y + 6z - 8 = 0$

ג. $2x - 14y + 10z = -6$, $x - 7y + 5z = -3$

במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם. במקרה בו הם נחתכים מצא את

הזווית ביניהם ואת הישר החיתוך ביניהם.

(29) א. נתונים שני מישורים: $x + 2y - z = 7$, $2x + 3y - 4z = 10$

מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך ℓ_1 של שני המישורים.

ב. נתון: $\ell_2: (6, 2, -2) + s(2, -1, 1)$. מהו המצב ההדדי בין ℓ_1 ו- ℓ_2 .

(30) נתונים שני מישורים: $x - y + 2z - 7 = 0$, $2x + y - 3z + 1 = 0$

א. מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך ℓ של שני המישורים.

ב. עבור איזה ערך של הפרמטר C , יקביל הישר ℓ למישור $\pi: 4x - y + Cz - 1 = 0$?

ג. עבור C שמצאת בסעיף ב, חשב את מרחק הישר ℓ מהמישור π .

(31) נתונים שני מישורים: $x + y + 2z = 6$, $x - 3y + 4z = -10$ ונקודה $M(1, 8, -3)$.

הישר ℓ הוא ישר החיתוך של המישורים הנ"ל.

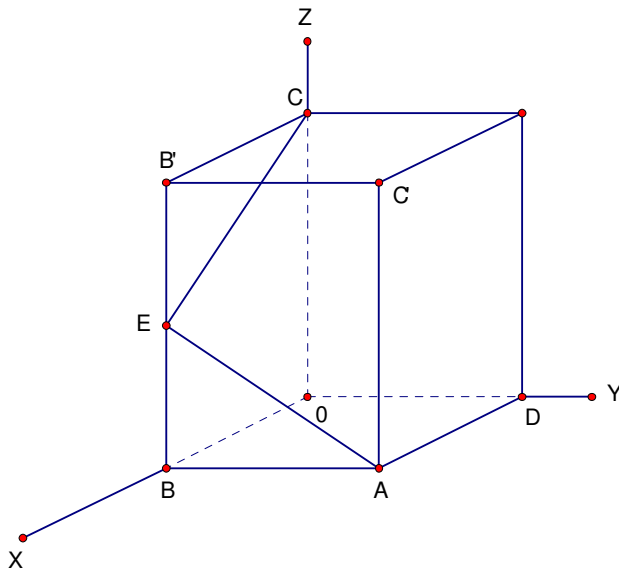
א. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה M וניצב לישר ℓ .

ב. מצא את מרחק הנקודה M מהישר ℓ .

(32) הישר $\ell: (0, -2, 1) + t(-3, 4, m)$ מקביל למישור $\pi_1: x - 2y - 4z = 4$

א. מצא את הקבוע m .

ב. הנקודה $N(2, -1, 4)$ נמצאת על המישור π_1 ויוצרת עם הישר ℓ מישור π_2 .

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישורים π_1 ו- π_2 .

(33) אחד מקודקודי קוביה נמצא

בראשית הצירים.

. $|AB|=1$, BB' אמצע E

א. חשב את CEA זווית $\angle$.

ב. חשב את הזווית בין שני

המישורים AEC ו- $BODA$.

(34) נתונים שני ישרים :

$$\ell_1 : (1, 2, 3) + t(3, -12, 18)$$

$$\ell_7 : (2, 5, -1) + u(-4, 16, -24)$$

א. הראה כי הישרים קובעים מישור יחיד ומצא את משוואתו.

ב. מצא משוואת מישור, המקביל למישור שמצאת ב-א, ועובר דרך הנקודה $(0, -1, 0)$.

פתרונות - פרק 6

לתשומת לבכם!

הצגה פרמטרית של ישר (או מישור) היא לא יחידה. ייתכן למשל, שהישר הפרמטרי שאתם תקבלו "ייראה" שונה מהישר שאני קיבלתי. בכל אופן אם תבצעו בדיקה תוכלו לראות שהם מתלכדים.

$$(1) \quad x = 5, y = -2, z = 6$$

$$(2) \quad \begin{array}{llll} \text{א. } (-6, 2, 8) & \text{ב. } (-2, 1, 3) & \text{ג. } (-17, 7, 24) & \text{ד. } (2.5, -1, -3.5) \\ \text{ה. } (9.5, 9.5, -18) & \text{ו. } (19, 19, -36) & \text{ז. } \frac{1}{\sqrt{26}}(-3, 1, 4) & \text{ח. } 12.5698 \\ \text{ט. } 14 & \text{י. } \left(-\frac{19}{7}, \frac{19}{14}, \frac{57}{14}\right) & & \end{array}$$

$$(3) \quad \begin{array}{lll} \text{א. } (5, 7, 1) & \text{ב. } (-8, -16, 8) & \text{ג. } (8, 12, 0) \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } x = 1 + 4t, y = 2 + 5t, z = 3 + 6t & \text{ב. } \underline{x} = (1, 10, 4) + t(2, 0, -1) \end{array}$$

$$(5) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } (1, -3, 0) + t(3, 5, -1) & \text{א. } (4, 2, -1) + t(-1, -3, 3) \\ \text{א. } (1, -3, 0) + t(2, 2, 2) & \text{ב. הנקודה } D \\ \text{ג. } 35.477^\circ & \end{array}$$

$$(6) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } t(0, 0, 1), t(0, 1, 0), t(1, 0, 0) & \text{ב. } (4, 5, 6) + t(0, 0, 1) \end{array}$$

$$(7) \quad (1, 2, 3) + t(2, 1, 0)$$

$$(8) \quad (-4, 1, 1) + t(83, -32, -15)$$

$$(9) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } x = 1 + 2t - 4s, y = -2 + s, z = 3 + t + 5s & \text{ב. } (1, 10, 4) + t(2, 1, -1) + s(-1, 0, 1) \end{array}$$

$$(10) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } (1, 1, 0) + t(-1, 0, -2) + s(1, -1, 5) & \text{א. } -2x + 3y + z - 1 = 0 \\ \text{ב. למשל: } (0, 0, 1), (-0.5, 0, 0) & \text{ג. לא} \end{array}$$

$$(11) \quad \begin{array}{lll} \text{א. } (1, 2, 0) + t(0, -1, 1) & \text{ב. } 1.4142 & \text{ג. } y - z + 2 = 0 \end{array}$$

$$(12) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } (1, 4, 6) + t(6, 3, 2) & \text{ב. } \frac{18}{7} \end{array}$$

$$(13) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } |\overline{MC}| = \sqrt{152}, |\overline{MA'}| = \sqrt{108} & \text{ב. } 59.396 \end{array}$$

$$(14) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } D(-20, 8, 12) & \text{ב. } 81.62^\circ \end{array}$$

$$(15) \quad \begin{array}{lll} \text{א. } 26.565^\circ & \text{ב. } S = 24 & \text{ג. } V = 32 \end{array}$$

$$(16) \quad V = 72$$

$$(17) \quad \begin{array}{lll} \text{א. מקבילים, } 1.095 & \text{ב. מצטלבים, } 4.07 & \text{ג. מתלכדים} \\ \text{ד. נחתכים בנקודה } (1, -3, 4). \text{ זווית בין הישרים } 47.6^\circ. \end{array}$$

$$(18) \quad \begin{array}{ll} \text{א. } 3x + y = 14 & \text{ג. } 0.31622 \end{array}$$

- (19) א. מצטלבים ב. 10
- (20) ב. $d = \frac{2}{15}, k = 0.8$
- (21) א. 1. $k = -4$ א. 2. $k = 4$ ב. $x + y = 7$ ג. 5.65685
- (22) א. $k = 2$ ב. $8x - 4y + 5z + 1 = 0$
- (23) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל ג. חותך בנקי $(3.5, -0.5, -2)$, זווית בין הישר למישור 40.78°
- (24) א. $k = 9$ ב. 14.67°
- (25) א. $a = 2$ ב. $10x + y + 2z - 19 = 0$
- (26) א. ℓ_1 מוכל, ℓ_2 חותך. ב. $(-1, 1, 4), (\frac{11}{3}, \frac{-4}{3}, \frac{5}{3})$
- (27) א. $SC \perp SAB$ ב. $2x - 2y - z + 1 = 0$ ג. 64.76°
- (28) א. המישורים נחתכים. ישר החיתוך: $(0, -2, 3) + t(3, -1, -2.5)$. זווית 63.612° .
ב. המישורים מקבילים, המרחק ביניהם: 0.324 ג. המישורים מתלכדים.
- (29) א. $(9, 0, 2) + t(-5, 2, -1)$ ב. מצטלבים
- (30) א. $(2, -5, 0) + t(1, 7, 3)$ ב. $C = 1$ ג. 2.8284
- (31) א. $5x - y - 2z = 3$ ב. 5.07
- (32) א. $m = -8$ ב. $(2, -1, 4) + t(-4, 4, -8)$
- (33) א. 78.463° ב. 35.26°
- (34) א. $2x - 10y - 7z + 39 = 0$ ב. $2x - 10y - 7z - 10 = 0$

פרק 7- וקטורים גיאומטריים



$$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$$

וקטורים מקבילים ווקטורים שווים

- וקטורים שווים הם וקטורים שזהים גם בכיוונם וגם בגודלם.
- וקטורים מקבילים הם וקטורים שזהים בכיוונם אך לא בהכרח בגודלם.
- במקרה זה ניתן להביע את האחד באמצעות השני על ידי כפל בסקלר.
- וקטורים מקבילים נקראים גם "וקטורים תלויים ליניארית".

- אם הוקטורים $\overrightarrow{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a \underline{u} + b \underline{v} + c \underline{w}$ מקבילים מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$

וקטורים הפורשים מישור

כל שני וקטורים שאינם מקבילים, כלומר שהם בלתי תלויים, פורשים מישור.

קומבינציה ליניארית

- כל וקטור שנמצא במישור (או שמקביל למישור) ניתן להצגה כקומבינציה ליניארית של שני הוקטורים הפורשים את המישור.
- כל וקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני וקטורים הפורשים את מישור, מקביל למישור.
- אם ניתן להביע וקטור כקומבינציה ליניארית של שני וקטורים אחרים (או יותר) שלושת הוקטורים נקראים תלויים ליניארית.

המכפלה הסקלרית

המכפלה הסקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מסומנת $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ומחושבת על פי הנוסחה:

$$\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} \quad \text{או} \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2} \quad , \quad \underline{u}^2 = |\underline{u}|^2 \quad \text{גודל של וקטור:}$$

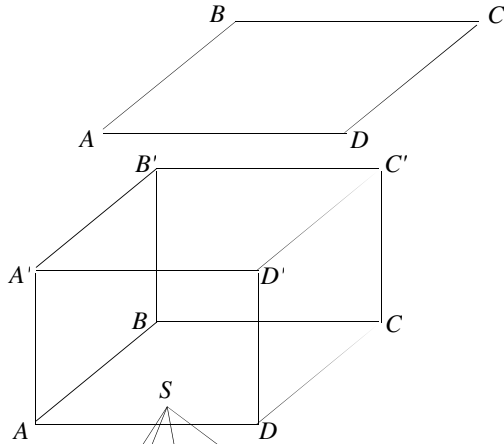
לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהו וקטור, הצגה גיאומטרית של וקטור, סימון של וקטור ושל גודלו של וקטור
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4		הכרת הגופים השונים במרחב
סרטון 5	תרגיל 3	
סרטון 6		מהו סקלר, כפל וקטור בסקלר
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8		חיבור וחסור וקטורים
סרטון 9	תרגיל 5	
סרטון 10	תרגיל 6	
סרטון 11	תרגיל 7	חלוקת קטע ביחס נתון
סרטון 12	תרגיל 8	
סרטון 13	תרגיל 9	
סרטון 14	תרגיל 10	

	תרגיל 11	סרמון 15
	תרגיל 12	סרמון 16
וקטורים מקבילים ווקטורים שווים 'א'		סרמון 17
	תרגיל 13	סרמון 18
וקטורים מקבילים ווקטורים שווים 'ב'		סרמון 19
	תרגיל 14	סרמון 20
	תרגיל 15	סרמון 21
וקטורים הפורשים מישור, קומבינציה ליניארית		סרמון 22
	תרגיל 16	סרמון 23
	תרגיל 17	סרמון 24
יחידות ההצגה		סרמון 25
	תרגיל 18	סרמון 26
	תרגיל 19	סרמון 27
	תרגיל 20 'א'	סרמון 28
	תרגיל 20 'ב'	סרמון 29
	תרגיל 21 'א' 'ב'	סרמון 30
	תרגיל 21 ג'	סרמון 31
המכפלה הסקלרית		סרמון 32
	תרגיל 22	סרמון 33
	תרגיל 23	סרמון 34
חישוב גודל של וקטור		סרמון 35
	תרגיל 24	סרמון 36
	תרגיל 25	סרמון 37
	תרגיל 26	סרמון 38
	תרגיל 27	סרמון 39
	תרגיל 28	סרמון 40
	תרגיל 29	סרמון 41
	תרגיל 30 'א'	סרמון 42
	תרגיל 30 'ב', 'ג'	סרמון 43
דרך 'א'	תרגיל 31	סרמון 44
דרך 'ב'	תרגיל 31	סרמון 45
	תרגיל 32	סרמון 46
	תרגיל 33	סרמון 47
	תרגיל 34	סרמון 48
	תרגיל 35	סרמון 49
	תרגיל 36	סרמון 50
	תרגיל 37 'א'	סרמון 51
	תרגיל 37 'ב'	סרמון 52
	תרגיל 37 ג'	סרמון 53
	תרגיל 38	סרמון 54
	תרגיל 39	סרמון 55
	תרגיל 40	סרמון 56

תרגילים:

1. במקבילית $ABCD$ נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$. מצא את כל הוקטורים במקבילית ששווים ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.

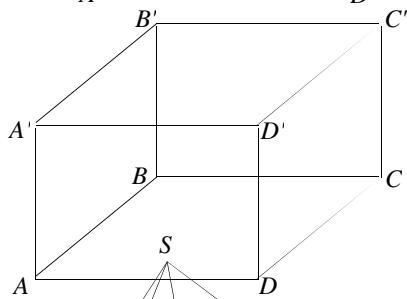


2. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון:

$$\overrightarrow{AB} = \underline{u}, \overrightarrow{AD} = \underline{v}, \overrightarrow{AA'} = \underline{w}$$

מצא את כל הוקטורים בתיבה

שווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.

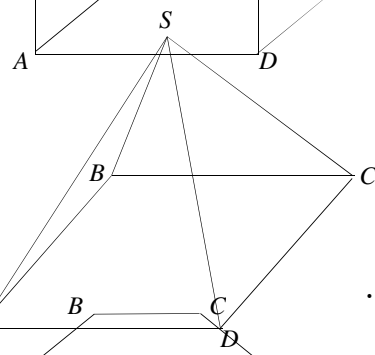


3. בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע

$$\text{נתון: } \overrightarrow{AB} = \underline{u}, \overrightarrow{AD} = \underline{v}, \overrightarrow{AS} = \underline{w}$$

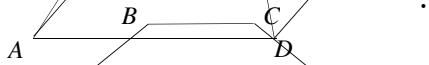
מצא את כל הוקטורים בפירמידה

שווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



4. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$

מצא את כל הוקטורים במרפז שניתן להביעם באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



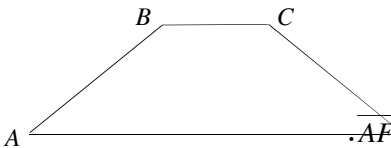
5. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD . הבע

באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הוקטור $\overrightarrow{BE}$.

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD . הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הוקטור $\overrightarrow{AF}$.



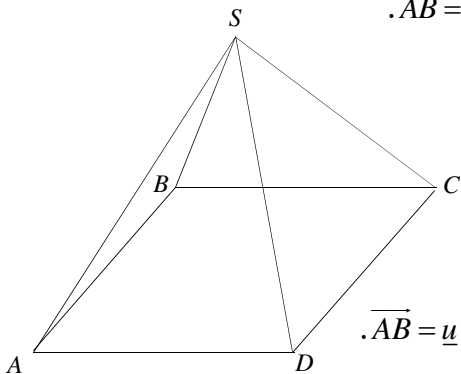
6. בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD .

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את

הוקטור $\overrightarrow{BN}$.



7. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP : PB = 2 : 3$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

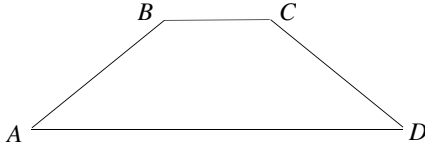
8. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP : PB = 3 : 5$. נתון: $\overrightarrow{AP} = \underline{u}$

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AB}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

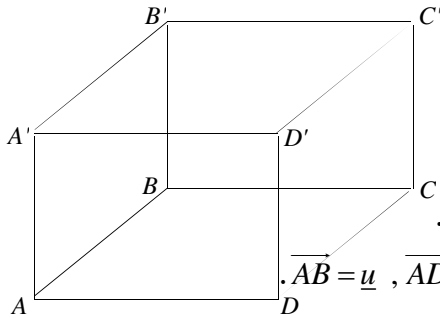
9. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB} = \alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

10. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB} = \alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

11. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הנקודה F נמצאת על הצלע CD ומקיימת $\frac{DF}{FC} = \beta$.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הוקטור $\overrightarrow{AF}$.

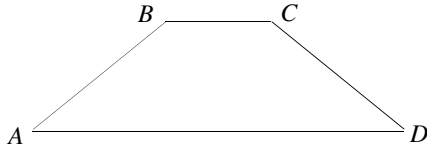


12. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$ והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.



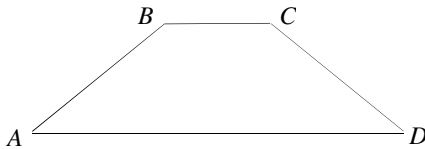
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הוקטור $\overrightarrow{PQ}$.

13. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD .



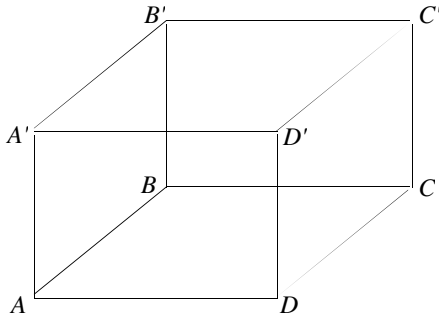
הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת $\frac{AF}{FD} = \alpha$.
מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AB}$.

14. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD .



הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת $\frac{AF}{FD} = \alpha$.
מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AC}$.

15. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$ ומקיימת $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$ והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.



הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הוקטור $\overrightarrow{PQ}$.

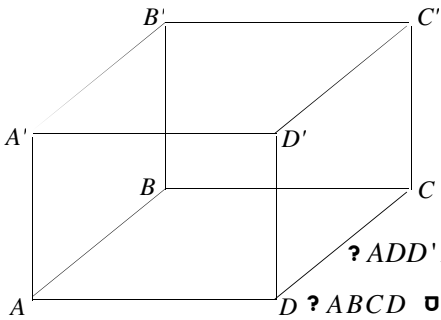
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הוקטור $\overrightarrow{PQ}$.
ב. האם קיימים ערכי α ו- β שעבורם $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$? נמק.
ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $ABB'A'$. מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{EC}$.

16. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$

ומקיימת $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$ והנקודה Q נמצאת על

המקצוע CC' ומקיימת $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.



א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- α את הוקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שעבורו הוקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה $ADD'A'$?

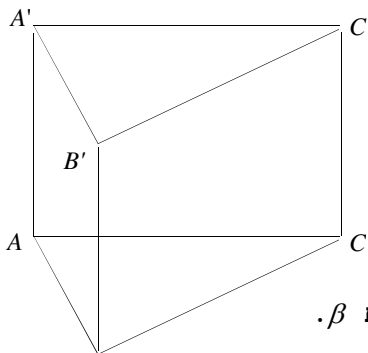
ג. האם קיים ערך של β שעבורו הוקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס $ABCD$?

17. נתונה מנסרה משולשת $ABCA'B'C'$ ובה נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה M נמצאת על המקצוע $A'C'$

ומקיימת $\frac{A'M}{MC'} = \alpha$ והנקודה N נמצאת על

המקצוע BC ומקיימת $\frac{BN}{BC} = \beta$.



א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- α את הוקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שעבורו הוקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה $ACC'A'$?

ג. נתון כי הוקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה $ABB'A'$. הבע את α באמצעות β .

18. במשולש $\triangle ABC$ הנקודה D היא אמצע הצלע BC

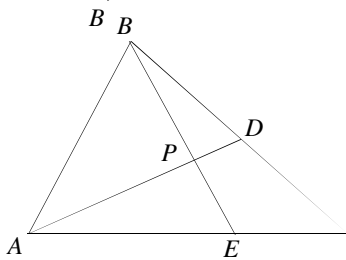
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{EC} = 2$.

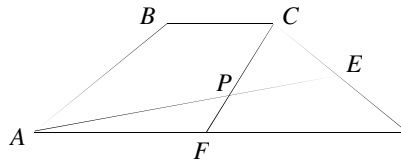
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו- BE .

נגדיר: $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP} = s \cdot \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

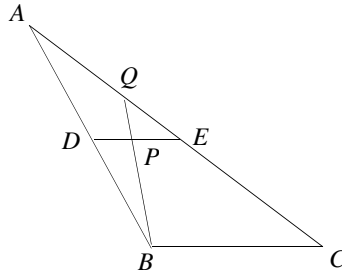
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- s את הוקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE .



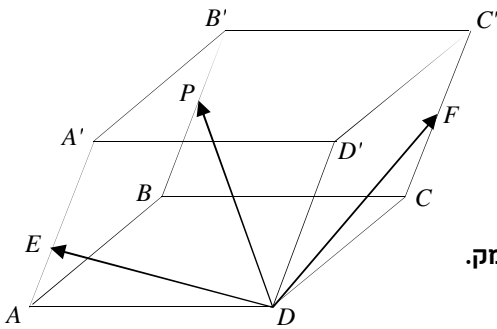


19. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$. הנקודה E נמצאת באמצע הצלע BC והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD . הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו- CF . מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF .



20. במשולש $\triangle ABC$ הנקודה D היא אמצע הצלע AB והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$. הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP חותך את הצלע AC בנקודה Q .
א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC .

ב. חשב את היחס $\frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle DPB}}$.



21. במקבילון $ABCD A' B' C' D'$ נתון: $\overline{DA} = \underline{u}$, $\overline{DC} = \underline{v}$, $\overline{DD'} = \underline{w}$. הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC' , הנקודה E נמצאת על המקצוע AA' ומקיימת $A'E = 2EA$ והנקודה P נמצאת על המקצוע BB' ומקיימת $\overline{B'P} = k \cdot \overline{B'B}$. נתון: $\overline{DP} = t \cdot \overline{DE} + s \cdot \overline{DF}$.
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, ו- $\underline{w}$ את הוקטור $\overline{DP}$.
ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB' .
ג. האם הנקודות D , E , F ו- P נמצאות על אותו מישור? נמק.

22. חשב את המכפלה הסקלרית של הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית ביניהם:

- א. $\alpha = 60^\circ$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 3$
ב. $\alpha = 120^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 4$
ג. $\alpha = 30^\circ$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 2$
ד. $\alpha = 180^\circ$, $|\underline{v}| = 3$, $|\underline{u}| = 8$
ה. $\alpha = 0^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 3$
ו. $\alpha = 90^\circ$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 7$

23. חשב את הזווית בין הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

- א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 6$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 3$
ב. $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 4$
ג. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 9$
ד. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 2$

24. נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכיהם: $|\underline{u}| = 6$, $|\underline{v}| = 3$. הזווית ביניהם היא 120° .

חשב את גודלו של הוקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$.

25. נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכיהם: $|\underline{u}| = 4$, $|\underline{v}| = 5$.

חשב את גודלו של הוקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v}$.

26. נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכיהם: $|\underline{u}| = 6$, $|\underline{v}| = 3$. הזווית ביניהם היא 120° .

חשב את גודל הזווית $\angle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$, $\overrightarrow{PM} = 4\underline{u} + \underline{v}$.

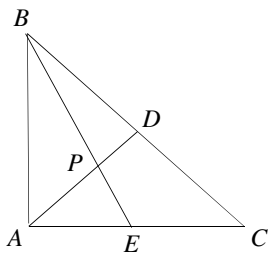
27. המשולש $\triangle ABC$ הוא משולש ישר זווית ($\angle BAC = 90^\circ$).

הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC .

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו- BE .

נתון: $AC = 12$, $AB = 8$, $\frac{AP}{PD} = 3$.

חשב את גודל הזווית $\angle DPC$.



28. נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה

צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6.

גובה המנסרה הוא 8.

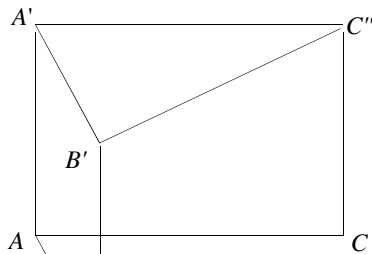
הנקודה M היא אמצע המקצוע $A'C'$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC

ומקיימת $BN = 2NC$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

חשב את גודל הזווית $\angle MAN$.



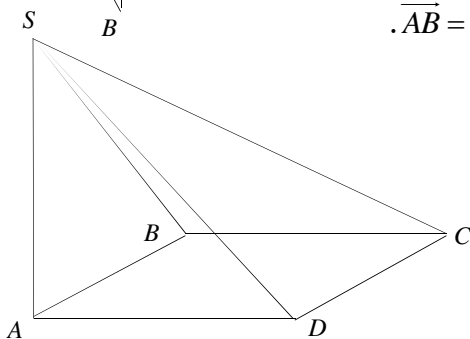
29. בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.

נתון: $AB = AD = \frac{1}{2}AS = k$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

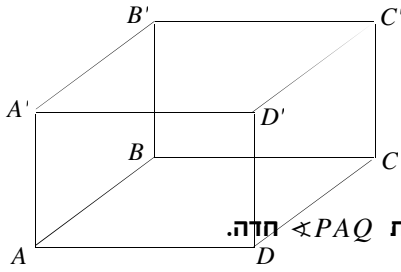
הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P

היא אמצע המקצוע SB .

חשב את גודל הזווית $\angle PAQ$.



30. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overline{AA'} = \underline{w}$, $\overline{AD} = \underline{v}$, $\overline{AB} = \underline{u}$, $AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AD = AA'$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$

ומקיימת $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$ והנקודה Q היא

אמצע המקצוע DD' .

א. מהו ערכו של α שעבורו מתקיים $|\overline{AP}| = \frac{5}{6} |\overline{AQ}|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos \angle PAQ$ והראה כי לכל ערך של α הזווית $\angle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שעבורו הזווית $\angle PAQ$ מקיימת $\cos \angle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$?

31. הוכח כי בכל מרובע $ABCD$ מתקיים: $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}$.

32. נתון מלבן $ABCD$. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$.

33. נתון ריבוע $ABCD$. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD

הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD} = \overline{AP} \cdot \overline{AQ}$.

34. נתון מרובע $ABCD$. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע

CD . הוכח כי מתקיים: $\overline{PQ} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$.

35. נתונה פירמידה משולשת $SABC$ שבה $\overline{AS} \perp \overline{BC}$ ו- $\overline{BS} \perp \overline{AC}$. הוכח: $\overline{CS} \perp \overline{AB}$.

36. הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הוקטורים במישור.

37. א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש $\triangle ABC$.

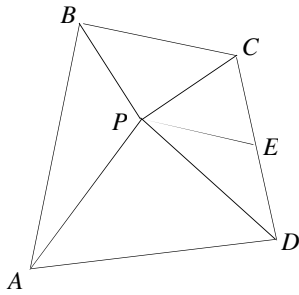
$$\text{הוכח: } \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$$

ב. נתונה פירמידה משולשת $SABC$. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC .

$$\text{הוכח: } \vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AS})$$

ג. נתון בנוסף כי $\vec{AS}$ ו- $\vec{AP}$ מאונכים ל- $\vec{BC}$.

הוכח כי $AB = AC$ (הדרכה: סמן $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$).



38. הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו $ABCD$

כך שהמשולשים $\triangle APD$ ו- $\triangle BPC$ הם משולשים

ישרי זווית ושווי שוקיים $\{AP = PD, BP = PC\}$.

הנקודה E היא אמצע הצלע CD .

הוכח: $\vec{PE} \perp \vec{AB}$

(הדרכה: סמן $\vec{PB} = \underline{a}$, $\vec{PC} = \underline{b}$, $\vec{PA} = \underline{c}$, $\vec{PD} = \underline{d}$).

39. במטראדר $SABC$ נתון: $\vec{AB} = \underline{u}$, $\vec{AC} = \underline{v}$, $\vec{AS} = \underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\vec{AP} = \alpha \cdot \vec{AS}$.

הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\vec{SQ} = \beta \cdot (\vec{SB} + \vec{SC})$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שעבורו $\vec{PQ}$ מקביל למישור ABC .

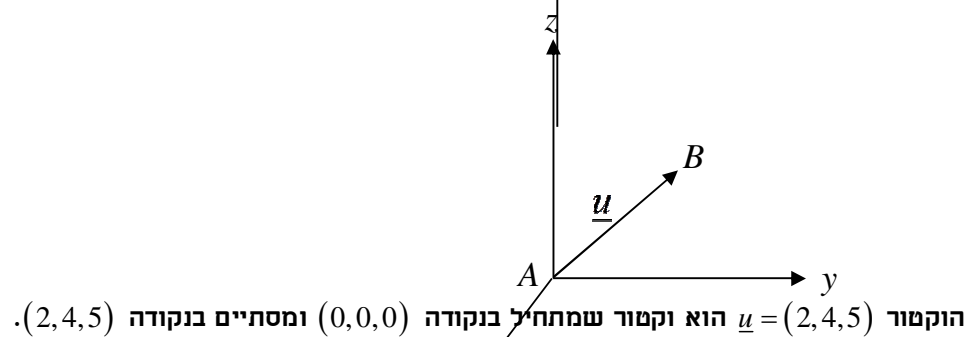
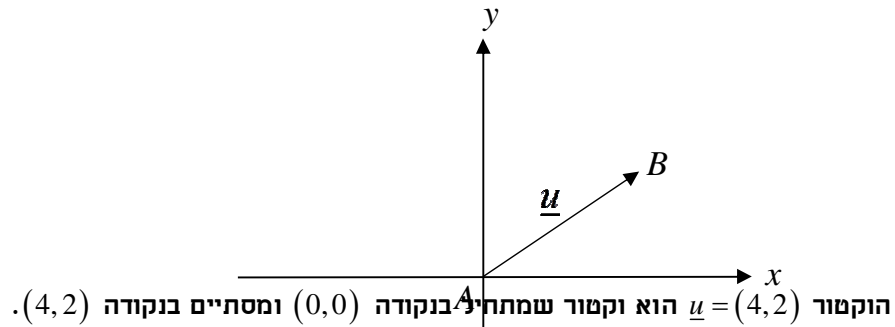
ב. נתון: $\vec{PQ} \perp \vec{BC}$, $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$.

הוכח: $AB = AC$.

40. נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה מקצועות צדדיים בה שווים אז גם

המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

פרק 8 - וקטורים אלגבריים



אמצע קטע

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

חלוקת קטע ביחס נתון

$$x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k + l}, \quad y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k + l}, \quad z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k + l}$$

מכפלה סקלרית

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha \quad : \underline{v} \text{ ו- } \underline{u} \text{ נוסחת המכפלה הסקלרית של שני וקטורים}$$

גודל של וקטור

$$|\underline{u}| = \sqrt{u^2} \quad \left| \underline{u} \right| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

וקטורים מקבילים ווקטורים שווים

וקטורים שווים הם וקטורים שזהים גם בכיוונם וגם בגודלם.
 וקטורים מקבילים הם וקטורים שזהים בכיוונם אך לא בהכרח בגודלם.
 במקרה זה ניתן להביע את האחד באמצעות השני על ידי כפל בסקלר.
 וקטורים (אלגבריים) שנשמר אותו יחס בין שיעוריהם מקבילים זה לזה.

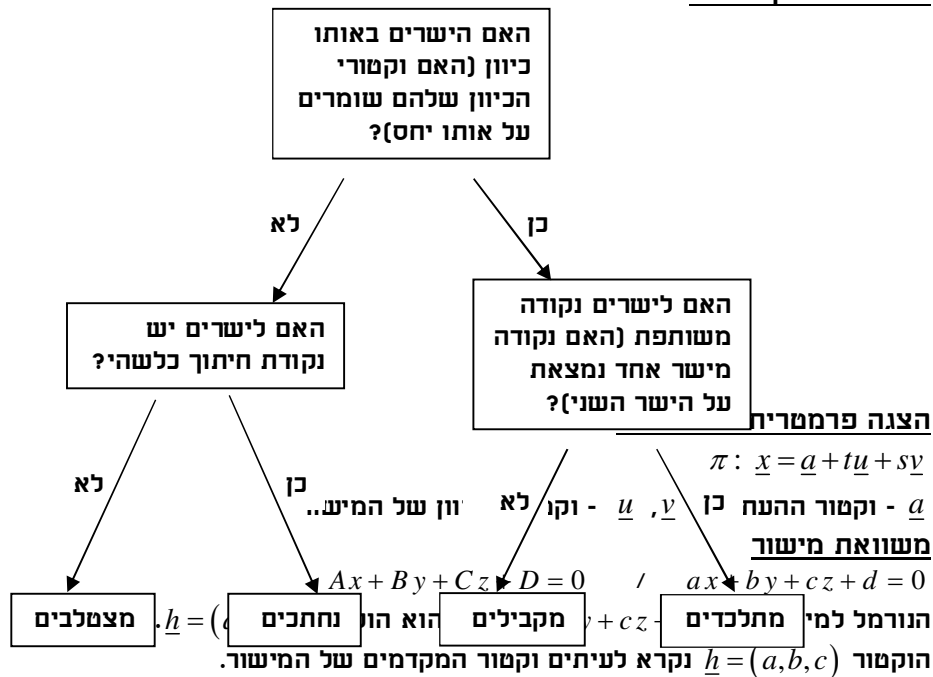
חישוב זווית בין וקטורים בעזרת המכפלה הסקלרית

$$\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

הצגה פרמטרית של ישר

$$\ell: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$$

$\underline{a}$ - וקטור ההעתקה, $\underline{u}$ - וקטור הכיוון של הישר

מצב הדדי בין ישרים

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
אחרת	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$

זוויות

בין וקטורים - $\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$

בין ישרים - $\cos \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$ ($\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ הם וקטורי הכיוון של הישרים)

בין ישר למישור - $\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{h}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|}$ ($\underline{u}$ הוא וקטור הכיוון של הישר ו- $\underline{h}$ הוא הנורמל למישור)

בין מישורים - $\cos \alpha = \frac{|\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2|}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|}$ ($\underline{h}_1$ ו- $\underline{h}_2$ הם הנורמלים של שני המישורים)

מרחקים

1. בין נקודות – גודל וקטור או על פי הנוסחה: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

2. בין נקודה לישר – ניסוח האנך מהנקודה לישר והשוואת מכפלתו בוקטור הכיוון לאפס

3. בין נקודה למישור – על פי הנוסחה: $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$

4. בין ישרים מקבילים – שימוש בנקודה מאחד הישרים ואז כמו 2

5. בין ישר ומישור (מקבילים) – שימוש בנקודה מהישר ואז כמו 3

6. בין מישורים מקבילים – שימוש בנקודה מאחד המישורים ואז כמו 3 או על פי הנוסחה:

$$d = \left| \frac{D_1 - D_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

7. בין ישרים מצטלבים – ניסוח מישור שמכיל את אחד הישרים ומקביל לשני ואז כמו 5

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הכרת הוקטור האלגברי (בדו מימד)
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3		הכרת מערכת הצירים התלת מימדית והוקטור האלגברי בתלת מימד
סרטון 4	תרגיל 2	
סרטון 5		מערכת הצירים התלת מימדית – המשך
סרטון 6	תרגיל 3	הסבר על אמצע קטע בתלת מימד
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8	תרגיל 5	הסבר על חלוקת קטע ביחס נתון בתלת מימד
סרטון 9		חישוב וקטור שמוצאו לא בראשית הצירים
סרטון 10	תרגיל 6	
סרטון 11	תרגיל 7	
סרטון 12	תרגיל 8	
סרטון 13	תרגיל 9	
סרטון 14	תרגיל 10	פעולות חשבון בוקטורים אלגבריים (חיבור, חיסור, כפל בסקלר, מכפלה סקלרית)
סרטון 15		חישוב וקטור שמוצאו לא בראשית שצירים – המשך
סרטון 16	תרגיל 11	הסבר על חישוב גודל של וקטור
סרטון 17	תרגיל 12	
סרטון 18		וקטורים מקבילים ווקטורים ישירים
סרטון 19	תרגיל 13	
סרטון 20	תרגיל 14	הסבר על חישוב זווית בין וקטורים
סרטון 21	תרגיל 15	
סרטון 22	תרגיל 16	
סרטון 23	תרגיל 17	
סרטון 24		הצגה פרמטרית של ישר
סרטון 25	תרגיל 18	
סרטון 26	תרגיל 19	
סרטון 27	תרגיל 20	
סרטון 28	תרגיל 21	
סרטון 29	תרגיל 22	
סרטון 30	תרגיל 23	
סרטון 31	תרגיל 24	
סרטון 32	תרגיל 25	

האפשרויות של מצב הדדי בין ישרים		סרטון 33
זיהוי המצב ההדדי בין שני ישרים		סרטון 34
	תרגיל 26	סרטון 35
	תרגיל 27	סרטון 36
	תרגיל 28	סרטון 37
	תרגיל 29	סרטון 38
	תרגיל 30	סרטון 39
	תרגיל 31	סרטון 40
	תרגיל 32	סרטון 41
	תרגיל 33	סרטון 42
הצגה פרמטרית של מישור		סרטון 43
	תרגיל 34	סרטון 44
	תרגיל 35	סרטון 45
	תרגיל 36	סרטון 46
	תרגיל 37	סרטון 47
	תרגיל 38	סרטון 48
	תרגיל 39	סרטון 49
משוואת מישור		סרטון 50
	תרגיל 40	סרטון 51
	תרגיל 41	סרטון 52
	תרגיל 42	סרטון 53
	תרגיל 43	סרטון 54
מעבר ממשוואת מישור להצגה פרמטרית של מישור	תרגיל 44	סרטון 55
	תרגיל 45	סרטון 56
מעבר מהצגה פרמטרית של מישור למשוואת מישור – הכרת הנורמל למישור		סרטון 57
כיצד עוברים מהצגה פרמטרית של מישור למשוואת מישור	תרגיל 46	סרטון 58
	תרגיל 47	סרטון 59
שיטה נוספת למציאת משוואת מישור – באמצעות 3 נקודות שעל המישור	תרגיל 48	סרטון 60
מעבר מהצגה פרמטרית של מישור למשוואת מישור באמצעות מכפלה וקטורית		סרטון 61
מעבר מהצגה פרמטרית של מישור למשוואת מישור באמצעות מכפלה וקטורית – המשך 1		סרטון 62
מעבר מהצגה פרמטרית של מישור למשוואת מישור באמצעות מכפלה וקטורית – המשך 2		סרטון 63
	תרגיל 49	סרטון 64
	תרגיל 50	סרטון 65
	תרגיל 51	סרטון 66
מישורים מיוחדים		סרטון 67
	תרגיל 52	סרטון 68
	תרגיל 53	סרטון 69
מצב הדדי בין ישר למישור	תרגיל 54	סרטון 70
	תרגיל 55	סרטון 71
	תרגיל 56	סרטון 72
	תרגיל 57	סרטון 73
	תרגיל 58	סרטון 74
	תרגיל 59	סרטון 75
מצב הדדי בין מישורים		סרטון 76
	תרגיל 60	סרטון 77
	תרגיל 61	סרטון 78
	תרגיל 62	סרטון 79
מציאת ישר חיתוך בין מישורים	תרגיל 63	סרטון 80
	תרגיל 64	סרטון 81
	תרגיל 65	סרטון 82

	תרגיל 66	סרמון 83
	תרגיל 67	סרמון 84
	תרגיל 68	סרמון 85
	תרגיל 69	סרמון 86
	תרגיל 70	סרמון 87
זוויות		סרמון 88
זווית בין ישרים	תרגיל 71	סרמון 89
זווית בין ישר למישור	תרגיל 72	סרמון 90
	תרגיל 73	סרמון 91
זווית בין מישורים	תרגיל 74	סרמון 92
	תרגיל 75	סרמון 93
מרחקים		סרמון 94
מרחק בין שתי נקודות	תרגיל 76	סרמון 95
מרחק בין נקודה לישר	תרגיל 77	סרמון 96
	תרגיל 78	סרמון 97
	תרגיל 79	סרמון 98
	תרגיל 80	סרמון 99
מרחק בין נקודה למישור	תרגיל 81	סרמון 100
	תרגיל 82	סרמון 101
	תרגיל 83	סרמון 102
	תרגיל 84	סרמון 103
	תרגיל 85	סרמון 104
	תרגיל 86	סרמון 105
מרחק בין ישרים מקבילים	תרגיל 87	סרמון 106
מרחק בין ישר למישור (מקבילים)	תרגיל 88	סרמון 107
מרחק בין מישורים מקבילים	תרגיל 89	סרמון 108
	תרגיל 90	סרמון 109
	תרגיל 91	סרמון 110
מרחק בין ישרים מצטלבים	תרגיל 92	סרמון 111
	תרגיל 93	סרמון 112
	תרגיל 94	סרמון 113
מרחקים – סיכום		סרמון 114
	תרגיל 95	סרמון 115
דרך א'	תרגיל 96	סרמון 116
דרך ב'	תרגיל 96	סרמון 117
	תרגיל 97	סרמון 118
חלק א'	תרגיל 98	סרמון 119
חלק ב'	תרגיל 98	סרמון 120
	תרגיל 99	סרמון 121
	תרגיל 100	סרמון 122
	תרגיל 101	סרמון 123
	תרגיל 102	סרמון 124
חלק א'	תרגיל 103	סרמון 125
חלק ב'	תרגיל 103	סרמון 126

תרגילים:

1. שרטט את הוקטורים הבאים על מערכת צירים:

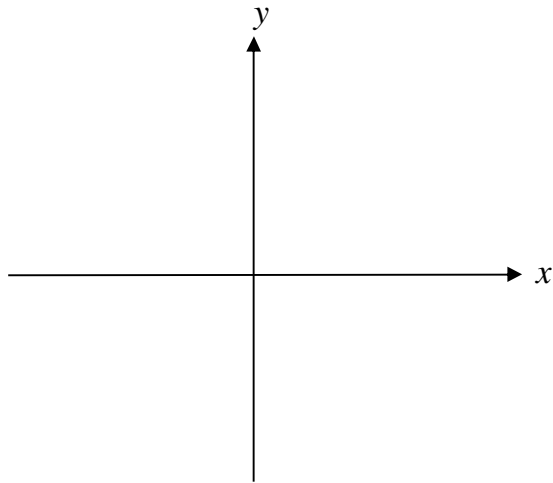
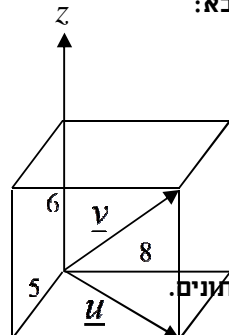
א. $\underline{u} = (4, 2)$

ב. $\underline{v} = (-5, 1)$

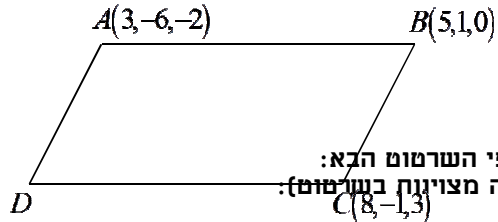
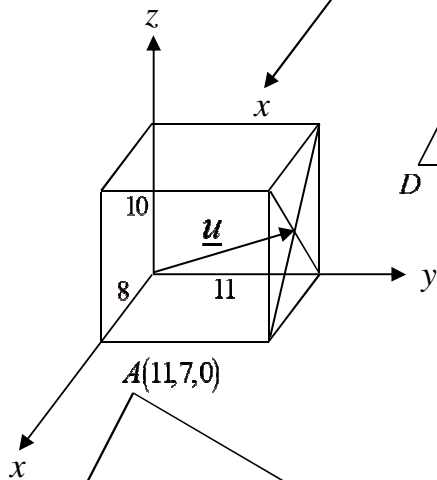
ג. $\underline{w} = (3, -4)$

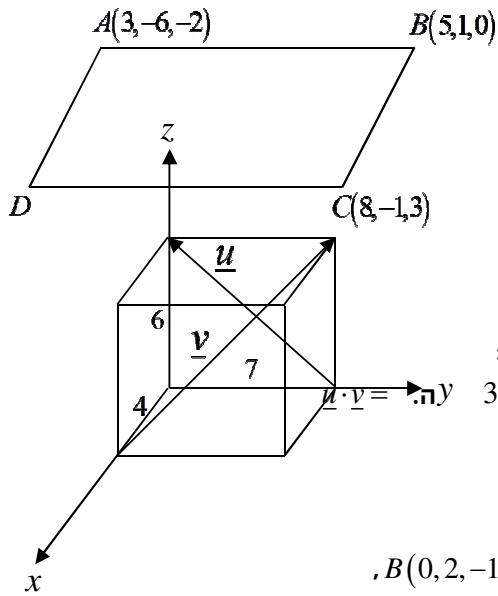
ד. $\underline{a} = (0, 3)$

ה. $\underline{b} = (-5, 0)$

2. מצא מהו הוקטור $\underline{u}$ ומהו הוקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט הבא:
(נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):3. בשרטוט נתונה מקבילית ששעיורי שלושה מקודקדיה נתונים.
מצא את שיעורי הקודקוד D .

$$A(3, -6, -2) \quad B(5, 1, 0)$$

4. מצא מהו הוקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט הבא:
(נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):5. בשרטוט נתון משולש ששעיורי קודקדיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.6. א. מצא את הוקטור $\overline{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3, 5)$ ו- $B(6, 1)$.
ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8, 11)$ והוקטור $\overline{PQ} = (4, -3)$.7. א. מצא את הוקטור $\overline{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2, 0, -3)$ ו- $F(7, -1, -3)$.
ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0, -4, 1)$ והוקטור $\overline{MN} = (-1, -1, 9)$.



8. בערטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקדיה נתונים. מצא את שיעורי הקודקוד D.

9. מצא מהו הוקטור $\underline{u}$ ומהו הוקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט הבא: (נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):

10. נתונים שני וקטורים: $\underline{u} = (3, 7, 1)$, $\underline{v} = (2, -3, 5)$ חשב:

א. $\underline{u} + \underline{v} =$ ב. $\underline{u} - \underline{v} =$ ג. $2\underline{u} =$ ד. $3\underline{u} - \underline{v} =$

11. חשב את גודלו של הוקטור $\underline{u} = (1, -2, 4)$.

12. נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD: $A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$,

$C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$. הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

13. נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD: $A(1, 2, 0)$, $B(-2, 5, 3)$, $C(-1, 8, 4)$,

$D(4, 3, -1)$.

א. הוכח כי המרובע הוא מרפז.

ב. האם המרפז שווה שוקיים?

14. חשב את הזווית בין הוקטורים $\underline{u} = (3, 7, 1)$ ו- $\underline{v} = (2, -3, 5)$:

15. חשב את הזווית בין הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

16. מצא את שטחו של משולש $\triangle ABC$ ששיעורי קודקודיו הם: $A(-3, 2, 1)$, $B(0, 3, 2)$,

$C(5, -1, 0)$.

17. נתונים הוקטורים: $\underline{u} = (2, -1, 0)$, $\underline{v} = (5, 0, 3)$.

מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

18. האם הנקודה $A(7, 0, 3)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x} = (4, 3, 0) + t(1, -1, 1)$?

19. האם הנקודה $B(4, -2, -10)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x} = t(2, -1, 5)$?

20. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5, -2)$ ו- $B(1, 6)$.

21. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3, 0, -2)$ ו- $D(4, 1, 1)$.

22. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2, -7, 1)$ ומקביל

לישר $\ell: \underline{x} = (0, 3, -1) + t(-4, 2, 1)$.

23. מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.
24. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3, -1, 4)$ ומקביל לציר ה- z .
25. מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell: \underline{x} = (1, -2, 6) + t(-2, 1, 2)$ עם המישור $[xy]$.
26. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_1: \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$$
27. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_3: \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$$

$$\ell_4: \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$$
28. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_5: \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$$

$$\ell_6: \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$$
29. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_7: \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$$

$$\ell_8: \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$$
30. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_9: \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$$

$$\ell_{10}: \underline{x} = s(6, 0, -2)$$
31. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_{11}: \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$$

$$\ell_{12}: \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$$
32. מצא את ערכו של הפרמטר k שעבורו הישרים הבאים:
 א. מקבילים
 ב. מתלכדים

$$\ell_1: \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$$

33. נתונות הנקודות: $A(3, -1, 5)$, $B(k, -1, 3)$, $C(-6, 3, -1)$, $D(-2, 3, k)$.
הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

34. מצא את הצנתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות $A(1, -4, 0)$, $B(3, 6, 2)$ ו- $C(0, -3, 1)$.

35. מצא את הצנתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6, 7, -1)$, ומכיל את הישר $\ell: \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$.

36. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$$

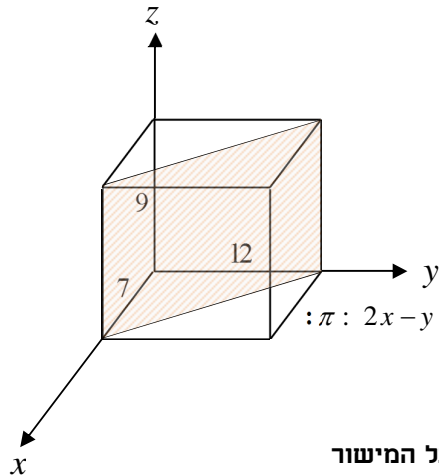
$$\ell_2: \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$$

הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

37. מצא את הצנתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5, -2, -1)$ ומכיל את ציר ה- x .

38. מצא את הצנתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

39. מצא את הצנתו הפרמטרית של המישור המקווקו שבשרטוט הבא:
(נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):



40. קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi: 2x - y + 3z - 6 = 0$:
א. $D(5, 7, 1)$
ב. $E(2, -1, 1)$

41. מצא את ערכו של k שעבורו הנקודה $A(1, k, -1)$ נמצאת על המישור $\pi: kx - 2y + (k+1)z + 7 = 0$.

42. נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x + 2y - z - 9 = 0$. מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

43. נתונה משוואת מישור: $\pi: 4x + y - 2z + 8 = 0$. מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

44. נתונה משוואת מישור: $\pi: x + 4y - z + 8 = 0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

45. נתונה משוואת מישור: $\pi: 2x + 3z - 12 = 0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

46. נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$. מצא את משוואת המישור.

47. נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$. מצא את משוואת המישור.

48. המישור π עובר בנקודות: $A(1,0,-3)$, $B(2,0,0)$, $C(4,-1,0)$. מצא את משוואת המישור.

49. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (5, -4, 1) + t(0, 2, -1)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (0, -6, 2) + s(0, -2, 1)$$

הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

50. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (-1, 1, 3) + t(3, -2, 4)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (-7, 1, 0) + s(4, -3, 0)$$

הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1 ומקביל לישר ℓ_2 .

51. מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6,0,-1)$ ומכיל את ציר ה- z .

52. נתונה משוואת מישור: $(k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$. עבור איזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

53. פאנתיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$ ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

54. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$$

$$\pi: 2x - y - 3z + 6 = 0$$

55. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$$

$$\pi: x - 3y + 2z - 11 = 0$$

56. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$$

$$\pi: 2x + y + 6z + 11 = 0$$

57. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם. אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (0, 3, -2) + t(1, -1, 2)$$

$$\pi: \underline{x} = (-1, 0, 2) + s(1, 0, -2) + r(3, 0, -1)$$

58. נתונים ישר ומישור:

$$\ell: \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1-b, 0)$$

$$\pi: 2x - y + z - 4 = 0$$

מצא את ערכי a ו- b עבורם הישר מוכל במישור.

59. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: x - 3y + 2z - 1 = 0$$

$$\pi_2: 4x + y - z - 6 = 0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

60. נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1: 2x - y + 4z - 5 = 0$

$\pi_2: 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב. $\pi_3: x + 3y - z + 1 = 0$

$\pi_4: 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג. $\pi_5: 5x - 2y - z + 3 = 0$

$\pi_6: 2x + 3y + z - 5 = 0$

61. נתונים שני מישורים:

$\pi_1: 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0$

$\pi_2: 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$

מצא את ערכי k עבורם המישורים: א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

62. במקבילון $ABCD A'B'C'D'$ נתונים שלושה קודקודים: $A(1, -1, 4)$, $B(9, 0, 2)$, $C(5, 2, -2)$

מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה $A'B'C'D'$ אם ידוע שהנקודה $(2, -1, 0)$ נמצאת עליו.

63. נתונים שני מישורים נחתכים:

$\pi_1: 4x + y - 2z + 2 = 0$

$\pi_2: 2x - y + z + 10 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

64. נתונים שני מישורים נחתכים:

$\pi_3: 8x + 2y - 3z + 2 = 0$

$\pi_4: 2x - 3y + z + 4 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

65. נתונים שני מישורים נחתכים:

$\pi_5: 3x - 3y + z + 2 = 0$

$\pi_6: 5x - 2z + 20 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

66. נתונים שני מישורים נחתכים:

$\pi_7: x - 2y - z + 6 = 0$

$\pi_8: z - 2 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

67. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi: 6x - 5y + z + 18 = 0$ עם המישור $[xz]$.

68. נתונים שני מישורים:

$\pi_1: x - 3y + 2z - 1 = 0$

$\pi_2: 4x + y - z - 6 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

69. המישורים π_1 ו- π_2 מאונכים זה לזה.

הישר $\ell: \underline{x} = (4, 1, -1) + t(2, -1, 1)$ הוא ישר החיתוך בין המישורים.

מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור π_1 עובר בראשית.

70. נתונים ישר ומישור:

$$\ell: \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(3, 1, -1)$$

$$\pi: 4x - 2y - 3z - 6 = 0$$

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא הימלו של הישר ℓ על המישור.

71. מצא את הזווית בין הישרים הבאים:

$$\ell_1: \underline{x} = (3, -1, 2) + t(2, 4, -1)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (7, 0, -1) + s(0, 5, -1)$$

72. מצא את הזווית בין הישר והמישור הבאים:

$$\ell: \underline{x} = (1, 0, 3) + t(-3, 1, -5)$$

$$\pi: 2x - y - 3z + 5 = 0$$

73. מצא את הזווית בין הישר והמישור הבאים:

$$\ell: \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$$

$$\pi: 3x - 2y + 2z + 9 = 0$$

74. מצא את הזווית בין המישורים הבאים:

$$\pi_1: 3x + 2y - z - 8 = 0$$

$$\pi_2: 5x - y - z + 10 = 0$$

75. מצא את הזווית בין המישורים הבאים:

$$\pi_1: 4x + 3y + z - 12 = 0$$

$$\pi_2: 4x - 7y + 5z + 3 = 0$$

76. מצא את המרחק בין הנקודות $A(-1, 3, 2)$ ו- $B(9, 1, 0)$.

77. מצא את המרחק בין הנקודה $A(-4, 12, -5)$ לישר $\ell: \underline{x} = (1, 1, -4) + t(3, -1, 2)$.

78. מצא את המרחק בין הנקודה $A(13, -1, -19)$ לישר $\ell: \underline{x} = t(2, 0, -7)$.

79. נתונות הנקודות: $A(1, 6, -1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(6, -4, 0)$. חשב את שטח המשולש

$\triangle ABC$.

80. על הישר $\ell: \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע $ABCD$.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5, 4, 2)$. מצא את שיעורי הקודקוד B (שתי אפשרויות).

81. מצא את המרחק בין הנקודה $A(5, 3, -1)$ למישור $x - 2y + 2z - 12 = 0$.

82. מצא את מרחקו של המישור $4x - 2y - 4z + 15 = 0$ מראשית הצירים.

83. מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell: \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4, 5, -9)$.

84. נתונים ישר ומישור:

$$\ell: \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$$

$$\pi: 2x + 4y - 4z + 15 = 0$$

מצא את הנקודות על הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

85. חשב את נפחה של פירמידה משולשת $SABC$ שקודקודה הם:

$$A(1, 6, -1), B(2, -1, 0), C(6, -4, 0), S(11, -2, 4)$$

86. בפירמידה משולשת $SABC$ המקצועות SA, SB, SC מאונכים זה לזה.

$$SA = 6, SB = 8, SC = 12$$

נתון: חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקודקוד S לבסיס ABC .

87. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (-4, 6, 4) + t(2, 3, 0)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (1, 7, 1) + s(2, 3, 0)$$

הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

88. נתונים ישר ומישור:

$$\ell: \underline{x} = (2, -4, 1) + t(-5, 1, -4)$$

$$\pi: 2x + 6y - z + 6 = 0$$

הראה שהישר מקביל למישור ומצא את המרחק בין הישר למישור.

89. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x + 2y - z + 7 = 0$$

$$\pi_2: 2x + 2y - z - 5 = 0$$

הראה שהמישורים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

90. נתונה משוואת מישור:

$$\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$$

מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון ונמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

91. נתונים שני מישורים מקבילים:

$$\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$$

$$\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$$

מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים ונמצא במרחק שווה משניהם.

92. נתונים שני ישרים. הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק ביניהם:

$$\ell_1: \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$$

93. נתונים שני ישרים מצטלבים. מצא את המרחק ביניהם:

$$\ell_3: \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$$

$$\ell_4: \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$$

94. מצא את מרחק הישר $\ell: \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ מציר ה- z .

95. נתונה קוביה $ABCD A'B'C'D'$ שנפחה הוא 8. משוואת המישור שעליו מונח הבסיס

$$ABCD \text{ היא: } \pi_1: 4x + y + 3z - 28 = 0$$

משוואת המישור שעליו מונחת הפאה $ABB'A'$ היא: $\pi_2: x + 2y - 2z + 6 = 0$.

מצא הצגה פרמטרית של הישר עליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

96. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (-2, 1, 5) + t(5, -4, 2)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (-7, 3, -1) + s(-5, 4, -2)$$

א. מצא את המצב ההדדי בין הישרים.

ב. המישור π_1 מכיל את שני הישרים והמישור π_2 נמצא בין שני הישרים במרחק

שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור π_1 . מצא את משוואות

המישורים π_1 ו- π_2 .

97. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x - y + 4z - 8 = 0$$

$$\pi_2: x - y + 2z - 4 = 0$$

המישור π_3 מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותר את ציר ה- y בנקודה A כך שמתקיים $OA = m$ (O ראשית הצירים).

הזווית בין המישור π_2 למישור π_3 היא α ונתון כי: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$. מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר m .

98. נתונות שלוש נקודות: $O(3,1,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(3,-1,1)$.

הנקודות A ו- B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו. מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A (הישר נמצא במישור המעגל).

99. הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור שמרכזו $O(1,1,2)$.

מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A .

100. נתונים מישור וישר:

$$\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$$

$$\ell: \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$$

מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

101. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x - 4y + 4z - 5 = 0$$

$$\pi_2: 4x - 2y + 4z - 1 = 0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

102. נתונים ישר ומישור:

$$\ell_1: \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$$

$$\pi: 6x + 2y - z + 5 = 0$$

ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותר את הישר ℓ_1 בנקודה Q .

מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q . מצא את שטח המלבן $PQQ'P'$. (הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2 .)

103. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x + y + z - 5 = 0$$

$$\pi_2: 3x + y + 2z + 11 = 0$$

ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים. המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של

60° עם הישר $\ell_2: \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$. מצא את משוואת המישור π_3 .

פתרונות:

2. $\underline{u} = (5, 8, 0)$, $\underline{v} = (5, 8, 6)$ 3. $D(6, -8, 1)$ 4. $\underline{u} = (4, 11, 5)$ 5. $(7, 1, 2)$
6. א. $\overline{AB} = (9, -4)$ ב. $Q = (12, 8)$ 7. א. $\overline{EF} = (5, -1, 0)$ ב. $N(-1, -5, 10)$
8. $D(6, -8, 1)$ 9. $\underline{u} = (0, -7, 6)$, $\underline{v} = (-4, 7, 6)$ 10. א. $(5, 4, 6)$ ב. $(1, 10, -4)$
11. $(6, 14, 2)$ 12. $(7, 24, -2)$ 13. ה. -10 14. $\sqrt{21}$ 15. ב. כן. 16. 102.19°
17. א. 97.277° ב. 90° ג. 180° 18. 10.173 יח"ש. 19. $\underline{w} = (-3, -6, 5)$ 20. $l: \underline{x} = (-5, -2) + t(6, 8)$
21. $l: \underline{x} = (4, 1, 1) + t(1, 1, 3)$ 22. $l: \underline{x} = (2, -7, 1) + s(-4, 2, 1)$ 23. $l: \underline{x} = t(0, 1, 0)$
24. $l: \underline{x} = (3, -1, 4) + t(0, 0, 1)$ 25. $(7, -5, 0)$ 26. מתלכדים. 27. מקבילים.
28. נחתכים, $(1, 5, 0)$ 29. מצטלבים. 30. מקבילים. 31. נחתכים, $(1, 8, -1)$
32. א. $k = 2$ ב. $k = -2$ 33. $\pi: \underline{x} = (1, -4, 0) + t(2, 10, 2) + s(-1, 1, 1)$ 34. $k = 3$
35. $\pi: \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4) + s(8, 9, -6)$ 36. $\pi: \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(5, -2, -1)$ 37. $\pi: \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 1) + s(-7, 12, 0)$
38. $\pi: \underline{x} = t(1, 0, 0) + s(0, 0, 1)$ 39. $\pi: \underline{x} = (7, 0, 0) + t(0, 0, 1) + s(-7, 12, 0)$
40. א. על המישור. ב. לא על המישור. 41. $k = 3$ 42. $(3, 0, 0)$, $(0, 4\frac{1}{2}, 0)$, $(0, 0, -9)$
43. $l: \underline{x} = (0, -8, 0) + t(0, 2, 1)$ 44. $\pi: \underline{x} = (0, 0, 8) + t(0, -2, -8) + s(-8, 0, -8)$
45. $\pi: \underline{x} = (0, 0, 4) + t(0, 1, 0) + s(6, 0, -4)$ 46. $\pi: -2x + 3y + z + 19 = 0$
47. $\pi: x - 3y + 8z = 0$ 48. $\pi: 3x + 6y - z - 6 = 0$ 49. $\pi: y = 0$ 50. $k = 3$
51. $\pi: y = 0$ 52. $k = 3$
53. 6 יח"י. 54. הישר חותך, $(1, -1, 3)$ 55. מקבילים. 56. הישר מוכל. 57. הישר חותך.
58. $(3, 0, 4)$ 59. $a = 1$, $b = -7$ 60. $l: \underline{x} = t(1, 9, 13)$ 61. א. מתלכדים. ב. מקבילים.
62. $\pi_{A'B'C'D'}: 2y + z + 2 = 0$ 63. $k = 2$ ג. $k = -3$ ב. $k \neq 2, -3$ א. 64. $l: \underline{x} = (0, 2, 2) + t(1, 2, 4)$
65. $l: \underline{x} = (-2, 6, 0) + t(2, 16, 12)$ 66. $l: \underline{x} = (0, 2, 2) + t(4, 2, 0)$
67. $l: \underline{x} = (0, 4, 10) + t(4, 7\frac{1}{3}, 10)$ 68. $l: \underline{x} = t(1, 9, 13)$
69. $l: \underline{x} = (-3, 0, 0) + t(3, 0, -18)$ 70. $l': \underline{x} = (-5, -13, 0) + t(7, 11, 2)$
71. $\pi_1: y + z = 0$, $\pi_2: x + y - z - 6 = 0$ 72. 26.01° 73. 21.19° 74. 18.87° 75. 43.94° 76. 90° 77. $\sqrt{108}$
78. $\sqrt{91}$ 79. 12.75 יח"ש. 80. $B(5, 4, -6)$ א. $B(5, -4, 2)$ 81. 5. 82. $2\frac{1}{2}$
83. $\pi: 3x - 2y + z + 21 = 0$ א. $\pi: 3x - 2y + z - 7 = 0$ 84. $(4, 5, 1)$ א. $(1, -9, 5)$
85. 20.5 יח"י. 86. 4.46 יחידות אורך. 87. $\sqrt{22}$ 88. $\frac{15}{\sqrt{41}}$ 89. 4
90. $\pi_1: 3x - 4y + 5z + 10 = 0$, $\pi_2: 3x - 4y + 5z - 30 = 0$ 91. $\pi_3: x - 2y - 2z - 3 = 0$
92. $\frac{4}{\sqrt{6}}$ 93. 1.567 94. $\sqrt{2}$ 95. $\pi_{DCC'D'}: x + 2y - 2z = 0$ א. $\pi_{DCC'D'}: x + 2y - 2z + 12 = 0$
96. א. 97. $m = 4, -\frac{4}{7}$ ב. $\pi_1: 2x + 2y - z + 7 = 0$, $\pi_2: y + 2z - 6 = 0$

$$\pi: -3x + y + 3z + 15 = 0 \quad .99 \quad l: \underline{x} = (3, -1, 1) + k(-5, -2, -4) \quad .98$$

$$l: \underline{x} = (0, -14, -15\frac{3}{4}) + t(-14, 14, 21) \quad .101 \quad (0, 0, 14\frac{4}{5}) \quad \text{in} \quad (0, 0, 4) \quad .100$$

$$\pi_3: 2x + y + z - 5 = 0 \quad \text{in} \quad \pi_3: x + 2y - z - 58 = 0 \quad .103 \quad \text{ש"מ} 10.476 \quad .102$$

פרק 9 - מספרים מרוכבים

(1) פתור את המשוואות הבאות ומצא את z .

$$z^2 + 9 = 0 \quad (1) \quad z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (2) \quad z^2 - 6z + 13 = 0 \quad (3)$$

(2) חשב:

$$(i\sqrt{2})^6 \quad (2) \quad (i^5 - i^{13})^2 \quad (3) \quad (4+i) - (2+10i) \quad (4) \quad (-4-i)(2-3i)$$

(3) חשב (כתוב את התוצאה בצורה $z = x + yi$):

$$\frac{i}{1-i} - \frac{1}{(i+1)^2} \quad (3) \quad \frac{1+i}{1-3i} \quad (2) \quad \frac{5}{2+i} \quad (1)$$

(4) פתור את המשוואות הבאות ומצא את המספר המרוכב z :

$$(1+i)z^2 + 2z - i + 1 = 0 \quad (3) \quad z\bar{z} - 5\bar{z} = 10i \quad (2) \quad 2z - 6i = \bar{z} - 1 \quad (1)$$

(5) כתוב את המספרים הבאים בצורה קוטבית:

$$1-i \quad (4) \quad -3-\sqrt{3}i \quad (3) \quad -1-i \quad (2) \quad 1+\sqrt{3}i \quad (1)$$

$$-8 \quad (8) \quad \sqrt{3}i \quad (7) \quad \sqrt{3}-i \quad (6) \quad 1+i \quad (5)$$

(6) חשב:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100} \quad (1) \quad \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} \quad (2) \quad (1+\sqrt{3}i)^9$$

$$\sqrt[3]{-8} \quad (6) \quad \sqrt[5]{1} \quad (5) \quad \sqrt[5]{-8} \quad (4)$$

(7) א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

ב. הראה כי אם z הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי: $z^6 = 1$.

(8) נתונה המשוואה $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה הנתונה.

ב. הוכח כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר

מדומה טהור.

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1 \quad (9) \quad \text{פתור את המשוואה}$$

(10) א. מצא את שלושת הפתרונות של המשוואה $z^3 = i$.

ב. הראה שמכפלת שלושת הפתרונות היא i .

ג. הראה שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת

שני הפתרונות האחרים.

(11) א. פתור את המשוואה $z^5 = -16(\sqrt{3} - i)$.

ב. הוכח כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצא את מנת הסדרה.

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$ כאשר q מנת הסדרה.

(12) נתון $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה $z^3 = w^3$.

ב. הראה כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא w^3 .

(13) נתונה המשוואה $(iz + 1)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$.

א. מצא את פתרונות המשוואה z_1 ו- z_2 .

ב. הראה כי $\left| \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2} \right| = \sqrt{3.25}$.

(14) נתונה המשוואה $(z - 1)^3 = 1$. הוכח שסכום שורשיה הוא 3.

(15) נתונה המשוואה $z^3 = -\sqrt{3} + i$.

א. מצא את שורשי המשוואה: z_1, z_2, z_3 .

ב. מצא את הסכום $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3$.

ג. הראה כי הסכום $(z_1)^9 + (z_2)^9 + (z_3)^9$ הוא מספר מדומה טהור.

(16) נתונה המשוואה $z^2 + |z|^2 - 2ti = 18s^2$, z הוא מספר מרוכב.

כאשר s ו- t הם מספרים ממשיים שונים מאפס. z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה.

א. הבע את פתרונות המשוואה באמצעות s ו- t .

ב. נתון $z_1 \cdot z_2 = -18i$. מצא את הפרמטרים s ו- t .

$$(17) \text{ א. פתור את המשוואה } \bar{z} \cdot i + (\bar{z})^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0.$$

ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א., הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית שכל איבריה

שונים מאפס. הפרש סדרה זו הוא: $1 + \frac{1}{16}i$. האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.

חשב את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה: $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$

באשר d נקרא הפרש הסידרה.

(18) נתון: $u = (3 - 2i, 4i, 1 + 6i)$, $v = (5 + i, 2 - 3i, 7 + 2i)$. מצא:

$$u \cdot v \quad (3) \quad 2i \cdot u - v \quad (2) \quad 4u + v \quad (1)$$

$$|v| \quad (6) \quad |u| \quad (5) \quad u \cdot u \quad (4)$$

פתרונות

$$\cdot -11+10i \text{ (4)} \quad 2-9i \text{ (3)} \quad 0 \text{ (2)} \quad -8 \text{ (1)} \quad \textbf{(2)} \quad .3 \pm 2i \text{ (3)} \quad 2 \pm i \text{ (2)} \quad \pm 3i \text{ (1)} \quad \textbf{(1)}$$

$$\cdot -\frac{1}{2} + i \text{ (3)} \quad -\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i \text{ (2)} \quad 2 - i \text{ (1)} \quad \textbf{(3)}$$

$$\cdot z = i, z = -1 \text{ (3)} \quad z = 1+2i, z = 4+2i \text{ (2)} \quad z = -1+2i \text{ (1)} \quad \textbf{(4)}$$

$$\sqrt{12}(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}) \text{ (3)} \quad \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4}) \text{ (2)} \quad 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}) \text{ (1)} \quad \textbf{(5)}$$

$$2(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}) \text{ (6)} \quad \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \text{ (5)} \quad \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}) \text{ (4)}$$

$$\cdot -1 \text{ (3)} \quad -2^9 \text{ (2)} \quad \cdot \frac{1}{32}i \text{ (1)} \quad \textbf{(6)} \quad 8(\cos \pi + i \sin \pi) \text{ (8)} \quad \sqrt{3}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}) \text{ (7)}$$

$$\cdot 8^{\frac{1}{6}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{6} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad \textbf{(4)}$$

$$\cdot 1^{\frac{1}{5}} \left(\cos \frac{0 + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{5} \right) \quad k = 0, 1, 2, 3, 4 \quad \textbf{(5)}$$

$$\cdot 8^{\frac{1}{3}} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \quad k = 0, 1, 2 \quad \textbf{(6)}$$

$$\cdot z_1 = cis 60^\circ, z_2 = cis 240^\circ, z_3 = cis 120^\circ, z_4 = cis 300^\circ \quad \textbf{(7)}$$

$$\cdot z = 0, z = 1, z = -1 \quad \textbf{(9)} \quad \cdot z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3} + i, z_3 = -1 - \sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3} - i \quad \textbf{(8)}$$

$$\cdot z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i, z_3 = -i \quad \textbf{(10)}$$

$$\cdot q = cis 72^\circ \quad \textbf{ב.} \quad \cdot z_n = 2cis[30^\circ + (n-1)72^\circ] \quad n = 1, 2, 3, 4, 5 \quad \textbf{(11)}$$

$$\cdot 1 + (1 + \sqrt{3})i, -1 + (1 - \sqrt{3})i \quad \textbf{(13)} \quad \cdot z_1 = cis 45^\circ, z_2 = cis 165^\circ, z_3 = cis 285^\circ \quad \textbf{(12)}$$

$$\cdot 24i \quad \textbf{ג.} \quad \cdot 6 \quad \textbf{ב.} \quad \cdot z_3 = \sqrt[3]{2}cis 290^\circ, z_2 = \sqrt[3]{2}cis 170^\circ, z_1 = \sqrt[3]{2}cis 50^\circ \quad \textbf{(15)}$$

$$\cdot z_1 = 0 \quad \textbf{(17)} \quad \cdot t = 9, s = \pm 1 \quad \textbf{ב.} \quad \cdot z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i, z_2 = -3s - \frac{t}{3s}i \quad \textbf{(16)}$$

$$\cdot (17 - 7i, 2 + 13i, 11 + 26i) \quad \textbf{(18)} \quad \cdot a_1 = -8.5 \quad \textbf{ב.} \quad \cdot z_2 = -0.5 + 0.5i,$$

$$\cdot \sqrt{92} \quad \textbf{ג.} \quad \cdot \sqrt{66} \quad \textbf{ה.} \quad \cdot 66 \quad \textbf{ד.} \quad \cdot 20 + 35i \quad \textbf{ג.} \quad \cdot (-1 + 5i, -10 + 3i, -19) \quad \textbf{ב.}$$

פרק 10- טורים עם איברים קבועים

טור גיאומטרי

(1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4} \right)^{2n} \quad (4)$$

טור טלסקופי

(2) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (1)$$

טור הרמוני מוכלל

(3) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad (4)$$

תכונות אלגבריות של טורים

(4) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5} \right) \quad (1)$$

מבחן ההתבדרות

(5) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n} \right)^n \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan n \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2} \quad (4)$$

מבחן האינטגרל

(6) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} & (3) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} & (1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3} & (6) & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} & (p \leq 1) & (5) & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} & (p > 1) & (4) \end{array}$$

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

(7) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} & (3) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} & (1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sin^2 n}{n!} & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-2}{3^n+2n} & (5) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} & (4) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} & (9) & \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) & (8) & \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) & (7) \end{array}$$

מבחן המנה ומבחן השורש

(8) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} & (3) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n+2)} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} & (1) \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} & (5) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} & (4) \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} & (9) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} & (8) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} & (7) \end{array}$$

מבחן לייבניץ

(9) בדוק את התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} & (3) & \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} & (1)$$

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

(10) קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\begin{array}{lll} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} & (3) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} & (2) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} & (1) \\ \sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n & (6) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} & (5) & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} & (4) \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} & (9) & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} & (8) & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} & (7) \end{array}$$

הוכח או הפרד

(11) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר אז $\sum (a_n + b_n)$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n^2$ מתכנס אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ד. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ה. אם $\sum a_n$ מתכנס אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

פתרונות

(1)		
(1) מתכנס ל- 11/14	(2) מתכנס ל- 1/3	(3) מתבדר
(4) מתכנס ל- 64/7-	(5) מתכנס ל- 11/12	(6) מתכנס ל- 8
(2)		
(1) מתכנס ל- 1/2	(2) מתכנס ל- 1/12	(3) מתבדר
(3)		
(1) מתכנס	(2) מתבדר	(3) מתבדר
(4) מתבדר	(5) מתכנס	(6) מתכנס
(4)		
(1) מתכנס	(2) מתבדר	(3) מתבדר
(5)		
(1) מתבדר	(2) מתבדר	(3) מתבדר
(4) מתבדר	(5) מתבדר	(6) מתבדר
(6)		
(1) מתבדר	(2) מתבדר	(3) מתכנס
(4) מתכנס	(5) מתבדר	(6) מתכנס
(7)		
(1) מתכנס	(2) מתבדר	(3) מתכנס
(4) מתבדר	(5) מתכנס	(6) מתכנס
(7) מתבדר	(8) מתכנס	(9) מתכנס
(8)		
(1) מתבדר	(2) מתכנס	(3) מתכנס
(4) מתכנס	(5) מתכנס	(6) מתכנס
(7) מתכנס	(8) מתכנס	(9) מתכנס
(9)		
(1) מתכנס	(2) מתכנס	(3) מתכנס
(10)		
(1) מתבדר	(2) מתכנס בהחלט	(3) מתכנס בתנאי
(4) מתכנס בתנאי	(5) מתכנס בהחלט	(6) מתכנס בהחלט
(7) מתכנס בתנאי	(8) מתכנס בתנאי	(9) מתכנס בתנאי

פרק 11 - טורי פונקציות וטורי חזקות

טורי פונקציות

(1) מצא את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left(\frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 nx} \quad (4)$$

(2) בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים בתחום המופיע לידן :

$$(-1 \leq x \leq 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}} \quad (2) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (4) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (6) \quad (-a \leq x \leq a) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (5)$$

טורי חזקות

(3) מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים הבאים :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n (x+5)^n \quad (10)$$

(4) מצא את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות וקבע את תחום ההתכנסות.

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (5) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (9) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (8) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (12) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (11) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (10)$$

$$f(x) = \arctan(x/3) \quad (15) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (14) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (13)$$

הערות חשובות:

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצא בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 7,8 עליך להכיר את הנושא "פירוק לשברים חלקיים".
3. לפתרון תרגילים 9,10,14,15 עליך להכיר את הנושא "גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות".

פתרונות

(1)

$$x < 3\frac{9}{10} \text{ or } x \geq 4\frac{1}{10} \quad (3)$$

$$x \neq 5 \quad (2)$$

$$x > 0 \quad (1)$$

$$x \neq 0, -1, -2, -3, \dots \quad (6)$$

$$x > 0 \quad (5)$$

$$0 < x \neq \frac{1}{n} \quad (4)$$

(2)

מתכנס במידה שווה (3)

מתכנס במידה שווה (2)

מתכנס במידה שווה (1)

מתכנס במידה שווה (6)

מתכנס במידה שווה (5)

מתכנס במידה שווה (4)

(3)

$$-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2 \quad (3)$$

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad (2)$$

$$-1 \leq x < 1, R = 1 \quad (1)$$

$$-1 < x < 1, R = 1 \quad (6)$$

$$-3 < x \leq -1, R = 1 \quad (5)$$

$$-1 \leq x \leq 1, R = 1 \quad (4)$$

$$-5 < x \leq 3, R = 4 \quad (9)$$

$$-\infty < x < \infty, R = \infty \quad (8)$$

$$x = 1, R = 0 \quad (7)$$

$$-7 < x < -3, R = 2 \quad (12)$$

$$-9 \leq x \leq 11, R = 10 \quad (11)$$

$$-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3 \quad (10)$$

(4)

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n} \quad (2)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \quad (1)$$

$$(|x| < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^{n+1}} x^n \quad (4)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n} \quad (3)$$

$$(|x| < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}} \quad (6)$$

$$(|x| < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1} \quad (5)$$

$$(|x| < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n \quad (8)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n \quad (7)$$

$$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \quad (10)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1} \quad (9)$$

$$(|x| < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \quad (12)$$

$$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (11)$$

$$(|x| < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2} \quad (14)$$

$$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)} \quad (13)$$

$$(|x| \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)} \quad (15)$$