אלגברה

לינארית

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\ \eta & \iota & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & o & \pi \\ \varpi & \theta & \vartheta & \rho \\ \sigma & \varsigma & \tau & \upsilon \\ \omega & \xi & \psi & \zeta \end{pmatrix}$$

גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/linearit.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

תוכן

<u>תרגילים – פרק 1</u>

(1) מצא אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

1) $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2y=0 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x-4y=-7 \\ x-y=-1 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} 2x+y=3 \\ x-y=0 \end{matrix}$ 4) $\begin{matrix} x+y=3 \\ 2x+y=4 \end{matrix}$

(2) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

1) $\begin{matrix} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{matrix}$ 2) $\begin{matrix} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{matrix}$ 3) $\begin{matrix} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{matrix}$ 4) $\begin{matrix} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{matrix}$

(3) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

1) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$
$R_3 \to R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$

2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2, R_2 \to R_2 + R_1$
$R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \to R_3 - 3R_2$

3) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 3R_3, R_2 \to R_2 + 3R_3$
$R_1 \to 5R_1 - 8R_2$

(4) מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

(5) א. **הסבר והדגם** את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.
ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

*9) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$

F=□ , F=□

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה □ ופעם מעל השדה □ .

(6) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

1) $\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} 4x+8y&=20 \\ 3x+6y&=14 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} 8x-4y&=10 \\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$

5) $\begin{aligned} x+2y+3z&=-11 \\ 2x+3y-z&=-5 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$

6) $\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 4x+6y+16z&=8 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$

7) $\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+y&=-1 \\ x-y&=-2 \end{aligned}$

8) $\begin{aligned} 4x-7y&=0 \\ 8x-14y&=2 \\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$

9) $\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ -9x+6y&=-3 \\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$

10) $\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2 \\ 2x+5y-8z+6t&=5 \\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$

11) $\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$

12) $\begin{aligned} x+2y+2z&=2 \\ 3x-2y-z&=5 \\ 2x-5y+3z&=-4 \\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$

(7) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

1) $$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4) $$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

(8) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

1) $$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} 3x+4y-z&=2\\ kx-2y+z&=-1\\ x+8y-3z&=k\\ 2x+6y-2z&=0.5k+1 \end{aligned}$$

(9) מצא לאילו ערכים של a ושל b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות

1) $$\begin{aligned} x+2y-4z&=b\\ 7x-10y+16z&=7\\ 2x-ay+3z&=1 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} 2x+4y+az&=-1\\ x+2y+4z&=-4\\ x+2y-4z&=0\\ x+2y+6z&=-2b \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x+y-z+t&=1\\ ax+y+z+t&=b\\ 3x+2y+at&=1+a \end{aligned}$$

(10) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} x+az&=1\\ y+2z&=2\\ bx+cy+dz&=3 \end{aligned}$$

א. מצא תנאי עבור a,b,c,d כך שלמערכת יהיה פתרון יחיד.

ב. מצא תנאי עבור b,c,d כך שלכל a למערכת יהיו אינסוף פתרונות.

(11) פתור את מערכת המשוואות הבאה בשיטת גאוס מעל **השדה** $\mathbf{F}$.

1) $$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=1\\ 2x_1+4x_2+4x_3&=2\\ 3x_1+x_3&=0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F}=\square_5}$$

2) $$\begin{aligned} z_1+iz_2+(1-i)z_3&=1+4i\\ iz_1+z_2+(1+i)z_3&=2+i\\ (-1+3i)z_1+(3-i)z_2+(2+4i)z_3&=5-i \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{F}=\square\ ,\ \mathbf{F}=\square}$$

(12) נתונה המערכת :
$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$$

א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.

ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.

ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת : 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.

ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.

ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.

ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$. האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.

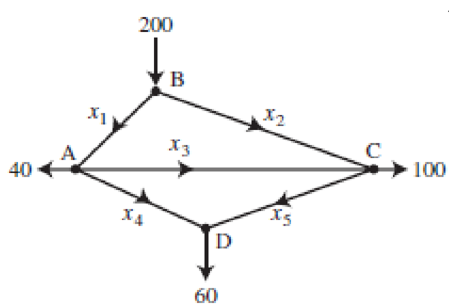
ח. מצא לאיזה ערך של k , $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

(13) באיור שלפניך רשת זרימה המתארת את זרם התנועה (במכוניות לדקה) של מספר רחובות בתל אביב.

א. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת.

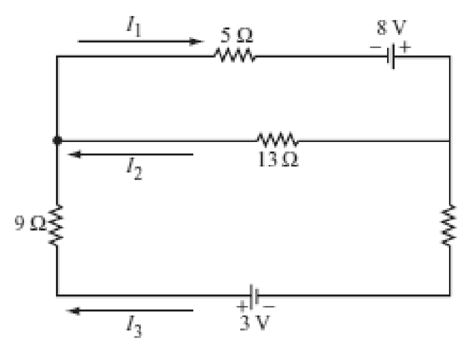
ב. מצא את תבנית הזרימה הכללית של הרשת אם ידוע שהכביש שהזרם שלו x_4 סגור.

ג. מהו הערך המינימלי של x_1 אם ידוע ש- $x_4=0$.

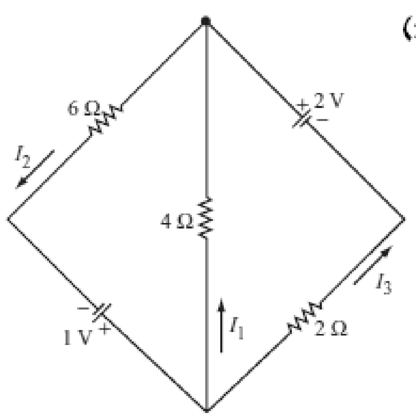


(14) מצא את הזרמים במעגלים החשמליים הבאים (חוקי קירקהוף וחוק אוהם) :

א)



ב)



*** בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות בנושא מערכת משוואות לינאריות.**

<u>פתרונות – פרק 1</u>

(1) 1) ו- 3) שקולות ו- 2) ו- 4) שקולות.

(2) 1) $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

(3) 1) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

(4) 1) $R_1 \to 2R_1 + R_2$ 2) $R_2 \to R_2 - 4R_1$ 2) $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

(5) ב.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(7
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ ו- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(8
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(9
$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

F=□ F=□

(6)

(1 $(x,y)=(1,2)$

(2 $(x,y)=(5-2t,t)$

(3 ϕ

(4 ϕ

(5 $(x_1,x_2,x_3)=(1,-3,-2)$

(6 $(x,y,z)=(-1-7t,2+2t,t)$

(7 $(x,y)=(-1,1)$

(8 ϕ

(9 $(x,y)=(\frac{1+2t}{3},t)$

(10 $(x,y,z,t)=(-a+2b,1+2a-2b,a,b)$

(11 ϕ

(12 $(x,y,z)=(2,1,-1)$

(7)

(1 א. $k\neq 1,\ k\neq -2$ ב. $k=1$ ג. $k=-2$

(2 א. $k\neq 1,\ k\neq -2$ ב. $k=-2$ ג. $k=1$

(3 א. $k\neq -1,\ k\neq \frac{4}{7}$ ב. $k=\frac{4}{7}$ ג. $k=-1$

(4 א. $k\neq 1,\ k\neq -0.4$ ב. $k=1,\ k=-0.4$

(5 א. $k\neq \pm 1,\ k\neq -2$ ב. $k=\pm 1, k=-2$.

(6 א. $k\neq -1,\ k\neq -3,\ k\neq 2$ ג. $k=-1,\ k=-3,\ k=2$.

(8) 1) א. $k=-1$ ב. $k\neq\pm1$ ג. $k=1$ 2) ב. $k=3$ ג. $k\neq 3$ 3) א. $k\neq 1$ ב. $k=1$

(9)

1) א. $a\neq 2$ ב. $a=2,\ b\neq -3$ ג. $a=2, b=-3$.

2) ב. $b\neq 2.5$ או $a\neq -6$ ג. $a=-6,\ b=2.5$.

3) ב. $a=2,\ b\neq 2$ ג. $a=2,\ b=2$ או $a\neq 2$.

(10) א. $ab+2c\neq d$ ב. $b=0,\ c=1.5, d=3$

(11)

1) $(x_1,x_2,x_3)=(0,3,0)$ 2) $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\square}{=}((-1+i)t+1+i,3,t)$, $(z_1,z_2,z_3)\underset{F=\square}{=}(2,3,-1)$

(12) א. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1\\ 4 & -6 & k+2 & 4\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4\\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2\end{pmatrix}$

ג. 1. $k\neq -1$, $k\neq 2$. 2. $k=-1$ 3. $k=2$

ד. $(x,y,z)=(1+0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k=\pm 2$ ו. $k=-2$ ז. $k=2$, לא. ח. $k=-2$

(13) א. x_3 ו- x_5 חופשיים. $x_1=100+x_3-x_5$, $x_2=100-x_3+x_5$, $x_4=60-x_5$.

ב. x_3 חופשי. $x_1=40+x_3$, $x_2=160-x_3$, $x_4=0$, $x_5=60$.

ג. 40 .

(14) א. $I_1=\frac{255}{317}, I_2=\frac{97}{317}, I_3=\frac{158}{317}$. ב. $I_1=-\frac{5}{22}, I_2=\frac{7}{22}, I_3=\frac{6}{11}$

תרגילים – פרק 2

מטריצות

(1) נתונות מטריצות: $A_{4\times6}\,, B_{4\times6}\,, C_{6\times2}\,, D_{4\times2}\,, E_{6\times4}$.

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

1) $A+B$ 2) AB 3) $AC-D$ 4) $AE-B$ 5) $B+AB$

6) $E(B+A)$ 7) $(E+A^T)D$ 8) E^TB 9) $E(AC)$ 10) $E(B-A)$

(2) מצא את x, y, z , אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן) :

1) $E+D$ 2) $E-D+I_3$ 3) $5C$ 4) $2D+4EI_3$ 5) $2tr\left(D^2-2E\right)$

6) $4C^T+A$ 7) $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$ 8) I_2BC 9) $tr\left(C^TC\right)$ 10) $DABC$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$ המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע״י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$.

1)
$$\begin{aligned} 2x+y-z&=3 \\ x+2y-4z&=5 \\ 6x+4y+z&=2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z+t&=1 \\ 4x+y+2z&=4 \\ y+z+t&=1 \\ x-4z-2y&=10 \end{aligned}$$

(5) נתון:

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}\qquad \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות לינאריות:

1) $A\underline{x}=\underline{b}$ 2) $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$ 3) $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$ 4) $A\underline{x}=\underline{x}$ 5) $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

(6) מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T=A$ ואנטי-סימטרית אם $A^T=-A$.

א. ידוע ש- A מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון:

1. AA^T סימטרית. 2. $A+A^T$ סימטרית. 3. $A-A^T$ אנטי-סימטרית.

ב. ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. A^2-B^2 סימטרית. 3. A^2+B סימטרית.

ג. ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB=-BA$. מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A-B)^2$ סימטרית.

ד. ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB=BA$. הוכח:

1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB+B$ אנטי-סימטרית.

ה. נתון: A,B,AB סימטריות מאותו סדר. הוכח כי $A^4B^4=B^4A^4$.

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}4&1.5\\2&1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&-2&2\\5&-3&4\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&2&-1&0\\0&1&1&1\\1&3&-1&-2\end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\4&2&2&3\\2&-1&2&-1\\4&0&2&-2\end{pmatrix}$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$.

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה איננה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

1) $\begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 3x-2y+2z=5 \\ 5x-3y+4z=11 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x+4y+2z+4t=1 \\ x+2y-z=0 \\ y+z+t=1 \\ x+3y-z-2t=0 \end{cases}$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X:

1) $AXC=D$ 2) $A^{-1}XC=A^{-1}DC$ 3) $P^{-1}X^TP=A$

4) $C^{-1}(A+X)D^{-2}=I$ 5) $(A-AX)^{-1}=X^{-1}C$ 6) $ABC^TX^{-1}BA^TC=AB^T$

ב. נתון $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1}=B+I$.

ג. נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

ד. נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^TB(I+2A)^{-2}=(7A)^{-2}$

(11) א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

ג. נתונים: $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix}$.

1. חשב את $p(A)$.

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- A והפיכה ובטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(12) נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I-A$ הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

(13) נתון: $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\ Q^{-1}BQ=C\end{cases}$. הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C (כלומר יחס הדימיון הוא יחס טרנזיטיבי).

<u>הערה</u>

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

<u>פתרונות – פרק 2</u>

(1) 1) 4×6 2) 3) 4×2 4) 5)

6) 6×6 7) 6×2 8) 9) 6×4 10) 6×6

(2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

(3) 1) $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$

5) 230 6) $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$

9) 63 10) $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$

(4)

1) $\underline{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2) $\underline{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \underline{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

(5) 1) $\begin{aligned} 4x-2y+4z&=1 \\ x-y+z&=2 \\ x-6y+3z&==3 \end{aligned}$ 2) $\begin{aligned} -2y+4z&=1 \\ x-5y+z&=2 \\ x-6y-z&=3 \end{aligned}$ 3) $\begin{aligned} (4+k)x-2y+4z&=1 \\ x+(k-1)y+z&=2 \\ x-6y+(3+k)z&=3 \end{aligned}$

4) $\begin{aligned} 3x-2y+4z&=0 \\ x-2y+z&=0 \\ x-6y+2z&=0 \end{aligned}$ 5) $\begin{aligned} 2x+y+z&=3 \\ -2x-3y-6z&=6 \\ 4x+y+z&=9 \end{aligned}$

(6) א. 1,2,3 ב. 2 ג. 1,2,3

(7)

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(8) 1) $k \neq 1,\ k \neq -2$. 2) $k = 1,\ k = -4$

(9) 1) $(x, y, z) = (1,2,3)$. 2) $(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2)$

(10) א. 1. $A^{-1}DC^{-1}$. 2. D . 3. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$. 4. $CD^2 - A$.

5. $\left(A + C^{-1}\right)^{-1} A$. 6. $BA^T C(B^{-1})^T BC^T$

ב. $X = 4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ג. $Y = \begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$ ד. $B = \frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

(11) א. $A^{-1} = 0.5A - 2.5I$ ב. $A^{-1} = \frac{1}{6}A - \frac{1}{6}I$.

ג. 1. $f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 2. $B^{-1} = -\frac{1}{48}B^2 + \frac{1}{12}B + \frac{5}{12}I$.

(12) ב. $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$

תרגילים – פרק 3

דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה) :

(1 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
(2 $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$
(3 $\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

(4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
(5 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(6 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

(7 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
(8 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}$
(9 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(10 $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(11 $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

(1 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
(2 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
(3 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

(4 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
(5 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
(6 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג :

(1 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}$
(2 $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$
(3 $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

(1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ (3 $\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}$

(4 $\begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (5 $\begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}$ (6 $\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(5) נתון: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$. חשב:

(1 $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$ (2 $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$ (3 $\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) א. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

ב. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה:

1) $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\neq 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$

2) $a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1, j=n\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

3) $a_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

4) $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & \text{אחרת}\end{cases}$

5) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1)\end{pmatrix}$

7*) $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\end{cases}$

* בסעיף 7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3,b=1,c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y\end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

1) $|ABA^{-1}B^T|$ 2) $|4A^2B^3|$ 3) $|-A^{-2}B^TA^3|$ 4) $|-2A^2A^T adjB|$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A|=0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$. מצא את n .

ז. נתונים: $\det\left(A_{nxn}\right)=2,\ \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

1) $$\begin{aligned} x+2y&=5\\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$$

2) $$\begin{aligned} x+z&=3\\ 4x+y+8z&=21\\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$$

3) $$\begin{aligned} x+2z+5t&=8\\ -2x-6y&=-8\\ 5x+3y-7z+4t&=5\\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1\\ x+ky+z+t+r&=1\\ x+y+kz+t+r&=1\\ x+y+z+kt+r&=1\\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x=y=z=t=r$

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1}.

1) $$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$$

2) $$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$$

3) $$A=\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&2&-1&0\\0&1&1&1\\1&3&-1&-2\end{pmatrix}$$

(14) נתון:

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

חשב: 1) $(adjA)_{1,5}$ 2) $\left(A^{-1}\right)_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש-A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש-A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש-A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A,B הפיכות. C,D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: 1) $C+D$ 2) $A+B$ 3) AD 4) CD 5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ 2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$.

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2),\ (-1,3,1),\ (1,1,-1)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

פתרונות – פרק 3

(1) 1) $ad-bc$. 2) 29 . 3) -1. 4) -1. 5) -3. 6) -14. 7) 24. 8) 234. 9) -300. 10) 9.
11) 6. **(2)** 1) 0. 2) 0. 3) 3. 4) 24. 5) 44. 6) 104. **(3)** 1) 120. 2) 114. 3) 6.

(5) 1) -8. 2) 16. 3) 9. **(7)** 1) $n!$. 2) $(-1)^{n-1}n!$. 3) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$.

4) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$. 5) 1. 6) $2\cdot 3^{n-2}$.

7) א. $D_3=a^3-2abc$, $D_2=a^2-bc$, $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$.

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$. 2. $D_{20}=2^{21}-1$. **(8)** 0. **(9)** 1) 4. 2) 2^{13}. 3) -8. 4) -2^{11}.

(10) ב. 81/32. ג. $|A|=18, |B|=-2/3$. ו. 7. ז. 4^n. **(11)** 1) $x=1,\ y=2$.

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$. 3) $x=y=z=t=1$. **(12)** א. $k\neq 1, k\neq -4$. ב. $k=-2$.

ג. לא.

(13) 1) $adj(A)=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(14) 1) 240. 2) 0.5. **(15)** 1) לא. 2) לא. 3) לא. 4) לא. 5) כן. **(16)** $k=0$.

(17) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x-y+4z+2=0$. ד. 2.

תרגילים – פרק 4

מרחבים וקטוריים

סימונים:

R^n - המרחב הוקטורי של כל הוקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R .

$M_n\left[R\right]$ - המרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n\left[R\right]$ - המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F\left[R\right]$ - המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה R.

תת-מרחבים

(1) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של R^3 :

א. $W=\{(a,b,c)\mid a+b+c=0\}$.

ב. $W=\{(a,b,c)\mid a=c\}$.

ג. $W=\{(a,b,c)\mid a=3b\}$.

ד. $W=\{(a,b,c)\mid a<b<c\}$.

ה. $W=\{(a,b,c)\mid a=c^2\}$.

ו. $W=\{(a,b,c)\mid b=a+d,\ c=a+2d\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

ז. $W=\{(a,b,c)\mid b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$ כלומר a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של $M_n\left[R\right]$:

א. W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A\mid A=A^T\}$.

ב. W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B.

כלומר, $W=\{A\mid AB=BA\}$.

ג. W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A\mid |A|=0\}$.

ד. W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A\mid A^2=A\}$.

ה. W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

ו. W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס. כלומר,

$W=\{A\mid AB=0\}$.

ז. W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A \mid tr(A)=0\}$.

ח. W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $P_n[R]$.

א. W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x) \mid p(4)=0\}$.

ב. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

ג. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≤ 4. כלומר, $W=\{p(x) \mid \deg(p)\le 4\}$.

ד. W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

ה. W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n כאשר $4\le n\le 7$.

ו. $W=\{p(x) \mid p(0)=1\}$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $F[R]$.

א. W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות. כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x) \mid f(-x)=f(x)\}$.

ב. W מורכב מכל הפונקציות החסומות. כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x) \mid |f(x)|\le M\}$.

ג. W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

ד. W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

ה. W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

ו. $W=\left\{f(x) \mid \int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב $[0,1]$).

ז. $W=\left\{f(x) \mid f'(x)=0\right\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ח. $W=\left\{f(x) \mid f'(x)=1\right\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ט. $W=\left\{f(x) \mid f(x)=f(x+1)\right\}$.

(5) בדוק האם $W=\left\{(z_1,z_2,z_3) \mid z_2=\overline{z_1}, z_3=z_1+\overline{z_1}\right\}$ הוא תת מרחב של C^3:

א. מעל השדה הממשי R.

ב. מעל שדה המרוכבים C.

<u>צירופים לינאריים, מרחב נפרש, תלות לינארית</u>

(6) נתונים הוקטורים הבאים :

$u_1=(4,1,1,5)$, $u_2=(0,11,-5,3)$, $u_3=(2,-5,3,1)$, $u_4=(1,3,-1,2)$.

א. 1. האם u_1 הוא צירוף לינארי של u_4 ?

2. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלוייה לינארית ?

ב. 1. האם u_3 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

2. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

ג. 1. האם u_4 הוא צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

2. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלוייה לינארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף לינארי של הוקטורים האחרים.

ד. נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

1. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

2. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$.

3. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהייה תלוייה לינארית.

ה. נתון $v=(a,b,c,d)$

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה צירוף לינארי של u_1 ו- u_2 ?

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהייה תלוייה לינארית ?

ו. הבע את הוקטור $(2,-3,3,1)$ כצירוף לינארי של u_1 , u_2 ו- u_3 .

בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

ז. הבע את הוקטור $(7,10,-2,11)$ כצירוף לינארי של u_1 , u_2 , u_3 ו- u_4 . בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

(7) נתונות המטריצות הבאות :

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 11\\ -5 & 3\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 3 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

1. בדוק האם המטריצות תלויות לינארית מעל $M_2[R]$.

2. במידה והמטריצות תלויות רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.

3. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

(8) נתונים הפולינומים הבאים :

$$p_1(x)=4+x+x^2+5x^3\ ,\ p_2(x)=11x-5x^2+3x^3\ ,$$

$$p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3\ ,\ P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3 .$$

1. בדוק האם הפולינומים תלויים לינארית מעל $P_3[R]$.

2. במידה והפולינומים תלויים לינארית רשום כל פולינום כצירוף לינארי של שאר הפולינומים.

3. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

(9) עהוא איזה ערכים של a,b,c הוקטורים הבאים תלויים לינארית :

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}.$$

(10) נתון כי קבוצת הוקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלוייה לינארית ב- $V[F]$.

בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות לינארית, במידה שכן רשום כל וקטור כצירוף של הוקטורים האחרים :

א. $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

ב. $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

ג. $\{u+v,v+w,w\}$

(11) בדוק האם הוקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$ תלויים לינארית ב- C^3

א. מעל C.   ב. מעל R.

<u>בסיס ומימד</u>

<u>בדיקה האם קבוצת וקטורים מהווה בסיס למרחב</u>

(12) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

1) $\{ (1,0,1), (0,0,1) \}$

2) $\{ (1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1) \}$

3) $\{ (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) \}$

(13) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

1) $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix}\right\}$

2) $\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&1\\2&3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&6\\7&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5&16\\7&8\end{pmatrix}\right\}$

3) $\left\{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

(14) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

1) $\{ 1+x,\ x^2+2x+3 \}$

2) $\{ 1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^3, x-x^3 \}$

3) $\{ 1+2x+3x^3,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2 \}$

(15) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9), (2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3.

ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים בלתי תלויה לינארית ב- T.

ג. השלם את T' לבסיס של

<u>מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית</u>

(16) לפניך 3 מערכות של משוואות הומוגניות :

1) $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע״י מערכת המשוואות 1).

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע״י מערכת המשוואות 2).

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע״י מערכת המשוואות 3) .

א) מצא בסיס וממד ל- W , U ו- V.

ב) 1) מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$. 2) מצא ממד ל- $U \cap V$.

ג) מצא בסיס ל- $U \cap V$.

(17) נתון $U=\left\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(18) נתון $U=\left\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(19) נתון $U=\left\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(20) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(21) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \mid A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1 \\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(22) נתון $U=\left\{p(x)\in P_3[R] \mid p(1)=0\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד לתת מרחב

(23) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U = span\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\}$$

$$V = span\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\}$$

א. מצא בסיס , ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצא בסיס , ממד ומשוואות ל- V .

ג. מצא בסיס וממד ל- $U \cup V$.

ד. מצא בסיס וממד ל- $U \cap V$.

(24) לפניכם תת מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U = span\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\}.$$

מצא בסיס וממד ל- U.

(25) לפניכם תת מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U = span\{1+x-x^2+2x^3, 4+x-x^2+x^3, 2-x+x^2-3x^3\}.$$

מצא בסיס וממד ל- U.

מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה

(26) מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצות הבאות וציין את דרגת המטריצה (rank) :

1) $$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>וקטורי קואורדינטות, שינוי בסיס</u>

(27) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1=\{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2=\{(1,0,1),(0,1,1),\ (0,0,1)\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות :

1) $[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}$ 2) $[M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}$ 3) $[M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

(27) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1=\{1+x,x,\ x+x^2\}\ ,\quad B_2=\{\ 1+x^2,x+x^2,\ x^2\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

(28) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B. סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E. סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_B^E$.

תרגילים – פרק 5

העתקות (טרנספורמציות) ליניאריות

העתקות ליניאריות

(1) הגדר והדגם את המושג העתקה (טרנספורמציה) ליניארית. הגדר את המושג אופרטור ליניארי.

(2) עבור כל אחת מההעתקות הבאות, קבע האם היא העתקה ליניארית.

1) $T: R^2 \to R^2$; $T(x,y)=(x+y,x-y)$

2) $T: R^3 \to R^3$; $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)$

3) $T: R^3 \to R^2$; $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)$

4) $T: R^2 \to R^3$; $T(x,y)=(xy,y,z)$

5) $T: R^3 \to R^3$ $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)$

6) $T: M_n[R] \to M_n[R]$; $T(A)=BA+AB$ $\quad (B \in M_n[R])$

7) $T: M_n[R] \to M_n[R]$; $T(A)=A+A^T$

8) $T: M_n[R] \to M_n[R]$; $T(A)=|A|\cdot I$

9) $T: M_n[R] \to M_n[R]$; $T(A)=A\cdot A^T$

10) $T: M_n[R] \to M_n[R]$; $T(A)=A^{-1}$

11) $T: P_3[R] \to P_2[R]$; $T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2$

12) $T: P_n[R] \to P_n[R]$; $T\left(p(x)\right)=p(x+1)$

13) $T: P_n[R] \to P_n[R]$; $T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)$

14) $T: P_n[R] \to P_{2n}[R]$; $T\left(p(x)\right)=p^2(x)$

15) $T: C[F] \to C[F]$; $T\left(z\right)=\overline{z}$ $\quad (F=C, F=R)$

(3) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה) ההעתקה הבאה תהיה לינארית:

$$T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)\ \ ;\ \ T:R^2\to R^2$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

א. $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(1,1,0)=(1,2,3)\,,\,T(0,1,1)=(4,5,6)\,,\,T(0,0,1)=(7,8,9)$.

ב. $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(1,0,1)=(1,1,0)\,,\,T(0,1,1)=(1,2,1)\,,\,T(0,0,1)=(0,1,1)$.

ג. $T:R^4\to R^3$ כך ש- $T(1,2,-1,0)=(0,1,-1),T(-1,0,1,1)=(1,0,0),T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

ד. $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T(1)=4,T\left(4x+x^2\right)=x,T\left(1-x\right)=x^2+1$.

__**תמונה וגרעין של העתקות לינאריות**__

(5) נתונה העתקה לינארית $T:V\to U$. הגדר והדגם את המושגים:

א. הגרעין של ההעתקה - $KerT$. ב. התמונה של ההעתקה - $\operatorname{Im}T$.

ג. משפט הממד להעתקות (השתמש במושגים הדרגה של העתקה- $\operatorname{rank}T$ והאיפוס של העתקה - $\operatorname{null}T$)

(6) עבור כל אחת מההעתקות הבאות מצא בסיס וממד לגרעין ולתמונה:

1) $T:R^4\to R^3\ ,\ T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)$

2) $T:R^3\to R^4\ ,\ T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)$

3) $$T:R^4\to R^3\ ,\ T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$$

4) $$T:M_2[R]\to M_2[R]\ ,\ T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A$$

5) $T:P_2[R]\to P_2[R]\ ,\ T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)$

6) $D:P_3[R]\to P_3[R]\ ,\ D\left(p(x)\right)=p'(x)$

(7) מצא העתקה לינארית $T:R^3 \to R^3$ אשר תמונתה נפרשת על ידי $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

(8) מצא העתקה לינארית $T:R^4 \to R^3$ אשר הגרעין שלה נפרש על ידי $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

(9) א. נתונה העתקה לינארית $T:V \to U$. הוכח כי אם $\dim \mathrm{Im}T = \dim KerT$ אז הממד של V זוגי.

ב. האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4 \to R^3$?

<u>העתקות לינאריות חח"ע ולא חח"ע, העתקות לינאריות על, איזומורפיזם</u>

(9) הסבר את המושגים העתקה לינארית חד-חד ערכית (חח"ע) והעתקה לינארית על. כמו כן הסבר את המושג איזומורפיזם והעתקה הפוכה.

(10) עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבע האם היא <u>חח"ע</u>, האם היא <u>על</u>, האם היא <u>איזומורפיזם</u> והאם קיימת <u>העתקה הפוכה</u>.

1) $T:R^3 \to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3 \to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R] \to R^3$, $T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R] \to P_3[R]$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

הערה: העתקה חח"ע נקראית גם לא סינגולרית

<u>פעולות עם העתקות לינאריות</u>

(11) תהיינה $S:R^3 \to R^2$ ו- $T:R^3 \to R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי:

$$S(x,y,z)=(x-z,y) \quad , \quad T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$$

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

1) $S+T$ 2) $4S$ 3) $4S-10T$ 4) TS 5) ST

6) T^2 7) T^{-1} 8) T^{-2} 9) S^{-1} 10) S^2

תרגילים – פרק 6

מטריצות והעתקות ליניאריות

הערה: כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (פרק 4). לפיכך חמשת הסעיפים הראשונים בשאלה הראשונה עוסקים בכך.

מטריצה שמייצגת העתקה

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{ (1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1) \}\ ,\quad B_2 = \{ (1,0,1), (0,1,1),\ (0,0,1) \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2. סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1. סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

(1 $[M]_{B_2}^{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [v]_{B_2}$ (2 $[M]_{B_1}^{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [v]_{B_1}$ (3 $[M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}$

נתונה העתקה ליניארית: $T(x,y,z) = (x+y, y+z, z-x)\ ,\ T : R^3 \to R^3$

ו. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1. סמן מטריצה זו ב- $\left[T\right]_{B_1}$.

ז. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2. סמן מטריצה זו ב- $\left[T\right]_{B_2}$.

ח. אשר את הטענות הבאות :

(1 $[T]_{B_1} \cdot [v]_{B_1} = [T(v)]_{B_1}$ (2 $[T]_{B_2} \cdot [v]_{B_2} = [T(v)]_{B_2}$

(3 $\left[M\right]_{B_2}^{B_1} \cdot \left[T\right]_{B_1} \cdot \left[M\right]_{B_1}^{B_2} = \left[T\right]_{B_2}$

ט. האם ההעתקה הפיכה ?

י. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

יא. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

יב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון ?

(2) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3. יהי T אופרטור לינארי על R^3.

נתון כי: $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1 & -9 & 6\\ 1 & 6 & -4\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$ ו- $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29 & -45 & 6\\ 20 & 31 & -4\\ 13 & 19 & -1\end{pmatrix}$

חשב את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

(3) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $T:M_2[R]\to M_2[R]$, $T(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}A$

לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

(4) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D:P_4[R]\to P_3[R]$, $D\big(p(x)\big)=p'(x)$

לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- 4.

<u>מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס</u>

(5) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הלינאריות הבאות ביחס לבסיסים

הסטנדרטיים של R^n.

א. $T:R^2\to R^3$, $T(x,y)=(x+y,y+z,z-x)$.

ב. $T:R^4\to R^2$, $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$.

(6) תהי $T:R^3\to R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי $T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$.

חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס $B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$

של R^3 לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של R^2. כלומר את $[T]_{B_1}^{B_2}$.