

GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תוכן עניינים

פרק 1 – משוואות מסוגים שונים	3
משוואה ממעלה ראשונה	3
שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה	3
משוואה ממעלה שנייה	6
משוואות עם מכנה	6
משוואות ממעלה שלישית ומעלה	7
משוואות מעריכיות	9
משוואות לוגריתמיות	10
משוואות עם פרמטרים	12
משוואות עם שורשים	15
משוואות עם ערך מוחלט	16
מערכת משוואות ממעלה שנייה	17
מערכת משוואות מעריכיות	19
מערכת משוואות לוגריתמיות	20
מערכת משוואות מעריכיות לוגריתמיות	21
פרק 2 – אי-שוויונים מסוגים שונים	22
אי-שוויונים	22
אי-שוויון ממעלה ראשונה	22
אי-שוויון ממעלה שנייה	22
אי-שוויון ממעלה שלישית	24
אי-שוויון עם מנה	24
מערכת וגם	25
אי-שוויונים מעריכיים	25
אי-שוויונים לוגריתמיים	26
תחום הגדרה	28
פרק 3 – סדרות	31
סדרה חשבונית	31
סדרה הנדסית	34
סדרה הנדסית אינסופית	37
פרק 4 – בעיות גידול ודעיכה	40
פרק 5 – פרבולה	44

פרק 1 – משוואות מסוגים שונים

משוואה ממעלה ראשונה

- בסרטון זה מוסבר מהי משוואה.

1. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } 6x+2=8 & \text{ב. } 7-2x=7 & \text{ג. } 2x+x=24 \\ \text{ד. } 2x+6=8+x & \text{ה. } -7x+5+2x=4x-13 & \text{ו. } 6x-3+5-7x=x-5x-7 \\ \text{ז. } 2-5x+7=-3x+8 \end{array}$$

2. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } 3(x-1)-4=2 & \text{ב. } 7x-4(3-4x)=-x & \text{ג. } 6(4-x)-(6-x)=3x \\ \text{ד. } 5x-(3x-7)4=21 & \text{ה. } x(x-5)=x^2-7x+8 & \text{ו. } (7-x)(1-x)-(x-3)^2=0 \end{array}$$

פתרונות

$$\begin{array}{l} (1) \text{ א. } x=1 \quad \text{ב. } x=0 \quad \text{ג. } x=8 \quad \text{ד. } x=2 \quad \text{ה. } x=2 \quad \text{ו. } x=-3 \quad \text{ז. } x=\frac{1}{2} \quad \text{א. } x=3 \\ \text{ב. } x=\frac{1}{2} \quad \text{ג. } x=2\frac{1}{4} \quad \text{ד. } x=1 \quad \text{ה. } x=4 \quad \text{ו. } x=-1 \end{array}$$

שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה

1. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } \begin{cases} 3x+y=11 \\ y=5 \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} -3x+2y=-16 \\ x=5y+14 \end{cases} & \text{ג. } \begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+4y=4 \end{cases} \\ \text{ד. } \begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+7y=11 \end{cases} & \text{ה. } \begin{cases} y=x-3 \\ y=2x+4 \end{cases} \end{array}$$

2. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } \begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases} & \text{ב. } \begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{2}{5}(x-y) = \frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4} - \frac{y}{2} = 1 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

3. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

5. פתור את המשוואות הבאות:

$$5x - 3 + x = 4x + 2x - 3 \quad \text{ב.}$$

$$6(x-2) = 2x + 5 + 4x \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 2(x-y) + 4y = 1 + x \\ 2 - 7y + x = 3(x-y) \end{cases} \quad \text{ד.}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 4x + 8y = 5 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

6. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 14 \\ 5x + 3y = 23 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ x - 3y = 3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

פתרונות

- 1) א. $(2,5)$ ב. $(4,-2)$ ג. $(0,1)$ ד. $(-2,3)$ ה. $(-7,-10)$ ו. $x = -3$ ז. $x = \frac{1}{2}$
- 2) א. $(6,5)$ ב. $(7,1)$ ג. $(7,2)$ 3) א. $(1,1)$ ב. $(-3,1)$ ג. $(1,1)$ 4) א. $(-1,-3)$ ב. $(2,10)$
- ג. $(-2,4)$ 5) א. אין פתרון ב. אינסוף פתרונות ג. אין פתרון למערכת המשוואות ד. אינסוף פתרונות 6) א. $\left(4, \frac{1}{3}\right)$ ב. $\left(-\frac{4}{5}, 9\right)$

משוואה ממעלה שנייה

1. פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2 - 36 = 0$

ב. $32x^2 - 18 = 0$

2. פתור את המשוואות הבאות:

א. $-7x^2 - 14x = 0$

ב. $5x^2 - x = 0$

3. פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

4. פתור את המשוואות הבאות:

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 3$

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

פתרונות

(1) א. $x = \pm 6$ ב. $x = \pm \frac{3}{4}$ (2) א. $x_1 = 0, x_2 = -2$ ב. $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$

(3) א. $x_1 = 2, x_2 = -5$ ב. $x_1 = 2, x_2 = 8$ ג. $x = \frac{2}{5}$ ד. אין פתרון למשוואה

(4) א. $x_1 = 0, x_2 = 1$ ב. $x_1 = -1, x_2 = -1\frac{1}{4}$ ג. $x_1 = 1, x_2 = -10$

משוואות עם מכנה

1. פתור את המשוואות הבאות:

א. $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4$

ב. $\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1$

ג. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}$

ד. $\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1$

$$5\left(\frac{x}{3}-\frac{x}{7}\right)-x=1 \quad \text{ו.}$$

$$\frac{2}{5}(x-3)-\frac{3}{15}(4-x)=x+2 \quad \text{ה.}$$

2. פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{1}{2}-\frac{x}{x-1}=0 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{1}{4}-\frac{2}{x}=0 \quad \text{א.}$$

$$\frac{5}{2x-1}=\frac{4}{3x+2} \quad \text{ד.}$$

$$\frac{3}{x}=\frac{1}{x+2} \quad \text{ג.}$$

$$\frac{x+5}{3x^2}-\frac{1}{6x}=\frac{1}{x} \quad \text{ה.}$$

3. פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{7}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}+\frac{3}{2-2x}=0 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{x^2+2}{3x^2+5x}=\frac{3x-1}{9x+15} \quad \text{א.}$$

$$\frac{4x^2-24x+36}{x-3}=12 \quad \text{ד.}$$

$$\frac{3}{(2-x)^2}+\frac{5}{12-3x^2}=0 \quad \text{ג.}$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{x^2-9}{x+3}+x=x^2-18 \quad \text{ב.}$$

$$\frac{4x+1}{3}-\frac{x+2}{2}=\frac{2}{x} \quad \text{א.}$$

$$\frac{3}{2x+2}-\frac{2x-5}{2(x-1)^2}-\frac{4}{1-x^2}=0 \quad \text{ג.}$$

פתרונות

- 1) א. $x=-18$ ב. $x=-30$ ג. $x=-1$ ד. $x=1$ ה. $x=-10$ ו. $x=-21$ ז. $x=8$ (2)
 ב. $x=-1$ ג. $x=-3$ ד. $x=-2$ ה. $x=2$ (3) א. $x=-6$ ב. $x=-7$ ג. $x=-7$
 ד. $x=6$, $x \neq 3$ (4) א. $x_1=2$, $x_2=-1.2$ ב. $x=5$, $x \neq -3$ ג. $x_1=0$, $x_2=-5$

משוואות ממעלה שלישית ומעלה

1. פתור את המשוואה $5x^4+3x^2-8=0$

2. פתור את המשוואה $x^4-3x^2+2=0$

3. פתור את המשוואה $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$.

4. פתור את המשוואה $2x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0$.

פתרונות

(1) $x = \pm 1$ (2) $x = \pm 1$ (3) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = \frac{1}{2}$ (4) $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = -2\frac{1}{2}$

משוואות מעריכיות

- בסרטון זה הסבר על חוקי החזקות.
- בסרטון זה הסבר על משוואות מעריכיות.
- בסרטון זה הסבר על משוואות מעריכיות עם חיבור וחסור.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} 1. \quad (25 \cdot 0.2^{2x})^2 &= \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x} \\ 2. \quad \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} &= \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x} \\ 3. \quad \sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} &= 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} \text{א.} \quad 3^x &= 5^x \\ \text{ב.} \quad 5^{3-x} &= \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{2x}{3}-2} \end{aligned}$$

$$5. \quad \text{פתור את המשוואה} \quad e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

6. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} \text{א.} \quad 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} &= 162 \\ \text{ב.} \quad 2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} &= 227 \end{aligned}$$

$$7. \quad \text{פתור את המשוואה} \quad 5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$$

$$8. \quad \text{פתור את המשוואה} \quad e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1$$

$$9. \quad \text{פתור את המשוואה} \quad 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

10. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{aligned} \text{א.} \quad 6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 &= 0 \\ \text{ב.} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} &= -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

11. פתור את המשוואות הבאות:

ב. $e^{2x} + e^x - 2 = 0$

א. $\frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$

12. פתור את המשוואה $e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$.

פתרונות

- (1) $x = 1$ (2) $x = -2$ (3) $x = -\frac{1}{2}$ (4) $x = 0$ (5) $x = 3$ (6) $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{6}$ (7) $x = 1$ (8) $x = -2$ (9) $x = -1$ (10) $x = \pm 1$ (11) $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$ (12) $x = 0$ (13) $x = 4$ (14) $x_1 = 0, x_2 = 1$ (15) $x = 0$ (16) $x = \pm 1$

משוואות לוגריתמיות

- בסרטון זה הסבר על הגדרת הלוגריתמים.
- בסרטונים 2-4 הסבר על כללי הלוגריתמים.
- בסרטון זה הסבר על הגדרת הלן.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 1.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 2.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 3.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 4.

1. מצא את ערכו של x :

ב. $\log_2 x = 16$

א. $\log_{36} 6 = x$

ד. $\log_x 64 = 3$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$

ו. $\log_x (3x + 4) = 2$

ה. $\log_x 25 = 2$

ח. $\ln x = -\frac{1}{2}$

ז. $\ln x = 2$

2. פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_x(x^2 + 6x) = 3$

ב. $\log_3(\log_x(x^2 + 6x)) = 1$

3. פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log_5(25^x - 20) = x$

ב. $\ln\left(e^{2x} - \frac{1}{2}\right) + \ln 2 = x$

4. פתור את המשוואה $\log_4 x + \log_x 4 = 2\frac{1}{2}$.

5. פתור את המשוואות הבאות:

א. $\log x \cdot \log(10x) = 2$

ב. $\ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2)$

6. פתור את המשוואות הבאות:

א. $x^{\log_5 x} = \frac{25}{x}$

ב. $x^{\ln x} = e^6 x$

7. מצא את ערכו של x :

א. $2^x = 5$

ב. $5^x = 8$

ג. $e^x = 2$

ד. $e^x = \frac{1}{2}$

ה. $e^x = -1$

8. פתור את המשוואה $x^{\frac{\log_2 x - 6}{4}} = \frac{4}{x}$.

9. פתור את המשוואה $\frac{\log_{5-x}(x+1)}{\log_{5-x}(x-1)} - 1 = \frac{1}{\log_{5-x}(x-1)}$.

10. פתור את המשוואה $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$.

פתרונות

1) א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$ ה. $x = 5$ ו. $x = 4$ ז. $x = e^2$

ח. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 2) א. $x = 3$ ב. $x = 3$ 3) א. $x = 1$ ב. $x = 0$ 4) $x_1 = 16, x_2 = 2$

5) א. $x_1 = \frac{1}{100}, x_2 = 10$ ב. $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, x_2 = \frac{1}{e}$ 6) א. $x_1 = \frac{1}{25}, x_2 = 5$

ב. $x_1 = e^3, x_2 = \frac{1}{e^2}$ 7) א. $x = 2.322$ ב. $x = 1.292$ ג. $x = 0.693$ ד. $x = -0.693$

ה. אין פתרון 8) $x_1 = 16, x_2 = \frac{1}{4}$ 9) $x = 3$ 10) $x_1 = \sqrt{e}, x_2 = e$

משוואות עם פרמטרים

1. פתור את המשוואה הבאה: $mx - 3m = 5x + 1$

2. פתור את המשוואה הבאה: $\frac{1}{3}(a - 3x) = \frac{1}{a}(ax - 3)$

3. פתור את המשוואה הבאה: $(x - 2a)(x - 2b) = x^2 - 2(a^2 + b^2)$

4. פתור את המשוואה הבאה: $\frac{m+1}{x-1} = \frac{m-1}{x+1}$

5. פתור את המשוואה הבאה: $\frac{x}{a^2 - a} - \frac{1}{2a} = \frac{ax + x}{2a^3 - 4a^2 + 2a} - \frac{2}{a^3 - 2a^2 + a}$

6. פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} x + my = 1 \\ x + y = m \end{cases}$

7. פתור את מערכת המשוואות הבאה: $\begin{cases} ax + y = 2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$

$$8. \quad \begin{cases} \frac{x}{m} + y = m \\ x - m^2 y = 1 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$9. \quad \begin{cases} (m-1)x - (2m+3)y = 5 \\ (m+2)x - (2m-1)y = 10m \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$10. \quad \begin{cases} (2a+b)x - (2a-b)y = 8ab \\ (2a-b)x - (2a+b)y = 8a^2 - 2b^2 \end{cases} \quad \text{פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$11. \quad x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \quad \text{פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$12. \quad x^2 - 2x + 4a = a^2 + 3 \quad \text{פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$13. \quad x^2 + m(x+10) = 2m^2 - 5x \quad \text{פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$14. \quad \frac{1}{a-x} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+x} = 0 \quad \text{פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$15. \quad (m^2 + 1)x^2 - m^2 x - 1 = 0 \quad \text{פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$16. \quad \frac{a}{x} + \frac{1}{b} = \frac{x}{a} + b \quad \text{פתור את המשוואה הבאה:}$$

$$17. \quad x + \frac{1}{x} = \frac{a-b}{a+b} + \frac{a+b}{a-b} \quad \text{פתור את המשוואה הבאה:}$$

פתרונות

$$x = a + 1 \quad (5) \quad x = -m \quad (4) \quad x = a + b \quad (3) \quad x = \frac{a^2 + 9}{6a} \quad (2) \quad x = \frac{3m + 1}{m - 5} \quad (1)$$

$$(9) \quad \left(m^2 - m + 1, \frac{m - 1}{m} \right) \quad (8) \quad \left(\frac{2a - 4}{a^2 - 1}, \frac{4a - 2}{a^2 - 1} \right) \quad (7) \quad (m + 1, -1) \quad (6)$$

$$x = a - 1, 3 - a \quad (12) \quad x = m + 1, m - 1 \quad (11) \quad (2a + b, 2a - b) \quad (10) \quad (2m + 1, m - 2)$$

$$x = \frac{a}{b}, -ab \quad (16) \quad x = 1, -\frac{1}{m^2 + 1} \quad (15) \quad x = \pm a\sqrt{3} \quad (14) \quad x = m - 5, -2m \quad (13)$$

$$x = \frac{a + b}{a - b}, \frac{a - b}{a + b} \quad (17)$$

משוואות עם שורשים

1. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{4x-3}=5$

2. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x+2}=x$

3. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{3x+1}+x=13$

4. פתור את המשוואה הבאה: $2x=16-3\sqrt{x-1}$

5. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{3x+5}=\sqrt{x+17}$

6. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x^2-5x+12}=2\sqrt{6-x}$

7. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x-5}=\sqrt{11-x^2}$

8. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{2x-1}+3=\sqrt{7x+1}$

9. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{9x-8}-3\sqrt{x+4}=-2$

10. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-x}=2$

11. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-2}=\sqrt{4x+1}$

12. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{2x-2}+\sqrt{5x-4}=\sqrt{3x-2}$

13. פתור את המשוואה הבאה: $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$

פתרונות

(1) $x = 7$ (2) $x = 2$ (3) $x = 8$ (4) $x = 5$ (5) $x = 6$ (6) $x = 4, -3$ (7) $x = 3$ (8) $x = 5$
 (9) $x = 12$ (10) $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (11) $x = 6$ (12) $x = 1$ (13) $x = 2$

משוואות עם ערך מוחלט

1. פתור את המשוואה הבאה: $|2x - 11| = 7$

2. פתור את המשוואה הבאה: $|3x - 24| = x$

3. פתור את המשוואה הבאה: $|12 - x| = 3x$

4. פתור את המשוואה הבאה: $2x - |8 - x| = 10$

5. פתור את המשוואה הבאה: $|4x - 5| = |2x + 13|$

6. פתור את המשוואה הבאה: $|14 - 3x| = 2|x + 5|$

7. פתור את המשוואה הבאה: $|x| + 7 = |2x|$

8. פתור את המשוואה הבאה: $|x + 2| + 6 = |2x - 4|$

9. פתור את המשוואה הבאה: $|x+2|+|2x-6|=|4x+8|$

10. פתור את המשוואה הבאה: $|10-3x|-|x+4|=|2x-6|$

פתרונות

(1) $x=2,9$ (2) $x=6,12$ (3) $x=3$ (4) $x=6$ (5) $x=9,-1\frac{1}{3}$ (6) $x=24,\frac{4}{5}$
 (7) $x=\pm 7$ (8) $x=12,-1\frac{1}{3}$ (9) $x=0,-12$ (10) $x=0$

מערכת משוואות ממעלה שנייה

1. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 20 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

2. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + 3y = 10 \end{cases}$$

3. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 3x^2 + 4y^2 = 16 \\ 5x^2 - 3y^2 = 17 \end{cases}$$

4. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 17 \\ xy = -10 \end{cases}$$

5. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x^2 - xy - 20y^2 = 0 \\ x + 6y = 1 \end{cases}$$

6. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 8y^2 = 8 \\ 3xy - 2y^2 = 4 \end{cases}$$

7. פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 33 \\ x + y = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x^2 - y^2 = 391 \\ 4x - y = 23 \end{cases} \quad \text{8. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 243 \\ x + y = 9 \end{cases} \quad \text{9. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = 91 \\ x^2y - xy^2 = 30 \end{cases} \quad \text{10. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = 21 \\ \frac{8}{x} - \frac{1}{y} = 13 \end{cases} \quad \text{11. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} xy = 24 \\ (y-x)^2 - 7(y-x) + 10 = 0 \end{cases} \quad \text{12. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x^2y - xy^2 = 84 \\ x^2 - 2xy + y^2 + 5x - 5y = 24 \end{cases} \quad \text{13. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = \frac{10}{3} \\ x^2 + y^2 = 9xy + 25 \end{cases} \quad \text{14. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

פתרונות

- (5, -2), (-5, 2) (4) $(\pm 2, \pm 1)$ (3) $(\pm 4, -2)$ (2) (2, 4), (4, 2) (1)
- (7, 4) (7) $\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right), (2, 1), (-2, -1)$ (6) $\left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{11}, \frac{1}{11}\right)$ (5)
- $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ (11) (6, 5), (-5, -6) (10) (3, 6), (6, 3) (9) (5, -3) (8)
- (7, 4), (-4, -7) (13) (4, 6), (-6, -4), (3, 8), (-8, -3) (12)
- (5, 45), (-5, -45), (45, 5), (-45, -5) (14) (-1.65, 6.35), (-6.35, 1.65)

מערכת משוואות מעריכיות

1. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} y = 3^x \\ y = 18 - 3^x \end{cases}$$
2. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} 5^{2x} - 5^y = 5^x - 25 \\ y - x = 2 \end{cases}$$
3. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} \frac{1}{3^y - 4} + \frac{3}{3^x - 2} - \frac{1}{3^x + 2} = 3 \\ 4^y = \sqrt{256^x} \end{cases}$$
4. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} 5^x + 2^y = 13 \\ 2 \cdot 5^x - 2^y = 2 \end{cases}$$
5. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^x = 42 \\ 3^{x+1} - 2^{y+1} = 73 \end{cases}$$
6. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} 5^{2x+1} + 8 \cdot 10^x - 2^{2y+4} = 0 \\ (\sqrt{3})^y = 27^{\frac{x-1}{6}} \end{cases}$$
7. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
$$\begin{cases} 6 \cdot 4^x - 7 \cdot 6^{y-1} + 2 \cdot 3^{x+y} = 6^y \\ \sqrt[4]{5^x} \cdot \sqrt{(5\sqrt{5})^y} = \sqrt[4]{125} \cdot 5^x \end{cases}$$

פתרונות

- (1) (2,9) (2) (0,2),(2,4) (3) (1,2) (4) (1,3) (5) (3,2) (6) (-1,-2)
(7) (1,2),(-1,0)

מערכת משוואות לוגריתמיות

1. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
- $$\begin{cases} y = \log_2 x \\ y = 6 - \log_2 x \end{cases}$$
2. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
- $$\begin{cases} \log_6^2 x - \log_6 (2y - 2) = 2 \\ \frac{1}{2}x = y - 1 \end{cases}$$
3. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
- $$\begin{cases} \log_3 (x + y) = \log_3 (4x + y) - 2 \\ \log_5 (5x + 3y) = 2 \end{cases}$$
4. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
- $$\begin{cases} \log_2 (\log_3 (x - y)) = 1 \\ \log_5 (x + y - 11) = \log_{25} x + \frac{1}{2} \log_5 (y + 2) \end{cases}$$
5. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
- $$\begin{cases} \log_5 x + 6 \log_4 y = 11 \\ 10 \log_5 x - 2 \log_4 y = 17 \end{cases}$$
6. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
- $$\begin{cases} \log_2 x^2 + \log_3 \frac{1}{y} = 9 \\ \log_2 \sqrt{x} + \log_{\sqrt[3]{3}} y = -1 \end{cases}$$
7. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
- $$\begin{cases} \log_5 x + 2^{\log_2 y} = 6 \\ x^y = 5^8 \end{cases}$$
8. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
- $$\begin{cases} xy = 27 \\ x^{\log_3 y} = 9 \end{cases}$$
9. פתור את מערכת המשוואות הבאה:
- $$\begin{cases} 2^{\frac{\log_1 (2x-y)}{2}} = 7^{\log_7 \frac{2x+y}{15}} \\ \log_3 x + \log_3 y = \frac{1}{\log_{28} 3} \end{cases}$$

פתרונות

$$\left(16, \frac{1}{3}\right) \text{ (6) } (25, 8) \text{ (5) } (16, 7) \text{ (4) } (8, -5) \text{ (3) } (36, 19), \left(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{12}\right) \text{ (2) } (8, 3) \text{ (1)}$$
$$(4, 7) \text{ (9) } (3, 9), (9, 3) \text{ (8) } (25, 4), (625, 2) \text{ (7)}$$

מערכת משוואות מעריכיות לוגריתמיות

$$\begin{cases} y = \log_2(4^x - 2) \\ y = 2x - 1 \end{cases} \quad \text{1. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 25^y = (5\sqrt{5})^{x+1} \\ \log_5 \sqrt{x} + \log_5 \sqrt{y} = \log_5 3 \end{cases} \quad \text{2. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} 3y + 5\log_6 x = 1 \\ 216 \cdot x^{2-y} = 6^{1-4y} \end{cases} \quad \text{3. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x \cdot \log_2 3 = \frac{y}{\log_9 2} \\ \log_3(9^x + 27) = 2y + \log_3 12 \end{cases} \quad \text{4. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} (2^x - 1)^2 - 4y + 3 = 0 \\ x = \log_2(y + 1) \end{cases} \quad \text{5. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

$$\begin{cases} x = \log_4(5 - 9^y) \\ \log_2(2^x + 3) = \log_4(29 - (3^y - 3)^2) \end{cases} \quad \text{6. פתור את מערכת המשוואות הבאה:}$$

פתרונות

$$(1, 1), (2, 3) \text{ (5) } \left(1, \frac{1}{2}\right), (2, 1) \text{ (4) } (36, -3), \left(6, -1\frac{1}{3}\right) \text{ (3) } (3, 3) \text{ (2) } (1, 1) \text{ (1)}$$
$$(1, 0) \text{ (6)}$$

פרק 2 – אי-שוויונים מסוגים שונים

אי-שוויונים

- בסרטונים 1-5 מוסבר מהו אי שוויון.

אי-שוויון ממעלה ראשונה

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1. $45x - 26 > 109$	2. $6x > 2(3x - 1)$
3. $2(x - 5) \geq \frac{1}{2}(4x + 6)$	4. $(x - 2)^2 + 4 < (x + 2)^2 + 20$
5. $\frac{8x - 4}{2} < \frac{9(x + 1)}{3}$	6. $4(6x - 8) < 8(3x - 4)$
7. $\frac{x - 6}{3} - \frac{x - 4}{4} \geq 12 - x$	8. $\frac{7 - x}{10} - \frac{3x - 1}{5} + \frac{x + 4}{3} < 7$

פתרונות

1) $x > 3$ 2) כל x 3) אף x 4) $x > -2$ 5) $x < 5$ 6) אף x 7) $x \geq 12$ 8) $x > -13$

אי-שוויון ממעלה שנייה

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1. $x^2 < 144$	2. $x^2 - 12x > -32$
3. $(x + 2)(x + 5) < 0$	4. $(x + 2)(x + 4) < 35$
5. $-x^2 + 13x + 30 < 0$	6. $(x - 3)(x - 7) \geq 8x - 56$
7. $(x - 5)^2 + x(x + 2) < 89$	8. $(5x + 6)^2 \leq 4(x - 3)^2$
9. $-3x^2 + 12x > 0$	10. $x^2 - 10x + 25 > 0$
11. $(x - 3)^2 > (x - 1)(x + 6) - x^2 - 3x$	12. $2x^2 + 2x + 24 \geq 0$

פתרונות

- (1) $-12 < x < 12$ (2) $x < 4$ או $x > 8$ (3) $-5 < x < -2$ (4) $-9 < x < 3$ (5) $x < -2$ או $x > 15$
(6) $x \geq 11$ או $x \leq 7$ (7) $-4 < x < 8$ (8) $-4 \leq x \leq 0$ (9) $0 < x < 4$ (10) $x < 5$ או $x > 5$
(11) $x > 5$ או $x < 3$ (12) כל x

אי-שוויון ממעלה שלישית
פתור את אי-השוויונים הבאים:

1. $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$
2. $x(x^2 + x + 1) > 0$
3. $(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0$
4. $x^3 - 25x \geq 0$
5. $(x^2 + 3x + 5)(x-2) > 0$
6. $(x^2 + 8x + 20)(3x-5) \leq 0$
7. $(x^2 - x - 6)(x-1) < 0$
8. $x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0$
9. $(x^2 + 6)(x+3) > 0$
10. $(x-2)(x-4)(x-1) < 0$

פתרונות

- (1) $x > 3$ או $1 < x < 2$ (2) $x > 0$ (3) $x \geq \frac{1}{2}$ או $-2 \leq x \leq -1$ (4) $x \geq 5$ או $-5 \leq x \leq 0$
- (5) $x > 2$ (6) $x \leq 1\frac{2}{3}$ (7) $1 < x < 3$ או $x < -2$ (8) $x = 3$ או $x \leq 0$ (9) $x > -3$ (10) $2 < x < 4$
- או $x < 1$

אי-שוויון עם מנה
פתור את אי-השוויונים הבאים:

1. $\frac{x-1}{x^2-9} > 0$
2. $\frac{x-1}{3x+2} \geq -3$
3. $\frac{1}{x^2-16} > 0$
4. $\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0$
5. $\frac{2x-1}{x-5} \leq 0$
6. $\frac{1}{-3(x-1)} < 0$
7. $\frac{x-1}{x+2} \leq 1$
8. $\frac{1}{x^2-5x+6} < 0$
9. $\frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0$
10. $\frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0$

פתרונות

$$(1) \quad x > 3 \text{ או } -3 < x < 1 \quad (2) \quad x \geq \frac{1}{2} \text{ או } x < -\frac{2}{3} \quad (3) \quad x > 4 \text{ או } x < -4 \quad (4) \quad x > 3 \text{ או } 2 < x < 3$$

$$(5) \quad \frac{1}{2} \leq x < 5 \quad (6) \quad x > 1 \quad (7) \quad x > -2 \quad (8) \quad 2 < x < 3 \quad (9) \quad 1 \leq x \leq 6 \quad (10) \quad x > 6 \text{ או } x < 2$$

מערכת וגם

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$1. \quad 3 < x+1 < 5$$

$$2. \quad 0 < \frac{1}{x+4} < 2$$

$$3. \quad -1 < \frac{x-1}{x+1} < 1$$

$$4. \quad 0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4$$

$$5. \quad 6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7$$

$$6. \quad 6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5}$$

$$7. \quad -1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3}$$

$$8. \quad \frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11$$

פתרונות

$$(1) \quad 2 < x < 4 \quad (2) \quad x > -3 \frac{1}{2} \quad (3) \quad x > 0 \quad (4) \quad x > 2 \frac{2}{3} \text{ או } x < 2 \frac{2}{5} \quad (5) \quad -\frac{5}{3} \leq x \leq 7 \quad (6) \quad x \geq 10$$

$$(7) \quad 1 \leq x \leq 13 \quad (8) \quad \emptyset$$

אי-שוויונים מעריכיים

• בסרטונים זה מוסבר מהו אי-שוויון מעריכי.

$$1. \quad \text{פתור את אי השוויון הבא: } 3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$$

$$2. \quad \text{פתור את אי השוויון הבא: } \sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}}$$

$$3. \quad \text{פתור את אי השוויון הבא: } e^{\sqrt{x}+1} > e^{2x}$$

4. פתור את אי השיויון הבא: $e^x > 3$

5. פתור את אי השיויון הבא: $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x}$

6. פתור את אי השיויון הבא: $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

7. פתור את אי השיויון הבא: $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

8. פתור את אי השיויון הבא: $e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0$

פתרונות

(1) $x < \frac{2}{3}$ (2) $1 \leq x < \frac{5}{4}$ (3) $x \leq -1 \cup 0 \leq x < 1$ (4) $x > \ln 3$ (5) $x \leq \frac{1}{8}$ (6) $0 < x < 1$ (7) $x < \ln 4 \cup x < 0$ (8) $x = 0$

אי-שוויונים לוגריתמיים

- בסרטונים זה מוסבר מהו אי-שוויון לוגריתמי.

פתור את אי-השוויונים הבאים:

1. $\log_2 x < \log_2 (5x - 20)$ 2. $\log_6 (x^2 - 5x) < 1$

3. $\log_3 x > \log_9 (15 - 2x)$ 4. $\log_{\frac{1}{2}} (1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}} (7 - x)$

5. $\ln x \geq \ln (x^2 - 12)$ 6. $\ln x < 3$

7. $\ln^2 x - 6 \ln x < 7$ 8. $\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x}$

פתרונות

$$0 < x < e^3 \text{ (6)} \quad 2\sqrt{3} < x \leq 4 \text{ (5)} \quad -3 \leq x < \frac{1}{3} \text{ (4)} \quad 3 < x < 7\frac{1}{2} \text{ (3)} \quad x < 0 \text{ או } x > 5 \text{ (2)} \quad x > 5 \text{ (1)}$$

$$x \neq 1 \text{ וגם } \frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2 \text{ (8)} \quad \frac{1}{e} < x < e^7 \text{ (7)}$$

תחום הגדרה

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ב. } f(x) = 2\sqrt{x-3}$$

$$\text{ג. } f(x) = 3x\sqrt{1-2x} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}}$$

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{2. } f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3} \quad \text{3. } \frac{1}{x+\sqrt{x+6}}$$

$$\text{4. } \sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}} \quad \text{5. } \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1}$$

6. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1}$$

$$\text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2}$$

$$\text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3}$$

7. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \ln x \quad \text{ב. } f(x) = \ln(x^2)$$

$$\text{ג. } f(x) = \log_3(x^2-8x-20) \quad \text{ד. } f(x) = \ln(e^x-4)$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{x-1}{\ln x-1} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2\ln x - 3}$$

$$f(x) = \sqrt{\ln x - 1} \quad .\text{r}$$

פתרונות

(1) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \leq \frac{1}{2}$ ד. $x > -4$ ה. $x > 2$ או $x < -5$ ו. $x > 3$ או $-3 < x < 0$

ז. $1 < x \leq 2$ או $-2 < x < 1$ או $x < -2$ (2) $x \geq 7$ (3) $-6 \leq x \neq -2$ (4) $x \geq 1$ או $x \leq -1\frac{1}{2}$

(5) $-2 \leq x \neq 1$ או $x \leq -3$ (6) א. כל x ב. $x \neq 0$ ג. $x \neq \ln 5$ ד. $x \neq 0, \ln 2$ ה. כל x

ו. $0 \leq x \neq \frac{2}{5}$ ז. $x \geq \ln 3$ או $x \leq 0$ (7) א. $x > 0$ ב. $x \neq 0$ ג. $x > 10$ או $x < -2$

ד. $x > \ln 4$ ה. $0 < x \neq e$ ו. $x > 0$ וגם $\frac{1}{e}, \frac{1}{e^3}$ ז. $x > e$

פרק 3 – סדרות

סדרה חשבונית

1. נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
2. בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
3. מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4\frac{1}{2}, 7, 9\frac{1}{2}, 12, 14\frac{1}{2}, \dots, 49\frac{1}{2}$
4. בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24.
מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
5. תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת.
כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
6. כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
7. כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$
8. מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית:
 $x-3, 3x-4, x^2-1$
9. נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$

הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.
10. בסדרה חשבונית $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.
א. הוכח: $a_5 = 0$.
ב. נתון: $a_3 - a_{11} = 24$. מצא את: a_1 ואת d .
ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$.
מצא את ערך האיבר השלישי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.
11. מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \dots$
12. נתונה הסדרה החשבונית: $-13, -7, -1, 5, \dots$
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?
13. תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת.
כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

14. נתונה הסדרה החשבונית: $-71, -67, -63, \dots$. כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?
15. נתונה הסדרה החשבונית: $4, 13, 22, 31, \dots$. בסדרה יש 36 איברים. חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.
16. נתונה הסדרה החשבונית: $4, 9, 14, 19, \dots, 599$. מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.
17. סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב-1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.
 א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .
 ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?
18. נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.
 א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.
19. בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7, וה-16 הוא אפס.
 כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.
 א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
 ב. מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.
 ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.
20. סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1 = k, a_{n+1} = 8n - a_n + 3$.
 א. הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
 ג. חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.
21. נתונים שני טורים חשבוניים: $150, 144, 138, \dots$. לשני הטורים אותו מספר איברים. $90, 93, 96, \dots$.
 ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.
 א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.
- מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני.
 ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480.
 ב. מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

22. נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה הוא d_2 . ידוע כי: $d_1 = -2d_2$.

סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n .

א. מצא את הפרש הסדרה $a_n - d_1$.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50} .

מצא את a_1 ואת b_1 .

23. נתונה הסדרה החשבונית: $-21, -17, -13, \dots$

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

24. בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612. הוכח כי $nd = 60$.

25. בסדרה חשבונית, שבה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

26. לפינך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$. א.

i. מצא את x .

ii. מצא את הפרש הסדרה.

ב. ידוע כי: $a_{12} = 0$. מצא את a_1 .

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

27. בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס. א. הוכח את הטענות הבאות:

i. $a_1 = -4d$

ii. $S_9 = 0$

האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.

ב. מצא את a_1 ואת d .

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

28. בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- א. הוכח כי $dn = 66$.
- ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.
- ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

פתרונות

1. $a_{43} = -235$ 2. $d = 4, a_1 = -5$ 3. 20 איברים 4. 48 איברים 5. 15 קפיצות
6. 58 מספרים 7. 31 איברים חיוביים 8. $x=1, x=4$ 9. $a_{19} = 59$
10. ב. $a_1 = 12, d = -3$ ג. $b_5 = -3$ 11. $S_{14} = 413$ 12. 21 איברים. 13. 16 דקות
14. 37 איברים. 15. 3637 16. 23,920 17. א. $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.
18. א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$ 19. א. $a_1 = 50, d = -6$ ב. $a_{10} = -4$
- ג. $n = 6$ 20. א. $a_1 = k, a_2 = 11 - k, a_3 = k + 8, a_4 = 19 - k$ ב. 8 ג. 830 21. א. $n = 81$ ב.
22. $n = 16$ א. $d_1 = 4$ ב. $a_1 = -52, b_1 = 95$ 23. זוגיים: $S = 135$ זוגיים: $S = 99$ 25.
- 29 איברים. 26. א. i. $d = 11$ ii. $x = -50$ ב. $a_1 = -121$ ג. $S = 2156$
27. ב. $a_1 = -8, d = 2$ ג. $n = 36$ 28. ב. $S = 22a_1 + 693$ ג. $a_9 = 1$

סדרה הנדסית

1. נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$
- מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.
2. מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$
3. בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
4. בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
5. בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
6. תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7. מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית.
מצא גם את מנת הסדרה: $x-6, x+4, 4x+1$.
8. נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.
9. מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: 5, 10, 20, 40,
10. תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?
11. סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?
12. בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.
13. סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.
14. המספרים: $2x-3, x-9, x-13$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.
א. מצא את x .
ב.
- i. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.
ii. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.
- ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא $a_n = 5^{11}$. מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.
15. נתונה הסדרה הבאה: $a_n, 36, 12, 4$. מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה b_n כך:

$$b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \dots, b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$
א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.
ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.
ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8 .

16. נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \dots$
בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.
17. בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים.
חשב את מנת הסדרה.
18. נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים.
בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.
19. בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה.
מצא את האיבר הראשון בסדרה.
20. א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת הסדרה.
בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כי האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה. האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.
ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.
ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.
21. בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
א. מצא את מנת הסדרה.
ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8.
ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.
22. באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה. לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה.
השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה: תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה... המלך הסכים להצעה.
א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?
ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.
ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם ההצעה המקורית של השר?

פתרונות

1. $a_9 = 729$ 2. $n = 7$ 3. $a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2$ 4. $q = \pm 3, a_1 = \frac{2}{3}$
5. $q = 5, a_1 = \frac{1}{25}$ 6. 5 דקות. 7. $x = 11 \rightarrow q = 3$ 8. $x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}$
9. $a_8 = 384$ 10. $S_9 = 2555$ 11. 5 דקות. 12. $n = 12$ 13. $q = 2$ 14. א. $x = 14$ ב. i. $a_n = 5^{n-1}$ ii. a_6, a_7 ג. a_5, b_6 ד. $S_7^* = 61,034,375$ א. $q = 3$ ג. b_5, b_6
16. אי-זוגיים: $S = 595$ זוגיים: $S = 1190$ 17. $q = 4$ 18. $\frac{q+1}{q}$ 19. $a_1 = \frac{3}{8}$ 20. א.
21. a_5, a_6 ג. $a_n = 3^{n-1}$ ב. $q = 2$ א. $a_1 = 1$ ג. $S_{6(p)} = 2730$ 22. א.
- ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו לו $a_{25} = 16,777,216$
- ג. $2^{24}, 4, 16, 64, \dots$ $S_n = 22,369,620$ אבנים 20,000,000

סדרה הנדסית אינסופית

1. מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$
2. סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
3. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה $62\frac{1}{2}$. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).
4. האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.
5. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$.
א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32. מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.
6. בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
א. מצא את מנת הסדרה.
- מחברים כל שני איברים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n .
- ב. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.

ג. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .

ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .

7. נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שמנתה היא q , $(0 < q < 1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$.

$T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10}, \dots$

נתון כי: $T = 6V$.

א. מצא את מנת הסדרה q .

ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הוא

$$1365\frac{1}{3}$$

8. נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ שמנתה היא q .

בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא: $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$.

א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל

האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של

הסדרה.

בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.

ב. מצא את מנת הסדרה.

מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו. ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי.

ג. מצא את האיבר a_n .

9. נתונה סדרה הנדסית אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ שמנתה היא q , $(q \neq 0, |q| < 1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים: $V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots$.

$T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}, \dots$

נתון כי: $V = 0.3T$.

א. מצא את מנת הסדרה q .

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

פתרונות

1. $S = 18$ 2. $a_1 = 24$ 3. $q = \frac{1}{5}, a_1 = 50$ או $q = \frac{4}{5}, a_1 = 12\frac{1}{2}$ 4. $S = 18\frac{2}{3}$
5. 6. $a_1 = 16, q = \frac{1}{3}$ 7. $a_1 = 200$ 8. $q = 0.6$ 9. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q^2$
10. $q = \frac{1}{2}$ 11. $a_1 = 1024$ 12. $q = 0.5$ 13. $a_5 = 20$ 14. $q = \frac{1}{3}$ 15. $a_1 = -16$
16. $S = 288$

פרק 4 – בעיות גידול ודעיכה

1. אדם הפקיד 1000 ₪ בתוכנית חיסכון המעניקה ריבית של 10% בשנה.
כמה כסף יהיה ברשותו:
א. לאחר שנה.
ב. לאחר שנתיים.
ג. לאחר שלוש שנים.
ד. לאחר 12 שנה.
2. מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה היה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?
3. מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6,000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?
4. מספר הזברות בטנזניה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה. כיום יש בטנזניה 45,000 זברות. כמה זברות היו בטנזניה לפני 16 שנים?
5. מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית. לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש. מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?
6. מספר התושבים ביפן גדל ב-20 השנה האחרונות פי 2. מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?
7. מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית. אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים, כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?
8. בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת.
בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת.
אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה. באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?
9. כוורת דבורים ידוע כי בכל 10 שעות כמות הדבורים גדלה פי 1.5.
א. מצא באיזה אחוז גדלה כמות הדבורים בכל שעה.
מוציאים לאחר 10 שעות 3000 דבורים וידוע כי נשארו 1500 דבורים.
ב. חשב כמה דבורים היו בתחילה בכוורת.
10. כמות אצות בים מתרבה בצורה מעריכית. ידוע כי לאחר 40 שנים כמות אצות מכפילה את עצמה. כדי לצמצם את כמות האצות מבצעים עבודות ניקיון מדי שנה ובהן מנקים כ-200 ק"ג אצות.
בחוף מסוים היו בשנת 1990 כ-1200 ק"ג אצות.
א. מצא את קצב גידול האצות השנתי.
ב. מצא כמה אצות יהיו בחוף המסוים בשנת 1993 לאחר הניקיון באותה שנה.
11. כמות עצים ביער גדלה בצורה מעריכית לפי אחוז ריבוי של 15% לשנה.
בשנת 1990 נספרו כמות עצים מסוימת ביער.
בשנת 2000 כרתו 30,000 עצים ולאחר 5 שנים נוספות, בשנת 2005, נספרו ביער 753365 עצים.
מצא כמה עצים היו ביער בשנת 1990.

12. ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1980 הייתה המנייה שווה k שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 2% לשנה עד לשנת 1992 ומשם צנחה בקצב של 5% לשנה במשך 8 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה שנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא $1.5k$. מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר הצניחה שלה.
13. אדם מפקיד k שקלים בתוכנית חיסכון לפי ריבית שנתית של $p\%$. לאחר 5 שנים הוא מושך מהחיסכון k שקלים ולאחר 5 שנים נוספות מתברר כי הצטבר בפקדון שלו סך הכול $2.5k$ ₪. מצא את p .
14. ערך מנייה מסוימת גדל בצורה מעריכית. ידוע כי בשנת 1995 הייתה המנייה שווה k שקלים. המנייה גדלה באחוז קבוע של 5% לשנה עד לשנת 2000 ושם צנחה בקצב של 8% לשנה במשך 6 שנים נוספות. לאחר מכן גדלה המנייה בקצב שנתי קבוע עד לשנת 2010. אדם הרוצה לקנות את המנייה בשנת 2010 נוכח לדעת כי מחירה הוא k . מצא באיזה אחוז עלתה המנייה לאחר צניחתה.
15. כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית לפי אחוז קבוע p מדי שעה. ביום מסוים היו k גרם מהחומר. לאחר 3 שעות הוסיפו עוד k גרם לכמות שנותרה ולאחר 3 שעות נוספות מתברר שנשארו k גרם מהחומר. מצא את p .
16. שני בנקים מציעים שתי תוכניות חיסכון כלהלן:
 בנק א' מציע תוכנית חיסכון ל-8 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-80%.
 בנק ב' מציע תוכנית חיסכון ל-6 שנים שבסופה סכום הקרן יגדל ב-60%.
 א. באיזה בנק אחוז הריבית השנתית גבוה יותר?
 ב. דני משקיע סכום כסף k לפי תוכנית חיסכון של בנק א' ובתום התוכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתוכנית החיסכון של בנק ב'. רפי משקיע סכום כסף זהה k לפי תוכנית חיסכון של בנק ב' ובתום התוכנית הוא מעביר את הסכום שעומד לרשותו לתוכנית החיסכון של בנק א'.
 למי יהיה סכום גדול יותר בתום שתי התוכניות? נמק את תשובתך והראה חישוב מתאים.
17. הריבית על תוכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה. אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪. תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?
18. אוכלוסיית הדובים בקוטב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה. אם היום יש בקוטב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?
19. חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?
20. מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של 3% לשנה. בשנה מסוימת נספרו 2300 עופות בשמורה, לאחר 5 שנים הוסיפו לשמורת הטבע 1000 עופות נוספים.
 א. מצא כמה עופות יהיו בשמורה לאחר 5 שנים נוספות.
 ב. מצא תוך כמה שנים יהיה מספר העופות בשמורה זהה לזה שמצאת בסעיף א' אילו לא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים, אלא אם הייתה גדילה רציפה.

21. ערכה של דירה יורד מדי שנה באחוז קבוע של 6%.
 ידוע כי ערך הדירה לאחר 10 שנים מיום מכירתה נמוך ב-35,000 ₪ ממחירה המקורי.
 א. מצא את המחיר ההתחלתי של הדירה.
 ב. מצא לאחר כמה שנים ערך הדירה ירד מתחת ל-30,000 ₪.
22. מספר העופות בשמורת טבע גדל לפי אחוז קבוע של p אחוזים לשנה. בשנה מסוימת נספרו 3000 עופות בשמורה, לאחר 4 שנים הוסיפו לשמורה 1000 עופות נוספים.
 א. מצא את אחוז הגידול השנתי p אם ידוע כי לאחר 4 שנים נוספות היו בשמורת 5647 עופות.
 ב. מצא לאחר כמה שנים יהיו 5647 עופות אילולא היו מוסיפים את 1000 העופות הנוספים.
23. ערכן של שתי חלקות אדמה יורד בצורה מעריכית.
 ידוע כי בזמן שערכה של אדמה א' מגיע למחצית מערכה המקורי, ערכה של אדמה ב' מגיע ל-30% מערכה המקורי. לאחר 50 שנים אדמה א' מאבדת 60% מערכה.
 א. מצא את אחוז הדעיכה של אדמה ב'.
 ב. ידוע כי לאחר 100 שנים ערכן של שתי האדמות שווה. ערכה המקורי של אדמה ב' הוא 100,000 ₪.
 מצא את ערכה המקורי של אדמה א'.
24. שתי מכוניות המוצעות למכירה עולות: מכונית א' - 60,000 ₪ ומכונית ב' - 85,000 ₪.
 ידוע כי ערך מכונית ב' יורד ב-4% בכל שנה וערך מכונית א' יורד ב-2.5% בכל שנה.
 א. מצא בעוד כמה שנים יהיו המחירים של שתי המכוניות זהים.
 ב. סיגל רוצה לקנות מכונית ולרשותה עומד סכום של 40,000 ₪.
 איזו מכונית תוכל לקנות סיגל קודם ולאחר כמה שנים מיום הצעתן?
25. נתונות שתי כמויות התחלתיות זהות, האחת גדלה בצורה מעריכית והשנייה קטנה בצורה מעריכית.
 לשתי הכמויות אחוז גדילה/דעיכה קבוע והוא 5%.
 א. האם הזמן שבו הכמות הראשונה תגדל לכמות הכפולה מהכמות ההתחלתית שלה שווה לזמן שבו תקטן הכמות השנייה למחצית מהכמות ההתחלתית שלה? נמק והראה חישוב מתאים.
 ב. ללא קשר לנתון הקודם, הראה כי כדי ששתי הכמויות יגיעו ליעדיהן באותו הזמן אז הבסיסים שלהן (q_1, q_2) צריכים להיות מספרים הופכיים.
26. חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?
27. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים. תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?
28. בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה משקל החומרים יהיה זהה?

29. אדם מפקיד סכום של 120,000 ₪ לפי ריבית דריבית של 12% בשנה. כעבור t שנים הוא משך את כל הסכום שעמד לרשותו והפקיד אותו ל- t שנים נוספות בתכנית חיסכון חדשה לפי ריבית דריבית של 15%. בתום תקופה זו עמד לרשותו סכום של 330,252 ₪.
א. מצא את t .

לאחר תקופה זו הוא מפקיד את סכום הכסף הסופי בתכנית לפי ריבית דריבית מסוימת.

לאחר 5 שנים עמד לרשותו סכום של 821,772 ₪.

ב. מצא את אחוז הריבית החדש.

30. נתונות שתי תרבויות חיידקים, כל אחת גדלה בצורה מעריכית. בשעה מסוימת בתרבות א' היו 4,000 חיידקים ובתרבות ב' היו 500 חיידקים.
נסמן:

t_1 - הזמן שחלף עד שבתרבות א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות ב'.

t_2 - הזמן שחלף עד שבתרבות ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות א'.

חשב את היחס $\frac{t_1}{t_2}$.

31. מספר החיידקים בתרבות גדל ב- $p\%$ בכל שעה. בשעה מסוימת מספר החיידקים היה m . כעבור t שעות הוציאו m חיידקים מהתרבות וכעבור עוד t שעות היו $6m$ חיידקים בתרבות.
הבע את t באמצעות p .

32. נתונה הפונקציה: $f(x) = 700 \cdot 1.08^x - 200x$.

מצא את ערך ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

33. נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'.
בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

פתרונות

1. א. 1,100 ₪. ב. 1,210 ₪. ג. 1,331 ₪. ד. 3,138 ₪. 2. 101,342 תושבים.
3. 5,062 חסידות. 4. 34,907 זברות. 5. 2.3%. 6. 3.5%. 7. 921 חיידקים.
8. בנק א'. 9. א. ב-4.1%. ב. 3000 דבורים. 10. א. $a=1.017$. ב. 653.48 ק"ג אצות.
11. 100,000 עצים. 12. ב-5.95%. 13. 16.63%. 14. ב-6.6%. 15. 14.82%. 16. א. בנק ב'.
17. 9.41 שנים. 18. 7.47 שנים. 19. 16.43 שעות. 20. א. 4,250 עופות.
21. א. 75,858.5 ₪. ב. לאחר 15 שנים. 22. א. 5%. ב. 12.96 שנים. 23. א. 3.13%. ב. 25,909 ₪. 24. א. לאחר 22.46 שנים. ב. מכונית ב' ולאחר 16 שנים.
25. א. הכמות השנייה תגיע ליעדה לפני הראשונה. 26. 12.43 שעות. 27. 9.36 ימים.

$$t = \frac{\ln 3}{\ln\left(\frac{100+P}{100}\right)} \quad .31 \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{2} \quad .30 \quad p = 20\% \quad .29 \quad t = 4 \quad .28 \quad 16:00$$

32. $x=17.04$, מינימום. 33. 11 חודשים.

פרק 5 – פרבולה

1. בסרטון זה מוסבר מהי פרבולה וכיצד משרטטים אותה.

2. בסרטון זה מוסבר כיצד מוצאים נקודת חיתוך של פרבולה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .

3. בסרטון זה מוסבר כיצד מוצאים נקודות חיתוך של פרבולה וישר.

א. מצא את נקודת החיתוך בין הפרבולה $y = -x^2 + 4x + 3$ והישר $y = x - 1$.

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפרבולה $y = x^2 - 2x + 3$ והישר $y = 2x - 1$.

4. בסרטון זה מוסבר כיצד מוצאים נקודות חיתוך בין שתי פרבולות.

א. מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות: $y = x^2 + 4$, $y = 2x^2 - 3x$.

ב. מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות: $y = x^2 + x - 3$, $y = x^2 - 4x + 7$.

5. שרטט את הגרפים של הפרבולות הבאות:

1) $y = x^2 - 4x + 5$

2) $y = (x+1)(x-4)$

6. שרטט את הגרפים של הפרבולות הבאות:

1) $y = -2 - x^2$

2) $y = -x^2$

7.

א. נתונה הפונקציה: $y = x^2 + 2x - 3$.

1. איזה סוג פרבולה מייצגת הפונקציה שלפניך?

2. מצא את שיעורי הקדקוד של הפרבולה.

3. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הצירים.

4. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5. מהו הערך המינימלי של הפונקציה ובאיזה נקודה מתקבל ערך זה?

ב. נתונה הפונקציה: $y = -2x^2 - 4x - 7$.

1. מצא את קדקוד הפרבולה ונקודות החיתוך עם הצירים.

2. שרטט סקיצה של גרף הפרבולה.

3. מהו הערך המכסימלי של הפונקציה?

8.

א. נתונה הפונקציה $y = x^2$.

1. מצא את קדקוד הפרבולה.

2. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הצירים.

3. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4. מהו הערך המינימלי של הפונקציה? באיזה נקודה מתקבל הערך המינימלי?

ב. נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 4x - 6$.

- מצא את קדקוד הפרבולה.
- האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ?
- מהו הערך המכסימלי של הפונקציה?
- מצא את נקודת החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- y . דרך נקודה זו העבירו ישר המקביל לציר ה- x וחותך את הפרבולה בנקודה נוספת. מצא את הנקודה הנוספת.

9. בסרטון זה מוסברים המושגים תחומי עלייה ותחומי ירידה של פרבולה ומוסבר כיצד לחשב אותם.

א. נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 6x - 10$.

- מצא את קדקוד הפרבולה.
- עבור אילו ערכי x הפונקציה עולה ועבור אילו ערכי x הפונקציה יורדת?

ב. נתונה הפונקציה: $y = 3x^2 - 2x - 7$.

- מצא את קדקוד הפרבולה.
- מצא את תחומי העלייה ותחומי הירידה של הפונקציה.

10.

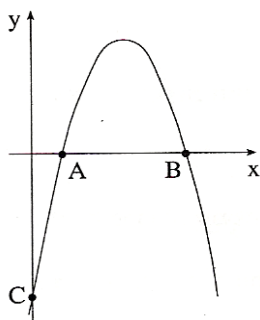
א. נתונה הפונקציה: $y = (x - 3)^2$.

- מצא את קדקוד הפרבולה.
- שרטט סקיצה של הפרבולה.
- מהו הערך המינימלי של הפונקציה?
- עבור אילו ערכי x הפונקציה עולה?
- רשום שני ערכים של x שבהם הפונקציה יורדת.

ב. נתונה הפונקציה: $y = (x + 4)(6 - x)$.

- מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.
- מצא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים.
- מהו הערך המכסימלי של הפונקציה? (היעזר בשרטוט סקיצה של גרף הפונקציה).
- רשום עבור אילו ערכי x הפונקציה יורדת.
- רשום שני ערכי x עבורם הפונקציה עולה..

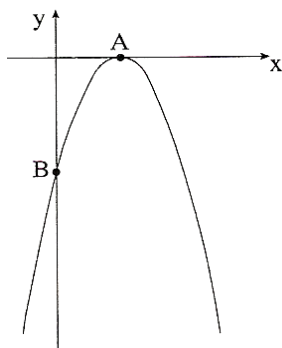
11. לפניכם סרטוט של גרף הפונקציה: $y = -x^2 + 6x - 5$.



- חשבו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- חשבו את שיעורי נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y .
- מהו המרחק בין הנקודה C (ראו סרטוט) לראשית הצירים?
- מצאו את המרחק בין הנקודה A לנקודה B (ראו סרטוט).

ה. מצאו את המרחק בין הנקודה A לראשית הצירים.

12. לפניכם סרטוט של גרף הפונקציה: $y = -x^2 + 4x - 4$.



- א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
- ב. מצאו את מרחק הנקודה A (ראו סרטוט) מראשית הצירים.
- ג. מצאו את מרחק הנקודה B (ראו סרטוט) מראשית הצירים.
- ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.

13. נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + x + 6$.

- א. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ג. מצאו את המרחק בין נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- x .
- ד. מצאו את תחום הירידה של הפרבולה.

14. נתונה הפונקציה: $y = x^2 + 6x + 9$.

- א. מצאו את הנקודה המשותפת לגרף הפונקציה ולציר ה- x .
- ב. מצאו את הנקודה המשותפת לגרף הפונקציה ולציר ה- y .
- ג. מהו המרחק בין הנקודה המשותפת לגרף הפונקציה ולציר ה- y לבין ראשית הצירים?

15. נתונה פרבולה שנקודת המינימום שלה היא $(2, 3)$.

כמה נקודות חיתוך יש לפרבולה זו עם ציר ה- x ? וכמה עם ציר ה- y ? נמק.

16. נתונות הפונקציות $y = x + 1$ ו- $y = 2x^2 - x - 3$.

מצאו את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות, ואת משוואת הישר העובר דרכן.

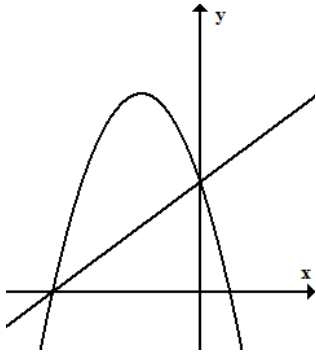
17. נתונה הפרבולה $y = x^2 - 4x + 5$.

מצאו את משוואת המשיק לפרבולה העובר בנקודה.

18. נתונות הפונקציות $y = x^2 - 4x + 5$ ו- $y + x^2 = 6x + 5$.

- א. מצאו את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות, וסמנו אותן ב- A ו- B .
- ב. מצאו את משוואת הישר AB .
- ג. שרטטו את שתי הפונקציות במערכת צירים אחת (ציינו נק' חיתוך עם הצירים ונק' קיצון).

19. נתונה הפרבולה $y = x^2 - 6x - 7$. הפרבולה חותכת את ציר ה- x בנקודות A ו-B) A) קרובה יותר לראשית הצירים), ואת ציר ה- y בנקודה C. קודקוד הפרבולה הוא בנקודה D.
- מצא את הנקודות המצוינות מעלה ושרטט סקיצה של הפרבולה.
 - בנקודה בה הפרבולה חותכת את ציר ה- y (נקודה C), העבירו ישר המקביל לציר ה- x . מצא משוואת ישר זה.
 - הישר שקיבלת בסעיף ב' חותך את הפרבולה בנקודה נוספת E. מצא את הנקודה.



- 20.
- מהי ההצגה האלגברית המתאימה ביותר לפרבולה שבשרטוט?
 $y = -x^2 - 4x + 5$ $y = 2x^2 - 6x - 3$
 $y = x^2 - 5x + 6$ $y = -2x^2 - 6x - 4$
 נמק במילים או ע"י חישוב מדוע פסלת את האפשרויות האחרות.
 - מהי ההצגה האלגברית המתאימה ביותר לישר שבשרטוט?
 $y = 5x - 1$ $y = -x + 5$
 $y = 5x - 5$ $y = x + 5$ $y = -5x + 1$
 נמק במילים או ע"י חישוב מדוע פסלת את האפשרויות האחרות.
 - מצא את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות שבחרת בסעיפים א' ו-ב'.

21. נתונות הפונקציות $y = x + 1$ $y = 2x^2 - x - 3$. מצא את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות, ואת משוואת הישר העובר דרכן.

פתרונות:

- 3 א. $(4,3)$, $(-1,-2)$ ב. אין נקודת חיתוך. 4 א. $(-1,5)$, $(4,20)$ ב. $(2,3)$
- 7 א. 1. פרבולה ישרה. 2. $(-1,-4)$ 3. $(1,0)$, $(-3,0)$, $(0,-3)$ 5. $y=-4$, $x=-1$
- ב. 1. $(-1,-5)$ 3. $y=-5$ 8 א. 1. $(0,0)$ 2. $(0,0)$ 4. $y=0$ ב. 1. $(2,-2)$
2. לא. 3. $y=-2$ 4. $(4,-6)$, $(0,-6)$ 9 א. 1. $(3,-1)$ 2. תחומי עלייה: $x < 3$,
- תחומי ירידה: $x > 3$ ב. 1. $(\frac{1}{3}, -7\frac{1}{3})$ 2. תחומי עלייה: $x > \frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $x < \frac{1}{3}$
- 10 א. 1. $(3,0)$ 3. $y=0$ 4. $x > 3$ 5. $x=2$, $x=1$ ב. 1. $(1,25)$
2. $(0,24)$, $(-4,0)$ 3. $y=25$ 4. $x > 1$ 5. $x=0$, $x=-1$
- 11 א. $(5,0)$, $(1,0)$ ב. $(0,-5)$ ג. 5 ד. 4 ה. 1 12 א. $(0,-4)$, $(2,0)$
- ב. 2 ג. 4 ד. עליה: $x < 2$, ירידה: $x > 2$ 13 א. $(3,0)$, $(-2,0)$ ב. $(0,6)$
- ג. 5 ד. $x > 0.5$ 14 א. $(-3,0)$ ב. $(0,9)$ ג. 9 15 אין נקודת חיתוך עם ציר
- ה- x , נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- y 16 $(-1, 3)$, $(2, 3)$ 17 $y=x+1$ 17 $y=1$
- 18 א. $A(0,5), B(5,10)$ ב. $y_{AB}=x+5$ 19 א. $A(-1,0), B(7,0), C(0,-7), D(3,-16)$
- ב. $y=-7$ ג. $E(6,-7)$ 20 א. $y=-x^2-4x+5$ ב. $y=x+5$ ג. $(0,5), (-5,0)$
- 21 $y=x+1, (2,3), (-1,0)$