

מתמטיקה 5 יחידות

GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תלמידים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכילות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכנית הלימודים של משרד החינוך. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

יוחאי טוויג



תוכן

מספר פרק	נושא	עמוד
1	אלגברה - מרינום	4
2	אלגברה - אי שוויונים	6
3.1	אלגברה - חקירת משוואות ממעלה ראשונה	8
3.2	אלגברה - חקירת משוואות ממעלה 2	10
4.1	גיאומטריה – רקע קיים וזוית	12
4.2	גיאומטריה - משולש כללי, משולש שווה שוקיים, משולש ישר זוית	14
4.3	גיאומטריה – חפיפת משולשים	16
4.4	גיאומטריה - זוית חיצונית למשולש ומשולש ישר זוית	18
4.5	גיאומטריה - קטע אמצעים במשולש ומפגש תיכונים במשולש	20
4.6	גיאומטריה - מרובעים	22
4.7	גיאומטריה - המעגל	29
4.8	גיאומטריה – פרופורציה ודמיון	35
5.1	סדרות – סדרה חשבונית	41
5.2	סדרות – סדרה הנדסית	44
5.3	סדרות – סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת	46
6.1	מריגונומטריה – מריגונומטריה במשולש ישר זוית	48
6.2	מריגונומטריה - זהויות	51
6.3	מריגונומטריה - משוואות	55
6.4	מריגונומטריה - במישור	60
6.5	מריגונומטריה במרחב	66
7.1	חדו"א – נגזרות ומשיקים	70
7.2	חדו"א – חקירת פולינום	76
7.3	חדו"א – חקירת פונקציה מנה ושורש	80
7.4	חדו"א – חקירת פונקציה עם פרמטר	86
7.5	חדו"א – בעיות מקסימום ומינימום (בעיות קיצון)	88
7.6	חדו"א – אינטגרלים	93
7.7	חדו"א – הקשר שבין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת	100
7.8	חדו"א – של פונקציות מריגונומטריות	104
7.9	חדו"א – של פונקציות מעריכיות	113
7.10	חדו"א – של פונקציות לוגריתמיות	120
8.1	אלגברה – משוואות מעריכיות	127
8.2	אלגברה – משוואות לוגריתמיות	131
9	אלגברה – בעיות גידול ודעיכה	136
10.1	גיאומטריה אנליטית – נקודה וישר (חלק א')	139
10.2	גיאומטריה אנליטית – נקודה וישר (חלק ב')	143
10.3	גיאומטריה אנליטית - המעגל	147
10.4	גיאומטריה אנליטית - האליפסה	152
10.5	גיאומטריה אנליטית – הפרבולה	156
10.6	גיאומטריה אנליטית – מקומות גיאומטריים	161
10.7	גיאומטריה אנליטית - הוכחות	166
11	מספרים מרוכבים	169
12.1	וקטורים גיאומטריים	176
12.2	וקטורים אלגבריים	188
13	הסתברות קלאסית	209
14	בעיות מילוליות	216

פרק 1 - מרינום:

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף תרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 1	תרגיל 1	כולל הסבר כיצד עושים מרינום
סרמון 2	תרגיל 2	
סרמון 3	תרגיל 3	
סרמון 4	תרגיל 4	
סרמון 5	תרגיל 5	
סרמון 6	תרגיל 6	כולל הסבר כיצד עושים מרינום מקוצר
סרמון 7	תרגיל 7	
סרמון 8	תרגיל 8	
סרמון 9	תרגיל 1	כולל הסבר כיצד ניתן להסתדר בכל התרגילים גם ללא מרינום
סרמון 10	תרגיל 4	פתרון ללא מרינום
סרמון 11	תרגיל 6	פתרון ללא מרינום

תרגילים:

1. $4x^2 + 8x + 3 =$

2. $2x^2 + 7x - 15 =$

3. $3x^2 - 11x + 6 =$

4. $6x^2 + 5x + 1 =$

5. $2x^2 + x - 6 =$

6. $x^2 + 5x + 4 =$

7. $x^2 - 8x + 15 =$

8. $x^2 - 33x + 62 =$

פרק 2 - אי שוויונים:

מותר

1. לחבר/לחסר כל מספר/ביטוי
2. לכפול/לחלק בכל מספר/ביטוי חיובי
3. לכפול/לחלק בכל מספר/ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי השוויון
4. להעלות בחזקה אי זוגית
5. להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי השוויון אינם שליליים

אסור

1. לכפול/לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו
2. להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהו אי שוויון, סימון אי שוויון על ציר
סרטון 2		חיתוך ואיחוד אי שוויון (מעלה ראשונה)
סרטון 3	תרגיל 1	חיתוך ואיחוד אי שוויון (מעלה ראשונה) – המשך
סרטון 4		מותר ואסור באי שוויונים
סרטון 5	תרגיל 2	
סרטון 6	תרגיל 3	אי שוויונים ממעלות גבוהות – הסבר על שיטת הנחש
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8	תרגיל 5	
סרטון 9	תרגיל 6	דוגמא לאי שוויון ללא מכנה
סרטון 10	תרגיל 7	הסבר על נחש עם נקודת העקה
סרטון 11	תרגיל 8	דוגמא לנחש עם נקודת העקה
סרטון 12	תרגיל 9	אי שוויון שמכיל ביטוי שלא מתפרק
סרטון 13	תרגילים 10, 11, 12	דוגמאות לאי שוויון שמכיל ביטוי שלא מתפרק
סרטון 14	תרגיל 13	אי שוויון לא מסודר (לראשונה)
סרטון 15	תרגיל 14	אי שוויון לא מסודר
סרטון 16	תרגיל 15	מערכת אי שוויונים לא מסודרים
סרטון 17	תרגיל 16	מערכת אי שוויונים לא מסודרים
סרטון 18	תרגיל 17	אי שוויון כפול
סרטון 19	תרגיל 18	הסבר ודוגמא – פונקציה מעל פונקציה

תרגילים:

$$1. x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\}$$

$$2. x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x)$$

$$3. \frac{(x-4)(x+2)}{x-1} < 0$$

$$4. \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$$

$$5. \frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0$$

$$6. x(x+3)(2x-5) < 0$$

$$7. \frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$$

$$8. \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0$$

$$9. \frac{x-3}{x^2+2} > 0$$

$$10. \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$$

$$11. \frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$$

$$12. \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$$

$$13. \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$$

$$14. \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2}$$

$$15. x^2 > 3x+10 \cap 6 < 5x-x^2$$

$$16. \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$$

$$17. 1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2$$

18. עבור אילו ערכי x נמצאת הפונקציה $f(x) = \frac{x}{x-3}$ מעל הפונקציה $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$?

פרק 3 – חקירת משוואות:

3.1 - חקירת משוואות ממעלה ראשונה:

שלבי עבודה:

- א. נפתור את המשוואה.
- ב. נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
- ג. נבדוק עבור כל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למשוואה על ידי הצבתו במשוואה המקורית.

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	תזכורת לפתרון משוואה עם פרמטר
סרטון 2	תרגיל 2	תזכורת לפתרון משוואה עם פרמטר
סרטון 3	תרגיל 3	תזכורת לפתרון מערכת משוואות עם פרמטר
סרטון 4		סוגי מערכת משוואות עם פרמטר
סרטון 5	תרגיל 4	הסבר כיצד פותרים שאלה העוסקת במספר הפתרונות של משוואה ממעלה ראשונה
סרטון 6	תרגיל 4	המשך הסבר מסרטון קודם
סרטון 7		שלבי עבודה בשאלה העוסקת במספר הפתרונות של משוואה ממעלה ראשונה
סרטון 8	תרגיל 5א	
סרטון 9	תרגיל 5א	המשך פתרון שאלה מהסרטון הקודם
סרטון 10	תרגיל 5ב	
סרטון 11	תרגיל 6	דוגמא לשאלה בה יש פרמטר במכנה של המשוואה המקורית
סרטון 12	תרגיל 7	פתרון מערכת המשוואות
סרטון 13	תרגיל 7א	פתרון סעיף א
סרטון 14		שלבי עבודה בשאלה העוסקת במספר הפתרונות של מערכת משוואות ממעלה ראשונה
סרטון 15	תרגיל 7ב	פתרון סעיף ב
סרטון 16	תרגיל 8	פתרון מערכת המשוואות
סרטון 17	תרגיל 8א	פתרון סעיף א והסבר על ניסוח השאלה בתור מספר נקודות החיתוך של שני ישרים
סרטון 18	תרגיל 8ב	פתרון סעיף ב

תרגילים:

1. פתור את המשוואה: $kx + 6k = 2x + 3k^2$

2. פתור את המשוואה: $a^2(x-1) = 3ax + 4(x-a)$

3. פתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} 2kx + 5y = 2k^2 \\ 2x - y = -10 \end{cases}$$

4. נתונה המשוואה: $m(mx-2) = 3(2+3x)$

מצא עבור אילו ערכי m למשוואה: (1) יש פתרון יחיד (2) אין פתרון (3) יש אינסוף פתרונות

5. נתונה המשוואה: $k^2(5-2x) = 3(15-2kx)$

א. מצא עבור אילו ערכי k למשוואה: (1) יש פתרון יחיד (2) אין פתרון (3) יש אינסוף פתרונות

ב. מצא עבור אילו ערכי k פתרון המשוואה: (1) חיובי (2) מקיים את אי השוויון $2x-3 > x$

6. נתונה המשוואה:
$$\frac{mx}{m-2} = \frac{2m}{m-5} - \frac{6x}{m^2-7m+10}$$

מצא עבור אילו ערכי m למשוואה: (1) יש פתרון יחיד (2) אין פתרון (3) יש אינסוף פתרונות

7. נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} (4-a)x + 3(2a-1)y = 3 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

א. מצא עבור אילו ערכי a למערכת המשוואות: (1) יש פתרון יחיד (2) אין פתרון (3) יש

אינסוף פתרונות

ב. מצא עבור אילו ערכי a פתרון מערכת המשוואות מקיים את אי השוויון $2x + y > -1$

8. נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} x + 3ay = a \\ ax + 3y = 4a - 3 \end{cases}$$

א. מצא עבור אילו ערכי a למערכת המשוואות: (1) יש פתרון יחיד (2) אין פתרון (3) יש

אינסוף פתרונות

ב. מצא עבור אילו ערכי a נקודת החיתוך בין הישרים (המיוצגים על ידי המשוואות) נמצאת ברביע

השלישי.

3.2- חקרית משוואות ממעלה שנייה:

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		סוגי משוואות או פונקציות ממעלה שנייה על פי מספר הפתרונות
סרטון 2		פרבולה חותכת/משיקה/מרחפת והתלות ב- a ובדלתא
סרטון 3	תרגיל 1	תזכורת לגבי פתרון משוואה ממעלה שנייה עם פרמטר
סרטון 4	תרגיל 2	דוגמא נוספת – פתרון משוואה ממעלה שנייה עם פרמטר
סרטון 5		התנהגות משוואה ממעלה שנייה עם פרמטר לפי ערכי פרמטר שונים
סרטון 6	תרגיל 3	הסבר על דרך הפתרון של שאלה העוסקת במספר הפתרונות של משוואה ממעלה שנייה
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8		הסבר על המקרה הליניארי
סרטון 9	תרגיל 4	הדגמת המקרה הליניארי על תרגיל 4 סעיף 2
סרטון 10	תרגיל 4	הסבר על ניסוח שאלה בתור פונקציה במקום בתור משוואה
סרטון 11	תרגיל 5	שאלה הכוללת מקרה ליניארי
סרטון 12	תרגיל 6	פתרון שאלה ללא מקרה ליניארי
סרטון 13	תרגיל 6	פתרון המקרה הליניארי
סרטון 14	תרגיל 7	שאלה המנוסחת כאי שוויון (וכוללת מקרה ליניארי)

תרגילים:

1. פתור את המשוואה: $x^2 + mx - 12m^2 = 0$

2. פתור את המשוואה: $2x^2 + 5m^2 = (11m + 1)x - 5m$

3. נתונה המשוואה: $x^2 + mx + 9 = 0$

מצא עבור אילו ערכי m למשוואה:

(1) יש שני פתרונות ממשיים שונים

(2) יש פתרון ממשי אחד

(3) אין פתרונות ממשיים

4. נתונה המשוואה: $(3 - m)x^2 + 4mx - 2m = 0$ ($m \neq 3$)

מצא עבור אילו ערכי m למשוואה:

(1) יש שני פתרונות ממשיים שונים

(2) יש פתרון ממשי אחד

(3) אין פתרונות ממשיים

5. נתונה הפונקציה: $y = 2mx^2 + mx - 1$

מצא עבור אילו ערכי m הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- x .

6. נתונה הפונקציה: $y = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + 4$ ($m \neq \pm 3$)

מצא עבור אילו ערכי m הפונקציה נמצאת מעל ציר ה- x לכל ערך של x .

7. נתון אי השוויון: $mx^2 > (m + 4)(x - 1) - x^2$

מצא עבור אילו ערכי m אי השוויון מתקיים לכל ערך של x .

פרק 4 – גיאומטריה:

4.1 – רקע קווים וזוויות

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף תרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		קצת היסטוריה + מושגי יסוד
סרטון 2		ממושגי יסוד להגדרות
סרטון 3		מאקסיומות למשפטים + העשרה על גיאומטריות לא אוקלידיות
סרטון 4		זווית – הגדרה וסימון
סרטון 5	תרגיל 1	תרגיל בנושא זוויות
סרטון 6		הגדרות – זווית חדה/ישרה/קה/שטוחה
סרטון 7		חוצה זווית וזווית צמודות
סרטון 8		הוכחת המשפט: שתי זוויות צמודות שוות הן בהכרח ישרות
סרטון 9		זוויות קודקודיות – הגדרה והוכחת המשפט (...שוות זו לזו)
סרטון 10	תרגיל 2	תרגיל בנושא זוויות
סרטון 11		ישרים מקבילים והזוויות ביניהם + משפט על הזוויות השונות
סרטון 12		משפט הפוך – הוכחת מקבילות לפי זוויות
סרטון 13	תרגיל 3	תרגיל בנושא קוים מקבילים

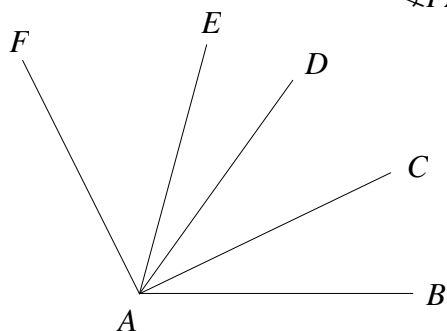
תרגילים:

1. נתון: $\angle FAE = 2 \cdot \angle EAD$, $\angle CAB = \angle DAC$

$$\angle EAB = 80^\circ, \angle FAD = 60^\circ$$

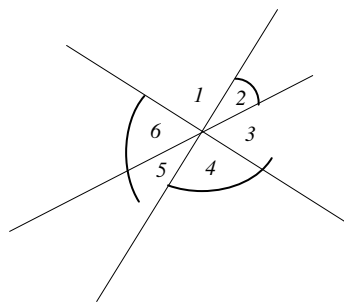
חשב את הזוויות הבאות:

$$\angle FAB, \angle EAC, \angle CAB$$



2. חשב את סכום הזוויות הבאות (נמק):

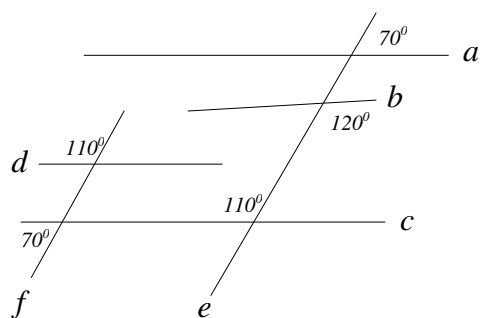
$$\angle 2 + \angle 4 + \angle 6$$



3. מצא את זוויות

הישרים המקבילים

בשרטוט הבא (נמק):



4.2 –משולש כללי, משולש שווה שוקיים, משולש ישר זווית

משפטים כלליים במשולשים:

משפט: סכום הזוויות במשולש הוא 180°

משפט: סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית

משפט: במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך

במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך

במשולש מול זוויות שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך

משולש שווה שוקיים:

משפט: במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו

משפט הפוך: משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים

משפט: במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים

משפט הפוך: משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון

הוא משולש שווה שוקיים

משולש שווה צלעות:

הגדרה: משולש שבו כל הצלעות שוות הוא משולש שווה צלעות.

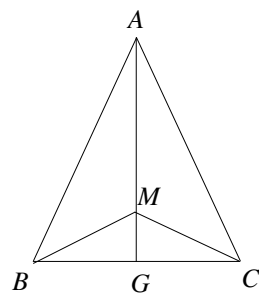
משפט: במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות 60° .

משפט הפוך: משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

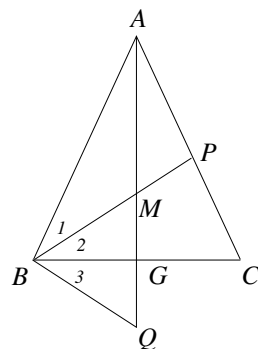
לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 14		הגדרות – משולש חד/ישר/קהה זווית, משולש שווה שוקיים/שווה צלעות/שונה צלעות.
סרטון 15		קווים במשולש – חוצה זווית, תיכון, גובה, אנך אמצעי
סרטון 16		משפטים במשולש: סכום זוויות, מול הזווית הגדולה/קטנה נמצאת... ולהפך
סרטון 17		משפטים במש"ש (משולש שווה שוקיים): זוויות הבסיס, חוצה זווית/תיכון גובה
סרטון 18		משולש שווה צלעות – הגדרה ושוויון הזוויות (משפט ומשפט הפוך)
סרטון 19	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 20	תרגיל 4	רישום מדויק של ההוכחה + כיצד רושמים הוכחה בגיאומטריה
סרטון 21	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 22	תרגיל 5	רישום מדויק של ההוכחה

תרגילים:



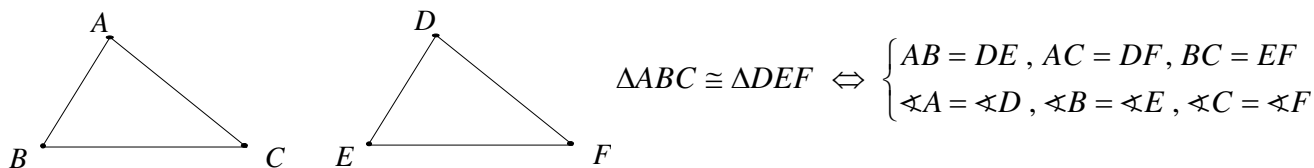
1. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). AG חוצה את זווית $\angle A$.
 M היא נקודה כלשהי על AG .
הוכח: $BM = CM$.



2. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). AG ו- BP חוצים את הזווית $\angle A$ ו- $\angle ABC$ בהתאמה. הנקודה Q נמצאת על המשך AG . נתון: $GM = GQ$.
הוכח: $\angle B_1 = \angle B_3$.

4.3 – חפיפת משולשים

הגדרה: משולשים חופפים הם משולשים שעווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.



משפטי החפיפה:

1. משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
2. משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
3. משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ): אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
4. משפט חפיפה צלע-צלע-הזווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה ה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 23		מהי חפיפה, סימונים
סרטון 24		ארבעת משפטי החפיפה
סרטון 25	תרגיל 6	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 26	תרגיל 6	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 27	תרגיל 7	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 28	תרגיל 7	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 29	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 30	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה

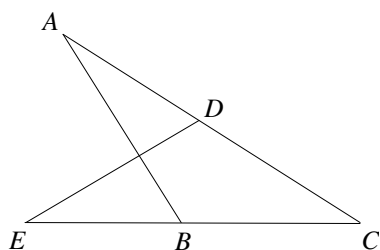
תרגילים:

1. בצירור נתון: $AC = EC$, $DC = BC$.

הוכח:

א. $\triangle CDE \cong \triangle CBA$

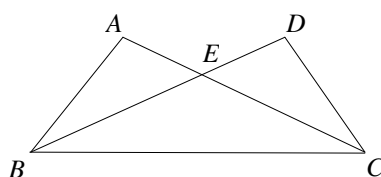
ב. $\angle ADE = \angle ABE$



2. בצירור נתון: $\angle ABC = \angle DCB$,

$\angle DBC = \angle ACB$

הוכח: $AB = DC$

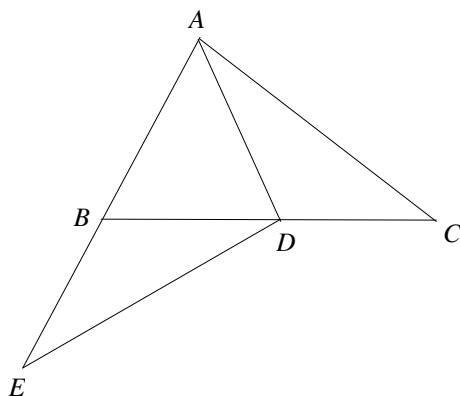


3. בצירור נתון: $AB = BE = AD$,

$AC = DE$

הוכח: הנקודה D היא

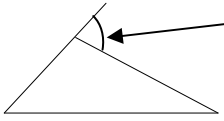
אמצע הצלע BC



4.4 – זווית חיצונית למשולש ומשולש ישר זווית

זווית חיצונית למשולש:

הגדרה: זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה. משפט: זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.



משולש ישר זווית:

משפט 1: סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90° .

משפט 2: במשולש שזוויותיו 90° , 60° , 30° , הניצב שמול הזווית של ה- 30° שווה למחצית היתר.

משפט הפוך (ל-2): אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה

היא בת 30° .

משפט 3: במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

משפט הפוך (ל-3): אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית

(כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).

משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

$$\text{כלומר: } (\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$$

משפט הפוך (למשפט פיתגורס): אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית,

המשולש ישר זווית.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 31		זווית חיצונית - הגדרה ומשפט
סרטון 32	תרגיל 9	הוכחת המשפט
סרטון 33	תרגיל 10	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 34	תרגיל 10	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 35		משולש שזוויותיו 90° , 60° , 30°
סרטון 36	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 37	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 38		משפט התיכון ליתר והמשפט ההפוך לו
סרטון 39	תרגיל 12	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 40	תרגיל 12	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 41	תרגיל 13	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 42	תרגיל 13	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 43		משפט פיתגורס והמשפט ההפוך לו
סרטון 44	תרגיל 14א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 45	תרגיל 14א	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 46	תרגיל 14ב	רישום מדויק של ההוכחה

תרגילים:

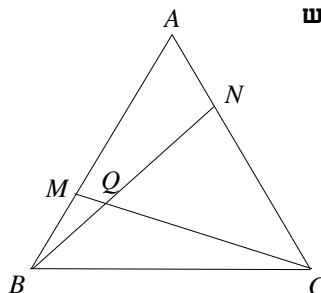
1. הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה".

2. משולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש

שווה צלעות.

נתון: $AN = MB$.

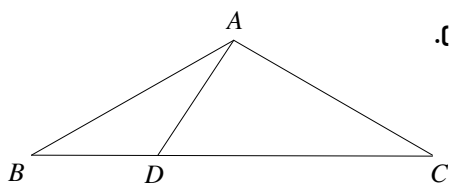
הוכח: $\angle NQC = 60^\circ$.



3. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

נתון: $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle DAC = 90^\circ$, $BC = 18\text{ cm}$.

חשב את אורכו של הקטע BD .

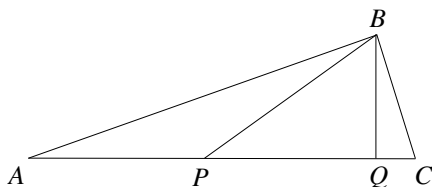


4. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

BQ הוא הגובה ליתר AC ו- BP הוא התיכון ליתר AC .

נתון: $BQ = \frac{1}{2} BP$.

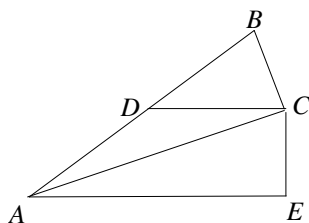
חשב את גודלה של הזווית $\angle C$.



5. המשולש $\triangle BDC$ שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($BD = DC$).

AC חוצה את הזווית $\angle BAE$. נתון: $DC \parallel AE$.

חשב את גודלה של הזווית $\angle ACB$.

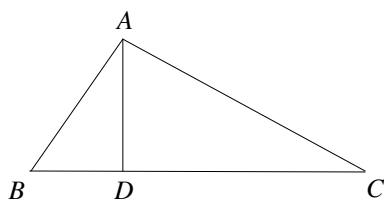


6. AD הוא גובה במשולש $\triangle ABC$.

נתון: $BC = 25\text{ cm}$, $AC = 20\text{ cm}$, $AB = 15\text{ cm}$.

א. מצא את אורכו של AD ואת שטח המשולש $\triangle ABC$.

ב. האם המשולש $\triangle ABC$ ישר זווית? נמק.



4.5-קטע אמצעים במשולש ומפגש תיכונים במשולש

קטע אמצעים במשולש:

הגדרה: קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.

משפט: קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.

משפט הפוך 1: קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית

חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).

משפט הפוך 2: קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית

ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

מפגש התיכונים במשולש:

משפט: שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון

ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.

הערה: נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.

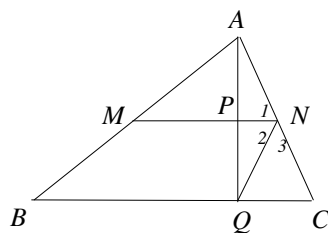
הערה: אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 1:2 כך שהחלק

הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 47		ק"א במשולש – הגדרה ומשפט
סרטון 48		ק"א במשולש – משפטים הפוכים
סרטון 49	תרגיל 15	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 50	תרגיל 15	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 51	תרגיל 16 א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 52	תרגיל 16 א	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 53	תרגיל 16 ב	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 54	תרגיל 16 ב	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 55		מפגש תיכונים במשולש – הסבר ומשפט
סרטון 56	תרגיל 17	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 57	תרגיל 17	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 58	תרגיל 17	רישום מדויק של ההוכחה – המשך התרגיל

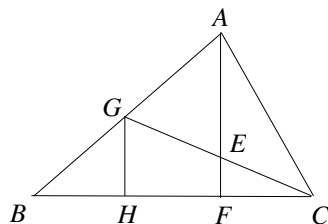
תרגילים:



1. הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ABC$.

AQ הוא גובה לצלע BC .

הוכח: $\angle N_1 = \angle N_2$.



2. AF הוא גובה לצלע BC ו- CG הוא תיכון לצלע AB

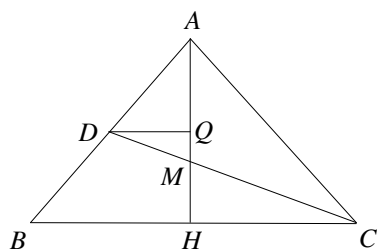
במשולש $\triangle ABC$. הקטע GH מאונך לצלע BC .

א. הוכח: $BH = HF$.

נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את

התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.

ב. חשב את אורך הקטע EF .



3. המשולש $\triangle ABC$ שבציר הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$)

שבו AH הוא הגובה לבסיס BC . CD התיכון לשוק AB ,

יוצר זווית של 30° עם הבסיס BC .

נתון: $DQ \parallel BC$, $BC = 12\sqrt{3} \text{ cm}$.

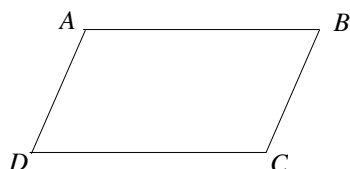
חשב את אורך הקטע MQ .

4.6 - מרובעים

מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

משפט: סכום הזוויות במרובע הוא 360° .

מקבילית:



הגדרה: מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.

תכונות המקבילית:

משפט 1: במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.

משפט 2: במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.

משפט 3: במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא 180° .

משפט 4: במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע $\cdot$ גובה לצלע

כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.

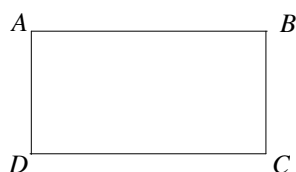
משפט 2: מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.

משפט 3: מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.

משפט 4: מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.

משפט 5: מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

מלבן:



הגדרה: מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.

מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית.

תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):

משפט 1: ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.

משפט 2: האלכסונים במלבן שווים זה לזה.

היקף מלבן = סכום הצלעות, שטח מלבן = צלע $\cdot$ גובה לצלע

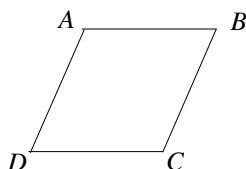
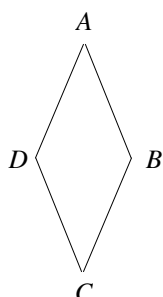
כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מרובע שבו שלושה זוויות ישרות הוא מלבן.

משפט 2: מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.

משפט 3: מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.

מעוין:



הגדרה: מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.

מסקנה: מעוין הוא סוג של מקבילית.

תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):

משפט 1: במעוין כל הצלעות שוות.

משפט 2: במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.

משפט 3: במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.

היקף מעוין = צלע $\cdot 4$, שטח מעוין = צלע $\cdot$ גובה הצלע = $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון})/2$

כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.

משפט 2: מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.

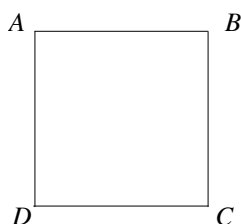
משפט 3: מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

משפט 4: מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין. (מספיק אחד)

ריבוע:

הגדרה: ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.

מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין.



מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיים כי אלכסוני הריבוע חוצים

זה את זה, שווים זה לזה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.

היקף ריבוע = צלע $\cdot 4$, שטח ריבוע = $(\text{צלע})^2 = (\text{אלכסון})^2/2$

כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.

משפט 2: מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.

משפט 3: מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.

משפט 4: מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.

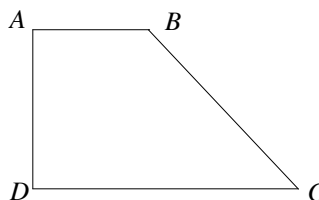
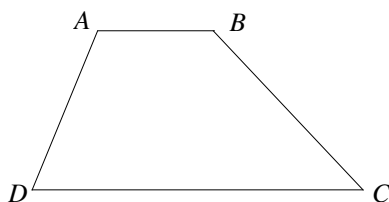
משפט 5: מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

טרפז:

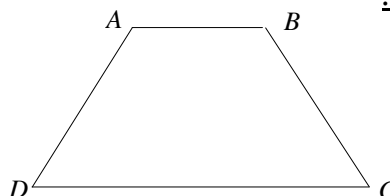
הגדרה: טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.

היקף טרפז = סכום הצלעות, שטח טרפז = $(\text{גובה} \cdot \text{סכום הבסיסים})/2$

טרפז ישר זווית:



טרפז שווה שוקיים:



משפטים הנוגעים לטרפז שווה שוקיים:

משפט 1: בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.

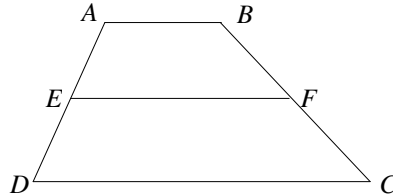
משפט הפוך (ל-1): מרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא מרפז שווה שוקיים.

משפט 2: במרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

משפט הפוך (ל-2): מרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא מרפז שווה שוקיים.

קטע אמצעים במרפז:

הגדרה: קטע אמצעים במרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים במרפז.



משפט: קטע אמצעים במרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

משפט הפוך: קטע היוצא מאמצע שוק אחת במרפז ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במרפז).

דלתון:

הגדרה: דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.

מסקנה: דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווים שוקיים בעלי בסיס משותף.

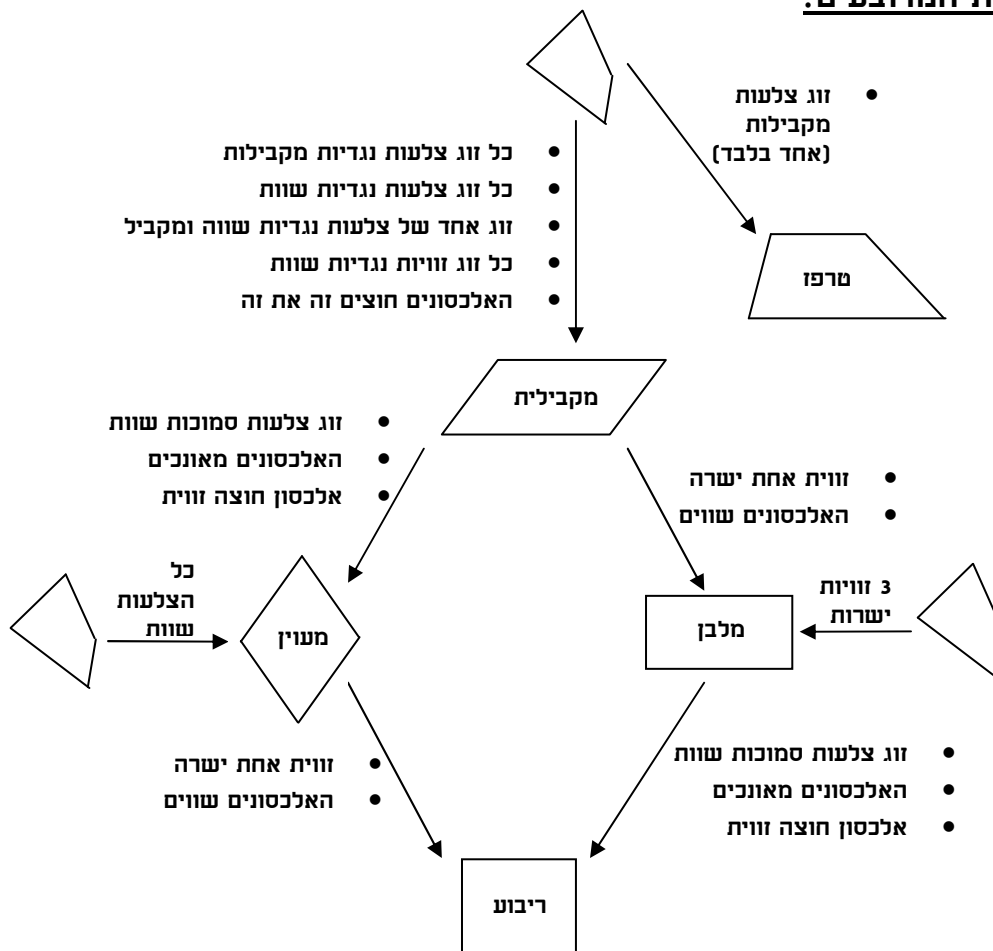
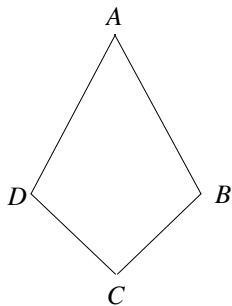
תכונות האלכסונים בדלתון:

משפט: האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

הערה: האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.

היקף דלתון = סכום הצלעות, שטח דלתון = $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון}) / 2$

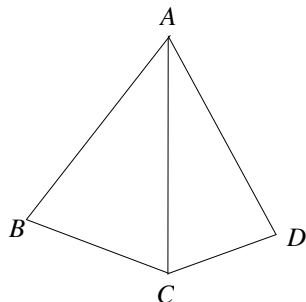
משפחת המרובעים:



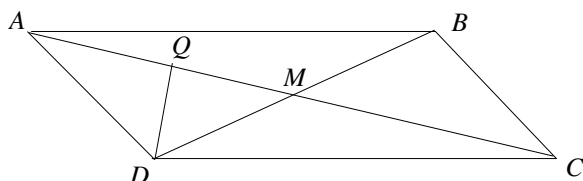
לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל מדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הגדרת מרובע, סכום הזוויות במרובע
סרטון 2	תרגיל 1	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 3	תרגיל 1	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 4		הגדרה + תכונות המקבילית + חישוב היקף ושטח מקבילית
סרטון 5	תרגיל 2	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 6	תרגיל 2	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 7		כיצד מוכיחים שמרובע הוא מקבילית
סרטון 8	תרגיל 3	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 9	תרגיל 3	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 10		הגדרה + תכונות המלבן + חישוב היקף ושטח מלבן
סרטון 11	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 12	תרגיל 4	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 13		כיצד מוכיחים שמרובע הוא מלבן
סרטון 14	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 15	תרגיל 5	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 16	תרגיל 5	המשך רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 17		הגדרה + תכונות המעוין + חישוב היקף ושטח מעוין
סרטון 18	תרגיל 6	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 19	תרגיל 6	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 20		כיצד מוכיחים שמרובע הוא מעוין
סרטון 21	תרגיל 7	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 22	תרגיל 7	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 23		הגדרה + תכונות הריבוע + חישוב היקף ושטח ריבוע
סרטון 24	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 25	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 26		כיצד מוכיחים שמרובע הוא ריבוע
סרטון 27	תרגיל 9	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 28	תרגיל 9	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 29	תרגיל 9	המשך רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 30		הגדרת המרפז ותכונותיו, כיצד מוכיחים שמרובע הוא מרפז, חישוב היקף ושטח מרפז
סרטון 31	תרגיל 10	שאלת חישוב שטח מרפז (ללא רישום הוכחה מסודרת)
סרטון 32		מרפז ישר זווית ומרפז שווה שוקיים – משפטים ומשפטים הפוכים
סרטון 33	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 34	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 35		הגדרת קטע אמצעים במרפז, משפט ומשפט הפוך
סרטון 36	תרגיל 12	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 37	תרגיל 12	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 38	תרגיל 12	המשך רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 39		הגדרת הדלתון, תכונות, משפט לגבי האלכסונים, כיצד מוכיחים שמרובע הוא דלתון
סרטון 40	תרגיל 13	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 41	תרגיל 13	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 42		משפחת המרובעים: שרטוט מסכם שמכיל בצורה נוחה את כל הידע שנלמד בפרק המרובעים. מומלץ מאוד!

תרגילים:

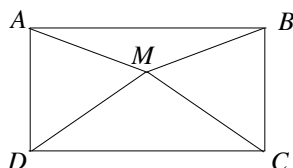


1. המשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle ACD$ שבציור הם משולשים שווים שוקיים ($AB = AC = AD$). נתון: $\angle BAD = 80^\circ$. חשב את גודלה של הזווית $\angle BCD$.

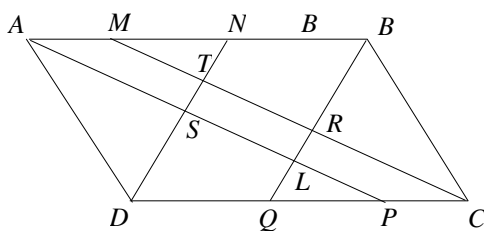


2. נתונה מקבילית $ABCD$ שאלכסוניה נפגשים בנקודה M . נתון: $AC = 20_{cm}$, $BC = \frac{1}{2}DB$, $DQ \perp AC$. חשב את אורך הקטע AQ .

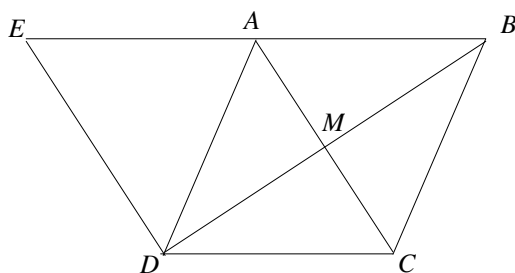
3. את הצלע AB במקבילית $ABCD$ האריכו כאורכה עד לנקודה T . הוכח: $BTCD$ מקבילית.



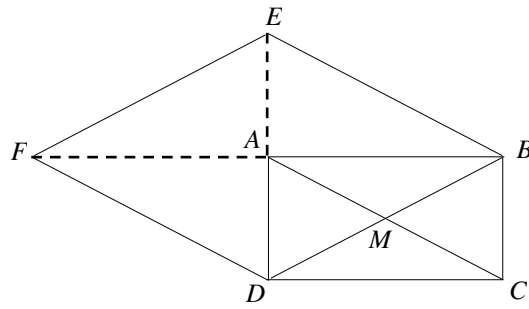
4. נתון מלבן $ABCD$. שבו $DM = MC$. הוכח: $\angle MAB = \angle MBA$.



5. נתונה מקבילית $ABCD$ ובה AP , BQ , CM ו- DN הם חוצי הזוויות $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ו- $\angle D$ בהתאמה. הוכח: $TRLS$ מלבן.



6. נתון מעוין $ABCD$ שאלכסוניו נפגשים בנקודה M . האריכו את הצלע AB עד לנקודה E כך שמתקיים $ED \perp DB$. הוכח: $AD = AE$.



7. נתון מלבן $ABCD$ שאלכסוניו

נפגשים בנקודה M . האריכו

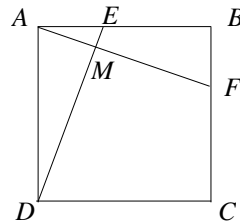
את הצלע AB כאורכה

עד לנקודה F ואת

הצלע AD כאורכה עד

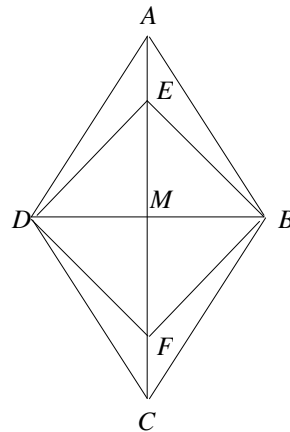
לנקודה E כמתואר בשרטוט.

הוכח: המרובע $EBDF$ הוא מעוין.



8. בריבוע $ABCD$ נתון כי $AE = BF$.

הוכח: $DE \perp AF$.

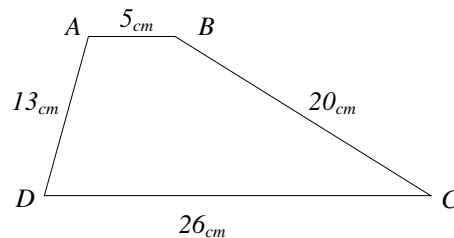


9. נתון מעוין $ABCD$ שאלכסוניו נפגשים

בנקודה M . נתון: $AE = FC$,

$\angle EBA = 15^\circ$, $MB = \frac{1}{2} AB$

הוכח: המרובע $EBFD$ הוא ריבוע.

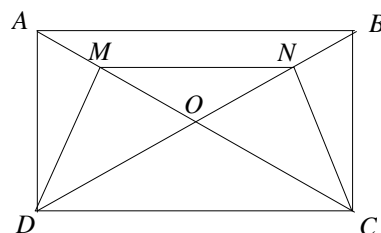


10. נתון מרפז $ABCD$ שאורכי

צלעותיו נתונים בשרטוט.

חשב את שטח המרפז

(פתור כתרגיל חישוב).

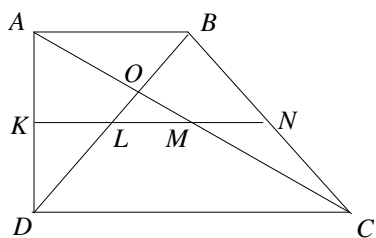


11. נתון מלבן $ABCD$ שאלכסוניו

נפגשים בנקודה O .

נתון: $MN \parallel DC$.

הוכח: $DMNC$ מרפז שווה שוקיים.



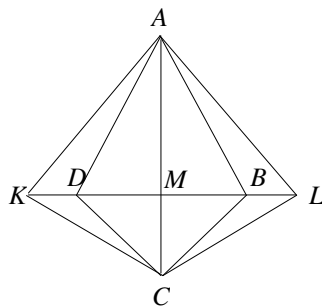
12. KN הוא קטע אמצעים במרפז ישר זווית

$ABCD$ ($AD \perp AB, AB \parallel DC$) שאלכסוניו

נפגשים בנקודה O .

נתון: $\angle ADB = 45^\circ$, $DC = 2AB$, $AD = 12_{cm}$.

חשב את אורך הקטע LM .



13. בדלתון $ABCD$ האריכו את האלכסון

המשני משני צידיו כמתואר בשרטוט

כך שמתקיים: $KD = BL$.

הוכח: המרובע $ALCK$ הוא דלתון.

4.7 – המעגל

הגדרות:

מעגל – המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה קבוע.

הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל.

רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.

מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.

קוטר – מיתר העובר במרכז המעגל.

$$2\pi R = \text{היקף מעגל}$$

$$\pi R^2 = \text{שטח מעגל}$$

קשת – חלק מהיקף המעגל

גורר – חלק משטח המעגל

זווית מרכזית – זווית שקודקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים

זווית היקפית – זווית שקודקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים

משפטים:

משפט 1: מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות ולהיפך

משפט 2: על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהיפך

משפט 3: מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל

משפט הפוך ל-3: מיתרים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל שווים

משפט 4: אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר

משפט הפוך ל-4 (1): רדיוס החוצה מיתר מאונך לו

משפט הפוך ל-4 (2): קטע היוצא מאמצע מיתר ומאונך לו, עובר במרכז המעגל

משפט 5: שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת/קשתות שוות, שוות ביניהן

משפט הפוך ל-5: זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות

משפט 6: זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת

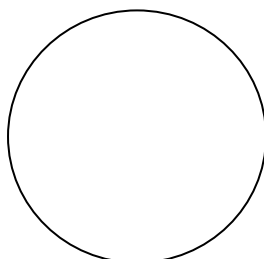
משפט 7: זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה

משפט הפוך ל-7: מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר

משפט 8: משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה

משפט הפוך ל-8: קטע המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל

משפט 9: שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה



משפט 10: קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים חוצה את הזווית בין המשיקים

משפט 11: הזווית הכלואה בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני

משפט 12: קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו

משפט 13: קטע המרכזים (או המשכו) של שני מעגלים משיקים עובר בנקודת ההשקה

משפט 14: מרכז מעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים במשולש

משפט 15: מרכז מעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזווית במשולש

משפט 16: במרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180°

משפט הפוך ל-16: אם במרובע סכום זוג זוויות נגדיות הוא 180° , המרובע בר חסימה במעגל

משפט 17: במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני

משפט הפוך ל-17: אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז ניתן לחסום

בתוכו מעגל

משפט 18: כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל וניתן לחסום בתוכו מעגל

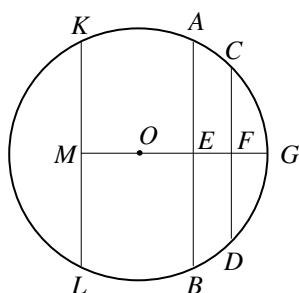
לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הגדרת מעגל, רדיוס, מיתר, קוטר
סרטון 2		הגדרת ונוסחאות היקף ושטח מעגל, הגדרת קשת, גזרה, זווית מרכזית וזווית היקפית
סרטון 3		הסבר על מדידת קשתות במעלות
סרטון 4		משפטים 1,2,3 וההפוך ל-3 בסיכום
סרטון 5		משפט 4 ושני המשפטים ההפוכים ל-4 בסיכום
סרטון 6	תרגיל 1א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 7	תרגיל 1א	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 8	תרגיל 1ב	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 9	תרגיל 1ב	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 10		משפט 5 וההפוך ל-5 בסיכום
סרטון 11	תרגיל 2	תרגיל חישוב
סרטון 12		משפט 6 בסיכום
סרטון 13	תרגיל 3	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 14	תרגיל 3	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 15		משפט 7 וההפוך ל-7 בסיכום
סרטון 16	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 17	תרגיל 4	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 18		מהו משיק למעגל + משפט 8 וההפוך ל-8 בסיכום
סרטון 19		משפט 9 בסיכום
סרטון 20	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 21	תרגיל 5	רישום מדויק של ההוכחה

סרמון 22		משפט 10 בסיכום
סרמון 23	תרגיל 6א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 24	תרגיל 6ב	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 25	תרגיל 6א	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 26	תרגיל 6ב	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 27		משפט 11 בסיכום
סרמון 28	תרגיל 7	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 29	תרגיל 7	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 30		הסבר על שני מעגלים + משפטים 12 ו-13 בסיכום
סרמון 31	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 32	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 33		משולש חסום + משפט 14 בסיכום, משולש חסום + משפט 15 בסיכום
סרמון 34	תרגיל 9	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 35	תרגיל 9	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 36	תרגיל 10	מרובע חסום + משפט 16 וההפוך ל-16 בסיכום + פתרון תרגיל 10
סרמון 37	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 38	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 39	תרגיל 12	מרובע חסום + משפט 17 וההפוך ל-17 בסיכום + פתרון תרגיל 12
סרמון 40		מצולע משוכלל + משפט 18 בסיכום

תרגילים:

1. AB ו- KL הם מיתרים במעגל שמרכזו O , והם חותכים את הקטע



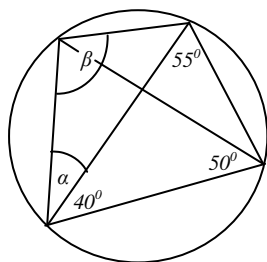
MG , העובר במרכז המעגל, בנקודות E ו- F בהתאמה.

נתון: $KL \parallel CD$, $CF = FD$.

א. הוכח: $KM = ML$.

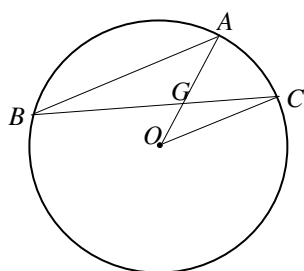
ב. נתון בנוסף כי $AB \perp MG$, $ML = EB$.

הוכח: $MO = OE$.



2. חשב את גודל הזוויות α ו- β

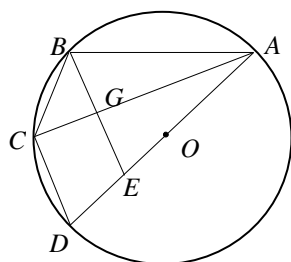
במעגל הנתון.



3. AB ו- BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O .

נתון: $\angle AGC = 60^\circ$, $BA \parallel OC$.

חשב את גודלה של הזווית $\angle AOC$.

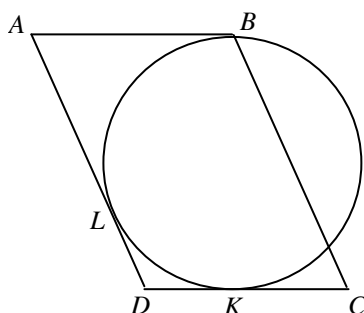


4. AB , AC , AD ו- BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O (המיתר

AD עובר ב- O). הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה G .

נתון: $BE \parallel CD$, $BG = GE$.

הוכח: $BC = CD$.



5. הצלעות AB , AD ו- DC של המקבילית

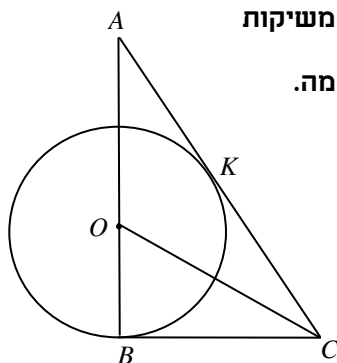
$ABCD$ משיקות למעגל בנקודות B ,

L ו- K בהתאמה (ראה שרטוט).

נתון: $BC = 14_{cm}$, $KC = 6_{cm}$.

חשב את היקף המקבילית.

6. הצלעות AC ו- BC של המשולש $\triangle ABC$ משיקות



למעגל שמרכזו O , בנקודות K ו- B בהתאמה.

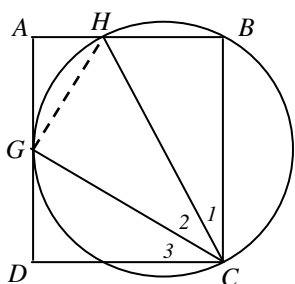
הצלע AB עוברת בנקודה O .

נתון: $AK = KC$, $AB = 15_{cm}$.

א. חשב את גודלה של זווית $\angle A$.

ב. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.

7. הקודקודים B ו- C של המלבן $ABCD$ מונחים



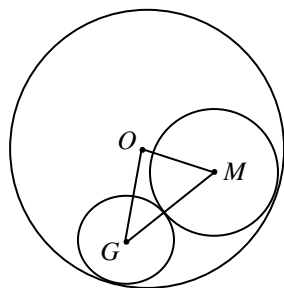
על מעגל. הצלע AD משיקה למעגל בנקודה G

והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה H .

הוכח: $\angle C_2 = \angle C_3$.

הדרכה: סמן $\angle AGH = \alpha$.

8. המעגלים שמרכזיהם M ו- G משיקים מבחוץ



זה לזה ומשיקים מבפנים למעגל שמרכזו O .

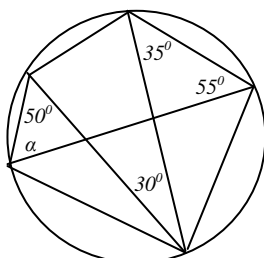
נתון כי רדיוס המעגל שמרכזו O הוא 8_{cm} .

חשב את היקף המשולש $\triangle OMG$.

9. AD הוא התיכון לצלע BC במשולש $\triangle ABC$.

א. הוכח: אם מרכז המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$ נמצא על AD אז המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה שוקיים.

ב. בהמשך לסעיף א', האם מרכז המעגל החסום את משולש $\triangle ABC$ נמצא על AD ?

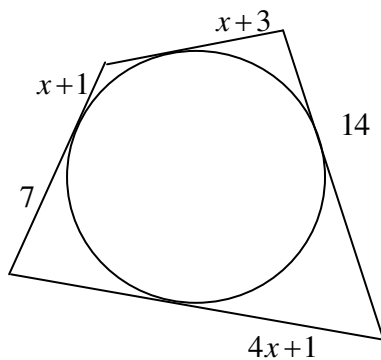


10. חשב את גודלה של הזווית α בערמוט הבא:

11. במרפז ישר זווית $ABCD$ שבו השוק AD מאונכת לבסיסים AB ו- DC הנקודות K ו- L נמצאות על הצלעות DC ו- AD בהתאמה כך שהקטעים BK ו- CL הם חוצי הזוויות $\sphericalangle B$ ו- $\sphericalangle C$

בהתאמה. חוצי הזוויות נפגשים בנקודה M .

הוכח: את המרובע $DKML$ ניתן לחסום במעגל.



12. חשב את גודלו של x בשרטוט הבא:

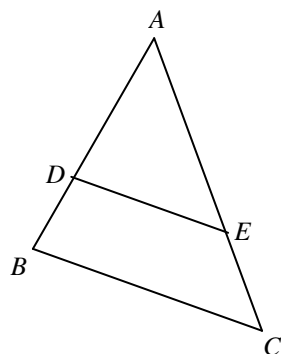
4.8 - פרופורציה ודמיון

פרופורציה:

משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים

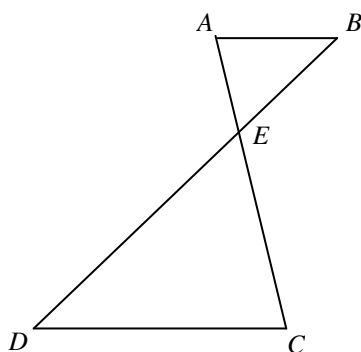
משפט הפוך למשפט תאלס: אם שני ישרים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים

פרופורציוניים הישרים מקבילים



$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{משפט תאלס + ההפוך:}$$

$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{משפט תאלס המורחב + ההפוך:}$$



$$AB \parallel DC \Leftrightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{DC} \quad \text{משפט תאלס "שעון חול" + ההפוך:}$$

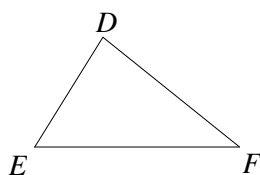
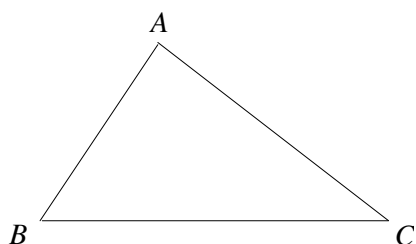
משפט חוצה הזווית: חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הזהה ליחס בין

הצלעות שביניהן הוא כלוא ולהפך.

דמיון משולשים:

הגדרה: משולשים דומים הם משולשים ששווים זה לזה בכל זוויותיהם ושצלעותיהם שומרות

בהתאמה על אותו יחס.



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$



$$\sphericalangle A = \sphericalangle D, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle F$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

משפטי הדמיון:

1. משפט דמיון-זווית (ז.ז.): אם בין שני משולשים שווה שתי זווית או המשולשים דומים.
2. משפט דמיון צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ.): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזווית שביניהן שווה אז המשולשים דומים.
3. משפט דמיון צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ.): אם בין שני משולשים שלושה צלעות שומרות על אותו יחס אז המשולשים דומים.
4. משפט דמיון צלע-צלע-הגדולה (צ.צ.ז.): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן שווה אז המשולשים דומים.

יחס בין גדלים במשולשים דומים:

- משפט 1: בין שני משולשים דומים היחס בין הגבהים/תיכונים/חוצי זווית/היקפים/רדיוס המעגל החוסם/רדיוס המעגל החסום הוא כיחס הדמיון.
- משפט 2: היחס בין שטחי משולשים דומים הוא ריבוע יחס הדמיון.

פרופורציות במשולש ישר זווית:

- משפט 1: במשולש ישר זווית, הגובה ליתר בריבוע שווה למכפלת היטלי הניצבים על היתר.
- משפט 2: במשולש ישר זווית, ניצב בריבוע שווה למכפלת היתר והיטל הניצב על היתר.
- משפט 3 (הפוך למשפט 1): אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת היטלי הצלעות האחרות על צלע זאת, המשולש ישר זווית.

פרופורציות במעגל:

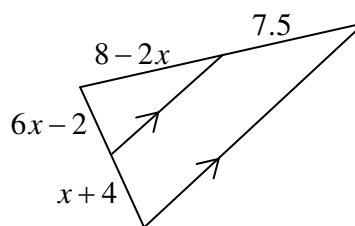
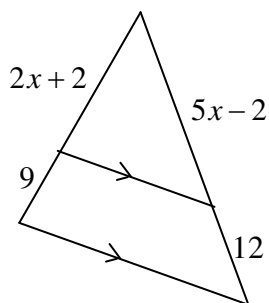
- משפט 1: אם שני מיתרים נחתכים במעגל, מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.
- משפט 2: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל, מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
- משפט 3: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל, מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

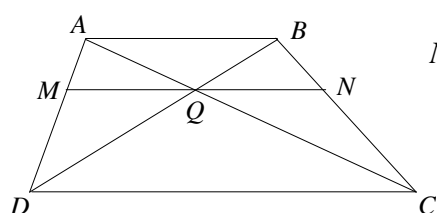
מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, מהי פרופורציה, משפט תאלס וההפוך לתאלס
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3		הרחבה ראשונה למשפט תאלס + משפט הפוך
סרטון 4		הרחבה שנייה למשפט תאלס (תאלס "שעון חול") + משפט הפוך
סרטון 5	תרגיל 2	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 6	תרגיל 2	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 7	תרגיל 3 א'	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 8	תרגיל 3 א'	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 9	תרגיל 3 ב'	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 10	תרגיל 3 ב'	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 11		משפט חוצה הזווית והמשפט ההפוך לו
סרטון 12	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 13	תרגיל 4	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 14		דמיון משולשים – מהו דמיון, סימונים בדמיון
סרטון 15		דמיון משולשים – ארבעת משפטי הדמיון
סרטון 16	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ורישום מדויק של ההוכחה
סרטון 17		סוגי דמיון נפוצים, הקשר בין משפט תאלס לדמיון משולשים
סרטון 18	תרגיל 6	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 19	תרגיל 6	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 20	תרגיל 7 א'	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 21	תרגיל 7 א'	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 22		היחס בין גדלים במשולשים דומים, כולל יחס שטחי משולשים דומים
סרטון 23	תרגיל 7 ב'	הרעיון להוכחה ורישום מדויק של ההוכחה
סרטון 24	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 25	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 26		פרופורציה במשולש ישר זווית – רקע והסבר כללי
סרטון 27		פרופורציה במשולש ישר זווית – שלושת המשפטים
סרטון 28	תרגיל 9	תרגיל חישוב. לא נדרשת הוכחה
סרטון 29	תרגיל 10	תרגיל חישוב. לא נדרשת הוכחה
סרטון 30	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 31	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 32		פרופורציה במעגל – שלושת משפטי המשיק/חותך/מיתר במעגל
סרטון 33	תרגיל 12	תרגיל חישוב. לא נדרשת הוכחה
סרטון 34	תרגיל 13	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 35	תרגיל 13	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 36	תרגיל 14	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 37	תרגיל 14	רישום מדויק של ההוכחה

תרגילים:

1. מצא את ערכו של x בשרטוטים הבאים:



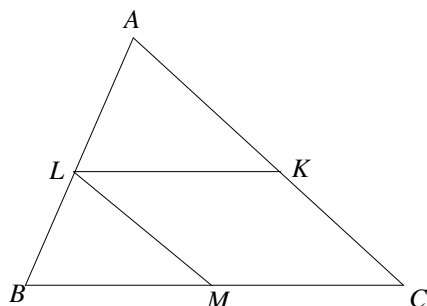
2. במרופו $ABCD$ האלכסונים נפגשים בנקודה Q . בנקודה Q העבירו קטע



המקביל לבסיסי המרופו וחותר את שוקי המרופו בנקודות M ו- N

כמתואר בשרטוט. נתון: $QB = 3_{cm}$, $DQ = 9_{cm}$, $DC = 18_{cm}$.

חשב את גודל הקטע MQ .

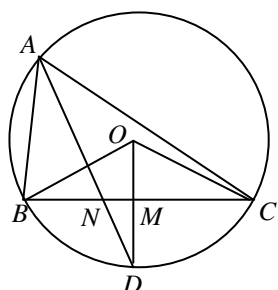


3. בשרטוט נתון: $\frac{AK}{KC} = \frac{MC}{BM} = \frac{AL}{LB}$

א. הוכח: המרובע $KLMC$ הוא מקבילית.

ב. נתון: $BC = 10_{cm}$, $AL = 1.5BL$.

חשב את אורך הקטע LK .

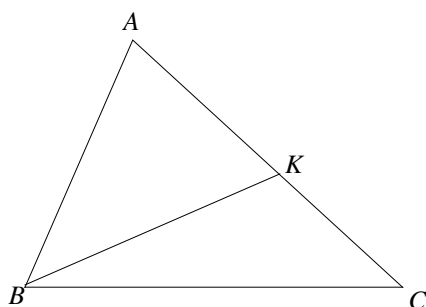


4. הנקודות A , B , C ו- D מונחות על היקפו של מעגל שמרכזו O .

הרדיוס OD חוצה את הזווית $\angle BOC$.

נתון: $BC = 10_{cm}$, $AC = 12_{cm}$, $AB = 8_{cm}$.

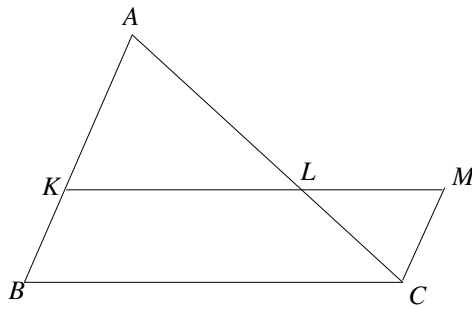
חשב את אורכו של הקטע MN .



5. במשולש $\triangle ABC$ העבירו את הקטע BK כך

ש- $\angle AKB = \angle ABC$.

הוכח: $\triangle AKB \sim \triangle ABC$.

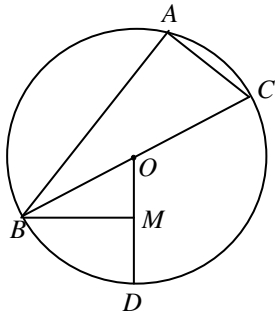


6. נתונה מקבילית $BKMC$. המשיכו את הצלע

BK עד לנקודה A . הקטע AC חותך את

הצלע KM בנקודה L .

הוכח: $LC \cdot BC = LM \cdot AC$.

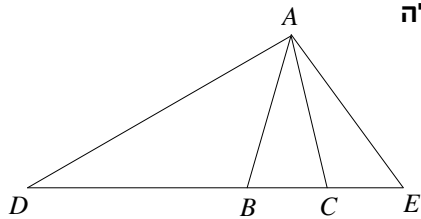


7. המשולש $\triangle ABC$ חסום במעגל שמרכזו O . הצלע BC

היא קוטר המעגל. הקטע BM מאונך לרדיוס OD . נתון: $AC = 2OM$.

א. הוכח: $\widehat{AB} = 2\widehat{BD}$.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\triangle BOM}}{S_{\triangle BAC}}$.



8. $\triangle ABC$ הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) שבו השוק גדולה

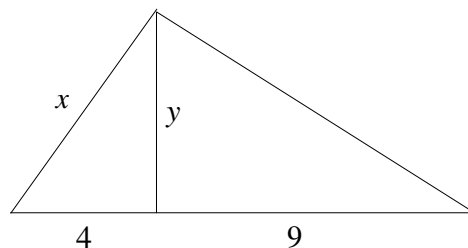
פי 2 מהבסיס. המשיכו את הבסיס משני צידיו עד לנקודות D

ו- E כך שמתקיים $BC = CE$ ו- $\angle D = \angle CAE$.

נתון: $S_{\triangle ABC} = m$.

בטא באמצעות m את שטח המשולש $\triangle ADE$.

9. מצא את ערכם של x ו- y בערמוט הבא:

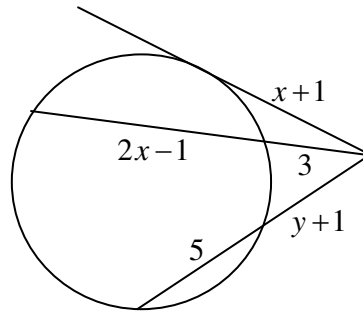
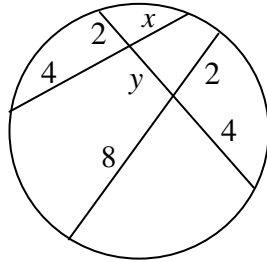


10. במשולש ישר זווית שאורכי ניצביו m ו- n נתון כי אורך הגובה ליתר הוא h .

הראה שמתקיים: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$ (אין צורך ברישום מסודר של הוכחה).

11. הוכח את המשפט: אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת הימלי הצלעות האחרות על צלע זאת, המשולש ישר זווית.

12. חשב את גודלם של x ו- y בשרטוטים הבאים:



13. הוכח את המשפט: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל, מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

14. הוכח את המשפט: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל, מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

פרק 5 – סדרות:

5.1 - סדרה חשבונית

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהי סדרה, דגמאות לסדרות, סימונים
סרטון 2		הסבר ודוגמאות לסדרות כלליות
סרטון 3		הסבר ודוגמאות לסדרות נסיגה
סרטון 4		מהי סדרה חשבונית, נוסחת איבר כללי בסדרה חשבונית
סרטון 5	תרגיל 1	
סרטון 6	תרגיל 2	
סרטון 7	תרגיל 3	
סרטון 8	תרגיל 4	
סרטון 9	תרגיל 5	
סרטון 10	תרגיל 6	
סרטון 11	תרגיל 7	
סרטון 12	תרגיל 8	
סרטון 13	תרגיל 9	
סרטון 14		שתי נוסחאות לסכום סדרה חשבונית
סרטון 15	תרגיל 10	
סרטון 16	תרגיל 11	
סרטון 17	תרגיל 12	
סרטון 18	תרגיל 13	
סרטון 19	תרגיל 14	
סרטון 20	תרגיל 15	
סרטון 21	תרגיל 16	
סרטון 22	תרגיל 17א	
סרטון 23	תרגיל 17ב	
סרטון 24		הסבר על סדרה עם מספר זוגי של איברים וחישוב סכומי איברים במקומות הזוגיים או האי זוגיים
סרטון 25	תרגיל 18	
סרטון 26	תרגיל 19	
סרטון 27	תרגיל 20	

תרגילים:

1. נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
2. בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
3. מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4\frac{1}{2}, 7, 9\frac{1}{2}, 12, 14\frac{1}{2}, \dots, 49\frac{1}{2}$
4. בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24. מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
5. תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על מומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
6. כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
7. כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$
8. מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$
9. נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.
10. מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \dots$
11. נתונה הסדרה החשבונית: $-13, -7, -1, 5, \dots$
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) על מנת להגיע לסכום של 987?
12. תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על מומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?
13. נתונה הסדרה החשבונית: $-71, -67, -63, \dots$
כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה על מנת שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

14. נתונה הסדרה החשבונית: 4, 13, 22, 31, ...

בסדרה יש 36 איברים.

חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

15. נתונה הסדרה החשבונית: 4, 9, 14, 19, ..., 599

מחקו כל איבר שלישי בסדרה.

מצא את סכום האיברים שנותרו.

16. סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב- 1024

מסכום n האיברים הראשונים בה.

א. במא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .

ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

17. נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

18. נתונה הסדרה החשבונית: -21, -17, -13, ...

בסדרה יש 18 איברים.

חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים

הנמצאים במקומות הזוגיים.

19. בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-

זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612. הוכח כי $nd = 60$.

20. בסדרה חשבונית שבה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה

פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

כמה איברים יש בסדרה?

5.2 - סדרה הנדסית

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 28		מהי סדרה הנדסית, נוסחת איבר כללי בסדרה הנדסית
סרטון 29	תרגיל 1	
סרטון 30	תרגיל 2	
סרטון 31	תרגיל 3	
סרטון 32	תרגיל 4	
סרטון 33	תרגיל 5	
סרטון 34	תרגיל 6	
סרטון 35	תרגיל 7	
סרטון 36	תרגיל 8	
סרטון 37		נוסחת סכום סדרה הנדסית
סרטון 38	תרגיל 9	
סרטון 39	תרגיל 10	
סרטון 40	תרגיל 11	פתרון בדרך א'
סרטון 41	תרגיל 11	פתרון בדרך ב'
סרטון 42	תרגיל 12	
סרטון 43	תרגיל 13	
סרטון 44		הסבר על סדרה עם מספר זוגי של איברים וחישוב סכומי איברים במקומות הזוגיים/אי-זוגיים
סרטון 45	תרגיל 14	
סרטון 46	תרגיל 15	
סרטון 47	תרגיל 16	
סרטון 48	תרגיל 17	

תרגילים:

1. נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$

מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.

2. מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$

3. בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

4. בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

5. בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
6. תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?
7. מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מצא גם את מנת הסדרה: $x-6, x+4, 4x+1$
8. נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.
9. מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: 5, 10, 20, 40,
10. תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?
11. סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?
12. בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.
13. סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.
14. נתונה הסדרה ההנדסית: 7, 14, 28, ...
- בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.
15. בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.
16. נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לבין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בה.
17. בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון בה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

5.3 - סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת – סדרה שבה $0 < |q| < 1$

סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 49		מהי סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, נוסחת סכום איברי סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת
סרטון 50	תרגיל 1	
סרטון 51	תרגיל 2	
סרטון 52	תרגיל 3	
סרטון 53	תרגיל 4	
סרטון 54	תרגיל 5	

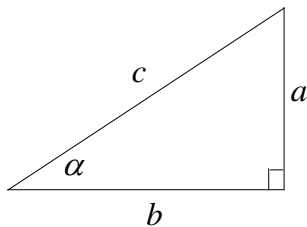
תרגילים:

1. מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה:
 $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$
2. סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
3. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה $62\frac{1}{2}$. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).
4. האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.
5. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$
 - א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
 - ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32. מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

פרק 6 – טריגונומטריה:

6.1 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{\text{מול}}{\text{יתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{\text{ליד}}{\text{יתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{\text{מול}}{\text{ליד}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{הניצב שמול הזווית}} = \frac{\text{ליד}}{\text{מול}} = \frac{b}{a}$$

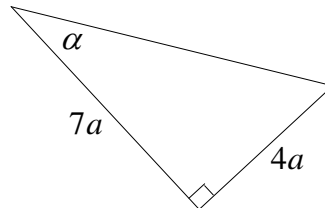
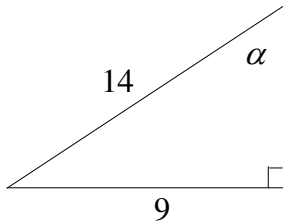
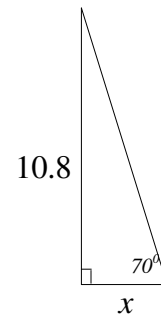
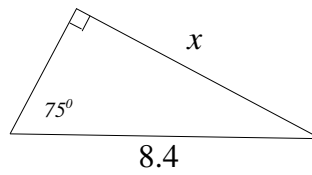
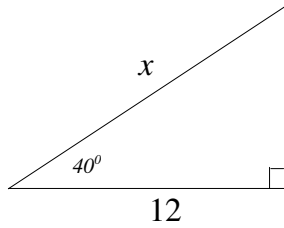
$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{משפט פיתגורס:}$$

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

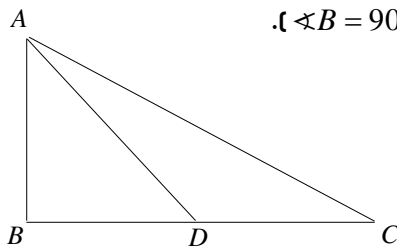
מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע היסטורי על טריגונומטריה, הגדרת ארבע הפונקציות הטריגונומטריות במשולש ישר זווית
סרטון 2	תרגיל 1	תרגילי חישוב בסיסיים
סרטון 3	תרגיל 1	תרגילי חישוב בסיסיים – המשך
סרטון 4	תרגיל 2	
סרטון 5	תרגיל 3	
סרטון 6	תרגיל 4	
סרטון 7	תרגיל 5	
סרטון 8	תרגיל 6	הדגמת השימוש בנעלם
סרטון 9	תרגיל 7	הדגמה ראשונה של שאלה עם פרמטרים
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11	תרגיל 9	
סרטון 12	תרגיל 10	כולל הסבר על היתכנות כמה תשובות נכונות שנראות שונה
סרטון 13	תרגיל 11	
סרטון 14	תרגיל 12	
סרטון 15		טיפים לטריגונומטריה א'
סרטון 16		טיפים לטריגונומטריה ב'
סרטון 17		טיפים לטריגונומטריה ג'

תרגילים:

1. מצא את ערכו של x במשולשים ישרי הזווית הבאים:



2. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

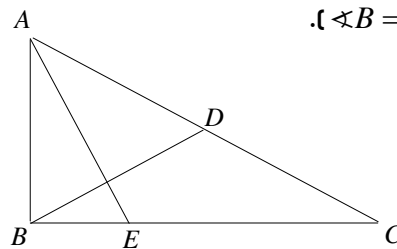


AD הוא התיכון לניצב BC .

נתון: $\angle C = 28^\circ$, $AB = 6 \text{ cm}$.

מצא: $\angle BAD = ?$, $AD = ?$.

3. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).



BD הוא התיכון ליתר AC ו- AE הוא חוצה הזווית $\angle A$.

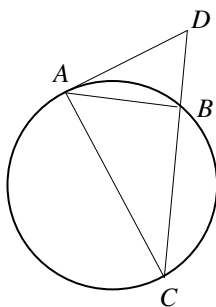
נתון: $BC = 8 \text{ cm}$, $BD = 5.6 \text{ cm}$.

מצא: $\angle BAE = ?$, $BE = ?$.

4. מצא את זוויתו של מעויין שאורכי אלכסוניו 24 cm ו- 18 cm .

5. המשולש $\triangle ABC$ חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.

המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D .

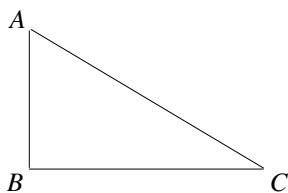


נתון: $BD = 4 \text{ cm}$, $\angle DAB = 32^\circ$.

מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

6. במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב- 4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92° .

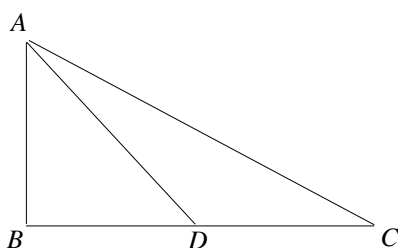
מצא את שטח המשולש.



7. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

נתון: $\angle A = \alpha$, $AB = a$.

הבע באמצעות α ו- a את היקף המשולש.



8. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

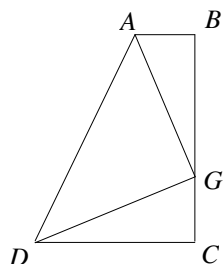
AD הוא התיכון לניצב BC .

נתון: $\angle C = \alpha$, $AB = b$.

הבע באמצעות α ו- b את אורכי הקטעים BD ו- AD .

9. במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k . הבע באמצעות α

ו- k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



10. מרפז $ABCD$ הוא מרפז ישר זווית ($\angle B = \angle C = 90^\circ$).

הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$.

נתון: $\angle BAG = \beta$, $AG = DG = m$.

הבע באמצעות β ו- m את שטח המרפז.

11. משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k חוצה הבסיס שלו היא β חוסם מעגל. הבע באמצעות

β ו- k את רדיוס המעגל.

12. במרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה במרפז היא b והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס

הגדול היא α . הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול במרפז ואת שטחו.

6.2 – זהויות טריגונומטריות

זהויות היסוד

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

זהויות של סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

זהויות של זווית כפולה

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

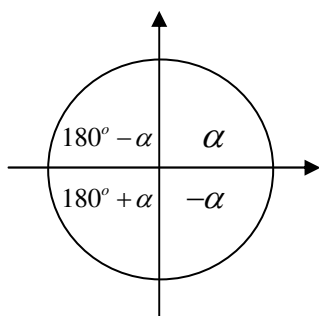
זהויות של סכום והפרש פונקציות

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$



המעגל הטריגונומטרי

המעגל הטריגונומטרי הוא מעגל היחידה (מעגל קונוני שרדיוסו 1)

טבלת ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור הזוויות המיוחדות:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\emptyset$
$\cot \alpha$	$\emptyset$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$\begin{aligned} \sin 0^\circ &= 0 & \cos 0^\circ &= 1 & \tan 0^\circ &= 0 \\ \sin 90^\circ &= 1 & \cos 90^\circ &= 0 & \tan 90^\circ &= \emptyset \\ \sin 180^\circ &= 0 & \cos 180^\circ &= -1 & \tan 180^\circ &= 0 \\ \sin 270^\circ &= -1 & \cos 270^\circ &= 0 & \tan 270^\circ &= \emptyset \end{aligned}$$

הזהויות של מעגל היחידה

$$\sin / \cos / \tan (360^\circ + \alpha) = \sin / \cos / \tan \alpha$$

$$\begin{aligned} \sin (90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha \\ \sin (90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha \\ \sin (270^\circ - \alpha) &= -\sin \alpha \\ \sin (270^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos (90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos (90^\circ + \alpha) &= \sin \alpha \\ \cos (270^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos (270^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan (90^\circ - \alpha) &= \cot \alpha \\ \tan (90^\circ + \alpha) &= \cot \alpha \\ \tan (270^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \tan (270^\circ + \alpha) &= -\tan \alpha \end{aligned}$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		זהויות היסוד – חלק א'
סרטון 2		זהויות היסוד – חלק ב'
סרטון 3		זהויות היסוד – חלק ג'
סרטון 4	תרגיל 1	כולל הסבר על מה עושים עם זהויות ומהי הוכחת זהויות
סרטון 5	תרגיל 1	המשך שאלה מהסרטון הקודם
סרטון 6		זהויות של סכום והפרש זוויות
סרטון 7	תרגיל 2	
סרטון 8		זהויות של זווית כפולה
סרטון 9	תרגיל 3	
סרטון 10	תרגיל 3	
סרטון 11		זהויות של סכום והפרש פונקציות
סרטון 12	תרגיל 4	
סרטון 13		ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור הזוויות $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$
סרטון 14		המעגל הטריגונומטרי: הקדמה והסבר על זוויות ראי
סרטון 15		המעגל הטריגונומטרי: תרגול זוויות ראי
סרטון 16		המעגל הטריגונומטרי: הסבר על שימוש במעגל הטריגונומטרי
סרטון 17		המעגל הטריגונומטרי: סיכום הזהויות הנובעות מהמעגל הטריגונומטרי
סרטון 18		המעגל הטריגונומטרי: חישוב ללא מחשבון של פונקציה טריגונומטרית על פי המעגל הטריגונומטרי
סרטון 19	תרגיל 5	
סרטון 20		המעגל הטריגונומטרי: ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור הזוויות $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$
סרטון 21	תרגיל 6	

תרגילים

1. הוכח את הזהויות הבאות:

$$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \sin^2 \alpha = \cos \alpha$$

$$\frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2$$

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha$$

2. הוכח את הזהות הבאה:

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

3. הוכח את הזהויות הבאות:

$$4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$$

$$(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$$

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$$

$$\frac{\cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$$

4. הוכח את הזהויות הבאות:

$$\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha$$

$$\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha = \sin 2\alpha \sin 4\alpha$$

5. ענה ללא שימוש במחשבון:

$$\sin 150^\circ = \tan 225^\circ = \cos(-45^\circ) =$$

$$\cos 210^\circ = \sin 315^\circ = \sin 510^\circ =$$

$$\tan 120^\circ = \cos 120^\circ = \cos 930^\circ =$$

$$\sin 330^\circ = \tan(-30^\circ) = \tan(-225^\circ) =$$

6. הוכח את הזהות הבאה:

$$\frac{\sin(180^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(-2\alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

6.3 - טריגונומטריה – משוואות

$$\cos x = \cos \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$x = \alpha + 360^\circ k$$

$$x = -\alpha + 360^\circ k$$

$$x = \pm \alpha + 360^\circ k$$

$$\tan x = \tan \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$x = \alpha + 180^\circ k$$

$$\sin x = \sin \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$x = \alpha + 360^\circ k$$

$$x = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$$

סיכום פתרונות המשוואות המיוחדות:

$$\cos x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\tan x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 180^\circ k$$

$$x = \pi k$$

$$\sin x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 180^\circ k$$

$$x = \pi k$$

$$\cos x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 360^\circ k$$

$$x = 2\pi k$$

$$\sin x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\cos x = -1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$x = \pi + 2\pi k$$

$$\sin x = -1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	רקע, ידע מקדים, כיצד פותרים משוואה עם סינוס
סרטון 2	תרגיל 2	
סרטון 3	תרגיל 3	
סרטון 4	תרגיל 4	
סרטון 5	תרגיל 5	כיצד פותרים משוואה עם קוסינוס
סרטון 6	תרגיל 6	
סרטון 7	תרגיל 7	כיצד פותרים משוואה עם טנגנס
סרטון 8	תרגיל 8	
סרטון 9	תרגיל 9	
סרטון 10	תרגיל 10	
סרטון 11	תרגיל 11	
סרטון 12	תרגיל 12	הסבר על המשוואות המיוחדות (שבאגף ימין שלהן 0, 1 או -1)
סרטון 13	תרגיל 13	משוואות sin-sin

	14	סרטון 14
משוואות $\cos-\cos$	15	סרטון 15
	16	סרטון 16
משוואות $\tan-\tan$	17	סרטון 17
משוואות מסוג $abc=0$	18	סרטון 18
	19	סרטון 19
	20	סרטון 20
משוואות עם הצבת t	21	סרטון 21
	22	סרטון 22
	23	סרטון 23
משוואות עם מכנה ותחום הגדרה	24	סרטון 24
	25	סרטון 25
הכרות עם שימוש בזהויות בפתרון משוואות טריגונומטריות	26	סרטון 26
	27	סרטון 27
	28	סרטון 28
	29	סרטון 29
	30	סרטון 30
	31	סרטון 31
משוואות עם חלוקה ב- $\cos$ לקבלת $\tan$	32	סרטון 32
פתרון משוואות בתחום נתון	33	סרטון 33
	34	סרטון 34
	35	סרטון 35
רדיאנים – הסבר על מהו רדיאן והקשר $\pi = 180^\circ$	36	סרטון 36
	37	סרטון 37
	38	סרטון 38
	39	סרטון 39
	40	סרטון 40
	41	סרטון 41
	42	סרטון 42
	43	סרטון 43

תרגילים:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad .1$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad .2$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .3$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad .4$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad .5$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .6$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad .7$$

$$\tan x = -1 \quad .8$$

$$\tan x = 5 \quad .1 \cos x = -0.6 \quad .2 \sin x = 0.7 \quad .3 \quad .9$$

$$\tan 5x = -1 \quad .1 \quad 2 \cos 2x = -\sqrt{3} \quad .2 \quad \sin 3x = \frac{1}{2} \quad .3 \quad .10$$

$$\tan(50^\circ - x) = 1.3 \quad .1 \quad \cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad .2 \quad \sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .3 \quad .11$$

$$\cos x = 0 \quad .1 \quad \sin x = -1 \quad .2 \quad \sin x = 1 \quad .3 \quad \sin x = 0 \quad .4 \quad .12$$

$$\tan x = 1 \quad .1 \quad \tan x = 0 \quad .2 \quad \cos x = -1 \quad .3 \quad \cos x = 1 \quad .4 \quad .13$$

$$\sin x = \sin 3x \quad .14$$

$$\sin x = \sin(120^\circ - x) \quad .1 \quad \sin 2x = \sin(x + 30^\circ) \quad .2 \quad .15$$

$$\cos x = \cos 3x \quad .16$$

$$\cos x = \cos(40^\circ - x) \quad .16$$

$$\tan 2x = \tan(60^\circ - x) \quad .17 \quad \tan x = \tan 3x \quad .18$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad .18$$

$$\sin 2x - 2 \sin^2 2x = 0 \quad .19$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \quad .20$$

$$2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad .21$$

$$\tan^2 x - 3 \tan x - 4 = 0 \quad .22$$

$$\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad .23$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad .24$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad .25$$

$$\sin x = \cos x \quad .26$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad .27$$

$$\sin x - \sin 2x = 0 \quad .28$$

$$3 \cos x - \cos 2x = 0 \quad .29$$

$$\cos 2x = -\cos 3x \quad .30 \quad \sin x = -\sin 3x \quad .31$$

$$\sin(x + 30^\circ) = -\cos x \quad .31$$

$$3 \sin^2 x = \cos^2 x \quad .32 \quad \sin x = 2 \cos x \quad .33 \quad \sin x = -\cos x \quad .34 \quad \sin x = \cos x \quad .35$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad [-360^\circ, 360^\circ] \quad .36 \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad [0^\circ, 360^\circ] \quad .37$$

$$\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x \quad [-180^\circ, 180^\circ] \quad .38$$

$$\frac{\sin 6x}{1 - \cos 4x} = 0 \quad \left[0^\circ, 135^\circ \right] \quad \mathbf{.35}$$

$$\pi = 180^\circ \quad \mathbf{.36}$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \left[-2\pi, 2\pi \right] \quad \mathbf{.37}$$

$$\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x \quad \left[-\pi, \pi \right] \quad \mathbf{.38}$$

$$\frac{\sin 6x}{1 - \cos 4x} = 0 \quad \left[0, \frac{3\pi}{4} \right] \quad \mathbf{.39}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x \quad \left[-\pi, \pi \right] \quad \mathbf{.40}$$

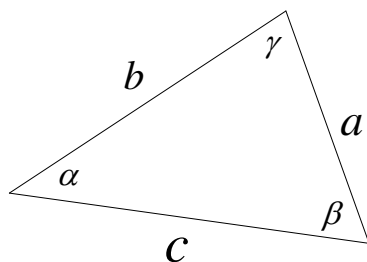
$$2 \cos^2 x = \sin 5x + \sin x + 1 \quad \left[0, \frac{3\pi}{2} \right] \quad \mathbf{.41}$$

$$\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \cos 2x \quad \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \right] \quad \mathbf{.42}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 \quad \left[0, 2\pi \right] \quad \mathbf{.43}$$

6.4 - טריגונומטריה במישור

משפט הסינוסים



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

משפט הקוסינוסים

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{או} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

מתי נשתמש בכל משפט

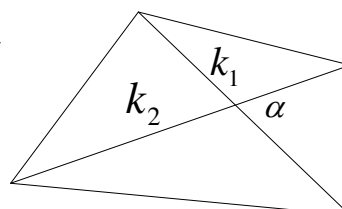
- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
 - נחונות שתי זוויות וצלע
 - נחונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן
 - נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
 - נחונות שתי צלעות והזווית ביניהן
 - נחונות שלוש צלעות
- כאשר ישנם יותר נחונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט בו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים תיתכנה שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

שטח משולש

$$S_{\Delta} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} \quad \text{או} \quad S_{\Delta} = \frac{ab \sin \gamma}{2} \quad \text{או} \quad S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2}$$

שטח מרובע על פי אלכסוניו

$$S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$$



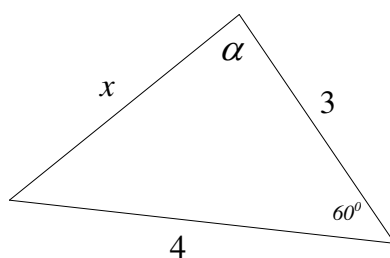
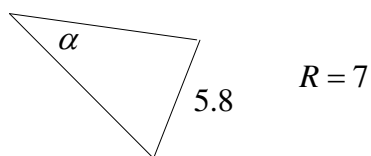
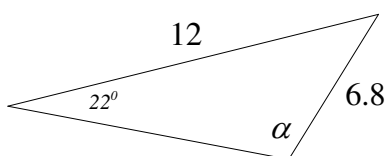
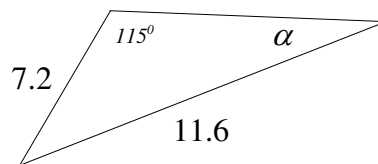
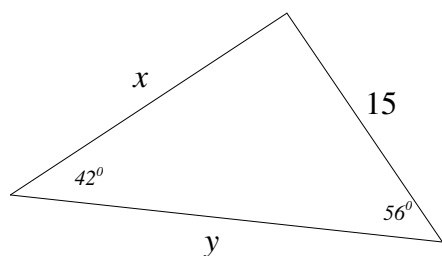
לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 1		הסבר על משפט הסינוסים
סרמון 2	תרגיל 1	תרגילי בסיס משפט הסינוסים – חלק א'
סרמון 3	תרגיל 1	תרגילי בסיס משפט הסינוסים – חלק ב' – היתכנות שתי תשובות לזווית
סרמון 4	תרגיל 1	תרגילי בסיס משפט הסינוסים – חלק ג' – קבלת משוואה ופתרונה
סרמון 5		הסבר על משפט הקוסינוסים
סרמון 6	תרגיל 2	תרגילי בסיס משפט הקוסינוסים + למה אין שתי תשובות לזווית
סרמון 7		הסבר על מתי משתמשים במשפט הסינוסים ומתי במשפט הקוסינוסים
סרמון 8	תרגיל 3	
סרמון 9	תרגיל 4	
סרמון 10	תרגיל 5	
סרמון 11	תרגיל 6	
סרמון 12	תרגיל 7	
סרמון 13	תרגיל 8	
סרמון 14		שימוש פעמיים במשפט הקוסינוסים ליצירת שתי משוואות בשני נעלמים
סרמון 15	תרגיל 9	
סרמון 16	תרגיל 10	
סרמון 17	תרגיל 11	
סרמון 18	תרגיל 12	
סרמון 19		שלוש נוסחאות לשטח משולש
סרמון 20	תרגיל 13	
סרמון 21		נוסחת שטח מרובע על פי אלכסוניו
סרמון 22	תרגיל 14	
סרמון 23	תרגיל 15	
סרמון 24	תרגיל 16	
סרמון 25	תרגיל 17	כולל שימוש בזהויות על מנת להגיע לתשובה
סרמון 26	תרגיל 18	כולל פתרון משוואה טריגונומטרית
סרמון 27	תרגיל 19	כולל פתרון משוואה טריגונומטרית

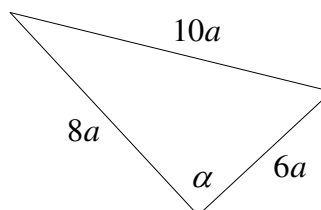
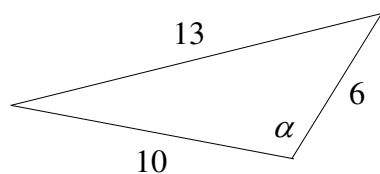
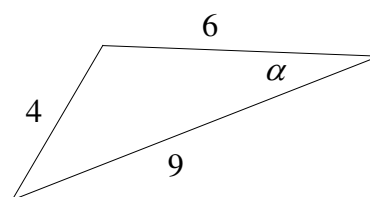
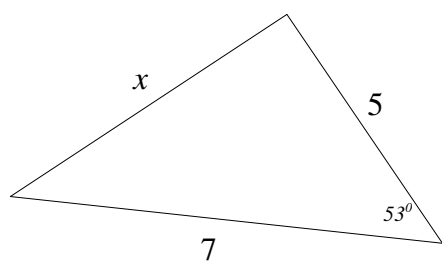
תרגילים

1. מצא את ערכו של $\alpha / x / y$ במשולשים הבאים (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני

הצלעות בס"מ):



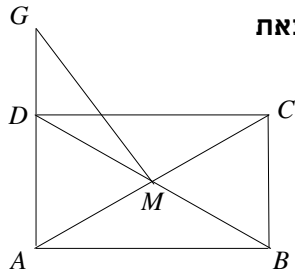
2. מצא את ערכו של α / x במשולשים הבאים:



3. נתון משולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה

של זווית הבסיס בו הוא 70° . CD הוא חוצה זווית הבסיס $\angle C$.

מצא את אורכו של הקטע AD .



4. אלכסוני המלבן $ABCD$ נפגשים בנקודה M . הנקודה G נמצאת

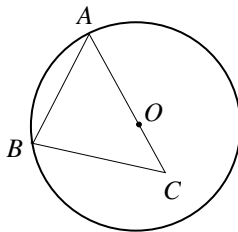
על המעטף הצלע AD .

נתון: $DG = 1.2_{cm}$, $AB = 4_{cm}$, $AD = 3_{cm}$.

מצא את גודלו של הקטע GM .

5. מרובע שאורכי אלכסוניו 8_{cm} ו- 11_{cm} חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6_{cm} .

חשב את זוויות המרובע.



6. הצלע AB במשולש $\triangle ABC$ היא מיתר במעגל שמרכזו O .

הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.

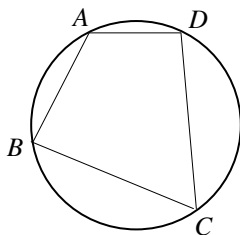
נתון: $\angle BAC = 38^\circ$, $OC = 3_{cm}$, $BC = 9_{cm}$.

מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB .

7. אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם צלע אחת של המקבילית וזווית של

61.05° עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה.

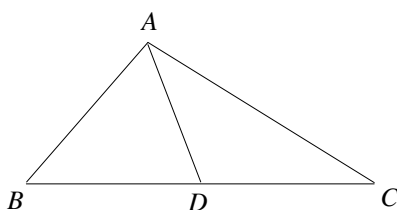
חשב את היקף המקבילית.



8. המרובע $ABCD$ חסום במעגל.

נתון: $AD = 4_{cm}$, $CD = 10_{cm}$, $BC = 9_{cm}$, $AB = 6_{cm}$.

מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.



9. בשרטוט נתון: $AD = 5_{cm}$, $AC = 8_{cm}$, $AB = 6_{cm}$.

הנקודה D היא אמצע הצלע BC .

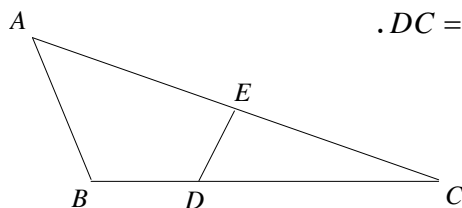
חשב את אורך הקטע BC .

10. הצלע AC במשולש $\triangle ABC$ גדולה פי 4 מהצלע AB . הנקודה E היא אמצע הצלע AC

והנקודה D נמצאת על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.

נתון: $AB = a$, $BC = b$.

הבע באמצעות a ו- b את אורך הקטע DE .

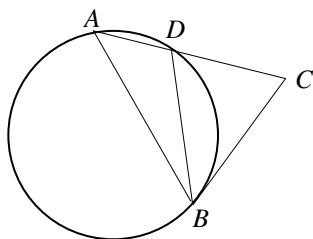


11. המשולש $\triangle ABD$ חסום במעגל שרדיוסו R .

המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B נפגשים בנקודה C .

נתון: $\angle C = \alpha$, $\angle ADB = \beta$.

הבע באמצעות α ו- β את אורך הקטע BC .

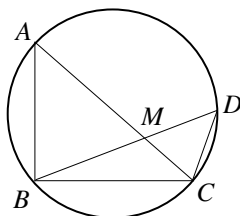


12. AC ו- BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R ,

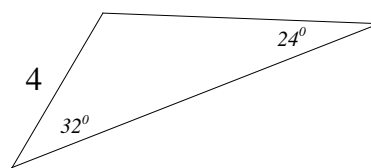
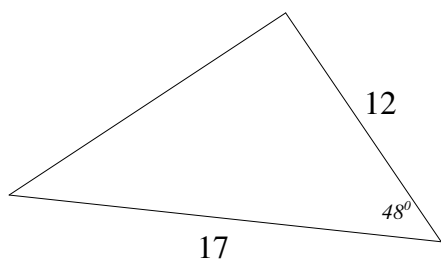
שנפגשים בנקודה M . זווית $\angle B$ היא זווית ישרה.

נתון: $AB = k$, $DM = p$, $DC = q$.

הבע באמצעות k, p ו- q את אורך הקטע MC .



13. חשב את שטחי המשולשים הבאים:



14. חשב את שטחו של מרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של

15° עם הבסיסים.

15. אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n . הזווית בין אלכסוני המלבן היא θ .

הוכח כי מתקיים: $\sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$

16. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$) חוצה את הזווית $\angle B$.

נתון: $\angle A = \alpha$, $AB = m$.

הבע באמצעות α ו- m את שטח המשולש $\triangle BCD$.

17. במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו

היא β , BE חוצה את זווית $\angle B$ ו- CD הוא הגובה לשוק AB .

$$S_{\triangle ADE} = -\frac{k^2 \sin \frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4 \sin \frac{3\beta}{2}} \quad \text{הוכח כי שטח המשולש } \triangle ADE \text{ הוא:}$$

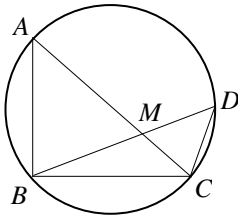
18. AC ו- BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R , שנפגשים בנקודה M .

זווית $\angle B$ היא זווית ישרה.

נתון: $\angle MCB = \beta$, $\angle MBC = \alpha$.

א. הבע באמצעות R , α ו- β את שטח המשולש $\triangle BDC$.

ב. נתון: $\beta = 2\alpha$, $S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2}R^2$. חשב את α .



19. במרפז שווה שוקיים, שאורך השוק בו הוא b והזווית ליד הבסיס הגדול היא γ נתון

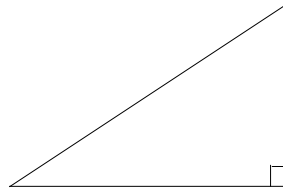
שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות γ ו- b את אורכי בסיסי המרפז.

ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.

6.5 - טריגונומטריה במרחב

תזכורת:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{\text{מול}}{\text{יתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{\text{ליד}}{\text{יתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{\text{מול}}{\text{ליד}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{הניצב שמול הזווית}} = \frac{\text{ליד}}{\text{מול}} = \frac{b}{a}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{משפט פיתגורס:}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad \text{משפט הסינוסים:}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \text{משפט הקוסינוסים:}$$

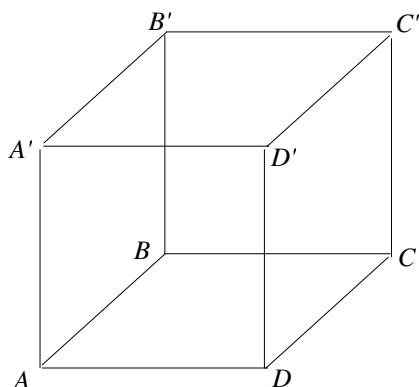
לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, ידע מוקדם, הכרת הגופים במרחב, מושגים במרחב, נוסחאות נפח, שטח מעמפת ושטח פנים
סרטון 2		זווית בין ישר למישור
סרטון 3	תרגיל 1	
סרטון 4	תרגיל 2	
סרטון 5		זווית בין שני מישורים
סרטון 6	תרגיל 3	
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8	תרגיל 5	
סרטון 9	תרגיל 5	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 10		מהי פירמידה ישרה
סרטון 11		זוויות בפירמידה
סרטון 12	תרגיל 6	
סרטון 13	תרגיל 7	
סרטון 14	תרגיל 8	
סרטון 15	תרגיל 9	
סרטון 16	תרגיל 10	
סרטון 17	תרגיל 11	
סרטון 18	תרגיל 12	
סרטון 19	תרגיל 13	
סרטון 20	תרגיל 14	
סרטון 21	תרגיל 14	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 22	תרגיל 15	

תרגילים

1. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $AB = 8_{cm}$, $AD = 12_{cm}$, $AA' = 7_{cm}$.

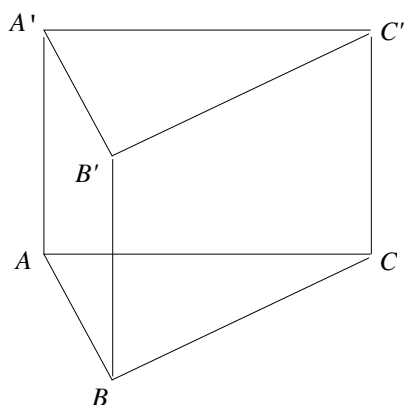
חשב את אורך האלכסון BD' ואת הזווית בינו לבין בסיס התיבה.



2. בקובייה $ABCD A'B'C'D'$ אורך המקצוע הוא 8 ס"מ.

הנקודה O היא מפגש אלכסוני הבסיס התחתון.

מצא את גודל הזווית שבין OA' לפאה $ABB'A'$.



3. נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$,

שבה הבסיס הוא משולש שווה שוקיים ($AC = BC$)

שאורך שוקו k וזווית הראש שלו γ .

הזווית בין המישור ABC למישור ABC' היא β .

הבע באמצעות k , β ו- γ את נפח המנסרה.

4. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $BD' = m$. הזווית בין האלכסון BD' לבסיס $ABCD$ היא α

והזווית בין האלכסון BD' לפאה הצדדית $ABB'A'$ היא γ .

הבע באמצעות m , α ו- γ את נפח התיבה.

5. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ הבסיס $ABCD$ הוא ריבוע. גובה התיבה הוא h .

נתון: $\angle A'DC' = \beta$.

א. הראה שאורך צלע בסיס התיבה הוא: $\frac{\sqrt{2}h \sin \frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos \beta}}$.

ב. עבור אילו ערכים של β יש פתרון לבעיה?

6. נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה ובה אורך מקצוע הבסיס הוא 10 ס"מ ואורך מקצוע צדדי הוא 16 ס"מ. מצא את:
- הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.
 - גובה הפירמידה.
 - הזווית בין פאה צדדית לבסיס.
 - נפח הפירמידה.
 - השטח הפנים של הפירמידה.
7. נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה ובה אורך מקצוע הבסיס הוא 12 ס"מ ואורך מקצוע צדדי הוא 14 ס"מ. מצא את:
- הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס.
 - גובה הפירמידה.
 - הזווית בין פאה צדדית לבסיס.
 - הזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות.
8. נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה ובה אורך מקצוע הבסיס הוא b והזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא α . הבע באמצעות b ו- α את נפח הפירמידה ואת שטח המעמפת שלה.
9. נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה ובה אורך מקצוע הבסיס הוא a והזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות היא β . זווית הבסיס של פאה צדדית היא γ . הבע באמצעות β את $\sin \gamma$.
10. נתונה פירמידה משולשת וישרה $SABC$, שבה הבסיס הוא משולש שווה שוקיים $(AC = BC)$ שאורך שוקו k וזווית הראש שלו 2γ . אורך כל מקצוע צדדי בפירמידה גם הוא k . הבע באמצעות k ו- γ את נפח הפירמידה.
11. נתונה פירמידה משולשת, משוכללת וישרה ובה הזווית בין שתי פאות צדדיות סמוכות היא β . זווית הבסיס של פאה צדדית היא γ . הוכח: $\sin \gamma \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$.
12. נתונה פירמידה משולשת וישרה, שבבסיסה משולש ישר זווית, שבו אחד מהניצבים הוא c והזווית שמולו היא α . הזווית בין מקצוע צדדי לבסיס היא β . הבע באמצעות c , α ו- β את נפח הפירמידה.

13. נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. הזווית בין שני מקצועות צדדיים סמוכים היא 2α

והזווית בין שני מקצועות צדדיים נגדיים היא 2β .

$$\text{הוכח: } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

14. נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. גובה הפירמידה הוא h והזווית בין שתי פאות

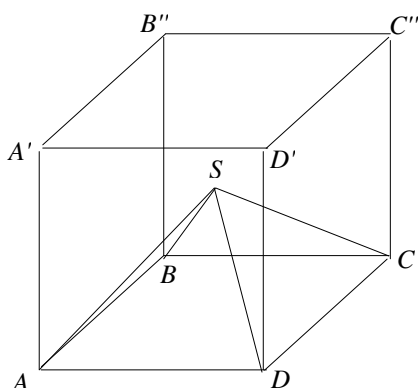
צדדיות סמוכות היא β .

$$\text{הראה כי מקצוע הבסיס של הפירמידה הוא: } \frac{h}{\cos \frac{\beta}{2}} \sqrt{-2 \cos \beta}$$

15. בקובייה $ABCD A' B' C' D'$ חסומה פירמידה $SABCD$, שבה כל המקצועות שווים. בסיס

הפירמידה מונח על בסיס הקובייה. מצא את גודל הזווית שבין מקצוע צדדי של הפירמידה

לפאה צדדית של הקובייה, שלהם קודקוד משותף.

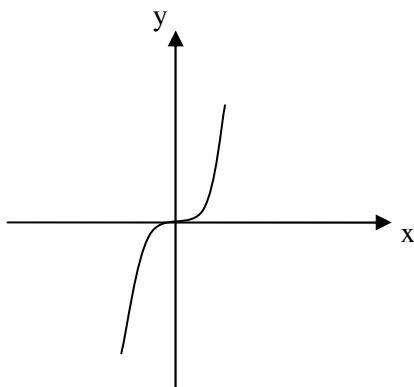


פרק 7 – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי:

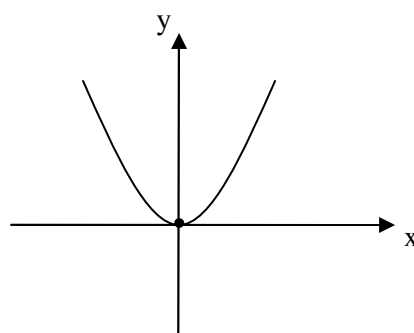
7.1 – נגזרות ומשיקים:

פונקציות נפוצות

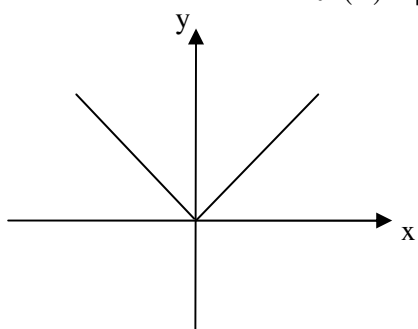
הפונקציה $f(x) = x^3$:



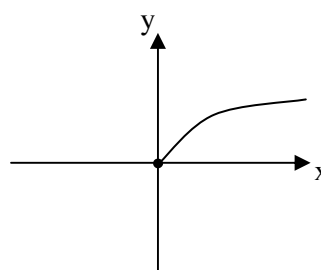
הפונקציה $f(x) = x^2$:



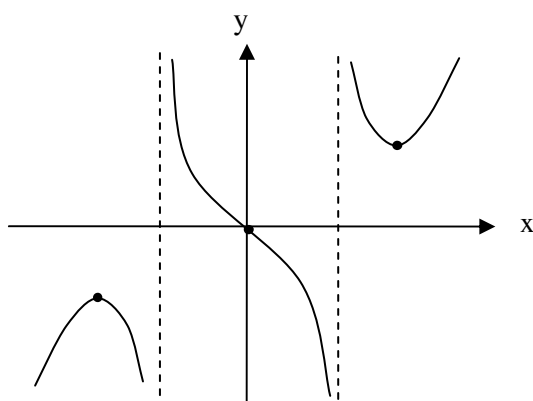
הפונקציה $f(x) = |x|$:



הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$:



פונקציה עם מכנה, למשל $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:



הנגזרת

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

כללי הגזירה

$$\text{כלל גזירה מס' 1: } f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): } f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): } f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\text{כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): } f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

$$\text{כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): } f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$\text{כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של } \frac{1}{x} \text{): } f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): } f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$$

$$\text{כלל גזירה מס' 8 (מנה): } f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 9 (שורש): } f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

שיפוע של פונקציה

השיפוע (m) של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה

$$A(x_1, y_1) \cdot \text{כלומר: } m = f'(x_1)$$

השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע

הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.

משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת

$$\text{ישר: } y - y_1 = m(x - x_1)$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהי פונקציה, פונקציות נפוצות, פונקציה רציפה
סרטון 2		משיפוע של ישר לשיפוע של פונקציה
סרטון 3	תרגיל 1	כלל גזירה 1 (x^n)
סרטון 4	תרגיל 2	כלל גזירה 2 (כפל בקבוע)
סרטון 5	תרגיל 3	כלל גזירה 3 (גזירת קבוע)
סרטון 6	תרגיל 4	כלל גזירה 4 (סכום והפרש)
סרטון 7	תרגיל 5	כלל גזירה 5 (פונקציה מורכבת)
סרטון 8	תרגיל 6	כלל גזירה 6 $\left(\frac{1}{x}\right)$
סרטון 9	תרגיל 7	כלל גזירה 7 (מכפלה)
סרטון 10	תרגיל 8	כלל גזירה 8 (מנה)
סרטון 11	תרגיל 9 א-ו	כלל גזירה 9 (שורש) – חלק א'
סרטון 12	תרגיל 9 ז-ט	כלל גזירה 9 (שורש) – חלק ב'
סרטון 13	תרגיל 9 י-י"ג	כלל גזירה 9 (שורש) – חלק ג'
סרטון 14	תרגיל 10	גזירת פונקציות עם פרמטרים
סרטון 15	תרגילים 11,12	שיפוע של פונקציה
סרטון 16	תרגיל 13	שיפוע של המשיק לפונקציה
סרטון 17	תרגיל 14	משוואת המשיק לפונקציה (כולל מציאת משוואת משיק כשנתון x)
סרטון 18	תרגילים 15,16	מציאת משוואת משיק כשנתון y
סרטון 19	תרגילים 17,18	מציאת משוואת משיק כשנתון m
סרטון 20	תרגיל 19	מציאת משוואת משיק כשנתונה θ (הזווית בין הישר לכיוון החיובי של ציר ה- x).
סרטון 21	תרגילים 20,21	משוואת משיק עם מציאת פרמטר יחיד
סרטון 22	תרגיל 22	משוואת משיק עם מציאת שני פרמטרים
סרטון 23	תרגיל 23	כיצד מוצאים משיק כללי וכיצד מוצאים משיק מנקודה חיצונית
סרטון 24	תרגיל 24	משיק מנקודה חיצונית
סרטון 25	תרגיל 25	משיק מנקודה חיצונית

תרגילים:

1. גזור:

$$\text{א. } f(x) = x^3 \quad \text{ב. } f(x) = x^7 \quad \text{ג. } f(x) = x^2 \quad \text{ד. } f(x) = x \quad \text{ה. } f(x) = x^{-3} \quad \text{ו. } f(x) = x^{-1}$$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ז. } f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \text{ח. } f(x) = x^{\frac{3}{4}}$$

2. גזור:

$$\text{א. } f(x) = 2x^3 \quad \text{ב. } f(x) = 3x^7 \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{2}x^4 \quad \text{ד. } f(x) = \frac{x^6}{7} \quad \text{ה. } f(x) = 8x \quad \text{ו. } f(x) = 3x^{-2}$$

$$f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{ז. } f(x) = 6x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ח. } f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$$

3. גזור:

$$\text{א. } f(x) = 12 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{7}{8}$$

4. גזור:

$$\text{א. } f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$$

5. גזור:

$$\text{א. } f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{ב. } f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ג. } f(x) = 3(x - x^2)^2$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$$

6. גזור:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב. } f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{2}{3-x} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{6}{x+5}$$

7. גזור:

$$\text{א. } f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב. } f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ג. } f(x) = x^3(6-x)^4$$

8. גזור:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{3}{x^3}$$

9. גזור:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ב. } f(x) = 4\sqrt{x+1} \quad \text{ג. } f(x) = \sqrt{x^3-1}$$

$$\text{ד. } f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \quad \text{ה. } f(x) = x^2\sqrt{x+3} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ח. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{1-2x} \quad \text{ט. } f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\text{י. } f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}} \quad \text{יא. } f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad \text{יב. } f(x) = \sqrt[5]{x^2-3x-4}$$

$$\text{יג. } f(x) = x \cdot \sqrt[4]{(x^2+1)^3}$$

10. גזור:

$$\text{א. } f(x) = ax^4 - bx \quad \text{ב. } f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ד. } f(x) = a\sqrt{bx^2+c}$$

11. מצא את שיפועהפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

12. מצא את שיפועהפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$ בנקודה שבה $x = -2$.

13. מצא את שיפועהמשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה שבה $x = 1$.

14. מצא את משוואתהמשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה שבה $x = -1$.

15. מצא את משוואתהמשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה שבה $y = 2$.

16. מצא את משוואותהמשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם

ציר ה- x .

17. מצא את משוואתהמשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

18. מצא את משוואתהמשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}-1}$ ששיפועו -2.

19. מצא את משוואותהמשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר

ה- x זווית של 135° .

20. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא 8.

מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

21. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4.

מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

22. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx}-1}$ בנקודה $(1,6)$ הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

23. א. בטא באמצעות t את משוואתהמשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x = t$.

ב. מצא את ערכו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1,1)$.

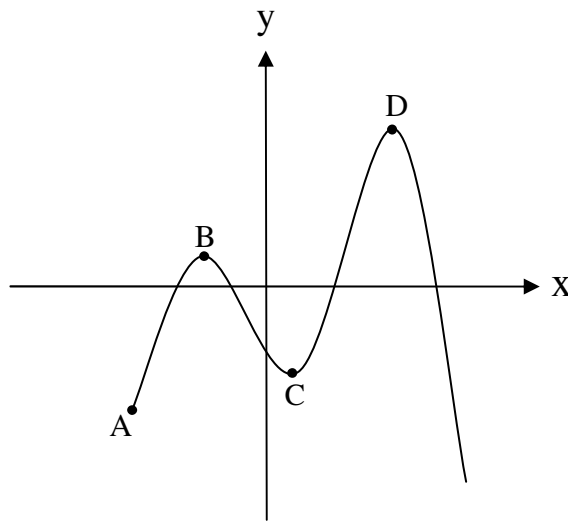
24. מצא את משוואתהמשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3,0)$.

25. מצא את משוואתהמשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר

עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

7.2 - חקירת פולינום

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום)



מינימום/מקסימום מקומי (פנימי) - B, C, D

מינימום/מקסימום קצה - A

מינימום/מקסימום מוחלט - D

נקודות קיצון מקומיות

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.

בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית – נקודה כזו

נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

מציאת נקודות קיצון מקומיות:

א. נגזור את הפונקציה.

ב. נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.

ג. נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .

ד. נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון ע"י טבלה.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהן נקודות קיצון, קיצון מקומי/קצה/מוחלט
סרטון 2	תרגיל 1	מציאת נקודות קיצון מקומיות – שלבי עבודה + דוגמא
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6	תרגילים 5,6	שאלות על נקודות קיצון בשילוב מציאת פרמטרים
סרטון 7	תרגיל 7	חקירת פונקציית פולינום
סרטון 8	תרגיל 8	
סרטון 9	תרגיל 9	

	10 תרגיל	10 סרטון
	11 תרגיל	11 סרטון
	12 תרגיל	12 סרטון

תרגילים

1. מצא את נקודת הקיצון שלהפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

2. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

3. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

4. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

5. לפונקציה $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.

מצא את ערכו של הפרמטר a .

6. לפונקציה $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$. ענה על הסעיפים הבאים:

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. שרטוט.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. שרטוט.

10. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ה. שרטוט.

11. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. שרטוט.

12. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$.

א. לאילו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הצב בפונקציה $a = 6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , שרטוט.

7.3 - חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש

סעיפי חקירה מלאה של פונקציה:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
- ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- ו. נקודות פיתול.
- ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה.
- ח. שרטוט.

תחום הגדרה של פונקציה

- כל פולינום מוגדר לכל x .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

אסימפטוטות

חוקי האינסוף

$$1) \frac{1}{\infty} = 0 \quad , \quad \frac{1}{0^+} = +\infty \quad , \quad \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \rightarrow \quad 2) \frac{1}{0} = \infty \quad 3) \infty \cdot \infty = \infty$$

$$4) \infty + \infty = \infty \quad 5) \frac{\infty}{\infty} = ? \quad 6) \infty - \infty = ? \quad 6) \infty - \infty = ?$$

אסימפטוטה אופקית:ל- $f(x)$ יש אסימפטוטה אופקית $y = n$ אם מתקיים: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = n$

אסימפטוטה אנכית:ל- $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $x = a$ אם מתקיים: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

נקודות פיתול

הגדרה א': נקודה בה הפונקציה עוברת מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה או להיפך

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \cup$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \cap$$

הגדרה ב': נקודה בה הנגזרת השנייה מחליפה סימן

הגדרה ג': נקודה בה המשיקים לפונקציה עוברים מלהיות מתחת לפונקציה ללהיות מעליה או להיפך

הערה: בנקודות פיתול המשיק לפונקציה חותך את הפונקציה

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	הסבר על תחום הגדרה של מנות
סרטון 2	תרגיל 2	הסבר על תחום הגדרה של שורשים
סרטון 3	תרגיל 3	נקודות קיצון בפונקציות מנה
סרטון 4		חוקי האינסוף
סרטון 5		יישום חוקי האינסוף בפונקציה $\frac{1}{x}$ והכרות עם אסימפטוטות
סרטון 6		הגדרת אסימפטוטות אופקיות ואנכיות
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8	תרגיל 5	
סרטון 9	תרגיל 6	
סרטון 10	תרגיל 7	
סרטון 11	תרגיל 8	
סרטון 12	תרגיל 9	
סרטון 13	תרגיל 10	נקודת אי הגדרה
סרטון 14	תרגיל 11	נקודת אי הגדרה
סרטון 15	תרגיל 12	אסימפטוטות בפונקציות שורש (לראשונה)
סרטון 16	תרגיל 13	
סרטון 17	תרגיל 14	
סרטון 18	תרגיל 15	
סרטון 19	תרגיל 16	אסימפטוטה אופקית מפוצלת בפונקצית מנה עם שורש
סרטון 20	תרגיל 17	אסימפטוטה אופקית מפוצלת בפונקצית מנה עם שורש
סרטון 21	תרגיל 18	מציאת פרמטרים בשאלות של אסימפטוטות
סרטון 22	תרגיל 19	מציאת פרמטרים בשאלות של אסימפטוטות
סרטון 23	תרגיל 20	חקירת פונקציית מנה (ללא פיתול) – חלק א'
סרטון 24	תרגיל 20	חקירת פונקציית מנה (ללא פיתול) – חלק ב'
סרטון 25	תרגיל 20	חקירת פונקציית מנה (ללא פיתול) – חלק ג'
סרטון 26	תרגיל 21	חקירת פונקציית שורש (ללא פיתול) – חלק א'
סרטון 27	תרגיל 21	חקירת פונקציית שורש (ללא פיתול) – חלק ב'
סרטון 28		הסבר על נקודות פיתול
סרטון 29	תרגיל 22	
סרטון 30	תרגיל 23	
סרטון 31	תרגיל 24	
סרטון 33	תרגיל 25	נקודת פיתול שבה גם הנגזרת הראשונה היא אפס
סרטון 34	תרגיל 26	מציאת פרמטרים באמצעות נקודת פיתול
סרטון 35	תרגיל 27	

סרטון 36	תרגיל 27	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 37	תרגיל 28	
סרטון 38	תרגיל 28	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 39	תרגיל 28	המשך שאלה מסרטון קודם

תרגילים

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{ב. } f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \quad \text{ג. } f(x) = \frac{2x}{x-3}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$$

2. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ב. } f(x) = 2\sqrt{x-3} \quad \text{ג. } f(x) = 3x\sqrt{1-2x} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}} \quad \text{ה.}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$$

$$3. \text{ נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$$

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה? ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

$$4. \text{ מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: } f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$$

$$5. \text{ מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: } f(x) = \frac{5x^2 + 1}{x^2 - 9}$$

$$6. \text{ מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: } f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{1 + 3x^2}$$

$$7. \text{ מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: } f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2x - 15}$$

$$8. \text{ מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: } f(x) = \frac{6x^3 - 5x + 1}{1 + 2x^2}$$

$$9. \text{ מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: } f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$$

$$10. \text{ מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

11. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 4x}$

12. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4}$

13. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

14. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

16. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

17. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים שלהפונקציה: $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

18. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות

בנקודה $(-1, 2)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

19. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16, 2)$. מצא את ערכי הפרמטרים

a ו- b .

20. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה

וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

21. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

22. מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$

23. מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$

24. מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$

25. מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$

26. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a}{x^2+b}$

הנקודה $(-1,1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

27. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטוט.

28. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטוט.

7.4 - חקירת פונקציה עם פרמטר

סיווג נקודות קיצון באמצעות " y :

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת קיצון אז:

אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.

אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגילים 1,2,3	סיווג נקודות קיצון לפי הנגזרת השנייה
סרטון 2	תרגיל 4	
סרטון 3	תרגיל 4	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 4	תרגיל 5	
סרטון 5	תרגיל 5	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 6	תרגיל 6	
סרטון 7	תרגיל 6	המשך שאלה מסרטון קודם

תרגילים:

1. מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$

2. מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x - 16$

3. מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3b^2x$

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.
ז. מצא את שלוש נקודות הפיתול של הפונקציה. ניתן להשאיר שורש בתשובה.

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2} \quad (b > 1)$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2} \quad (b > 0)$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטוט.

7.5 - חשבון דיפרנציאלי – בעיות קיצון

שלבי עבודה:

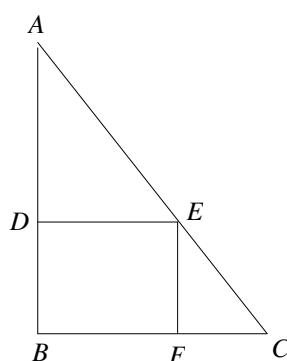
- א. נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- ב. נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- ג. נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- ד. נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחליך את ערך/ערכי ה- x .
- ה. נוודא שערך ה- x מסעיף ד' הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ו. ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	רקע והדגמת הרעיון העומד מאחורי בעיות קיצון
סרטון 2	תרגיל 1	שלבי עבודה בפתרון בעיות קיצון
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6	תרגיל 5	
סרטון 7	תרגיל 6	
סרטון 8	תרגיל 7	
סרטון 9	תרגיל 8	
סרטון 10	תרגיל 9	
סרטון 11		הכרת הגופים במרחב וחישוב שטח המעמפת/שטח הפנים/הנפח של כל גוף
סרטון 12	תרגיל 10	
סרטון 13	תרגיל 11	
סרטון 14	תרגיל 12	
סרטון 15	תרגיל 13	
סרטון 16	תרגיל 14	
סרטון 17	תרגיל 15	
סרטון 18	תרגיל 16	
סרטון 19	תרגיל 17	
סרטון 20	תרגיל 18	
סרטון 21	תרגיל 19	
סרטון 22	תרגיל 19	
סרטון 23	תרגיל 20	
סרטון 24	תרגיל 21	
סרטון 25		הסבר על בעיות קיצון שבהן נתונה התשובה
סרטון 26	תרגיל 22	
סרטון 27	תרגיל 23	
סרטון 28	תרגיל 23	
סרטון 29	תרגיל 24	

תרגילים

1. מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.
2. נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני.
מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
3. מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
4. מבין כל המשולשים שווים השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.
5. א. מבין כל המשולשים שווים השוקיים שהיקפם a מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.
ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווים השוקיים בעלי אותו היקף המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

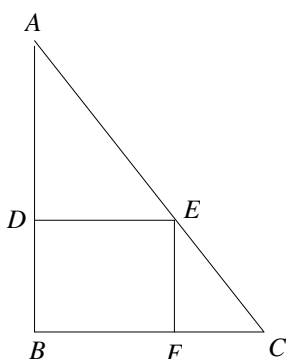


6. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת

על היתר AC כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן.

נתון: $AB = 20_{cm}$, $BC = 16_{cm}$. מצא את שטחו

של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



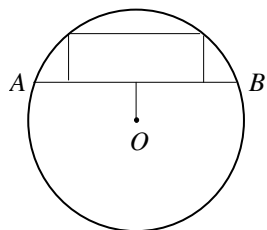
7. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת

על היתר AC כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן.

נתון: $AB = a$, $BC = b$. מצא את שטחו

של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

8. במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}$ cm העבירו מיתר AB

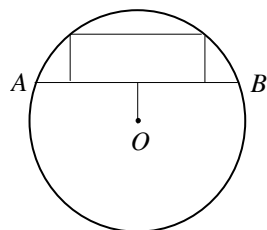


שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 cm.

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

9. במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB



שמרחקו ממרכז המעגל הוא a .

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בשרטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

10. נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר.

מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

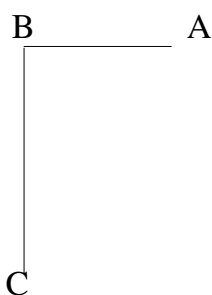
11. מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k מצא את נפחו של הגליל

בעל הנפח המקסימלי.

12. נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא k ושטח

המעטפת שלה הוא S .

הוכח: $S < 2k^2$.



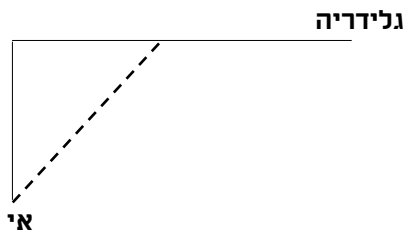
13. שני הולכי רגל יוצאים בו זמנית לדרכם, האחד מעיר A מערבה לעיר

B והשני מעיר B דרומה לעיר C. המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ.

מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש.

כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי? מצא

גם את המרחק המינימלי.



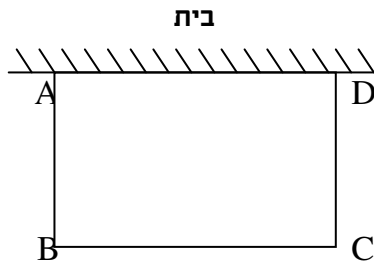
14. אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על

החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר

לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8

קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק

מהגלידריה עליו לשחות כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



15. אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה

סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר.

מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר

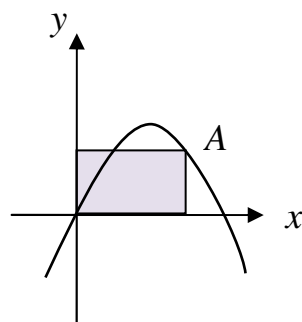
ומחיר מעקה בציד המרפסת הוא 40 ₪ למטר.

מה צריכים להיות מימדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

16. לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה דרושים שני

חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות

והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?



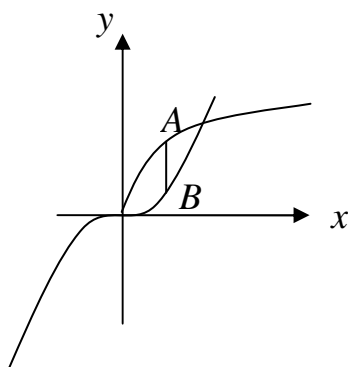
17. נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל

הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי

השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי

ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



18. נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B,

שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB

מקביל לציר ה-y. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A

כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

19. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ והישר $y = 2x$. בין הישר והפונקציה ברביע הראשון

חסמו מלבן. מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

20. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$. מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום

הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.

21. נתונות הפונקציות $f(x) = 1 - x^2$ ו- $g(x) = bx^2$ ($b > 0$). הפונקציות נחתכות

בנקודות A ו-B. מצא את ערכו של b שעבורו הקטע AO מינימלי (O – ראשית הצירים).

22. מהירותו של רכב היא v קמ"ש ועליו לנסוע דרך של S ק"מ. לרכב יש הוצאות נסיעה של

$$\frac{v^2}{200} + 48 \text{ נ"ל לכל ק"מ נסיעה ו-} \frac{v}{400} \text{ נ"ל לכל ק"מ נסיעה ו-} \frac{v^2}{200} + 48$$

מינימליות על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

23. הוכח שמכל החרומים הישרים שנפחם πk סמ"ק, החרום בעל שטח המעטפת המינימלי

$$\text{הוא זה שגובהו } \sqrt[3]{6k} \text{ ס"מ.}$$

(שטח מעטפת של חרוט הוא $\pi R\ell$, כאשר ℓ הוא הקו היוצר של החרוט).

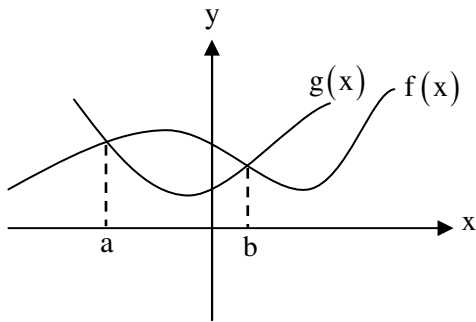
24. נתונים שני מספרים חיוביים p ו-q שסכומם a. הראה שכאשר מתקיים $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ ערך

$$\text{הביטוי } p^n q^m \text{ (n ו-m מבעיים) מקסימלי.}$$

7.6 - חשבון אינטגרלי

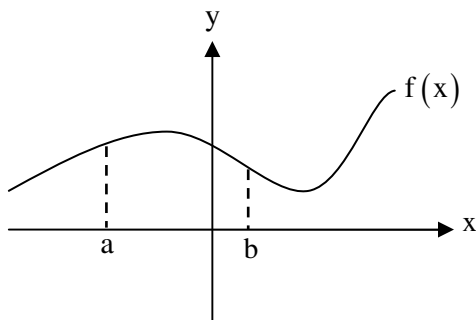
$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

חישוב שטחים

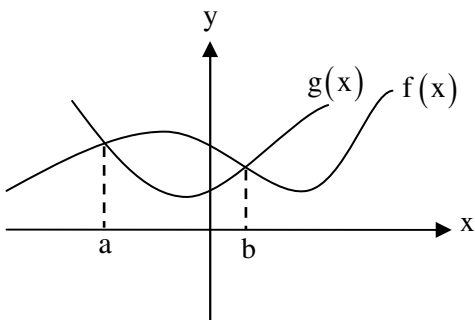


$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

חישוב נפח גוף סיבוב



$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad \text{מתחת פונקציה:}$$



$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx \quad \text{בין פונקציות:}$$

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהו אינטגרל, נוסחת האינטגרל
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6		חילוק ארוך (במספרים)
סרטון 7	תרגיל 5 א'-ב'	כיצד מבצעים חילוק פילונומים
סרטון 8	תרגיל 5 ג'-ה'	
סרטון 9	תרגיל 6	
סרטון 10		אינטגרלים עם זיהוי מבנים
סרטון 11	תרגיל 7	
סרטון 12	תרגיל 8	מציאת פונקציה קדומה- הסבר ודוגמא
סרטון 13	תרגיל 9	
סרטון 14	תרגיל 10	
סרטון 15	תרגיל 11	
סרטון 16	תרגיל 12	
סרטון 17	תרגיל 13	הסבר על חישוב שטחים כולל דוגמא
סרטון 18	תרגיל 14	
סרטון 19	תרגיל 15	
סרטון 20	תרגיל 16	
סרטון 21	תרגיל 17	
סרטון 22	תרגיל 18	
סרטון 23	תרגיל 19	
סרטון 24	תרגיל 20	
סרטון 25	תרגיל 21	
סרטון 26	תרגיל 22	הסבר על חישוב נפח גוף סיבוב עם פונקציה אחד כולל דוגמא
סרטון 27	תרגיל 23	הסבר על חישוב נפח גוף סיבוב בין שתי פונקציות כולל דוגמא
סרטון 28	תרגיל 24	בעיות קיצון עם אינטגרלים – הסבר ודוגמא
סרטון 29	תרגיל 25	
סרטון 30	תרגיל 26	

תרגילים

1. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int x^3 dx = \text{ב. } \int 12x^5 dx = \quad \text{ג. } \int x^4 dx = \text{ד. } \int 2x^3 dx = \text{ה. } \int \frac{2}{3} x^5 dx =$$

$$\text{ו. } \int 7 dx = \quad \text{ז. } \int \left(\frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx = \quad \text{ח. } \int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx =$$

2. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int x^{-3} dx = \text{ב. } \int \frac{1}{x^3} dx = \quad \text{ג. } \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx = \text{ד. } \int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx =$$

3. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int x^{\frac{1}{2}} dx = \text{ב. } \int \sqrt{x} dx = \quad \text{ג. } \int \sqrt[3]{x} dx = \text{ד. } \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx =$$

$$\text{ה. } \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx = \text{ו. } \int \left(\frac{6}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt[4]{x^3} \right) dx =$$

4. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int (5x-1)^3 dx = \text{ב. } \int 3(2-7x)^4 dx = \quad \text{ג. } \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx =$$

$$\text{ד. } \int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx = \text{ה. } \int \sqrt{ax+b} dx =$$

5. מצא את תוצאת החילוק:

$$\text{א. } \frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} = \text{ב. } \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} = \quad \text{ג. } \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} =$$

$$\text{ד. } \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} = \text{ה. } \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} =$$

6. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} dx =$$

$$\text{ב. } \int \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} dx =$$

$$\text{ג. } \int \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} dx =$$

$$\text{ד. } \int \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} dx =$$

$$\text{ה. } \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} dx =$$

$$\text{ו. } \int \frac{2x^5 + x^4 - 4x^2 + 1}{2x + 1} dx =$$

7. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx = \text{ב. } \int \frac{x^2}{(x^3 + 6)^2} dx = \text{ג. } \int \frac{x - 2}{(x^2 - 4x + 1)^2} dx =$$

$$\text{ד. } \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \text{ה. } \int \frac{6x - 3}{\sqrt{x - x^2}} dx = \text{ו. } \int 8x(x^2 + 1)^3 dx =$$

$$\text{ז. } \int (2 - x^2)(6x - x^3)^2 dx =$$

8. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 3x^2 - 7$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2, -1)$.

9. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5. מצא את הפונקציה.

10. נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x + 6$.

שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.

מצא את הפונקציה.

11. נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$.

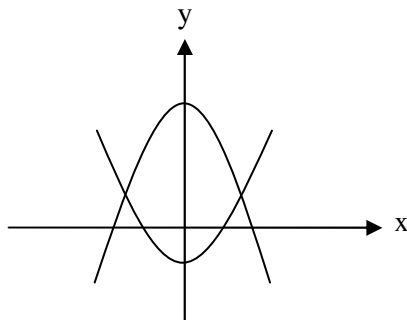
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y = -4$. מצא את הפונקציה.

12. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$ הוא 3. מצא את הפונקציה.

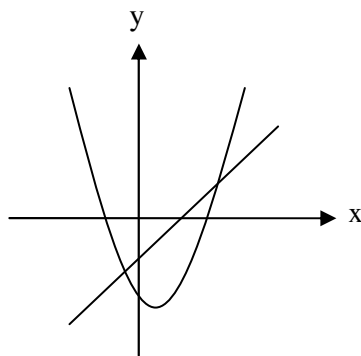
13. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 1, \quad g(x) = 7 - x^2$$



14. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 4x - 12, \quad g(x) = x - 6$$

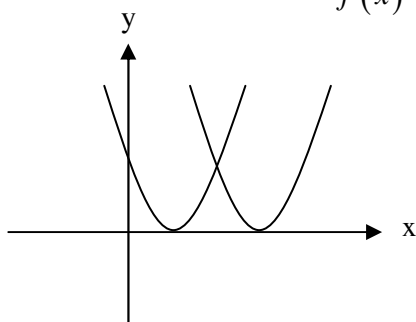


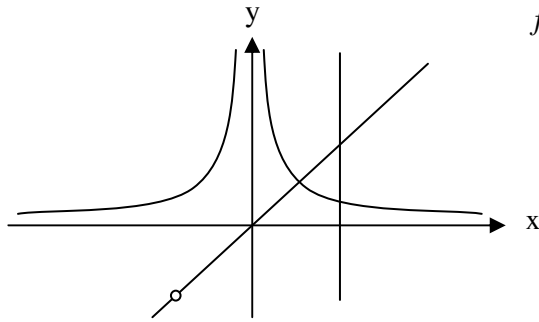
15. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות: $f(x) = x^3$, $g(x) = x$

16. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x$ וציר ה- x .

17. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 1$, $g(x) = x^2 - 6x + 9$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- x .





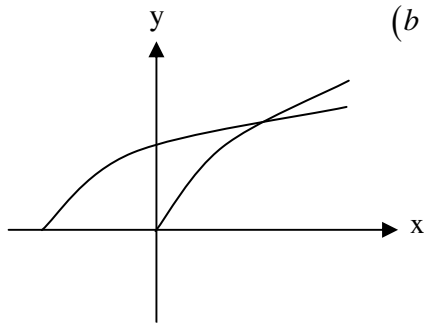
18. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 2$ וציר ה- x .

19. נתונה הפונקציה: $f(x) = (x - 6)\sqrt{x}$. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

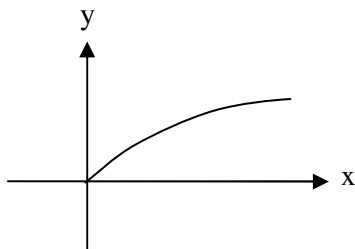
המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- y .



20. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$ ($b > 0$)

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- x

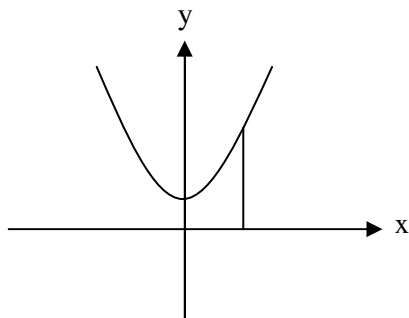
הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח. מצא את ערכו של הפרמטר b .



21. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים. חשב את

גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.



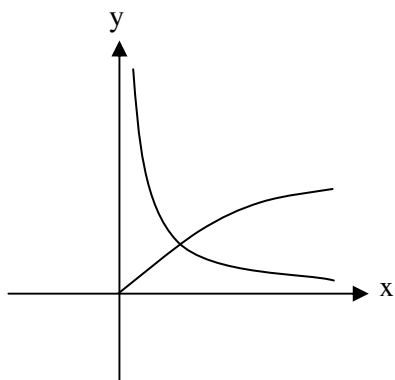
22. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 + 1$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $x = 3$ והצירים מסתובב

סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב.

23. בשרטוט נתונות הפונקציות ברביע הראשון:

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

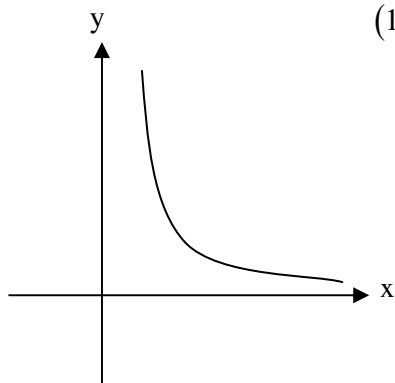


מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר, כאשר השטח הכלוא

בין הפונקציות והישר $x = 2$ מסתובב סביב ציר ה- x .

24. מצא את ערכו של a שעבורו ערך האינטגרל $\int_a^{2a+1} (2x-1)dx$ מינימלי.

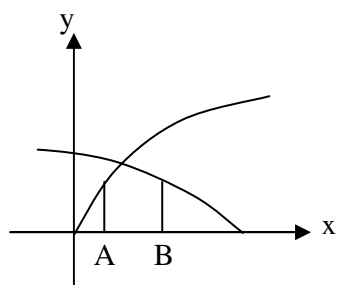
25. בשרטוט נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{b-1}{\sqrt{x-1}}$ ($1 < b < 2$)



עבור איזה ערך של b השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישרים $x = b$ ו- $x = 2$ וציר ה- x מקסימלי?

26. בשרטוט נתונות הפונקציות: $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = \sqrt{6-x}$



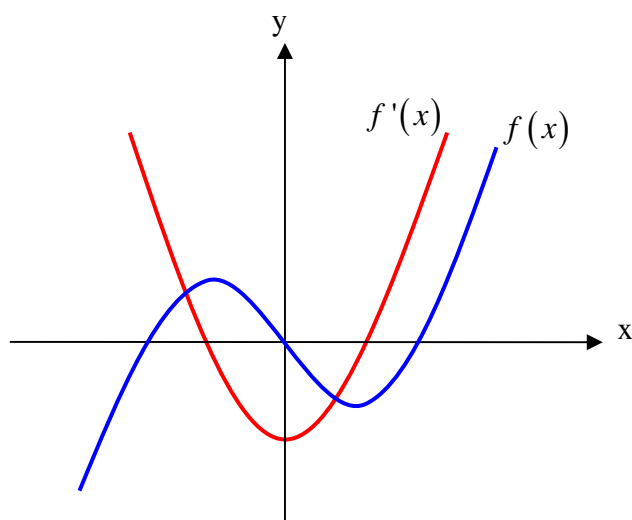
מהנקודות A ו- B , הנמצאות על ציר ה- x והמרחק ביניהן הוא 2,

העלו אנכים לציר ה- x . השטח הכלוא בין האנכים, שתי הפונקציות

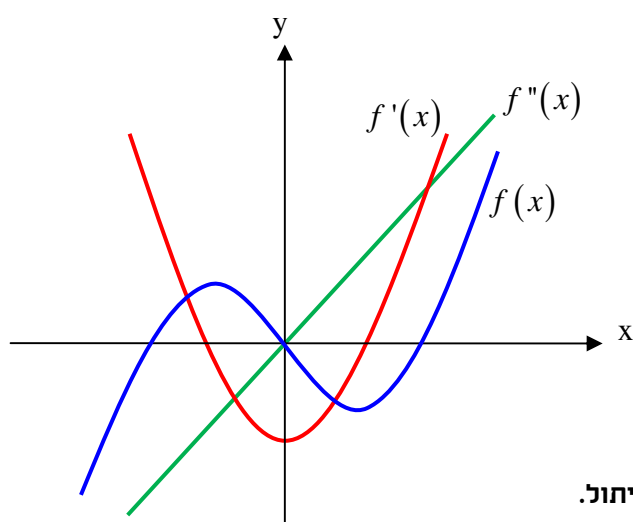
וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .

מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A על מנת שנפח גוף הסיבוב יהיה מקסימלי.

7.7 - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת



- כאשר $f(x)$ עולה, $f'(x)$ חיובית ולהיפך.
- כאשר $f(x)$ יורדת, $f'(x)$ שלילית ולהיפך.
- כאשר ל- $f(x)$ יש נקודת קיצון, $f'(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה- x) ולהיפך.



- כאשר $f'(x)$ עולה, $f''(x)$ חיובית ואז $f(x)$ קעורה כלפי מעלה.
- כאשר $f'(x)$ יורדת, $f''(x)$ שלילית ואז $f(x)$ קעורה כלפי מטה.
- כאשר ל- $f'(x)$ יש נקודת קיצון, $f''(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה- x) ואז ל- $f(x)$ יש נקודת פיתול.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

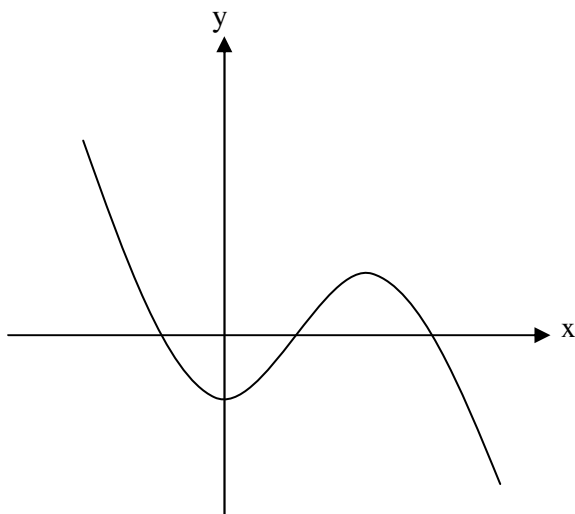
מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
1		הסבר על הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
2	תרגיל 1	
3	תרגיל 2	
4	תרגיל 3	
5	תרגיל 4	
6	תרגיל 5	
7		הסבר על הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הנגזרת השנייה ולגרף הפונקציה
8	תרגיל 6	
9	תרגיל 7	
10	תרגיל 8	

תרגילים

1. נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הנגזרת.

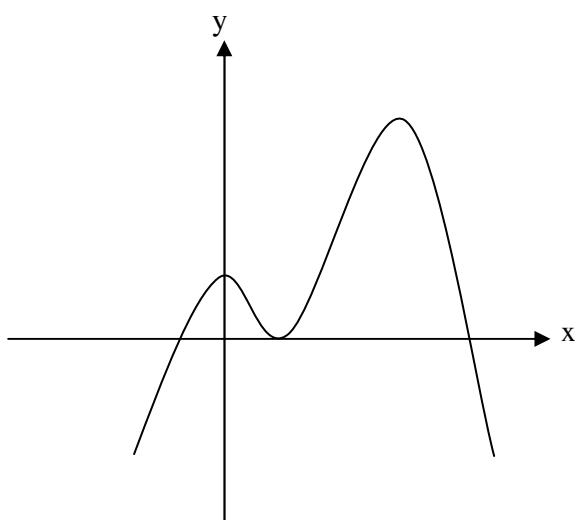
נמק את שיקוליך בשרטוט.



2. נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הנגזרת.

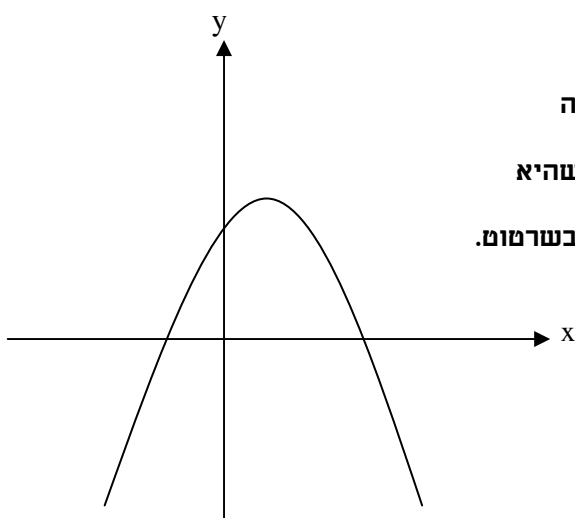
נמק את שיקוליך בשרטוט.



3. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה

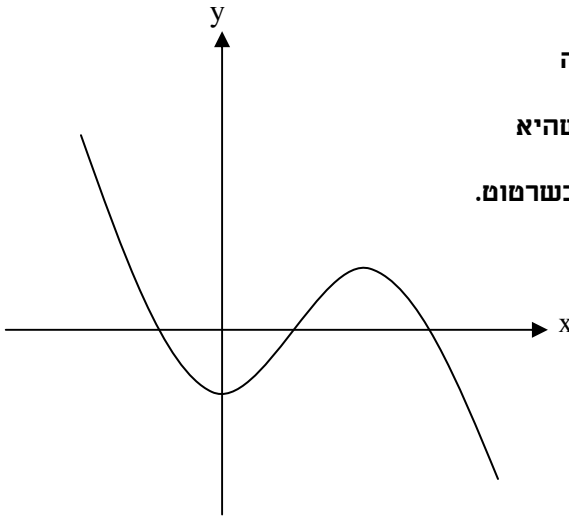
מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע שהיא

עוברת בראשית הצירים. נמק את שיקוליך בשרטוט.



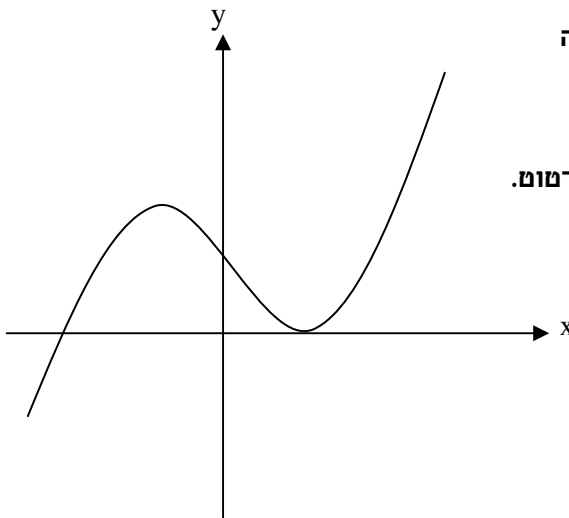
4. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע שהיא
עוברת בראשית הצירים. נמק את שיקוליך בשרטוט.



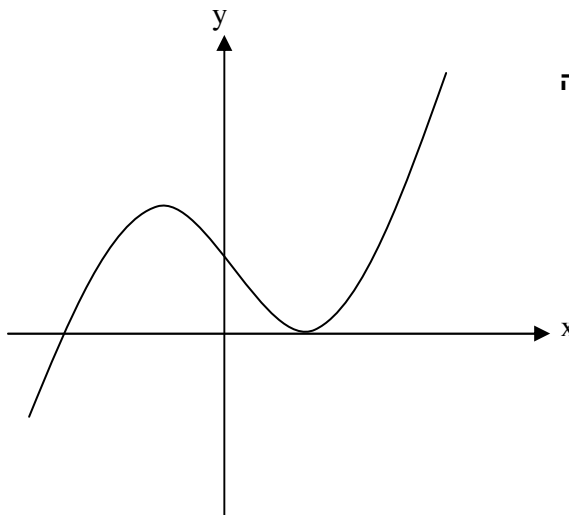
5. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הפונקציה
אם נתון: $f(0) = 0$. נמק את שיקוליך בשרטוט.



6. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הפונקציה ואת גרף
הנגזרת השנייה אם נתון: $f(0) = 0$.
נמק את שיקוליך בשרטוט.

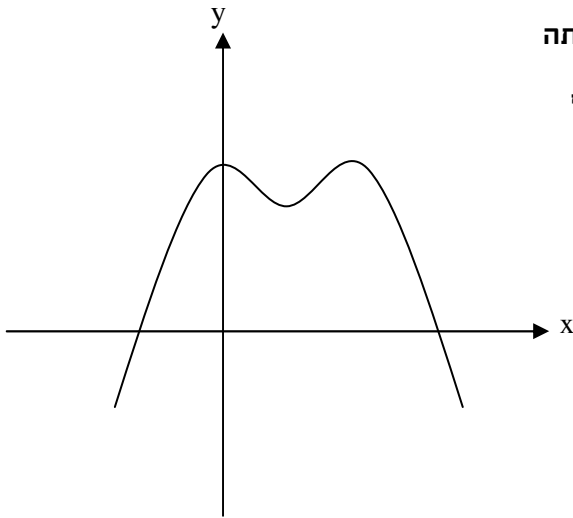


7. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הפונקציה ואת גרף

הנגזרת השנייה אם נתון: $f(0) = 0$.

נמק את שיקוליך בשרטוט.



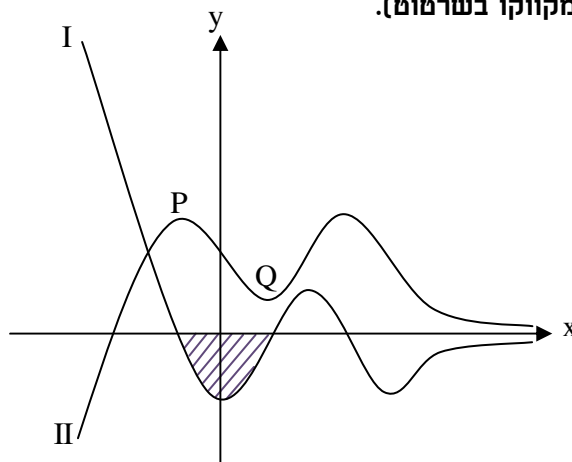
8. בשרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II , שייך לפונקציה ואיזה לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על השרטוט.

ג. נתון: $P(-2, 4)$, $Q(2, 1)$. מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I

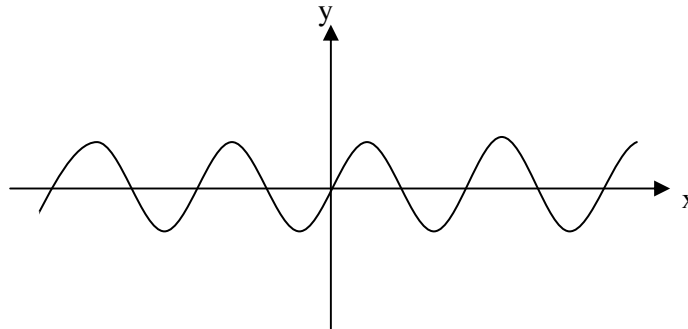
לציר ה- x (השטח המקווקו בשרטוט).



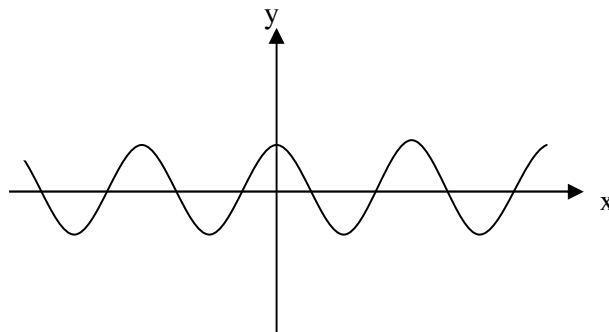
7.8 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות

הפונקציות הטריגונומטריות

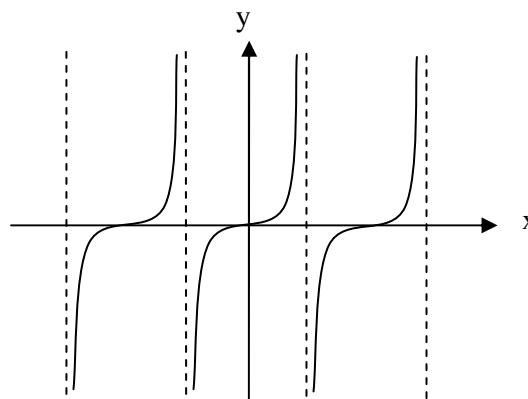
הפונקציה $f(x) = \sin x$:



הפונקציה $f(x) = \cos x$:



הפונקציה $f(x) = \tan x$:



פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית

פונקציה זוגית מקיימת: $f(-x) = f(x)$. פונ' זוגית סימטרית סביב ציר ה- y .

פונקציה אי-זוגית מקיימת: $f(-x) = -f(x)$. פונ' אי-זוגית סימטרית סביב ראשית הצירים.

נגזרות הפונקציות הטריגונומטריות

$$y = \cos x \longrightarrow y' = -\sin x \quad y = \sin x \longrightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cot x \longrightarrow y' = \frac{1}{-\sin^2 x} \quad y = \tan x \longrightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

אינטגרלים טריגונומטריים

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הקדמה, ישע מקדים
סרטון 2		הכרת הגרפים של הפונקציות הטריגונומטריות
סרטון 3		חוקי הגזירה של פונקציות טריגונומטריות
סרטון 4	תרגיל 1	
סרטון 5	תרגיל 2	
סרטון 6	תרגיל 3	
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8	תרגיל 5	
סרטון 9		חישוב שיפוע של פונקציה טריגונומטרית
סרטון 10	תרגיל 6	
סרטון 11	תרגיל 7	
סרטון 12	תרגיל 8	
סרטון 13	תרגיל 9	
סרטון 14	תרגיל 10	
סרטון 15	תרגיל 11	
סרטון 16	תרגיל 11	
סרטון 17	תרגיל 12	
סרטון 18	תרגיל 13	
סרטון 19	תרגיל 14	
סרטון 20	תרגיל 15	
סרטון 21	תרגיל 16	
סרטון 22		אסימפטוטות לפונקציות טריגונומטריות
סרטון 23	תרגיל 17	
סרטון 24	תרגיל 18	
סרטון 25	תרגיל 19	
סרטון 26	תרגיל 20	
סרטון 27	תרגיל 21	
סרטון 28	תרגיל 22	

	22 תרגיל	29 סרטון
הסבר על פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית		30 סרטון
	23 תרגיל	31 סרטון
	24 תרגיל	32 סרטון
	24 תרגיל	33 סרטון
	25 תרגיל	34 סרטון
	25 תרגיל	35 סרטון
אינטגרלים של פונקציות מריגונומטריות		36 סרטון
	26 תרגיל	37 סרטון
	27 תרגיל	38 סרטון
	28 תרגיל	39 סרטון
	29 תרגיל	40 סרטון
	30 תרגיל	41 סרטון
	31 תרגיל	42 סרטון
	32 תרגיל	43 סרטון
	33 תרגיל	44 סרטון
	34 תרגיל	45 סרטון
	35 תרגיל	46 סרטון
	36 תרגיל	47 סרטון
	37 תרגיל	48 סרטון

תרגילים

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sin x + 3 \cos x + x \quad \text{ב. } f(x) = 2x \sin x + 4 \tan x \quad \text{ג. } f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sin 3x + 2 \cos 5x \quad \text{ב. } f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{aligned} \text{א. } f(x) &= \sin^3 x \quad \text{ב. } f(x) = 2 \cos^4 x \quad \text{ג. } f(x) = \sin^2 x \\ \text{ד. } f(x) &= \sin^3 2x \quad \text{ה. } f(x) = \cos^2 2x \quad \text{ו. } f(x) = \tan^2 4x \end{aligned}$$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{\sin 3x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

5. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x \quad \text{ב. } f(x) = \sin^4 2x - \cos^4 2x \quad \text{ג. } f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$$

$$6. \text{ מצא את משוואת המשיק לפונקציה } f(x) = \cos x \text{ בנקודה } A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$7. \text{ מצא את משוואת המשיק לפונקציה } f(x) = \sin 2x \text{ בנקודה שבה } x = \frac{\pi}{2}$$

$$8. \text{ מצא את משוואת המשיק לפונקציה } f(x) = \tan 3x \text{ בנקודה שבה } x = \frac{\pi}{9}$$

$$9. \text{ מצא את משוואות המשיקים לפונקציה } f(x) = 4 \sin^2 x \text{ בנקודות החיתוך של הפונקציה}$$

$$\text{עם הישר } y = 1 \text{ בתחום } [0, \pi].$$

$$10. \text{ שיפוע המשיק לפונקציה } f(x) = \sqrt{\sin x + a} \text{ בנקודה שבה } y = 1 \text{ בתחום } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ הוא } \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

מצא את ערך הפרמטר a .

11. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

$$\text{א. } f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x} \quad [0, 2\pi] \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x} \quad [-\pi, \pi]$$

$$\text{ג. } f(x) = \tan x \quad [0, 2\pi]$$

12. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \sin x + \cos x \quad [0, 2\pi]$$

13. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x \quad [0, 2\pi]$$

14. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \quad [0, 2\pi]$$

15. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x \quad \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$$

16. לפונקציה $f(x) = a \sin x + b \sin^3 x$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$. מצא את ערכי

הפרמטרים a ו- b .

17. מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \frac{1}{\sin 3x} \quad [0, \pi]$$

18. מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} \quad [0, \pi]$$

19. מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \tan x \quad [-\pi, \pi]$$

20. מצא את נקודות הפיתול ותחומי הקעירות של הפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x \quad [0, 2\pi]$$

21. נתונה הפונקציה $f(x) = x + 2 \cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$. חקור את הפונקציה על פי

הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

22. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0, \pi]$. חקור את הפונקציה על פי

הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרטוט.

23. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$

א. מצא בתחום $[0, \pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

24. נתונה הפונקציה $f(x) = 4x - 3 \tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$. חקור את הפונקציה על פי

הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

25. נתונה הפונקציה $f(x) = \tan(x^2 - 4x)$ בתחום $[0, 4]$. חקור את הפונקציה על פי

הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. שרטוט.

26. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\mathbf{R.} \int \left(\sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx = \mathbf{I.} \int \left(\cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx = \mathbf{I.}$$

$$\int \left(\sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx =$$

27. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\mathbf{R.} \int (2 \sin x \cos x) dx = \mathbf{I.} \int (\sin 3x \cos 3x) dx = \mathbf{I.} \int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx = \mathbf{I.} \int (\sin^2 x) dx =$$

28. חשב את האינטגרלים הבאים:

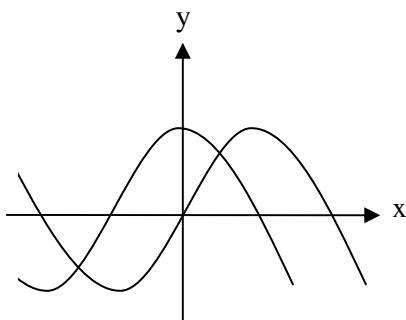
$$\mathbf{R.} \int \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \right) dx = \mathbf{I.} \int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx = \mathbf{I.} \int (\cos x \sin^2 x) dx =$$

29. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \cos x + 4 \sin 2x$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{2}\right)$.

30. נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = -4 \sin 2x - \cos x$.

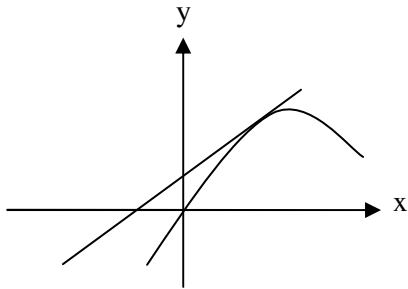
שיפוע הפונקציה בנקודה (π, π) הוא 3. מצא את הפונקציה.



31. נתונות הפונקציות: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין

הפונקציות וציר ה-y ברביע הראשון.



32. נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2 \sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום

הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

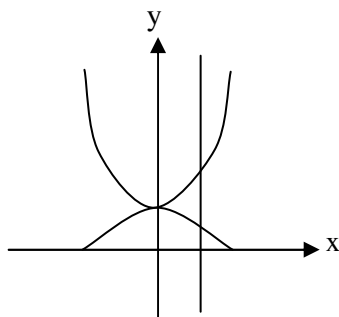
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x ברביעים

הראשון והשני.

33. נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cos x + b \sin x$. הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה

שבה $x = \frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה

בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

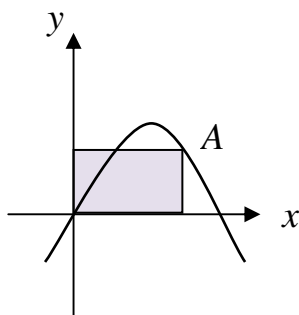


34. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $g(x) = \sqrt{\cos x}$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר $x = \frac{\pi}{6}$

מסתובב סביב ציר ה- x .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

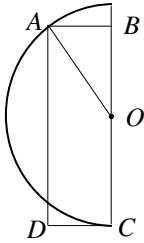


35. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin 2x$. מנקודה A שעל הפונקציה

בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר

מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A

כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?



36. נתון חצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R ונתון מלבן $ABCD$, שקודקוד A שלו מונח על היקף המעגל, הצלע BC שלו מונחת על קוטר המעגל והצלע CD שלו משיקה למעגל. מצא מה צריך להיות גודל הזווית $\angle AOB$ כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי.

37. נתונה הפונקציה: $f(x) = b \sin x - \sin x + \frac{1}{b-1} \cos x$ ($1 < b$)

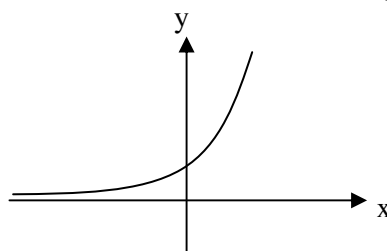
הפונקציה חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. מצא עבור איזה ערך של b השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישר $x = \frac{\pi}{2}$ והצירים מינימלי.

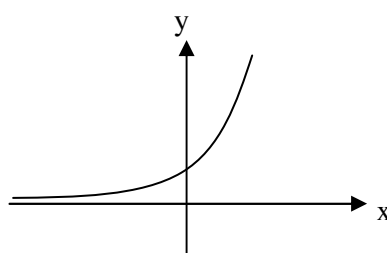
7.9 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

הפונקציה המעריכית

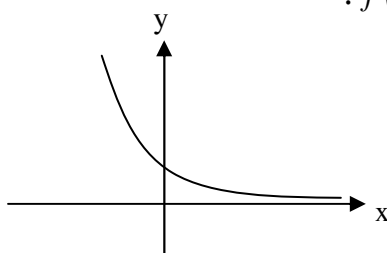
הפונקציה $f(x) = e^x$:



הפונקציה $f(x) = a^x$:



הפונקציה $f(x) = e^{-x}$:



נגזרת הפונקציה המעריכית

$$y = e^x \longrightarrow y' = e^x$$

$$y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a$$

אינטגרלים

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, ידע מקדים, הכרת הפונקציה המעריכית, חוקי הגזירה של פונקציה מעריכית
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6		שיפוע של פונקציה מעריכית
סרטון 7	תרגיל 5	
סרטון 8	תרגיל 6	
סרטון 9	תרגיל 7	
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11	תרגיל 9	
סרטון 12	תרגיל 10	
סרטון 13	תרגיל 11	
סרטון 14	תרגיל 12	
סרטון 15	תרגיל 13	
סרטון 16	תרגיל 14	
סרטון 17		אסימפטוטות של פונקציות מעריכיות
סרטון 18	תרגיל 15	
סרטון 19	תרגיל 16	
סרטון 20	תרגיל 17	
סרטון 21	תרגיל 18	
סרטון 22	תרגיל 19	
סרטון 23	תרגיל 20	
סרטון 24	תרגיל 21	
סרטון 25	תרגיל 22	
סרטון 26	תרגיל 23	
סרטון 27	תרגיל 24	
סרטון 28	תרגיל 25	
סרטון 29	תרגיל 26	
סרטון 30	תרגיל 27	
סרטון 31	תרגיל 27	
סרטון 32	תרגיל 28	
סרטון 33	תרגיל 29	
סרטון 34	תרגיל 30	
סרטון 35	תרגיל 30	
סרטון 36		אינטרגלים של פונקציות מעריכיות
סרטון 37	תרגיל 31	
סרטון 38	תרגיל 32	
סרטון 39	תרגיל 33	
סרטון 40	תרגיל 34	
סרטון 41	תרגיל 35	
סרטון 42	תרגיל 36	
סרטון 43	תרגיל 37	
סרטון 44	תרגיל 38	
סרטון 45	תרגיל 39	

תרגילים

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1$ ב. $f(x) = e^{x^2-3x} + ex$ ג. $f(x) = e^{\sin x}$ ד. $f(x) = 2^{3x}$ ה. $f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x \cdot e^x$ ב. $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$ ג. $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ב. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ ג. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3$ ב. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$ ג. $f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$

5. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $A(1, e)$.

6. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה $x = 0$.

7. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של

הפונקציה עם הישר $y = e$.

8. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ בנקודה $(1, 15)$ הוא $21 \ln 3$. מצא את

ערכי הפרמטרים a ו- b .

9. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{2x-1}{e^x}$ ב. $f(x) = \frac{3}{e^x-1}$ ג. $f(x) = \frac{x+1}{e^x-5}$

ד. $f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$ ה. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ ו. $f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2}$

ז. $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 4e^x + 3}$

10. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 e^x$

11. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$

12. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{e^{\sqrt{x-2}}}$

13. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 9}{e^x}$

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.5$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת

נקודות הקיצון של הפונקציה.

14. נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$

לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

15. מצא את האסימפטומות של הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + e^x$

16. מצא את האסימפטומות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$

17. מצא את האסימפטומות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$

18. מצא את האסימפטומות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$

19. מצא את האסימפטומות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

20. מצא את האסימפטומות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

21. מצא את האסימפטומות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

22. מצא את האסימפטומות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$

23. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x}-e}$

24. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = (x-3)e^x$

25. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

26. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+a}{be^x}$

לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $\left(1, \frac{2}{e}\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודת

הפיתול השנייה של הפונקציה.

27. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

28. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרטוט. ז. סמן על גבי השרטוט את ערכי ה- x של נקודות הפיתול.

29. נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרטוט. ז. עבור אילו ערכי m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק פתרון אחד?

30. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

31. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx = \text{ב. } \int (3^x + 5^{2x}) dx = \text{ג. } \int 6\sqrt{e^{4x-1}} dx =$$

$$\text{ד. } \int (e^x + e^{-x})^2 dx =$$

32. חשב את האינטגרלים הבאים:

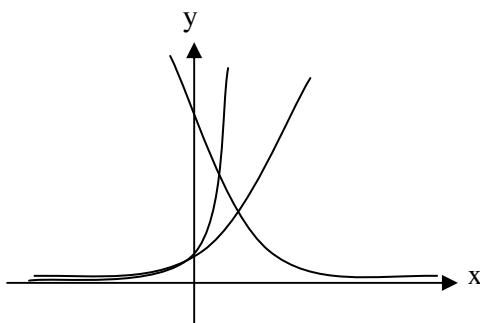
$$\text{א. } \int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} dx = \text{ב. } \int \frac{3e^{3x}-5e^{2x}+4e^x-2}{e^x-1} dx =$$

33. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}} \right) dx = \text{ב. } \int \left(\frac{3-e^x}{(e^x-3x)^2} \right) dx = \text{ג. } \int (xe^{x^2}) dx =$$

$$34. \text{ נתונה נגזרת של פונקציה: } f'(x) = 6x^2 e^{x^3} - \frac{1}{x^2}.$$

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(-1, \frac{2}{e}\right)$.



$$35. \text{ נתונות הפונקציות: } f(x) = e^x, g(x) = e^{3x}, h(x) = 16e^{-x}.$$

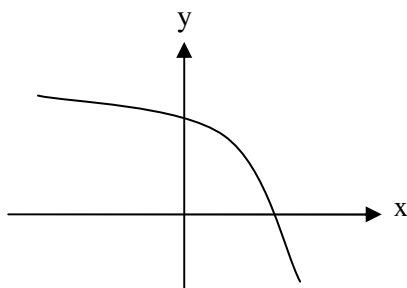
חשב את גודל השטח הכלוא בין שלוש הפונקציות.

$$36. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = 5 - e^x.$$

העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$. חשב את גודל

השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .

ניתן להשאיר e ו- $\ln$ בתשובה.



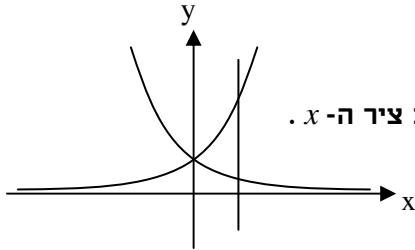
37. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{bx}$ ($0 < b$).

גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים וציר ה- y

הוא $\frac{e-2}{4}$. מצא את ערכו של הפרמטר b .

38. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר $x = \ln 2$ מסתובב סביב ציר ה- x .



חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

39. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, $g(x) = e^{-x}$.

מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני הצירים. המשך

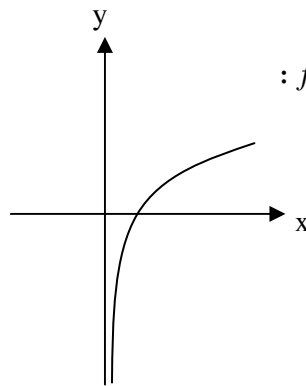
האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר ה- x כך

שנוצר מלבן. הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.

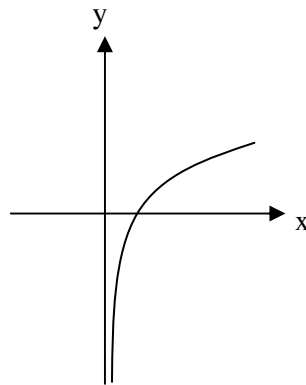
7.10 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

הפונקציה הלוגריתמית

הפונקציה $f(x) = \ln x$:



הפונקציה $f(x) = \log_a x$:



נגזרת הפונקציה הלוגריתמית

$$y = \ln x \longrightarrow y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a x \longrightarrow y' = \frac{1}{x \ln a}$$

אינטגרלים

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, ידע מקדים, הכרת הפונקציה הלוגריתמית, חוקי הגזירה של פונקציה לוגריתמית
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5		שיפוע הפונקציה הלוגריתמית והמשק לה
סרטון 6	תרגיל 4	
סרטון 7	תרגיל 5	
סרטון 8	תרגיל 6	
סרטון 9	תרגיל 7	
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11	תרגיל 9	
סרטון 12	תרגיל 10	
סרטון 13		אסימפטוטות לפונקציה לוגריתמית
סרטון 14	תרגיל 11	
סרטון 15	תרגיל 12	
סרטון 16	תרגיל 13	
סרטון 17	תרגיל 14	
סרטון 18	תרגיל 15	
סרטון 19	תרגיל 16	
סרטון 20	תרגיל 17	
סרטון 21	תרגיל 18	
סרטון 22	תרגיל 19	
סרטון 23	תרגיל 20	
סרטון 24	תרגיל 20	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 25	תרגיל 21	
סרטון 26		אינטגרלים לוגריתמיים
סרטון 27	תרגיל 22	
סרטון 28	תרגיל 23	
סרטון 29	תרגיל 24	
סרטון 30	תרגיל 25	
סרטון 31	תרגיל 26	
סרטון 32	תרגיל 27	
סרטון 33	תרגיל 28	
סרטון 34	תרגיל 29	
סרטון 35	תרגיל 30	
סרטון 36	תרגיל 31	

תרגילים

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1) \quad \text{ב. } f(x) = \ln(x^2 - 3x)$$

$$\text{ג. } f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{ד. } f(x) = \ln(e^x + 1)$$

$$\text{ה. } f(x) = \ln(\cos x) \quad \text{ו. } f(x) = \log_2(x) + 5 \log_3(2x-1)$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x \ln x \quad \text{ב. } f(x) = (3x+1)^2 \cdot \ln x \quad \text{ג. } f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \sqrt{\ln x + x}$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \ln^3 x \quad \text{ב. } f(x) = 3 \ln^2 x \quad \text{ג. } f(x) = x^2 \ln^2 x \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$$

4. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.

5. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

6. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \ln x \quad \text{ב. } f(x) = \ln(x^2) \quad \text{ג. } f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$$

$$\text{ד. } f(x) = \ln(e^x - 4) \quad \text{ה. } f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$$

$$\text{ז. } f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$$

7. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$

8. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$

9. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$

10. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון

של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

11. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x-3)$

12. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$

13. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{2 \ln x - 1}{\ln x + 1}$

14. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$

15. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

16. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$

17. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = x \ln x + 2$

18. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

19. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות (אם ישנן). ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטוט.

20. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות (אם ישנן). ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרמוט. ט. עבור אילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות?

21. נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרמוט.

22. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx = \text{ב. } \int \frac{x^2 + 3x - 4}{x} dx = \text{ג. } \int \frac{x+3}{x^2-9} dx =$$

23. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \frac{x^2 + 3x + 5}{x+1} dx = \text{ב. } \int \frac{x^3 - x^2 + 5x - 6}{x-2} dx = \text{ג. } \int \frac{x^4 + 3}{x+1} dx =$$

24. חשב את האינטגרלים הבאים:

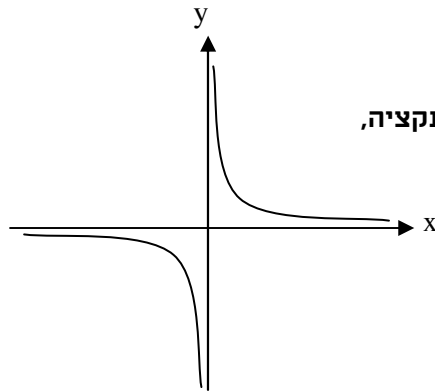
$$\text{א. } \int \frac{2x}{x^2-3} dx = \text{ב. } \int \frac{x-1}{x^2-2x} dx = \text{ג. } \int \frac{e^x}{e^x+5} dx = \text{ד. } \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx =$$

$$\text{ה. } \int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

25. נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1, -2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.

26. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x}$



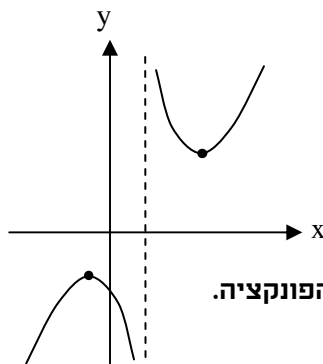
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישרים $x = -1$

ו- $x = -4$ וציר ה- x .

ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.

27. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$



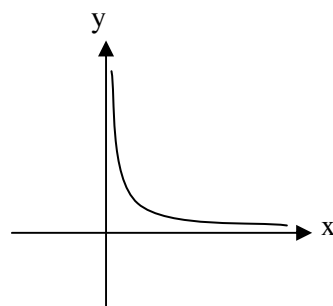
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$

ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום של הפונקציה.

ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.

28. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$



השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = 1$

ו- $x = 3$ וציר ה- x מסתובב סביב ציר

ה- x . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.

29. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x = \ln \sqrt{3}$ מסתובב סביב

ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

30. מצא על הפונקציה: $f(x) = \sqrt{2 \ln x + 1}$ את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(2.5, 1)$.

31. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = a$ ו- $x = a + 3$ ($0 < a$) וציר

ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .

חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן זה.

פרק 8 – משוואות מעריכיות ולוגריתמיות:

8.1 – חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות:

חוקי חזקות

$$1. \quad a^0 = 1$$

$$2. \quad a^1 = a$$

$$3. \quad a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$4. \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$5. \quad (a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$6. \quad a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$7. \quad \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$$

$$8. \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

$$9. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

חוקי השורשים

$$1. \quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$2. \quad \sqrt[m]{a} = a^{\frac{1}{m}}$$

$$3. \quad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$4. \quad \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$$

$$5. \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

$$6. \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		חוקי החזקות
סרטון 2	תרגילים 1,2,3,4	
סרטון 3	תרגילים 5,6	
סרטון 4	תרגילים 7,8	
סרטון 5		חוקי שורשים
סרטון 6	תרגיל 9	
סרטון 7	תרגיל 10	הכנסה לתוך שורש
סרטון 8	תרגיל 11	הוצאה משורש
סרטון 9	תרגילים 12,13	מהי משוואה מעריכית, כיצד פותרים משוואה מעריכית שבה יש שוויון בסיסים
סרטון 10	תרגיל 14	
סרטון 11	תרגיל 15	
סרטון 12	תרגיל 16	
סרטון 13	תרגילים 17,18	משוואות מעריכיות בהן הבסיסים שונים והמעריכים שווים
סרטון 14	תרגיל 19	הכרות עם לאונרד אוילר והבסיס e
סרטון 15	תרגילים 20,21	משוואות מעריכיות עם חיבור וחסור ("שימת נסמן")
סרטון 16	תרגילים 22,23	
סרטון 17	תרגיל 24	
סרטון 18	תרגיל 25	
סרטון 19	תרגילים 26,27	
סרטון 20	תרגילים 28,29	
סרטון 21	תרגילים 30,31	
סרטון 22	תרגיל 32	

תרגילים:

$$1. \frac{2^3 \cdot 2^7}{2^4 \cdot 2^5} =$$

$$2. \frac{9^3 \cdot 27^2}{3^9 \cdot 81} =$$

$$3. \frac{10^9 \cdot 25^5 \cdot 8^{-1}}{40^3 \cdot 125^5} =$$

$$4. 2^3 + 2^5 =$$

$$5. \frac{(2a^2b)^3 \cdot (ab^{-3})^2}{4ab^{-2} \cdot \left(\frac{a^2}{b}\right)^4} =$$

$$6. \frac{(k^2)^{m+2} \cdot k^{1-3m}}{(k^{2m})^3 \cdot \frac{1}{k^{7m-4}}} =$$

$$7. \frac{4^{b+3}}{4^{b+1} + 4^{b+2}} =$$

$$8. \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x^{n+3} + x^{n+5}}{x^{n+2}} =$$

$$9. \frac{\sqrt[5]{2^2} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[5]{128}} =$$

10. הכנס לשורש:

$$א. 3\sqrt{2} = ב. 5\sqrt{3} = ג. \frac{\sqrt{36}}{2} = ד. 2\sqrt[3]{3} = ה. x\sqrt{x} =$$

11. הוצא מהשורש כמה שיותר:

$$א. \sqrt{12} = ב. \sqrt{48} = ג. \sqrt{63} = ד. \sqrt[3]{54} = ה. \sqrt{x^5} =$$

$$12. 3^{5x-3} = 3^{3x+7}$$

$$13. 2^{2x} = 32 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x$$

$$14. (25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x}$$

$$15. \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x}$$

$$16. \sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3}$$

$$17. 3^x = 5^x$$

$$18. 5^{3-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{2x}{3}-2}$$

$$19. e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

$$20. 2^x + 2^x = 16$$

$$21. e^x + 2e^x = 3e^4$$

$$22. 5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162$$

$$23. 2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227$$

$$24. 5^{-x} + 25^{\frac{1}{2} - \frac{x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$$

$$25. e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1$$

$$26. 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

$$27. 5 \cdot 25^x - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$28. 6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0$$

$$29. \left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3}$$

$$30. \frac{20}{9^x + 1} = 3 - \frac{8}{9^x - 1}$$

$$31. e^{2x} + e^x - 2 = 0$$

$$32. e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

8.2 – משוואות לוגריתמיות:

הגדרת הלוג: $a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x$ ת.ה.1: $a, b > 0, a \neq 1$

חוקי הלוגריתמים

1. $\log_a a = 1$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
4. $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
5. $\log_a b^n = n \log_a b$
6. $a^{\log_a x} = x$
7. $\log_a b = \frac{\log_m b}{\log_m a}$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הגדרת הלוג, תחום הגדרה של לוג – חלק א'
סרטון 2		הגדרת הלוג, תחום הגדרה של לוג – חלק ב'
סרטון 3	תרגיל 1	
סרטון 4		הכרות עם $\ln$
סרטון 5	תרגיל 2	
סרטון 6	תרגיל 3	
סרטון 7		חוקי הלוגריתמים (חוקים 1-5 לפי המספור בסיכום)
סרטון 8	תרגיל 4	
סרטון 9	תרגיל 5	
סרטון 10	תרגיל 6	
סרטון 11	תרגיל 7	חוק לוגריתמים מספר 6
סרטון 12		חוק לוגריתמים מספר 7 (שינוי בסיס)
סרטון 13	תרגיל 8	
סרטון 14		מהן משוואות לוגריתמיות
סרטון 15	תרגילים 9,10	
סרטון 16	תרגילים 11,12,13	
סרטון 17	תרגילים 14,15	
סרטון 18	תרגילים 16,17	
סרטון 19	תרגיל 18	

	19,20 תרגילים	סרטון 20
	21 תרגיל	סרטון 21
	22,23 תרגיל	סרטון 22
	24 תרגיל	סרטון 23
	25 תרגיל	סרטון 24
	26 תרגיל	סרטון 25
	27 תרגיל	סרטון 26

תרגילים:

1. חשב ללא מחשבון:

$$\text{א. } \log_2 32 = \text{ב. } \log 1000 = \text{ג. } \log_{25} 5 = \text{ד. } \log_8 4 =$$

$$\text{ה. } \log_4 \frac{1}{16} = \text{ו. } \log_a a^4 = \text{ז. } \log_a \frac{1}{a\sqrt{a}} =$$

2. חשב ללא מחשבון:

$$\text{א. } \ln e^2 = \text{ב. } \ln \frac{1}{e^4} = \text{ג. } \ln \frac{1}{e\sqrt{e}} =$$

3. מצא את ערכו של x :

$$\text{א. } \log_{36} 6 = x \quad \text{ב. } \log_2 x = 16 \quad \text{ג. } \log_{\frac{1}{9}} x = -1.5 \quad \text{ד. } \log_x 64 = 3$$

$$\text{ה. } \log_x 25 = 2 \quad \text{ו. } \log_x (3x+4) = 2 \quad \text{ז. } \ln x = 2 \quad \text{ח. } \ln x = -\frac{1}{2}$$

4. חשב ללא מחשבון:

$$\text{א. } \log_6 8 + \log_6 9 - \log_6 2 = \text{ב. } 2 \log 2 + \log 25 = \text{ג. } \frac{\log_3 2 + \log_3 4}{3 \log_3 6 - (2 + \log_3 12)} =$$

5. נתון: $\log_3 2 = a$. הבע באמצעות a :

$$\text{א. } \log_3 16 = \text{ב. } \log_3 6 = \text{ג. } \log_3 24 = \text{ד. } \log_3 1.5 =$$

6. נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b :

$$\text{א. } \log_2 45 = \text{ב. } \log_2 60 = \text{ג. } \log_2 \sqrt{7.5} =$$

7. חשב ללא מחשבון:

$$\text{א. } 6^{\log_6 8} = \text{ב. } 4^{\log_2 5} = \text{ג. } e^{\ln 3} = \text{ד. } e^{2 \ln 3} =$$

8. נתון: $\log_2 3 = a$, $\log_3 5 = b$. הבע באמצעות a ו- b :

$$\mathbf{8.} \log_3 50 = \mathbf{9.} \log_2 \sqrt{30} = \mathbf{10.} \log_5 22.5 =$$

$$\mathbf{9.} \log_x (x^2 + 6x) = 3$$

$$\mathbf{10.} \log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$$

$$\mathbf{11.} \log_5 (\log_2 (x^2 - 7)) = 0$$

$$\mathbf{12.} \log_5 (25^x - 20) = x$$

$$\mathbf{13.} \ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x$$

$$\mathbf{14.} \log_5 (4x - 3) = \log_5 7$$

$$\mathbf{15.} 2 \log_2 (2x - 2) - \log_2 (16 - x) = \log_2 (x - 1) + 1$$

$$\mathbf{16.} \log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$$

$$\mathbf{17.} 3 \ln^2 x + \ln x = 2$$

$$\mathbf{18.} \log_4 x + \log_x 4 = 2 \frac{1}{2}$$

$$\mathbf{19.} \log x \cdot \log (10x) = 2$$

$$\mathbf{20.} \ln (e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln (ex^2)$$

$$\mathbf{21.} x^{\log_3 x} = 81$$

$$\mathbf{22.} x^{\log_5 x} = \frac{25}{x}$$

$$\mathbf{23.} x^{\ln x} = e^6 x$$

24. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } 2^x = 5 \quad \text{ב. } 5^x = 8 \quad \text{ג. } e^x = 2 \quad \text{ד. } e^x = \frac{1}{2} \quad \text{ה. } e^x = -1$$

$$25. x^{\frac{\log_2 x - 6}{4}} = \frac{4}{x}$$

$$26. \frac{\log_{5-x}(x+1)}{\log_{5-x}(x-1)} - 1 = \frac{1}{\log_{5-x}(x-1)}$$

$$27. \left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$$

פרק 9 - בעיות גידול ודעיכה

$$M_t = M_0 \cdot q^t$$

כאשר הגידול/הדעיכה נתונים באחוזים: $q = \frac{100 \pm p}{100}$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	מהו גידול מעריכי ומהי דעיכה מעריכית, כיצד פותרים בעיית גידול ודעיכה
סרטון 2	תרגיל 2	
סרטון 3	תרגיל 3	
סרטון 4	תרגיל 4	
סרטון 5	תרגיל 5	
סרטון 6	תרגיל 6	
סרטון 7	תרגיל 7	
סרטון 8	תרגיל 8	
סרטון 9	תרגיל 9	כיצד מחשבים את t
סרטון 10	תרגיל 10	
סרטון 11	תרגיל 11	
סרטון 12	תרגיל 12	זמן מחצית חיים
סרטון 13	תרגיל 13	
סרטון 14	תרגיל 14	
סרטון 15	תרגיל 15	
סרטון 16	תרגיל 16	
סרטון 17	תרגיל 17	בעיות קיצון
סרטון 18	תרגיל 18	

תרגילים:

1. אדם הפקיד 1000 ₪ בתוכנית חיסכון המעניקה ריבית של 10% בשנה. כמה כסף יהיה ברשותו:
א. לאחר שנה.
ב. לאחר שנתיים.
ג. לאחר שלוש שנים.
ד. לאחר 12 שנה.
2. מספר התושבים בהרצליה בשנת 1990 היה 80,000. אחוז הגידול באוכלוסיית העיר הוא 3% בשנה. מה היה מספר התושבים בהרצליה בשנת 1998?
3. מספר החסידות המגיעות כל שנה לאגם החולה יורד בצורה מעריכית בקצב של 2.4% בשנה. אם מספר החסידות שהגיעו השנה היה 6000, מה יהיה מספר החסידות שיגיעו עוד 7 שנים?
4. מספר הזכרות במזנויה גדל בצורה מעריכית בקצב של 1.6% בשנה. כיום יש במזנויה 45,000 זכרות. כמה זכרות היו במזנויה לפני 16 שנים?
5. מספר הלידות בבית החולים "איכילוב" גדל בצורה מעריכית. לפני 8 שנים היו ב"איכילוב" 500 לידות בחודש והשנה יש 600 לידות בחודש. מהו אחוז הגידול במספר הלידות החודשי משנה לשנה ב"איכילוב"?
6. מספר התושבים ביפן גדל ב-20 השנה האחרונות פי 2. מה אחוז הגידול השנתי באוכלוסיית יפן?
7. מספר החיידקים במבחנה גדל בצורה מעריכית. אם לפני 6 שעות היו במבחנה 200 חיידקים ועכשיו יש בה 500 חיידקים, כמה חיידקים יהיו בה בעוד 4 שעות?
8. בנק א' נותן ריבית של 3% כל שנתיים בתוכנית חיסכון מסוימת. בנק ב' נותן ריבית של 4.5% כל 3 שנים בתוכנית חיסכון אחרת. אדם מתכוון להפקיד סכום כסף מסוים לתקופה של 18 שנה. באיזה בנק כדאי לו להשקיע את כספו?
9. הריבית על תוכנית חיסכון בבנק מסוים היא 2.4% בשנה. אדם הפקיד בתוכנית החיסכון 12,000 ₪. תוך כמה שנים יהיו ברשותו 15,000 ₪?
10. אוכלוסיית הדובים בקומב הצפוני מכפילה את עצמה כל 18 שנה. אם היום יש בקומב הצפוני 6,000 דובים, בעוד כמה שנים יהיו 8,000 דובים?
11. חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 60% ממשקלו?
12. חומר רדיואקטיבי מתפרק בצורה מעריכית. אם בתוך 4 שעות הוא מאבד 20% ממשקלו, תוך כמה זמן יאבד 50% ממשקלו?
13. זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי הוא 16 ימים. תוך כמה ימים יאבד שליש ממשקלו?
14. בשעה 08:00 נלקחו שני חומרים רדיואקטיביים. מחומר א' נלקחו 150 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 10 שעות. מחומר ב' נלקחו 117.4 גרם וזמן מחצית החיים שלו הוא 18 שעות. באיזו שעה מעקל החומרים יהיה זהה?

15. נתונות שתי תרבויות חיידקים, שכל אחת גדלה בצורה מעריכית. בשעה מסוימת בתרבות א' היו 4,000 חיידקים ובתרבות ב' היו 500 חיידקים. נסמן:

t_1 - הזמן שחלף עד שבתרבות א' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות ב'.

t_2 - הזמן שחלף עד שבתרבות ב' היו פי 2 חיידקים מאשר בתרבות א'.

חשב את היחס $\frac{t_1}{t_2}$.

16. מספר החיידקים בתרבות גדל ב- $p\%$ בכל שעה. בשעה מסוימת מספר החיידקים היה m . כעבור t שעות הוציאו m חיידקים מהתרבות וכעבור עוד t שעות היו $6m$ חיידקים בתרבות. הבע את t באמצעות p .

17. נתונה הפונקציה: $f(x) = 700 \cdot 1.08^x - 200x$. מצא את ערך ה- x של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

18. נתונות שתי בריכות דגים. בבריכה א' קצב הריבוי של מספר הדגים הוא 10% בחודש ובבריכה ב' הוא 20% בחודש. כמות הדגים בבריכה א' גדולה פי 5 מכמות הדגים בבריכה ב'. בעוד כמה חודשים לערך ההפרש בין כמות הדגים בבריכה א' לכמות הדגים בבריכה ב' יהיה מקסימלי?

פרק 10 – גיאומטריה אנליטית:

10.1 - נקודה וישר (חלק א')

המרחק בין שתי נקודות: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

אמצע קטע בין שתי נקודות: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

שיפוע בין שתי נקודות: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר: $y = mx + n$ (m הוא שיפוע הישר, n הוא ערך ה- y של נקודת החיתוך של

הישר עם ציר ה- y)

ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 \neq n_2$

ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$

ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$

שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$

נוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$

הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x : $m = \tan \alpha$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע היסטורי, מיקום נקודות על מערכת צירים, רביעים
סרטון 2		אמצע קטע בין שתי נקודות – הסבר ונוסחה
סרטון 3	תרגיל 1	
סרטון 4		מרחק בין שתי נקודות – הסבר ונוסחה
סרטון 5	תרגיל 2	
סרטון 6		שיפוע בין שתי נקודות – הסבר ודוגמאות
סרטון 7		משמעות מושג השיפוע בין שתי נקודות
סרטון 8		שיפועי קטעים המקבילים לצירים
סרטון 9		משוואת הישר $y = mx + n$ - חלק א'
סרטון 10		משוואת הישר $y = mx + n$ - חלק ב': המשמעות של m ו- n , מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, שרטוט ישר על מערכת צירים
סרטון 11		איך יודעים אם הנקודה נמצאת על ישר
סרטון 12		מציאת נקודת החיתוך בין שני ישרים
סרטון 13		מצב הדדי בין ישרים, תכונות, שיפועי ישרים מאונכים
סרטון 14	תרגיל 3	
סרטון 15	תרגיל 4	

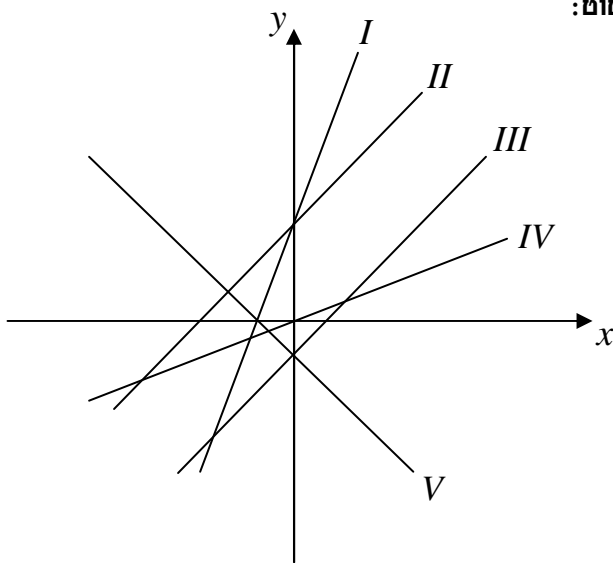
סרטון 16		ישרים שמקבילים לצירים
סרטון 17		הנוסחה למציאת משוואת ישר $y - y_1 = m(x - x_1)$
סרטון 18	תרגיל 5	
סרטון 19		הנוסחה $m = \tan \alpha$ וההסבר כיצד הגיעו אליה
סרטון 20	תרגיל 6 א'	
סרטון 21	תרגיל 6 ב'	
סרטון 22	תרגיל 7	

תרגילים:

1. הנקודות $A(2, -7)$, $B(-10, 4)$ ו- $C(6, 11)$ הן שלושה קודקודים של מקבילית. מצא את שיעורי הקודקוד הרביעי.

2. נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- y שלה גדול פי 3 משיעור ה- x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4, 1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B .

3. התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בערמוט:



- 1) $y = x + 3$
- 2) $y = -x - 1$
- 3) $y = 2x + 3$
- 4) $y = x - 1$
- 5) $y = \frac{1}{2}x$

4. במשולש $\triangle ABC$ נתונים שיעורי הקודקודים: $A(5, -1)$, $B(3, 7)$, $C(-5, 5)$.

הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

5. נתון מעוין $ABCD$ שבו נתונים הקודקודים $A(-9, 1)$ ו- $B(5, -7)$.

משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x + 3y + 6 = 0$.

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD .

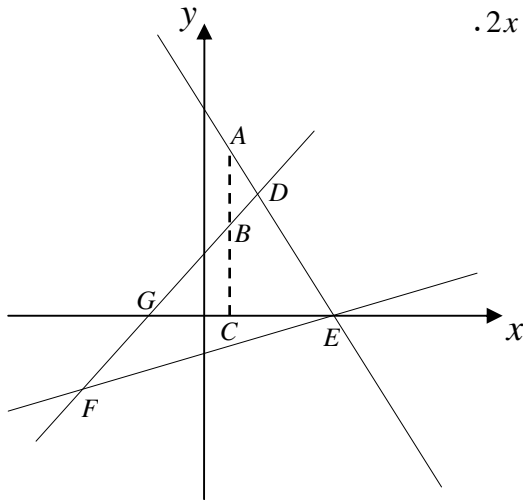
ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC .

6. שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט:

$$2x + y - 8 = 0, \quad x - y + 2 = 0, \quad x - 4y - 4 = 0$$

א. חשב את שטח המשולש $\triangle DEF$.

ב. נתון: $BC = 3$. חשב את אורך הקטע AB .



7. BD הוא התיכון לצלע AC במשולש $\triangle ABC$ שבו נתון הקודקוד $A(-6,1)$. משוואת התיכון

$$BD \text{ היא } x - y = 1 \text{ ומשוואת הצלע } BC \text{ היא } 3x + 5y = 67.$$

מצא את שיעורי הקודקוד C .

10.2 - נקודה וישר (חלק ב')

תזכורת

המרחק בין שתי נקודות: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

אמצע קטע בין שתי נקודות: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

שיפוע בין שתי נקודות: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר: $y = mx + n$ (m הוא שיפוע הישר, n הוא ערך ה- y של

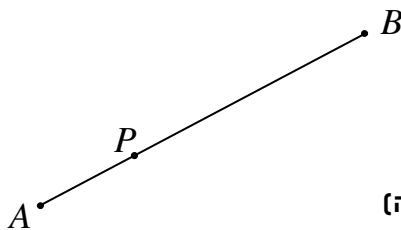
נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y)

שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$

נוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$

הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x : $m = \tan \alpha$

חלוקת קטע ביחס נתון



ערכי הנקודה P , המחלקת את הקטע שקצותיו

הם $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$ ביחס של $k:l$ הם:

$$(בהצלבה) \quad x_p = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k + l}, \quad y_p = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k + l}$$

הצגה כללית של ישר: $Ax + By + C = 0$

מרחק נקודה מישר

מרחק הנקודה $A(x_1, y_1)$ מהישר $Ax + By + C = 0$ הוא: $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$

כאשר $B > 0$:

- אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.
- אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		סיכום ביניים על החומר עד כה (החומר המשותף עם 4 יחידות)
סרטון 2		חלוקת קמע ביחס נתון
סרטון 3	תרגיל 1	
סרטון 4	תרגיל 2	
סרטון 5	תרגיל 3	
סרטון 6	תרגיל 4	
סרטון 7		הצגה כללית של ישר
סרטון 8		נוסחת מרחק נקודה מישור
סרטון 9	תרגיל 5	
סרטון 10	תרגיל 6	
סרטון 11	תרגיל 7	
סרטון 12		מיקום הנקודה ביחס לישר
סרטון 13	תרגיל 8	
סרטון 14	תרגיל 9	
סרטון 15	תרגיל 10	
סרטון 16		מעבר בין הצגות של ישר
סרטון 17	תרגיל 11	
סרטון 18	תרגיל 12	
סרטון 19	תרגיל 13	
סרטון 20	תרגיל 14	
סרטון 21		מרחק בין ישרים מקבילים
סרטון 22	תרגיל 15	
סרטון 23	תרגיל 16	
סרטון 24	תרגיל 17	
סרטון 25	תרגיל 18	
סרטון 26	תרגיל 19	

תרגילים

1. הנקודה P נמצאת על הקטע AB . נתון: $A(2, -5)$, $B(-12, 16)$.
מצא את ערכי הנקודה P , אם נתון כי $AP:PB = 2:5$.
2. קודקודי המשולש $\triangle ABC$ הם: $A(-1, 3)$, $B(6, 0)$, $C(4, -12)$.
מצא את שיעורי מרכז הכובד של המשולש (מרכז כובד של משולש הוא מפגש תיכוני המשולש).
3. מצא את שיעורי מרכז הכובד של משולש $\triangle ABC$ שקודקודיו הם:
 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$.
4. קודקודי המשולש $\triangle ABC$ הם: $A(5, 1)$, $B(7, -3)$, $C(-1, 4)$.
מצא את אורכו של חוצה הזווית היוצא מקודקוד A .
5. א. מצא את מרחק הנקודה $(-2, 4)$ מהישר $4x + 3y + 11 = 0$.
ב. מצא את מרחק הנקודה $(4, 3)$ מהישר $y = 3x - 1$.
ג. מצא את מרחק הנקודה $(3, -11)$ מהישר $x - 5 = 0$.
6. מצא את שיעורי הנקודות על הישר $x + y - 7 = 0$ שמרחקן מהישר $2x - y + 5 = 0$ הוא $\sqrt{20}$.
7. מצא את שטחו של משולש שקודקודיו הם: $A(2, 2)$, $B(-1, 1)$, $C(-5, -2)$.
8. נתון משולש $\triangle ABC$ שבו נתונים הקודקודים: $A(1, 1)$ ו- $B(13, 6)$.
הקודקוד C נמצא על הישר $2x - y - 19 = 0$ ונמצא מתחת לצלע AB .
מצא את שיעורי הקודקוד C אם ידוע ששטח המשולש הוא 13.
9. נתון משולש שצלעותיו מונחות על הישרים:
 $I. x + 2y + 1 = 0$, $II. x - 2y - 11 = 0$, $III. 2x - y + 6 = 0$
מצא שיעורי נקודה הנמצאת בתוך המשולש, שמרחקה מישר I שווה למרחקה מישר III ושמרחקה מישר II הוא מחצית מהמרחק משני ישרים אלה.
10. מצא משוואת ישר ששיפועו 3 אם ידוע שהנקודה $G(7, -3)$ נמצאת מתחתיו ובמרחק $2\sqrt{10}$ ממנו.
11. מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-2, 6)$ ומרחקו מהנקודה $B(2, 9)$ הוא $\sqrt{5}$.

12. מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(1,2)$ ומרחקו מהנקודה $B(-3,10)$ הוא 4.
13. מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(10,8)$ ומרחקו מהנקודה $B(7,-1)$ הוא 3.
14. מצא משוואת ישר שעובר בנקודה $A(-6,1)$ ומרחקו מהנקודה $B(2,7)$ הוא 10.
15. מצא משוואת ישר, המקביל לישר $3x - 4y + 8 = 0$ ונמצא במרחק 4 ממנו.
16. נתון המלבן $ABCD$. משוואותיהן של שתיים מצלעות המלבן הן $AB: 3x + y = 0$ ו- $CD: 3x + y - 6 = 0$. קודקוד B נמצא בראשית הצירים.
- נתון כי הצלע AB ארוכה פי 4 מהצלע BC .
- מצא את שטח המלבן ואת מפגע אלכסוני המלבן, אם ידוע שהוא ברביע הרביעי.
17. צלע של ריבוע מונחת על הישר $3x - 2y + 5 = 0$. אלכסוני הריבוע נפגשים בנקודה $B(1,-1)$.
- מצא את משוואות הישרים עליהם מונחות הצלעות האחרות של הריבוע.
18. נתון ישר שעובר בראשית הצירים ושיפועו חיובי. מצא את משוואת הישר אם נתון שהוא נמצא מעל הנקודות $P(4,1)$ ו- $Q(7,2)$ וסכום המרחקים ממנו לנקודות אלה הוא $3\sqrt{10}$.
19. במשולש $\triangle BKP$ נתון כי הצלע BK מונחת על הישר $x - y + 3 = 0$ והצלע BP מונחת על הישר $x + 2y + 3 = 0$. אורך הגובה לצלע BP הוא $3\sqrt{5}$ ואורך הגובה לצלע KP הוא 5.
- מצא את שיעורי קודקוד P אם ידוע שראשית הצירים נמצאת בתוך המשולש.

10.3 – המעגל:

הגדרת המעגל:

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \text{ מעגל: } R^2$$

$$x^2 + y^2 = R^2 \text{ מעגל קנוני: } R^2$$

משיק למעגל: משוואת המשיק למעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליו

$$\text{היא: } (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$$

מיתר המחבר שתי נקודות השקה: משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה

של שני המשיקים למעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ היוצאים מהנקודה $A(x_1, y_1)$ שמחוץ

$$\text{למעגל היא: } (x-a)(x_1-a) + (y-b)(y_1-b) = R^2$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הגדרת המעגל, משוואת המעגל, מעגל קנוני
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6	תרגיל 5	
סרטון 7	תרגיל 6	
סרטון 8		מעגל שמשיק לצירים
סרטון 9	תרגיל 7	
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11		משיק למעגל
סרטון 12	תרגיל 9	
סרטון 13	תרגיל 10	
סרטון 14	תרגיל 11	
סרטון 15	תרגיל 12	
סרטון 16		סיכום ביניים, ידע מקדים
סרטון 17	תרגיל 13	
סרטון 18	תרגיל 14 א-ג	השלמה לריבוע
סרטון 19	תרגיל 14 ד-ו	
סרטון 20	תרגיל 15	
סרטון 21	תרגיל 16	
סרטון 22	תרגיל 17	מעגל שמשיק לצירים
סרטון 23	תרגיל 18	
סרטון 24	תרגיל 19	משוואת המשיק למעגל
סרטון 25	תרגיל 20	
סרטון 26	תרגיל 21	

	22 תרגיל	27 סרטון
משוואת המיתר המחבר שתי נקודות השקה במעגל	23 תרגיל	28 סרטון
	24 תרגיל	29 סרטון
שני מעגלים: תכונות קטע מרכזים והמשיק המשותף לשני המעגלים		30 סרטון
	25 תרגיל	31 סרטון
	26 תרגיל	32 סרטון
	27 תרגיל	33 סרטון

תרגילים:

1. מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

ב. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 10$

ג. $(x-m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2$

2. מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

3. מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על

הישר $y = 2x - 1$.

4. מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו- $B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

5. מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x = 4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציד

ה- x מיתר שאורכו 12.

6. מצא את משוואתו של המעגל החוסם משולש שקודקדיו הם:

$A(22,-24), B(-10,40), C(-30,28)$

7. מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

8. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לציר ה- y ולישר $y = 6$ ומרכזו על הישר $y = 3x - 2$

ברביע הראשון.

9. מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ בנקודות על המעגל

שבהן $y = 5$.

10. נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה- x . מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות

החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל, הנמצאת ברביע הראשון.

11. נתון ישר שמשוואתו $y = 2x - 10$. הישר חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y

בנקודה B . בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו. המשיק חותך את

ציר ה- y בנקודה C . מצא את אורך הקטע BC .

12. נתון ישר שמשוואתו $y = x$. הישר חותך מעגל קנוני שמשוואתו $x^2 + y^2 = 32$ בשתי נקודות,

A ו- B , כאשר A ברביע הראשון. בנקודה A עובר מעגל נוסף, המשיק למעגל הקנוני ובעל אותו רדיוס. מצא את משוואת המעגל הנוסף ואת משוואת המשיק המשותף לשני המעגלים העובר בנקודה A .

13. במרפז שווה שוקיים $ABCD$ נתון כי הבסיס הגדול, DC , מונח על הישר $3x - y - 9 = 0$

והשוק AD מונחת על הישר $x + y - 3 = 0$. שיעורי קודקוד B הם $(3, -8)$.

מצא את משוואת המעגל החוסם את המרפז $ABCD$.

14. מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $x^2 + 10x + y^2 + 6y - 2 = 0$ ב. $x^2 - 2x + y^2 + 20y + 1 = 0$

ג. $x^2 - 8x + y^2 - 14y = 0$ ד. $x^2 + y^2 + 2y = 0$

ה. $x^2 + x + y^2 - 3\frac{3}{4} = 0$ ו. $x^2 - 2mx + y^2 + 6my + m^2 = 0$

15. משוואתו של מעגל היא $x^2 + y^2 - 6mx - 2(m+2)y + 4m + 4 = 0$.

מצא את ערכו של m אם ידוע שמרכז המעגל נמצא על הישר $y = 2x + 7$.

16. משוואתו של מעגל היא $x^2 + y^2 - 8x + 12y - 48 = 0$.

מצא את אורכו של המיתר שחותך הישר $y = 2x - 4$ מהמעגל מבלי למצוא את נקודות הקצה של המיתר.

17. מצא משוואת מעגל העובר בנקודה $(1, 8)$ ומשיק לשני הצירים.

18. מצא את אורך המשיק למעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 14y + 37 = 0$ היוצא

מהנקודה $A(10, -3)$.

19. מצא את משוואת המשיק ואת משוואת הנורמל למעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$

בנקודה $A(5, -4)$.

20. מצא את נקודת החיתוך של המשיקים למעגל שמשוואתו $x^2 + (y-1)^2 = 5$ בנקודות שבהן

$$x = -1$$

21. נתון מעגל שמרכזו בנקודה $(-2, 6)$ והוא עובר בראשית הצירים.

המעגל חותך את הצירים בשתי נקודות נוספות, A ו- B .

א. הוכח כי המשיקים למעגל בנקודות A ו- B מקבילים זה לזה.

ב. הוכח את סעיף א' מבלי למצוא את משוואות המשיקים או את שיפועיהם.

22. נתון המעגל $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 20$ והישר $y = 2x + m$. לאילו ערכים של הפרמטר m

הישר משיק למעגל ולאיילו ערכים של m הישר חותך את המעגל?

23. א. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 2x - 19 = 0$, המחבר את נקודות

ההשקה של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-3, 8)$.

ב. מצא את משוואת המיתר במעגל שמשוואתו $x^2 + (y-1)^2 = 5$, המחבר את נקודות ההשקה

של המשיקים היוצאים מהנקודה $A(-5, 1)$.

24. נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 16x + 48 = 0$ ונקודה P , שנמצאת על החלק החיצוני של

ציר ה- y . הישר המחבר את נקודות ההשקה של המשיקים היוצאים למעגל מנקודה P חותך

את ציר ה- y בנקודה Q . נתון: $PQ = 14$.

מצא את שיעורי הנקודה Q .

25. נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 16x - 12y + 64 = 0$. המעגל משיק מבחוץ למעגל קנוני.

מצא את משוואת המעגל הקנוני, את נקודת ההשקה בין המעגלים ואת משוואת המשיק

המשותף העובר בנקודה זו.

26. המעגלים $x^2 + y^2 + 22x - 6y = m$ ו- $x^2 + y^2 = 26$ נחתכים בזווית ישרה.

מצא את ערכו של m .

27. מצא את משוואתו של מעגל החוסם ריבוע, שאחד מקודקודיו נמצא בראשית הצירים

ומשוואת אחד מאלכסוניו היא $3x - y + 10 = 0$.

10.4 - האליפסה

הגדרה:

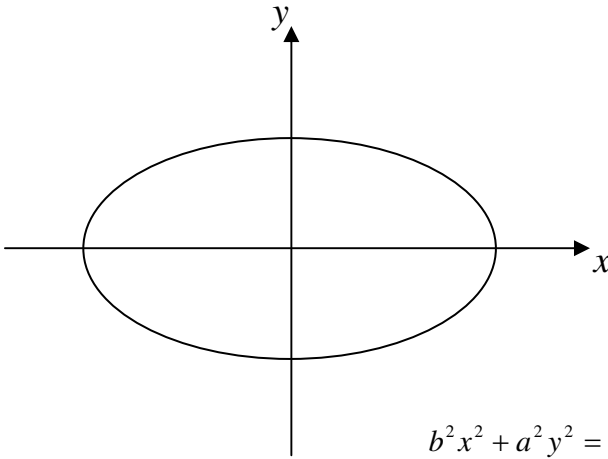
המקום הגיאומטרי של כל הנקודות,

שסכום מרחקיהן משתי נקודות

קבועות במישור קבוע, נקרא אליפסה.

הערה: הנקודות הקבועות נקראות מוקדי האליפסה.

משוואת אליפסה קנונית: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ או $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$



הקשר בין הפרמטרים של האליפסה: $a^2 - b^2 = c^2$ (שיעור ה- x של המוקד)

מושגים באליפסה:

הציר הגדול – הקטע שאליפסה חותכת מציר ה- x

הציר הקטן – הקטע שאליפסה חותכת מציר ה- y

מרכז האליפסה – מפגש צירי האליפסה (באליפסה קנונית הוא ראשית הצירים)

מוקדים – שתי נקודות קבועות שעבורן סכום המרחקים מכל נקודה על האליפסה קבוע

שיעורי המוקדים: $F_1(c, 0)$ ו- $F_2(-c, 0)$

רדיוסי וקטור – המרחקים של כל נקודה על האליפסה משני המוקדים

אורך הרדיוס מנקודה (x, y) שעל אליפסה למוקד הימני: $r_1 = a - \frac{cx}{a}$

אורך הרדיוס מנקודה (x, y) שעל אליפסה למוקד השמאלי: $r_2 = a + \frac{cx}{a}$

מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל האליפסה

קוטר – מיתר שעובר במרכז האליפסה

מכפלת שיפועי מיתר באליפסה וקוטר החוצה אותו היא: $-\frac{b^2}{a^2}$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף תרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הגדרת האליפסה, מושגים באליפסה, משוואת האליפסה
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4		סכום הרדיוסים באליפסה, הקשר בין הפרמטרים של האליפסה
סרטון 5	תרגיל 3	
סרטון 6	תרגיל 4	
סרטון 7	תרגיל 5	
סרטון 8	תרגיל 6	
סרטון 9	תרגיל 7	
סרטון 10		נוסחת רדיוסי האליפסה
סרטון 11	תרגיל 8	
סרטון 12	תרגיל 9	
סרטון 13	תרגיל 10	
סרטון 14	תרגיל 11	
סרטון 15	תרגיל 12	
סרטון 16	תרגיל 13	
סרטון 17	תרגיל 14	
סרטון 18	תרגיל 15	
סרטון 19	תרגיל 16	
סרטון 20	תרגיל 17	
סרטון 21	תרגיל 18	מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו
סרטון 22	תרגיל 19	
סרטון 23	תרגיל 20	

תרגילים

1. מצא את אורך צירי אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 36$.
2. מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 18 ואורך צירה הקטן הוא $2\sqrt{3}$.
3. מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הגדול הוא 12 והמרחק בין מוקדיה $8\sqrt{2}$.
4. מצא את משוואתה של אליפסה שאורך צירה הקטן הוא 8 והיא עוברת בנקודה $(-3\sqrt{3}, 2)$.
5. מצא את משוואתה של אליפסה שחסומה במעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 16$ ומוקד אחד שלה הוא בנקודה $(\sqrt{10}, 0)$.
6. מצא את משוואתה של אליפסה שחותכת את ציר ה- y בנקודה $(0, -2\sqrt{5})$ והמרחק בין המוקד הימני למוקד הימני בה הוא 2.
7. מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודות $(-2, \sqrt{6})$ ו- $(\sqrt{14}, 1)$.
8. מצא על האליפסה $3x^2 + 4y^2 = 144$ את הנקודות שהפרש מרחקיהן מהמוקדים הוא 4.
9. מצא את משוואתה של אליפסה שעוברת בנקודה $(-3, 1)$ ומכפלת המרחקים מנקודה זו למוקדים הוא 6.
10. מצא על האליפסה $x^2 + 3y^2 = 12$ את הנקודות שמהן רואים את הקטע בין שני המוקדים בזווית ישרה.
11. מצא את משוואתו של קוטר באליפסה $x^2 + 4y^2 = 50$ ששיפועו חיובי ואורכו $\sqrt{56}$.
12. נתונים האליפסה $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ והישר $y = 2x + k$. מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר k הישר משיק לאליפסה ועבור אילו ערכים של הפרמטר k הישר חותך את האליפסה.
13. מצא את שטחו של ריבוע, שחסום באליפסה $3x^2 + 5y^2 = 120$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.
14. מצא את שטחו של ריבוע, שחסום באליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ כך שצלעותיו מקבילות לצירים.
15. באליפסה $5x^2 + 9y^2 = 90$ חסום מלבן שצלעותיו מקבילות לצירים. מצא את שטח המלבן אם שתיים מצלעותיו עוברות במוקדי האליפסה.
16. באליפסה $x^2 + 5y^2 = 16$ חסום משולש שווה צלעות כך שקודקוד אחד שלו הוא הקודקוד הימני של האליפסה. מצא את שיעורי קודקודיו האחרים.

17. באליופסה חסום משולש שווה צלעות כך שקודקוד אחד שלו הוא הקודקוד הימני של האליופסה וקודקודיו האחרים הם נקודות החיתוך של האליופסה עם ציר ה- y . מצא את משוואת האליופסה

אם אחד ממוקדיה נמצא בנקודה $(4\sqrt{2}, 0)$.

18. מצא באליופסה $2x^2 + 3y^2 = 12$ משוואת מיתר שנקודת האמצע שלו היא $(1.5, 1)$.

19. ישר שמשוואתו $x - y - 3 = 0$ חותך מאליופסה מיתר שאמצעו בנקודה $(2, -1)$. מצא את

משוואת האליופסה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2\sqrt{2}, -2)$.

20. נתונה המשוואה $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2 - 25} = 1$ ($0 < a \neq 5$).

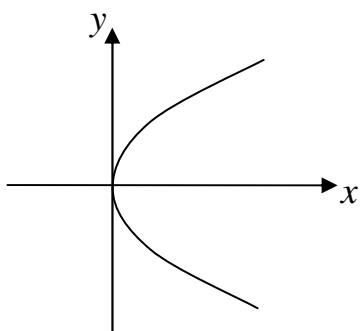
א. (1) עבור איזה ערך של a המשוואה מייצגת מעגל?

(2) עבור אילו ערכים של a המשוואה מייצגת אליפסה?

ב. הוכח כי עבור $a = 4$ אין אף נקודה על האליופסה שממנה רואים את הקטע שבין המוקדים בזווית ישרה.

10.5 - הפרבולה

הגדרה:



המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, שמרחקן מנקודה

קבועה שווה למרחקן מישר קבוע נקרא פרבולה.

הערה: הנקודה הקבועה נקראת מוקד הפרבולה

והישר הקבוע נקרא מדריך הפרבולה.

משוואת פרבולה קנונית: $y^2 = 2px$

מושגים בפרבולה

מוקד – נקודה קבועה שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליה שווה למרחק הנקודה מהמדריך.

מדריך – ישר קבוע שמרחק כל נקודה על הפרבולה אליו שווה למרחק הנקודה מהמוקד.

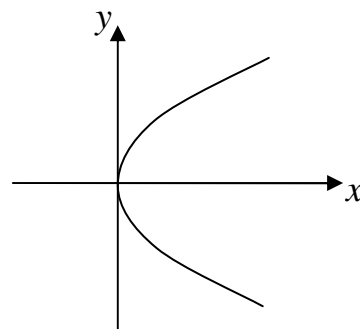
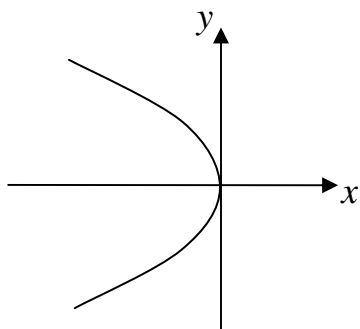
קודקוד הפרבולה – ראשית הצירים

רדיוס – מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה $r = x + \frac{p}{2}$

מיתר – קטע המחבר בין שתי נקודות על הפרבולה

קוטר (לא בחומר) – ישר המקביל לציר הסימטריה של הפרבולה (כלומר מקביל לציר ה- x)

פרבולה שמשוואתה $y^2 = 2px$: פרבולה שמשוואתה $y^2 = -2px$:



משק לפרבולה:

משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$

הערה: שיפוע המשיק לפרבולה $y^2 = 2px$ בנקודה $A(x_0, y_0)$ שעליה הוא: $m = \frac{p}{y_0}$

מיתר המחבר שתי נקודות השקה:

משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה $y^2 = 2px$

היציאים מהנקודה $A(x_0, y_0)$ שמחוץ לפרבולה היא: $yy_0 = p(x + x_0)$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הגדרת הפרבולה, מושגים הפרבולה, משוואת הפרבולה
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6	תרגיל 5	
סרטון 7	תרגיל 6	
סרטון 8	תרגיל 7	
סרטון 9	תרגיל 8	
סרטון 10	תרגיל 9	
סרטון 11	תרגיל 10	
סרטון 12	תרגיל 11	
סרטון 13	תרגיל 12	
סרטון 14	תרגיל 13	
סרטון 15	תרגיל 14	
סרטון 16	תרגיל 15	
סרטון 17	תרגיל 16	
סרטון 18		משוואת משיק לפרבולה, שיפוע המשיק לפרבולה
סרטון 19	תרגיל 17	
סרטון 20	תרגיל 18	
סרטון 21	תרגיל 19	
סרטון 22	תרגיל 20	
סרטון 23	תרגיל 21	
סרטון 24	תרגיל 22	
סרטון 25		משוואת המיתר המחבר שתי נקודות העקה בפרבולה
סרטון 26	תרגיל 23	
סרטון 27	תרגיל 24	
סרטון 28	תרגיל 25	
סרטון 29	תרגיל 26	
סרטון 30	תרגיל 27	
סרטון 31	תרגיל 28	
סרטון 32	תרגיל 29	
סרטון 33	תרגיל 30	

תרגילים:

1. נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$. מצא מהו הפרמטר, המוקד והמדריך שלה.
2. מצא את משוואתה של פרבולה שהישר $x = -3$ הוא המדריך שלה.
3. מצא את משוואתה של פרבולה שהמרחק בין המוקד שלה למדריך הוא 5.
4. מצא את משוואתה של פרבולה שעוברת בנקודה $(9, -6)$.
5. מצא את משוואתה של פרבולה שמוקדה מתלכד עם המוקד הימני של האליפסה $x^2 + 2y^2 = 18$.
6. מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 6x$ שמרחקן מהמוקד הוא 4.
7. מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 8x$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקודקוד.
8. מצא נקודות על הפרבולה $y^2 = 2px$ שמרחקן מהמוקד שווה למרחקן מהקודקוד.
9. מצא את שטחו של משולש שווה צלעות שקודקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קודקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 10x$.
10. הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקודקוד אחד שלו נמצא בראשית הצירים ושני קודקודיו האחרים מונחים על הפרבולה $y^2 = 2px$.
11. נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שטחו של משולש שווה צלעות שקודקוד אחד שלו מונח על ציר ה- x , וקודקודיו האחרים מונחים על מדריך הפרבולה אם ידוע שמפגע תיכוני המשולש הוא מוקד הפרבולה.
12. את נקודה A שעל הפרבולה $y^2 = 20x$ חיברו עם המוקד F וגם העבירו ממנה אנך למדריך. היקף המרפז, שבסיסיו הם האנך והקטע על ציר ה- x שבין מוקד הפרבולה למדריך שלה, שוק אחת שלו היא AF והשוק השנייה שלו מונחת על המדריך, הוא 27.5. חשב את שטח המרפז.
13. קצות מיתר בפרבולה $y^2 = 4x$ הם A ו- B . מצא את שיעורי הנקודה B אם ידוע שהמיתר עובר במוקד הפרבולה ושערך ה- x של נקודה A הוא 4.
14. מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 16x$, שעובר בראשית הצירים ומרחקו מהמוקד הוא $\frac{8}{\sqrt{5}}$.
15. מצא משוואת מיתר בפרבולה $y^2 = 2x$, שאמצעו בנקודה $\left(1\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$.
16. נתונה הפרבולה $y^2 = 4x$ והישר $y = 2x + k$, עבור איזה ערך של k הישר משיק לפרבולה?

17. נתונה הפרבולה $y^2 = 6x$.

א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות שבהן $x = 1\frac{1}{2}$.

ב. הוכח שנקודת החיתוך של הנורמלים בנקודות אלה נמצאת על ציר ה- x .

18. הנקודות A ו- B נמצאות על הפרבולה $y^2 = 12x$. נתון כי $y_A = 4$. מצא את שיעורי

נקודה B אם ידוע שהמשיקים לפרבולה בנקודות הנתונות יוצרים זווית ישרה.

19. נקודה A נמצאת על הפרבולה $y^2 = 28x$ ברביע הרביעי. אורך הנורמל לפרבולה מנקודה A

עד לציר ה- x הוא $7\sqrt{5}$. מצא את משוואת הנורמל.

20. מרחק המוקד של הפרבולה $y^2 = 8x$ ממשיק לה ששיפועו חיובי הוא $\sqrt{8}$. מצא את משוואת המשיק.

21. נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$. הבע באמצעות p את שיעורי נקודה על הפרבולה ברביע הראשון, שמרחק המשיק בה ממוקד הפרבולה הוא p .

22. נתונות שתי פרבולות: $I. y^2 = 6x$, $II. y^2 = 12x$

ישר שעובר בראשית הצירים חותך את הפרבולות בנקודות A ו- B .

הראה כי המשיקים בנקודות A ו- B מקבילים.

23. נתונה הפרבולה $y^2 = 14x$ והנקודה $(-1, -3)$, ממנה יוצאים שני משיקים לפרבולה. מצא את משוואת המיתר המחבר בין נקודות ההשקה.

24. נתונה הפרבולה $y^2 = 18x$ ונקודה ברביע השלישי, ששיעור ה- x שלה קטן ב-1 משיעור ה- y שלה. מהנקודה יוצאים שני משיקים לפרבולה. המיתר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם הצירים משולש ששטחו 18. מצא את משוואת המיתר.

25. מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו במוקד הפרבולה $y^2 = 24x$ והוא משיק למדריך שלה.

26. מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו בנקודה $(8, 0)$ והוא משיק לפרבולה $y^2 = 10x$ בשתי נקודות.

27. נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ ומעגל שמרכזו על ציר ה- x והוא משיק לפרבולה מבפנים בשתי נקודות. הישר המחבר בין נקודות ההשקה יוצר עם המשיקים בנקודות אלה משולש שווה צלעות. הבע באמצעות p את משוואת המעגל.

28. הנקודה $A(2,3)$ נמצאת על פרבולה. מצא את משוואתו של מעגל שמשיק לפרבולה

בנקודה A ומשיק לציר ה- y .

29. נתונה הפרבולה $y^2 = 2px$ שבה $p > 4$. הישר $x = 2$ חותך את הפרבולה בנקודות A ו- B .

מצא את שיעורי קודקוד C של משולש $\triangle ABC$ שמוקד הפרבולה הוא מפגש האנכים האמצעיים בו.

30. אליפסה שמשוואתה $x^2 + 4y^2 = 16$ חותכת את הפרבולה $y^2 = 2px$ בשתי נקודות. המרובע

שקודקודיו הם נקודות החיתוך, מרכז האליפסה וקודקודה הימני של האליפסה הוא מעוין. מצא את משוואת הפרבולה.

10.6 - מקומות גיאומטריים

המרחק בין שתי נקודות: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

אמצע קטע בין שתי נקודות: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$

שיפוע בין שתי נקודות: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

משוואת ישר: $y = mx + n$ (m הוא שיפוע הישר, n הוא ערך ה- y של

נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y)

שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$

נוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$

הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x : $m = \tan \alpha$

חלוקת קטע ביחס נתון: ערכי הנקודה P , המחלקת את הקטע שקצותיו הם $A(x_1, y_1)$

ו- $B(x_2, y_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $x_p = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k + l}$, $y_p = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k + l}$ (בהצלבה)

מרחק נקודה מישר:

מרחק הנקודה $A(x_1, y_1)$ מהישר $Ax + By + C = 0$ הוא: $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$

כאשר $B > 0$:

- אם הנקודה מעל הישר מורידים את הערך המוחלט.

- אם הנקודה מתחת לישר מורידים את הערך המוחלט ומוסיפים מינוס לאחד האגפים.

משוואת מעגל: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ משוואת מעגל קנוני: $x^2 + y^2 = R^2$

משיק למעגל: משוואת המשיק למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליו

היא: $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = R^2$

מיתר המחבר שתי נקודות השקה במעגל: משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות

ההשקה של שני המשיקים למעגל $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ היוצאים מהנקודה $A(x_1, y_1)$

שמחוץ למעגל היא: $(x - a)(x_1 - a) + (y - b)(y_1 - b) = R^2$

$$\text{משוואת אליפסה קנונית: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ או } b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

הקשר בין הפרמטרים של האליפסה: $a^2 - b^2 = c^2$ (שיעור ה- x של המוקד) - c

רדיוסים באליפסה:

$$\text{אורך הרדיוס מנקודה } (x, y) \text{ שעל אליפסה למוקד הימני: } r_1 = a - \frac{cx}{a}, \text{ השמאלי: } r_2 = a + \frac{cx}{a}$$

$$\text{משוואת פרבולה קנונית: } y^2 = 2px$$

$$\text{רדיוס בפרבולה: מרחק בין המוקד לנקודה שעל הפרבולה } r = x + \frac{p}{2}$$

משקל לפרבולה:

$$\text{משוואת המשיק לפרבולה } y^2 = 2px \text{ בנקודה } A(x_0, y_0) \text{ שעליה היא: } yy_0 = p(x + x_0)$$

מיתר המחבר שתי נקודות השקה בפרבולה:

$$\text{משוואת המיתר, המחבר את שתי נקודות ההשקה של שני המשיקים לפרבולה } y^2 = 2px$$

$$\text{היוצאים מהנקודה } A(x_0, y_0) \text{ שמחוץ לפרבולה היא: } yy_0 = p(x + x_0)$$

• מקום גיאומטרי הוא אוסף נקודות בעלות תכונה מסוימת.

• מקום גיאומטרי הוא משוואה המקשרת בין x ל- y .

בשאלות של מקום גיאומטרי נפוץ השימוש ב:

א. שיפועים: (1) שיפועי ישרים מקבילים (שווים זה לזה)

(2) שיפועי ישרים מאונכים (מכפלתם היא -1)

(3) שלוש נקודות שעל אותו ישר שומרות על אותו שיפוע

ב. משפט פיתגורס

ג. אמצע קטע / חלוקת קטע ביחס נתון

ד. משיק למעגל – המשיק מאונך לרדיוס – רמז לשימוש במשפט פיתגורס

ה. קטע מרכזים: (1) במעגלים המשיקים מבחוץ – סכום הרדיוסים

(2) במעגלים המשיקים מבפנים – הפרש הרדיוסים

ו. משפטים מגיאומטריה (תאלס, משפט חוצה הזווית, דמיון משולשים)

ז. אם נתונה משוואה בשאלה – ניתן להשתמש בה על ידי הצבת נקודה שעליה במשוואה

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהו מקום גיאומטרי, איך מוצאים מקום גיאומטרי
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	כולל הדגמת ניסוחים שונים לשאלת מקום גיאומטרי
סרטון 4	תרגיל 3	כולל הסבר על מהן הצורות האפשריות כתשובה
סרטון 5	תרגיל 4	כולל הסבר מדוע לא מציירים נקודות בעלות ייחוד מסוים כנקודה אופיינית
סרטון 6	תרגיל 5	
סרטון 7	תרגיל 6	כולל הסבר על המגבלות של x ו- y במקום הגיאומטרי המתקבל
סרטון 8	תרגיל 7	כולל לראשונה שימוש במשתנה עזר
סרטון 9	תרגיל 8	כולל לראשונה שימוש בהצבה במשוואה נתונה
סרטון 10	תרגיל 9	
סרטון 11	תרגיל 10	
סרטון 12	תרגיל 11	
סרטון 13	תרגיל 12	
סרטון 14	תרגיל 13	
סרטון 15	תרגיל 14	
סרטון 16	תרגיל 15	
סרטון 17	תרגיל 16	
סרטון 18	תרגיל 17	
סרטון 19	תרגיל 18	
סרטון 20		דברים שהשימוש בהם נפוץ בשאלות של מקומות גיאומטריים

תרגילים

1. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(-7, -6)$ שווה למרחקן מהנקודה $B(9, 2)$.
2. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $A(3, -6)$ גדול פי 3 ממרחקן מהנקודה $B(-1, 10)$.
3. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מהנקודה $(1, 0)$ קטן פי 3 ממרחקן מהישר $x = 9$.
4. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי כל המעגלים שעוברים בנקודה $(6, 0)$ ומשיקים לישר $x = -6$.
5. נתונים שני ישרים: $I. 3x + y - 6 = 0$, $II. 2x + 6y - 1 = 0$. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מישר I גדול פי 4 ממרחקן מישר II .
6. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי כל המעגלים שמשיקים לציר ה- y ומשיקים מבפנים למעגל קנוני שרדיוסו 4. מהן ההגבלות?
7. מצא את המקום הגיאומטרי של אמצעי כל הקטעים, המחברים את הנקודה $(4, -10)$ עם נקודות על הישר $y = 6x + 2$.
8. נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 + 12x - 16y = 0$. מצא את המקום הגיאומטרי של אמצעי כל המיתרים במעגל שעוברים בראשית הצירים.
9. נתון מעגל שמשוואתו $x^2 + y^2 = 36$. הכפילו את שיעורי ה- y של כל הנקודות על המעגל ב- $\frac{2}{3}$. מצא את המקום הגיאומטרי שמתקבל באופן זה.
10. נתונות הנקודות $A(2, 0)$ ו- $B(10, 0)$. מצא את המקום הגיאומטרי של מרכזי הכובד של כל המשולשים $\triangle ABC$ אם ידוע שקודקוד C מונח על הישר $y = 3x - 12$. מהי ההגבלה?
11. נתון המעגל $x^2 + y^2 + 4x - 10y + 11 = 0$. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שאורך המשיק מהן למעגל שווה למרחקן מהנקודה $(7, 2)$.
12. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ בזווית של 120° .

13. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמהן רואים את המעגל $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$

בזווית של 60° .

14. נתון מעגל שמרכזו M ומשוואתו $x^2 + y^2 - 12x - 64 = 0$. מנקודה A שעל המעגל העבירו

אנך לציר ה- x שחותך את ציר ה- x בנקודה B והמשכו חותך את המעגל בנקודה C .

בנקודה B העבירו מקביל לישר AM ובנקודה C העבירו מקביל לציר ה- x .

המקביל ל- AM והמקביל לציר ה- x נפגשים בנקודה D . מצא את המקום הגיאומטרי של

נקודה D . מהן ההגבלות?

15. האליפסה $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ חותכת את חלקו החיובי של ציר ה- x בנקודה A ואת חלקו החיובי של

ציר ה- y בנקודה B . מנקודה C שעל ציר ה- x בין O ל- A (O ראשית הצירים) העלו אנך

לציר ה- x שחותך את הישר AB בנקודה D . מצא את המקום הגיאומטרי של נקודת מפגש

הישרים BC ו- OD .

16. נתון מעגל קנוני שרדיוסו 3. מנקודה A שעל המעגל הורידו אנך לציר ה- x שחותך את ציר

ה- x בנקודה C . נסמן ב- B את אמצע הקטע AC . מנקודה C העבירו מקביל ל- AO

(O ראשית הצירים). מצא את המקום הגיאומטרי של מפגש הישרים BO והמקביל ל- AO .

17. נתונות הנקודות $A(4,0)$ ו- $B(-2,0)$. מצא את המקום הגיאומטרי של כל הנקודות C כך

שהקטע CO (O ראשית הצירים) הוא חוצה זווית $\sphericalangle C$ במשולש $\triangle ABC$.

18. נתון מעגל קנוני שרדיוסו R . את נקודה A שעל המעגל חיברו עם ראשית הצירים ועל

הקטע AO (O ראשית הצירים) סימנו נקודה B כך שמתקיים $AB:BO = a:b$. מנקודה A

העבירו אנך לציר ה- x ומנקודה B העבירו אנך לציר ה- y .

א. מצא את המקום הגיאומטרי של מפגש האנכים הללו.

ב. המקום הגיאומטרי שמצאת בסעיף א' חותך את ציר ה- y בנקודות P ו- Q . מצא את אורך

הקטע PQ .

10.7 – תרגילי הוכחה:

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הסבר כללי על נקודות כלליות ועל תרגילי הוכחה
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6	תרגיל 5	
סרטון 7	תרגיל 6	
סרטון 8	תרגיל 7	
סרטון 9	תרגיל 8	
סרטון 10	תרגיל 9	
סרטון 11	תרגיל 10	
סרטון 12	תרגיל 11	

תרגילים:

1. הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את

$$\text{הישרים } x = R \text{ ו- } x = -R \text{ בנקודות } A \text{ ו- } B. \text{ הוכח: } y_A \cdot y_B = R^2.$$

2. הנקודה P נמצאת על המעגל $x^2 + y^2 = R^2$, שחותך את ציר ה- y בנקודות $A(0, R)$

ו- $B(0, -R)$. בנקודה P מעבירים משיק למעגל שחותך את הישר $y = R$ בנקודה T .

$$\text{הוכח: } OT \parallel BP.$$

3. הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, ש- F_1 ו- F_2 הם מוקדיה.

$$\text{הוכח: } PO^2 + PF_1 \cdot PF_2 = a^2 + b^2 \text{ (} O \text{ ראשית הצירים).}$$

4. הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, שקודקודה הימני הוא A וקודקודה

השמאלי הוא B . הישר AP חותך את הישר $x = -a$ בנקודה K והישר BP חותך את

הישר $x = a$ בנקודה L .

$$\text{הוכח: } y_K \cdot y_L = 4b^2.$$

5. הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

הוכח: היחס בין ריבוע אורך האנך, היורד מנקודה P לציר הגדול, ובין מכפלת שני קטעי הציר הגדול שמשני צידי האנך הוא גודל קבוע.

6. הנקודה P נמצאת על האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, שקודקודה הימני הוא A , קודקודה

השמאלי הוא B ומוקדה הימני הוא F_1 . הישר AP חותך את הישר $x = \frac{a^2}{c}$ בנקודה M

והישר BP חותך את הישר $x = \frac{a^2}{c}$ בנקודה N .

$$\text{הוכח: } \angle MF_1N = 90^\circ.$$

7. נתונה האליפסה $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.

$$\text{הוכח כי מכפלת שיפועי מיתר וקוטר החוצה אותו היא } -\frac{b^2}{a^2}.$$

8. בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים נורמל. הוכח כי היטלו של הנורמל על ציר ה- x הוא גודל קבוע.

9. בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים משיקים משתי נקודות שעליה, A ו- B . המשיקים נפגשים בנקודה C .

הוכח: $y_A + y_B = 2y_C$.

10. בנקודה A , שעל הפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים משיק לפרבולה שחותך את המדריך שלה בנקודה B . ממוקד הפרבולה מעלים אנך לציר ה- x שחותך את המשיק בנקודה C .
הוכח: $FB = FC$ (F - מוקד הפרבולה).

11. בפרבולה $y^2 = 2px$ מעבירים מיתר, החותך את הפרבולה בנקודות A ו- B . המיתר חותך את ציר ה- x בנקודה C .

הוכח: $x_A \cdot x_B = (x_C)^2$.

פרק 11 - מספרים מרוכבים

ידע מוקדם: חקירת משוואה ריבועית, זהויות ומשוואות טריגונומטריות, משוואות מעריכיות,

סדרות (חשבוניות והנדסיות), מציאת מקומות גיאומטריים (גיאומטריה אנליטית).

הגדרה: $i = \sqrt{-1}$ מספר מרוכב: $z = a + bi$ (a ו- b ממשיים)

a נקרא הרכיב הממשי של z ומסומן גם $\text{Re}(z)$

bi נקרא הרכיב המדומה של z ומסומן גם $\text{Im}(z)$

המספר הצמוד: $\bar{z} = a - bi$

מספר מרוכב בהצגה קוטבית: $z = R \text{cis} \theta$

מעבר מהצגה אלגברית להצגה קוטבית: $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\tan \theta = \frac{b}{a}$

מעבר מהצגה קוטבית להצגה אלגברית: $a = R \cos \theta$, $b = R \sin \theta$

$|z|$ - גודלו של המספר המרוכב z . מתקיים: $|z| = R = \sqrt{a^2 + b^2}$

פעולות חשבון בהצגה קוטבית:

$$z_1 \cdot z_2 = (R_1 \text{cis} \theta_1) \cdot (R_2 \text{cis} \theta_2) = R_1 R_2 \text{cis}(\theta_1 + \theta_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1 \text{cis} \theta_1}{R_2 \text{cis} \theta_2} = \frac{R_1}{R_2} \text{cis}(\theta_1 - \theta_2)$$

משפט דה-מואבר: $(R \text{cis} \theta)^n = R^n \text{cis}(n\theta)$

השורשים מסדר n של מספר מרוכב: $z^n = R \text{cis} \theta \Rightarrow z_k = \sqrt[n]{R} \text{cis} \left(\frac{\theta}{n} + \frac{360^\circ k}{n} \right)$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
1		ידע מקדים, רקע היסטורי, הגדרת i
2	תרגיל 1	
3	תרגיל 2	
4	תרגיל 3	הכרות עם המספר המרוכב $z = a + bi$
5	תרגיל 4	
6	תרגיל 5	
7	תרגיל 6	
8	תרגיל 7	חיבור, חיסור וכפל במספרים מרוכבים
9		המספר הצמוד
10	תרגיל 8	
11	תרגיל 9	חילוק מספרים מרוכבים
12	תרגיל 10	

	11 תרגיל	13 סרטון
	12 תרגיל	14 סרטון
כולל שיויון בין מספרים מרוכבים והצבת $z = a + bi$ כשיטה לפתרון משוואות מרוכבות	13 תרגיל	15 סרטון
	14 תרגיל	16 סרטון
	15 תרגיל א'	17 סרטון
	15 תרגיל ב'	18 סרטון
	16 תרגיל	19 סרטון
	17 תרגיל	20 סרטון
	18 תרגיל	21 סרטון
חקירת משוואה ריבועית מרוכבת		22 סרטון
	19 תרגיל	23 סרטון
מישור גאוס, הצגה קומבית של מספר מרוכב, מעבר מהצגה קומבית של מספר מרוכב להצגתו האלגברית		24 סרטון
	20 תרגיל	25 סרטון
מעבר מהצגה אלגברית של מספר מרוכב להצגתו הקומבית		26 סרטון
	21 תרגיל	27 סרטון
פעולות חשבון בהצגה קומבית		28 סרטון
	22 תרגיל	29 סרטון
	23 תרגיל	30 סרטון
	24 תרגיל	31 סרטון
	25 תרגיל	32 סרטון
	26 תרגיל	33 סרטון
	27 תרגיל	34 סרטון
	28 תרגיל	35 סרטון
	29 תרגיל	36 סרטון
	30 תרגיל	37 סרטון
	31 תרגיל	38 סרטון
משפט דה-מואבר		39 סרטון
	32 תרגיל	40 סרטון
הוצאת שורש מסדר n של מספר מרוכב		41 סרטון
	33 תרגיל	42 סרטון
משוואת היחידה, שורשי היחידה, סכום ומכפלת שורשי היחידה		43 סרטון
	34 סרטון	44 סרטון
שאלה על מקום גיאומטרי (לראשונה)	35 תרגיל	45 סרטון
	36 תרגיל	46 סרטון
	37 תרגיל	47 סרטון
תוכורת בנושא סדרות		48 סרטון
	38 תרגיל	49 סרטון
	39 תרגיל א'	50 סרטון
	39 תרגיל ב'	51 סרטון
	40 תרגיל	52 סרטון
	41 תרגיל	53 סרטון
	42 תרגיל	54 סרטון
פתרון בדרך הצגה מריגונומטרית	43 תרגיל	55 סרטון
פתרון בדרך הצגה אלגברית	43 תרגיל	56 סרטון
	44 תרגיל	57 סרטון
	45 תרגיל	58 סרטון
	46 תרגיל	59 סרטון
	47 תרגיל	60 סרטון
	48 תרגיל	61 סרטון
פתרון בדרך הצגה מריגונומטרית	49 תרגיל	62 סרטון
פתרון בדרך הצגה אלגברית	49 תרגיל	63 סרטון
	50 תרגיל	64 סרטון

תרגילים:

1. רשום עם i :

$$\text{א. } \sqrt{-1} = \text{ב. } \sqrt{-4} = \text{ג. } \sqrt{-25} = \text{ד. } \sqrt{-3} = \text{ה. } \sqrt{-5} =$$

2. חשב:

$$\text{א. } i = \text{ב. } i^2 = \text{ג. } i^3 = \text{ד. } i^4 = \text{ה. } i^5 = \text{ו. } i^{17} =$$

3. רשום את ערכם של a ו- b עבור המספרים המרוכבים הבאים:

$$\text{א. } 2 + 5i \text{ ב. } 3 - i \quad \text{ג. } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ ד. } 7i \text{ ה. } -4 \text{ ו. } 0$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\text{א. } x^2 = -1 \text{ ב. } x^2 + 36 = 0 \text{ ג. } x^2 - 2x + 5 = 0$$

5. פתור את המשוואה הבאה: $x^2 + x + 1 = 0$

6. פתור את המשוואה הבאה: $z^2 + iz + 6 = 0$

7. נתון: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 2i$. חשב:

$$\text{א. } z_1 + z_2 = \text{ב. } z_1 - z_2 = \text{ג. } z_1 \cdot z_2 =$$

8. רשום את המספר הצמוד של המספרים המרוכבים הבאים:

$$\text{א. } 2 + 5i \text{ ב. } 3 - i \quad \text{ג. } \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \text{ ד. } 7i \text{ ה. } -4 \text{ ו. } 0$$

9. חשב:

$$\text{א. } \frac{11 + 2i}{2 - i} = \text{ב. } \frac{3 + 7i}{2 - 5i} = \text{ג. } \frac{19 - 9i}{2 - 3i} =$$

10. פתור את המשוואה הבאה: $3z - 11 = iz - 7i$

11. פתור את המשוואה הבאה: $iz + 5 = 4i$

12. פתור את מערכת המשוואות הבאה (z ו- w משתנים מרוכבים):

$$\begin{cases} 3z + iw = 5 - 4i \\ 5iz - 2w = 5 + 8i \end{cases}$$

13. פתור את המשוואות הבאות שבהן a ו- b ממשיים:

$$\text{א. } 2a - 3i = 10 + bi \quad \text{ב. } 3a - 8 + 5bi = 2b - ai - 3i$$

14. פתור את המשוואה הבאה: $2z + 7i = iz + \bar{z} - 3$

15. חשב:

$$\text{א. } \sqrt{5 - 12i} = \text{ב. } \sqrt{8 + 6i} =$$

16. פתור את המשוואה הבאה: $z^2 - 2(1 - 2i)z - 8i = 0$

17. פתור את המשוואה הבאה: $iz^2 - 2(1 - i)z + 6 + 15i = 0$

18. פתור את המשוואה הבאה: $z^2 - i\bar{z} + 6 = 0$

19. נתונה המשוואה הבאה: $(mi - 2)z^2 - 2(m + 2i)z + 1 = 0$

מצא עבור אילו ערכים של הפרמטר המרוכב m למשוואה: א. יש פתרון יחיד. ב. אין פתרון.

20. הפוך להצגה אלגברית:

$$\text{א. } 2cis60^\circ = \text{ב. } 6cis135^\circ = \text{ג. } 4cis330^\circ = \text{ד. } 4cis(-30^\circ) =$$

$$\text{ה. } 4cis690^\circ = \text{ו. } 8cis90^\circ = \text{ז. } 3cis270^\circ = \text{ח. } cis180^\circ = \text{ט. } cis0^\circ =$$

21. הפוך להצגה קוטבית:

$$\text{א. } 1 + i = \text{ב. } \sqrt{3} - i = \text{ג. } -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \text{ד. } 3 + 4i = \text{ה. } 6i = \text{ו. } -i =$$

$$\text{ז. } 4 = \text{ח. } -1 = \text{ט. } 1 = \text{י. } 0 =$$

22. חשב:

$$\text{א. } 2cis120^\circ \cdot 3cis60^\circ = \text{ב. } cis210^\circ \cdot 5cis(-40^\circ) = \text{ג. } \frac{12cis315^\circ}{3cis90^\circ} =$$

$$\text{ד. } \frac{1}{2cis40^\circ} = \text{ה. } 6cis30^\circ + 2cis210^\circ =$$

23. נתון המספר המרוכב $z = Rcis\theta$. הבע באמצעות R ו- θ את המספרים:

$$\text{א. } \bar{z} = \text{ב. } \frac{1}{z} = \text{ג. } -z = \text{ד. } -\frac{1}{\bar{z}} = \text{ה. } iz = \text{ו. } z \cdot \bar{z} =$$

24. הראה כי המספרים הבאים הם ממשיים טהורים:

$$\text{א. } z + \bar{z} \quad \text{ב. } z \cdot \bar{z} \quad \text{ג. } \frac{z}{\bar{z}} + \frac{\bar{z}}{z}$$

25. הראה כי המספרים הבאים הם מדומים טהורים:

$$\text{א. } z^2 - \bar{z}^2 \quad \text{ב. } \frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{z}$$

26. הוכח:

$$\text{א. } z - i\bar{z} = \overline{\bar{z} + iz} \quad \text{ב. } z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

27. מצא את קודקודיו של ריבוע החסום במעגל קנוני שרדיוסו $\sqrt{2}$ במישור גאוס אם ידוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

28. ריבוע חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי הריבוע הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קודקודיו האחרים.

29. משולש שווה צלעות חסום במעגל קנוני במישור גאוס. אחד מקודקודי המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קודקודיו האחרים.

30. משולש שווה שוקיים, שזווית הבסיס שלו היא 30° חסום במעגל קנוני במישור גאוס. קודקוד הראש של המשולש הוא $1 + \sqrt{3}i$. מצא את קודקודיו האחרים.

31. z הוא מספר מרוכב במישור גאוס, שנמצא מחוץ למעגל היחידה.

קבע אם המספרים הבאים נמצאים בתוך מעגל היחידה, עליו או מחוץ לו:

$$\text{א. } \bar{z} \quad \text{ב. } \frac{1}{z} \quad \text{ג. } \frac{z}{\bar{z}} \quad \text{ד. } z \cdot \bar{z}$$

32. חשב:

$$\text{א. } (2cis30^\circ)^3 = \text{ב. } (2cis14^\circ)^5 = \text{ג. } (1+i)^4 = \text{ד. } (\sqrt{3}-i)^3 = \text{ה. } \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{15} =$$

33. פתור את המשוואות הבאות:

$$1. z^5 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad 2. z^4 = (9cis80^\circ)^2 \quad 3. z^2 = 36cis120^\circ$$

34. מצא את סכום ומכפלת שורשי היחידה מסדר 4.

35. נתון המספר המרוכב $z = x + yi$. מצא את המקום הגיאומטרי במישור גאוס המתקבל

$$|z| = 2$$

36. נתון המספר המרוכב $z = x + yi$. מצא את המקום הגיאומטרי במישור גאוס המתקבל

$$|z - 3i| = 5$$

37. נתון המספר המרוכב $z = x + yi$. מצא את המקום הגיאומטרי במישור גאוס המתקבל

$$|z + i| + |\bar{z} + i| = |1 + 3i|$$

38. בסדרה חשבונית האיבר השביעי הוא $a_7 = 13 + 3i$ והאיבר השלישי הוא $a_3 = 5 - 9i$.

מצא את סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה.

39. בסדרה הנדסית האיבר החמישי הוא $a_5 = 32 + 16i$ והאיבר השני הוא $a_2 = 2 - 4i$.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת מנת הסדרה, אם נתון שמנת הסדרה היא מספר מרוכב הנמצא על הציר המדומה במישור גאוס.

ב. מצא את סכום חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

40. נתונים שלושה איברים סמוכים בסדרה הנדסית. האיבר הראשון ביניהם הוא 2.

נתון כי אם מוסיפים לאיבר השלישי $4i$ מתקבלים שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית.

מצא את שלושת איברי הסדרה ההנדסית (שתי אפשרויות).

$$41. \text{ פתור את המשוואה: } z - \bar{z} + |z| = |2 - i|^2 - 4i + \operatorname{Im}(z)$$

$$42. \text{ פתור את המשוואה: } |2 - 3^{x^2-x-1}i| = \sqrt{13}$$

$$43. \text{ פתור את המשוואה: } z^3 = \bar{z}$$

44. הוכח: אם מקדמי משוואה ריבועית הם מספרים ממשיים ואין למשוואה פתרונות ממשיים

אז פתרונות המשוואה הם שני מספרים צמודים.

45. נתונים שני מספרים מרוכבים שאינם ממשיים טהורים.

הוכח: אם סכום המספרים ממשי ומכפלתם ממשית אז המספרים צמודים.

46. נתון מספר מרוכב z , שאינו ממשי מהור ואינו מדומה מהור.

הוכח כי אם $z - \frac{1}{\bar{z}}$ ממשי אז z על מעגל היחידה.

47. הוכח את הנוסחה: $R_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot R_2 \operatorname{cis} \theta_2 = R_1 R_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$

48. z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה ברביע הראשון.

$$\text{נתון: } |z^4 - z^3| = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

מצא את $\arg(z)$.

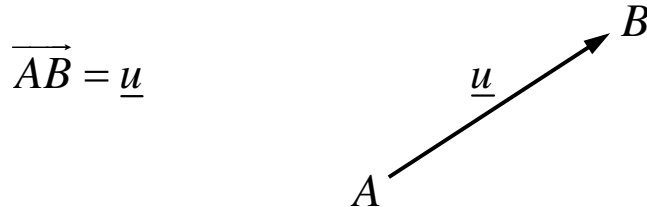
49. z הוא מספר מרוכב על מעגל היחידה. מצא את ערך הביטוי $z + iz$, אם ידוע שהוא ממשי.

50. z_1 ו- z_2 הם פתרונות המשוואה הבאה: $z^2 - 2 \cos \theta \cdot z + 1 = 0$.

מצא את גודל הזווית $\angle z_1 O z_2$ (O ראשית הצירים).

פרק 12 – וקטורים:

12.1 – וקטורים גיאומטריים:



וקטורים מקבילים ווקטורים שווים

וקטורים שווים הם וקטורים שזהים גם בכיוונם וגם בגודלם.

וקטורים מקבילים הם וקטורים שזהים בכיוונם אך לא בהכרח בגודלם.

- במקרה זה ניתן להביע את האחד באמצעות השני על ידי כפל בסקלר.

- וקטורים מקבילים נקראים גם "וקטורים תלויים ליניארית".

- אם הוקטורים $\overrightarrow{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a \underline{u} + b \underline{v} + c \underline{w}$ מקבילים מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$

וקטורים הפורשים מישור

כל שני וקטורים שאינם מקבילים, כלומר שהם בלתי תלויים, פורשים מישור.

קומבינציה ליניארית

כל וקטור שנמצא במישור (או שמקביל למישור) ניתן להצגה כקומבינציה ליניארית של שני הוקטורים הפורשים את המישור.

כל וקטור שהוא קומבינציה ליניארית של שני וקטורים הפורשים את מישור, מקביל למישור.

אם ניתן להביע וקטור כקומבינציה ליניארית של שני וקטורים אחרים (או יותר) שלושת

הוקטורים נקראים תלויים ליניארית.

המכפלה הסקלרית

המכפלה הסקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ מסומנת $\underline{u} \cdot \underline{v}$ ומחושבת על פי הנוסחה:

$$\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} \quad \text{או} \quad \underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

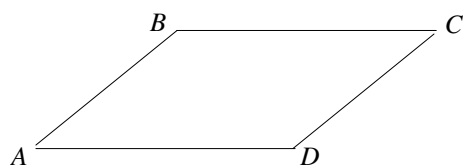
$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u}^2} \quad , \quad \underline{u}^2 = |\underline{u}|^2 \quad \text{גודל של וקטור:}$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהו וקטור, הצגה גיאומטרית של וקטור, סימון של וקטור ושל גודלו של וקטור
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4		הכרת הגופים העשויים במרחב
סרטון 5	תרגיל 3	
סרטון 6		מהו סקלר, כפל וקטור בסקלר
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8		חיבור וחיסור וקטורים
סרטון 9	תרגיל 5	
סרטון 10	תרגיל 6	
סרטון 11	תרגיל 7	חלוקת קטע ביחס נתון
סרטון 12	תרגיל 8	
סרטון 13	תרגיל 9	
סרטון 14	תרגיל 10	
סרטון 15	תרגיל 11	
סרטון 16	תרגיל 12	
סרטון 17		וקטורים מקבילים ווקטורים שווים א'
סרטון 18	תרגיל 13	
סרטון 19		וקטורים מקבילים ווקטורים שווים ב'
סרטון 20	תרגיל 14	
סרטון 21	תרגיל 15	
סרטון 22		וקטורים הפורשים מישור, קומבינציה ליניארית
סרטון 23	תרגיל 16	
סרטון 24	תרגיל 17	
סרטון 25		יחידות ההצגה
סרטון 26	תרגיל 18	
סרטון 27	תרגיל 19	
סרטון 28	תרגיל 20 א'	
סרטון 29	תרגיל 20 ב'	
סרטון 30	תרגיל 21 א' ב'	
סרטון 31	תרגיל 21 ג'	
סרטון 32		המכפלה הסקלרית
סרטון 33	תרגיל 22	
סרטון 34	תרגיל 23	
סרטון 35		חישוב גודל של וקטור
סרטון 36	תרגיל 24	
סרטון 37	תרגיל 25	
סרטון 38	תרגיל 26	
סרטון 39	תרגיל 27	
סרטון 40	תרגיל 28	
סרטון 41	תרגיל 29	
סרטון 42	תרגיל 30 א'	
סרטון 43	תרגיל 30 ב', ג'	
סרטון 44	תרגיל 31	דרך א'
סרטון 45	תרגיל 31	דרך ב'
סרטון 46	תרגיל 32	
סרטון 47	תרגיל 33	
סרטון 48	תרגיל 34	
סרטון 49	תרגיל 35	
סרטון 50	תרגיל 36	

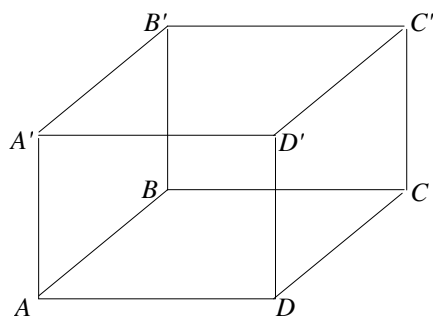
	תרנ"ל 37 א'	51 סרטון
	תרנ"ל 37 ב'	52 סרטון
	תרנ"ל 37 ג'	53 סרטון
	תרנ"ל 38	54 סרטון
	תרנ"ל 39	55 סרטון
	תרנ"ל 40	56 סרטון

תרגילים



1. במקבילית $ABCD$ נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$.

מצא את כל הוקטורים במקבילית ששווים ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.

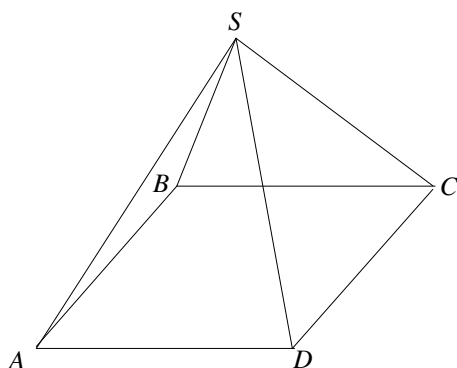


2. בתיבה $ABCD A' B' C' D'$ נתון:

$$\overrightarrow{AB} = \underline{u}, \overrightarrow{AD} = \underline{v}, \overrightarrow{AA'} = \underline{w}$$

מצא את כל הוקטורים בתיבה

ששווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.

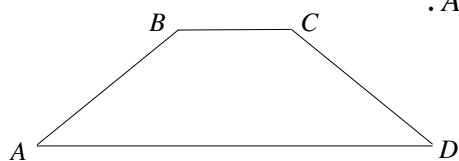


3. בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע

$$\text{נתון: } \overrightarrow{AB} = \underline{u}, \overrightarrow{AD} = \underline{v}, \overrightarrow{AS} = \underline{w}$$

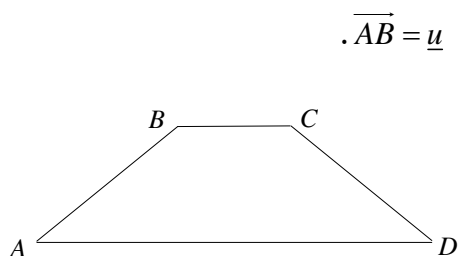
מצא את כל הוקטורים בפירמידה

ששווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



4. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$.

מצא את כל הוקטורים במרפז שניתן להביעם באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



5. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $AD = 3BC$.

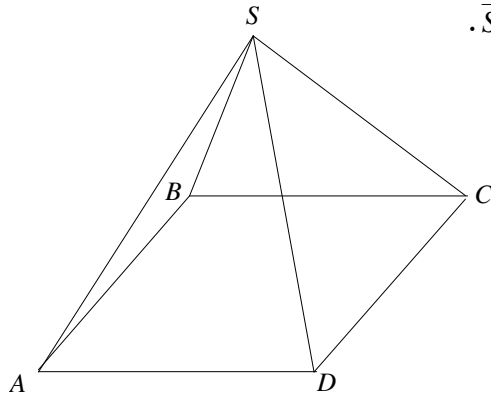
א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.

ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD . הבע

באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הוקטור $\overrightarrow{BE}$.

ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD . הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הוקטור $\overrightarrow{AF}$.

6. בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע נתון: $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.

ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD .

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את

הוקטור $\overrightarrow{BN}$.

7. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP : PB = 2 : 3$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

8. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP : PB = 3 : 5$. נתון: $\overrightarrow{AP} = \underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הוקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

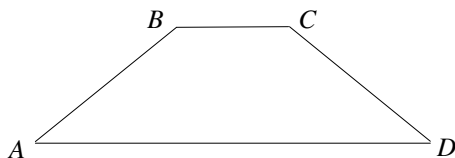
9. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB} = \alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

10. הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB} = \alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

הבע באמצעות $\underline{u}$ את הוקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

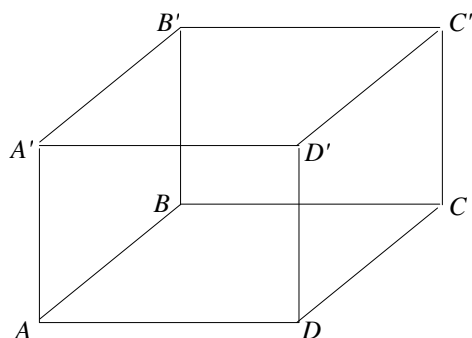
11. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



הנקודה F נמצאת על הצלע CD ומקיימת $\frac{DF}{FC} = \beta$.

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הוקטור $\overrightarrow{AF}$.

12. בחיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



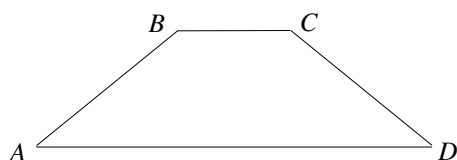
הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$

ומקיימת $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$ והנקודה Q נמצאת על

המקצוע CC' ומקיימת $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הוקטור $\overrightarrow{PQ}$.

13. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

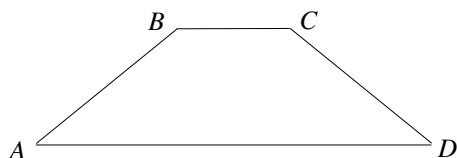


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD .

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת $\frac{AF}{FD} = \alpha$.

מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AB}$.

14. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

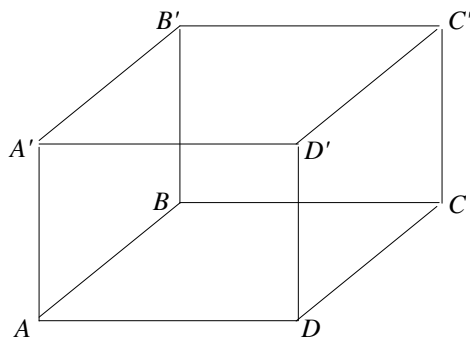


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD .

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת $\frac{AF}{FD} = \alpha$.

מצא את ערכו של α שעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AC}$.

15. בחיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$

ומקיימת $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$ והנקודה Q נמצאת על

המקצוע CC' ומקיימת $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

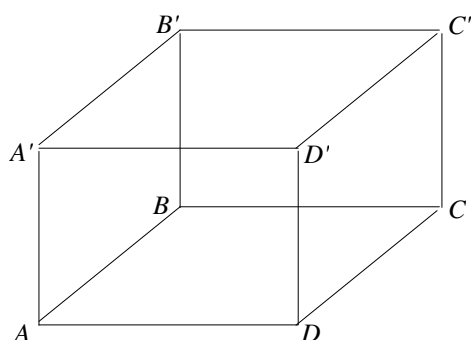
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הוקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שעבורם $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה $ABB'A'$. מצא את

ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{EC}$.

16. בחיבה $ABCD A' B' C' D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע $A' B'$

ומקיימת $\frac{A' P}{A' B'} = \alpha$ והנקודה Q נמצאת על

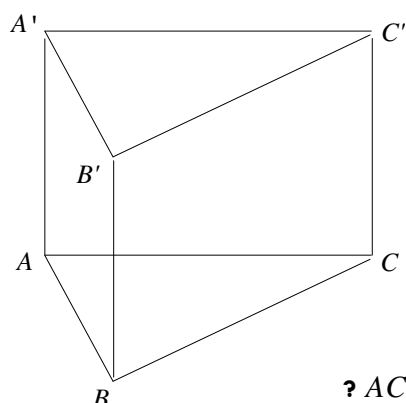
המקצוע CC' ומקיימת $\frac{C Q}{Q C'} = \beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- α את הוקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שעבורו הוקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה $ADD' A'$?

ג. האם קיים ערך של β שעבורו הוקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס $ABCD$?

17. נתונה מנסרה משולשת $ABCA' B' C'$ ובה נתון: $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$,



$\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$. הנקודה M נמצאת על המקצוע $A' C'$

ומקיימת $\frac{A' M}{M C'} = \alpha$ והנקודה N נמצאת על

המקצוע BC ומקיימת $\frac{BN}{BC} = \beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- α את הוקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שעבורו הוקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה $ACC' A'$?

ג. נתון כי הוקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה $ABB' A'$. הבע את α באמצעות β .

18. במשולש $\triangle ABC$ הנקודה D היא אמצע הצלע BC

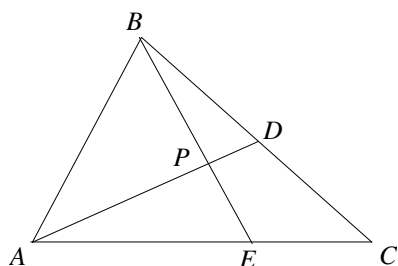
והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{EC} = 2$.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו- BE .

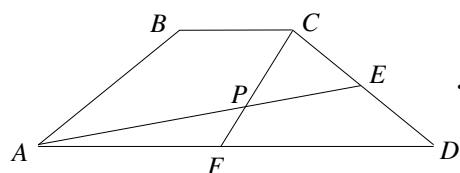
נגדיר: $\overrightarrow{AP} = t \cdot \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP} = s \cdot \overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- s את הוקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE .



19. במרפז $ABCD$ שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$. הנקודה E

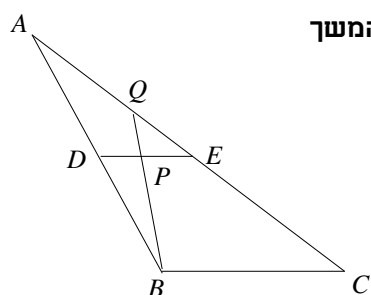


נמצאת באמצע הצלע CD והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD .

הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו- CF .

מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF .

20. במשולש $\triangle ABC$ הנקודה D היא אמצע הצלע AB והנקודה E נמצאת על הצלע AC



כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$. הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך

הקטע BP חותך את הצלע AC בנקודה Q .

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC .

ב. חשב את היחס $\frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle DPB}}$.

21. במקבילון $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{DA} = \underline{u}$, $\overrightarrow{DC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{DD'} = \underline{w}$

הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע CC' , הנקודה E

נמצאת על המקצוע AA' ומקיימת $A'E = 2EA$

והנקודה P נמצאת על המקצוע BB'

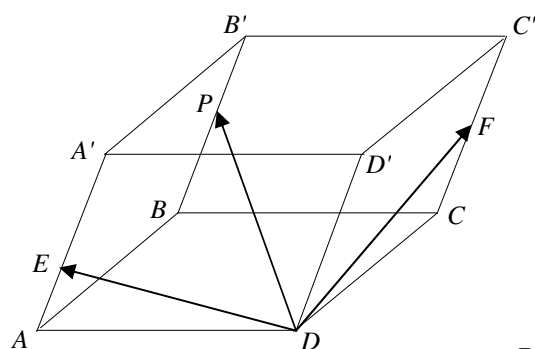
ומקיימת $\overrightarrow{B'P} = k \cdot \overrightarrow{B'B}$.

נתון: $\overrightarrow{DP} = t \cdot \overrightarrow{DE} + s \cdot \overrightarrow{DF}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ את הוקטור $\overrightarrow{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע BB' .

ג. האם הנקודות D , E , F ו- P נמצאות על אותו מישור? נמק.



22. חשב את המכפלה הסקלרית של הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית ביניהם:

א. $\alpha = 60^\circ$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 3$

ב. $\alpha = 120^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 4$

ג. $\alpha = 30^\circ$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 2$

ד. $\alpha = 180^\circ$, $|\underline{v}| = 3$, $|\underline{u}| = 8$

ה. $\alpha = 0^\circ$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 3$

ו. $\alpha = 90^\circ$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 7$

23. חשב את הזווית בין הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

א. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 6$, $|\underline{v}| = 4$, $|\underline{u}| = 3$

ב. $\underline{u} \cdot \underline{v} = -4\sqrt{3}$, $|\underline{v}| = 2$, $|\underline{u}| = 4$

ג. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$, $|\underline{v}| = 5$, $|\underline{u}| = 9$

ד. $\underline{u} \cdot \underline{v} = 12$, $|\underline{v}| = 6$, $|\underline{u}| = 2$

24. נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכיהם: $|\underline{u}| = 6$, $|\underline{v}| = 3$, הזווית ביניהם היא 120° .

חשב את גודלו של הוקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$.

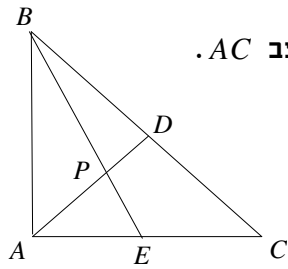
25. נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכיהם: $|\underline{u}| = 4$, $|\underline{v}| = 5$.

חשב את גודלו של הוקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\underline{u} - \underline{v}$.

26. נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכיהם: $|\underline{u}| = 6$, $|\underline{v}| = 3$, הזווית ביניהם היא 120° .

חשב את גודל הזווית $\sphericalangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM} = 4\underline{u} + \underline{v}$, $\overrightarrow{PQ} = 2\underline{u} - 3\underline{v}$.

27. המשולש $\triangle ABC$ הוא משולש ישר זווית $(\angle BAC = 90^\circ)$.



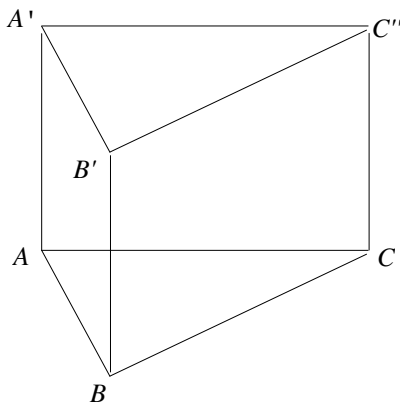
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC .

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו- BE .

נתון: $\frac{AP}{PD} = 3$, $AB = 8$, $AC = 12$.

חשב את גודל הזווית $\angle DPC$.

28. נתונה מנסרה משולשת וישרה $ABCA'B'C'$ שבסיסה משולש שווה



צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6.

גובה המנסרה הוא 8.

הנקודה M היא אמצע המקצוע $A'C'$

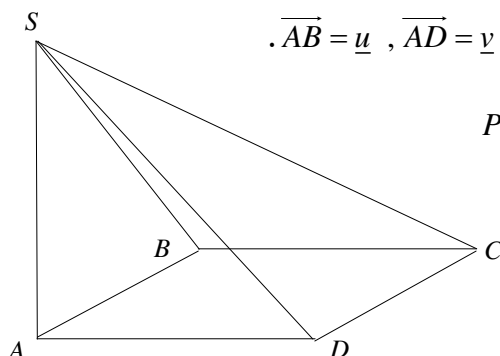
והנקודה N נמצאת על המקצוע BC

ומקיימת $BN = 2NC$.

נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

חשב את גודל הזווית $\angle MAN$.

29. בפירמידה $SABCD$ שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.



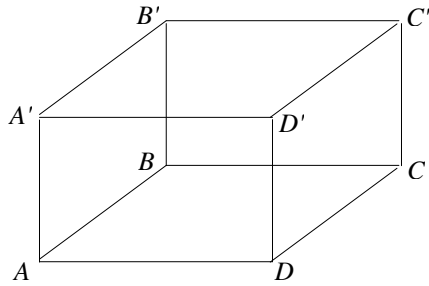
נתון: $AB = AD = \frac{1}{2}AS = k$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC והנקודה P

היא אמצע המקצוע SB .

חשב את גודל הזווית $\angle PAQ$.

30. בתיבה $ABCD A'B'C'D'$ נתון: $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $AB = \frac{1}{\sqrt{2}} AD = AA'$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע $A'B'$

ומקיימת $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$ והנקודה Q היא

אמצע המקצוע DD' .

א. מהו ערכו של α שעבורו מתקיים $|\overrightarrow{AP}| = \frac{5}{6} |\overrightarrow{AQ}|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos \angle PAQ$ והראה כי לכל ערך של α הזווית $\angle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שעבורו הזווית $\angle PAQ$ מקיימת $\cos \angle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$?

31. הוכח כי בכל מרובע $ABCD$ מתקיים: $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$.

32. נתון מלבן $ABCD$. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{PD}$.

33. נתון ריבוע $ABCD$. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD .

הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$.

34. נתון מרובע $ABCD$. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD .

הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}$.

35. נתונה פירמידה משולשת $SABC$ שבה $\overrightarrow{AS} \perp \overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS} \perp \overrightarrow{AC}$. הוכח: $\overrightarrow{CS} \perp \overrightarrow{AB}$.

36. הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הוקטורים במישור.

37. א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ΔABC .

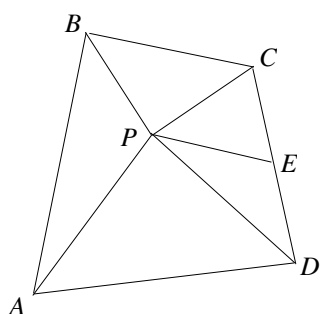
$$\text{הוכח: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 0$$

ב. נתונה פירמידה משולשת $SABC$. הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC .

$$\text{הוכח: } \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AS})$$

ג. נתון בנוסף כי $\overrightarrow{AS}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ מאונכים ל- $\overrightarrow{BC}$.

הוכח כי $AB = AC$ (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$).



38. הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו $ABCD$

כך שהמשולשים ΔBPC ו- ΔAPD הם משולשים

ישרי זווית ושוי עוקיים $(AP = PD, BP = PC)$.

הנקודה E היא אמצע הצלע CD .

$$\text{הוכח: } \overrightarrow{PE} \perp \overrightarrow{AB}$$

(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PB} = \underline{a}$, $\overrightarrow{PC} = \underline{b}$, $\overrightarrow{PA} = \underline{c}$, $\overrightarrow{PD} = \underline{d}$).

39. במטראדר $SABC$ נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP} = \alpha \cdot \overrightarrow{AS}$.

הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ} = \beta \cdot (\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC})$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שעבורו $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC .

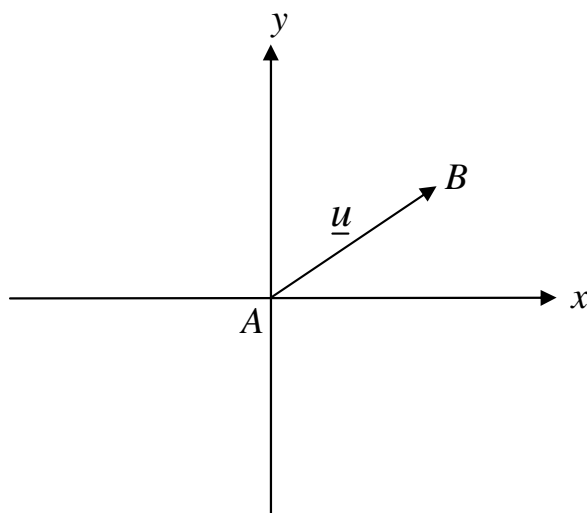
$$\text{ב. נתון: } \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{BC}, \alpha = \beta = \frac{1}{3}$$

הוכח: $AB = AC$.

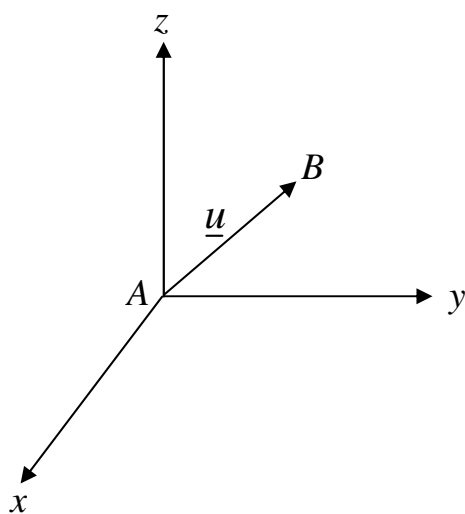
40. נתונה פירמידה שבסיסה מלבן. הוכח כי אם שלושה מקצועות צדדיים בה שווים אז גם

המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

12.2 - הוקטור האלגברי



הוקטור $\underline{u} = (4, 2)$ הוא וקטור שמתחיל בנקודה $(0, 0)$ ומסתיים בנקודה $(4, 2)$.



הוקטור $\underline{u} = (2, 4, 5)$ הוא וקטור שמתחיל בנקודה $(0, 0, 0)$ ומסתיים בנקודה $(2, 4, 5)$.

אמצע קטע

$$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad , \quad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad , \quad z_M = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

חלוקת קטע ביחס נתון

$$x_P = \frac{k \cdot x_1 + l \cdot x_2}{k + l} \quad , \quad y_P = \frac{k \cdot y_1 + l \cdot y_2}{k + l} \quad , \quad z_P = \frac{k \cdot z_1 + l \cdot z_2}{k + l}$$

מכפלה סקלרית

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha$$

נוסחת המכפלה הסקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

גודל של וקטור

$$|\underline{u}| = \sqrt{u^2}$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

וקטורים מקבילים ווקטורים שווים

וקטורים שווים הם וקטורים שזהים גם בכיוונם וגם בגודלם.

וקטורים מקבילים הם וקטורים שזהים בכיוונם אך לא בהכרח בגודלם.

במקרה זה ניתן להביע את האחד באמצעות השני על ידי כפל בסקלר.

וקטורים (אלגבריים) שנשמר אותו יחס בין שיעוריהם מקבילים זה לזה.

חישוב זווית בין וקטורים בעזרת המכפלה הסקלרית

$$\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$$

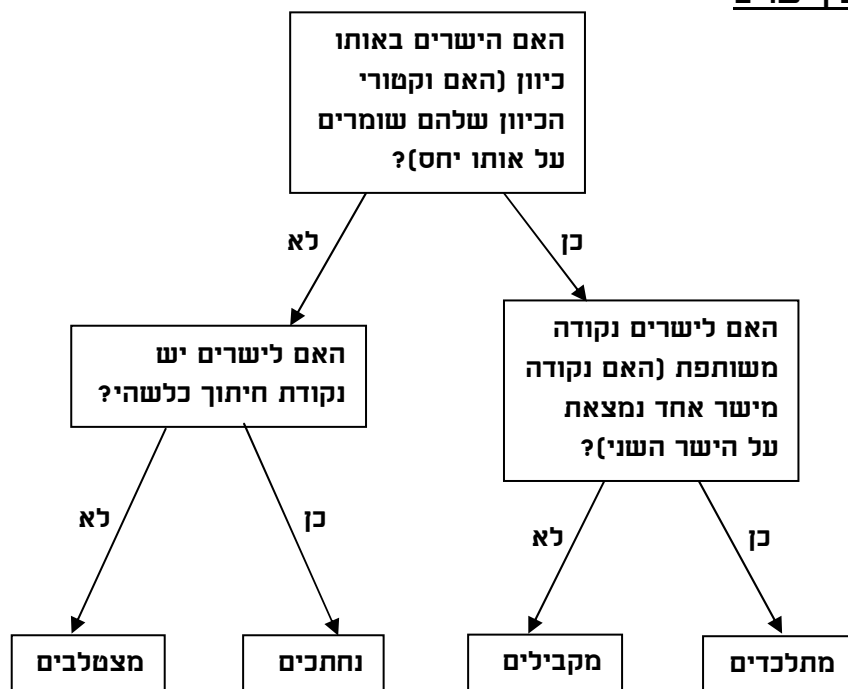
$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos \alpha \Rightarrow$$

הצגה פרמטרית של ישר

$$\ell: \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$$

$\underline{a}$ - וקטור ההעתקה, $\underline{u}$ - וקטור הכיוון של הישר

מצב הדדי בין ישרים



הצגה פרמטרית של מישור

$$\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$$

$\underline{a}$ - וקטור ההעתקה, $\underline{u}, \underline{v}$ - וקטורי הכיוון של המישור

משוואת מישור

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad / \quad ax + by + cz + d = 0$$

הנורמל למישור $\pi : ax + by + cz + d = 0$ הוא הוקטור $\underline{h} = (a, b, c)$.

הוקטור $\underline{h} = (a, b, c)$ נקרא לעיתים וקטור המקדמים של המישור.

מצב הדדי בין ישר למישור

מציבים נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ואז:

אם יש פתרון יחיד למשוואה - הישר חותך את המישור

אם אין פתרון למשוואה - הישר מקביל למישור

אם יש אינסוף פתרונות למשוואה - הישר מוכל במישור

מצב הדדי בין מישורים

נחונם שני מישורים:

$$\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

המצב ההדדי ביניהם הוא:

נחתכים	מקבילים	מתלכדים
אחרת	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{d_1}{d_2} \neq \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

זוויות

$$\cos \alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} \quad \text{בין וקטורים -}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|} \quad \text{בין ישרים - } (\underline{u} \text{ ו- } \underline{v} \text{ הם וקטורי הכיוון של הישרים)}$$

$$\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{h}|}{|\underline{u}| \cdot |\underline{h}|} \quad \text{בין ישר למישור - } (\underline{u} \text{ הוא וקטור הכיוון של הישר ו- } \underline{h} \text{ הוא הנורמל למישור})$$

$$\cos \alpha = \frac{|\underline{h}_1 \cdot \underline{h}_2|}{|\underline{h}_1| \cdot |\underline{h}_2|} \quad \text{בין מישורים - } (\underline{h}_1 \text{ ו- } \underline{h}_2 \text{ הם הנורמלים של שני המישורים)}$$

מרחקים

1. בין נקודות – גודל וקטור או על פי הנוסחה: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$

2. בין נקודה לישר – ניסוח האנך מהנקודה לישר והשוואת מכפלתו בוקטור הכיוון לאפס

3. בין נקודה למישור – על פי הנוסחה: $d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$

4. בין ישרים מקבילים – שימוש בנקודה מאחד הישרים ואז כמו 2

5. בין ישר ומישור (מקבילים) – שימוש בנקודה מהישר ואז כמו 3

6. בין מישורים מקבילים – שימוש בנקודה מאחד המישורים ואז כמו 3 או על פי הנוסחה:

$$d = \left| \frac{D_1 - D_2}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

7. בין ישרים מצטלבים – ניסוח מישור שמכיל את אחד הישרים ומקביל לשני ואז כמו 5

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הכרת הוקטור האלגברי (בדו מימד)
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3		הכרת מערכת הצירים התלת מימדית והוקטור האלגברי בתלת מימד
סרטון 4	תרגיל 2	
סרטון 5		מערכת הצירים התלת מימדית – המשך
סרטון 6	תרגיל 3	הסבר על אמצע קטע בתלת מימד
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8	תרגיל 5	הסבר על חלוקת קטע ביחס נתון בתלת מימד
סרטון 9		חישוב וקטור שמוצאו לא בראשית הצירים
סרטון 10	תרגיל 6	
סרטון 11	תרגיל 7	
סרטון 12	תרגיל 8	
סרטון 13	תרגיל 9	
סרטון 14	תרגיל 10	פעולות חשבון בוקטורים אלגבריים (חיבור, חיסור, כפל בסקלר, מכפלה סקלרית)
סרטון 15		חישוב וקטור שמוצאו לא בראשית שצירים – המשך
סרטון 16	תרגיל 11	הסבר על חישוב גודל של וקטור
סרטון 17	תרגיל 12	
סרטון 18		וקטורים מקבילים ווקטורים ישרים
סרטון 19	תרגיל 13	
סרטון 20	תרגיל 14	הסבר על חישוב זווית בין וקטורים
סרטון 21	תרגיל 15	
סרטון 22	תרגיל 16	
סרטון 23	תרגיל 17	
סרטון 24		הצגה פרמטרית של ישר

	סרמון 25	תרגיל 18
	סרמון 26	תרגיל 19
	סרמון 27	תרגיל 20
	סרמון 28	תרגיל 21
	סרמון 29	תרגיל 22
	סרמון 30	תרגיל 23
	סרמון 31	תרגיל 24
	סרמון 32	תרגיל 25
האפשרויות של מצב הדדי בין ישרים	סרמון 33	
זיהוי המצב ההדדי בין שני ישרים	סרמון 34	
	סרמון 35	תרגיל 26
	סרמון 36	תרגיל 27
	סרמון 37	תרגיל 28
	סרמון 38	תרגיל 29
	סרמון 39	תרגיל 30
	סרמון 40	תרגיל 31
	סרמון 41	תרגיל 32
	סרמון 42	תרגיל 33
הצגה פרמטרית של מישור	סרמון 43	
	סרמון 44	תרגיל 34
	סרמון 45	תרגיל 35
	סרמון 46	תרגיל 36
	סרמון 47	תרגיל 37
	סרמון 48	תרגיל 38
	סרמון 49	תרגיל 39
משוואת מישור	סרמון 50	
	סרמון 51	תרגיל 40
	סרמון 52	תרגיל 41
	סרמון 53	תרגיל 42
	סרמון 54	תרגיל 43
מעבר ממשוואת מישור להצגה פרמטרית של מישור	סרמון 55	תרגיל 44
	סרמון 56	תרגיל 45
מעבר מהצגה פרמטרית של מישור למשוואת מישור – הכרת הנורמל למישור	סרמון 57	
כיצד עוברים מהצגה פרמטרית של מישור למשוואת מישור	סרמון 58	תרגיל 46
	סרמון 59	תרגיל 47
שיטה נוספת למציאת משוואת מישור – באמצעות 3 נקודות שעל המישור	סרמון 60	תרגיל 48
מעבר מהצגה פרמטרית של מישור למשוואת מישור באמצעות מכפלה וקטורית	סרמון 61	
מעבר מהצגה פרמטרית של מישור למשוואת מישור באמצעות מכפלה וקטורית – המשך 1	סרמון 62	
מעבר מהצגה פרמטרית של מישור למשוואת מישור באמצעות מכפלה וקטורית – המשך 2	סרמון 63	
	סרמון 64	תרגיל 49
	סרמון 65	תרגיל 50
	סרמון 66	תרגיל 51
מישורים מיוחדים	סרמון 67	
	סרמון 68	תרגיל 52
	סרמון 69	תרגיל 53
מצב הדדי בין ישר למישור	סרמון 70	תרגיל 54
	סרמון 71	תרגיל 55
	סרמון 72	תרגיל 56
	סרמון 73	תרגיל 57
	סרמון 74	תרגיל 58

סרמון 75	תרנ"ל 59	
סרמון 76		מצב הדדי בין מישורים
סרמון 77	תרנ"ל 60	
סרמון 78	תרנ"ל 61	
סרמון 79	תרנ"ל 62	
סרמון 80	תרנ"ל 63	מציאת ישר חיתוך בין מישורים
סרמון 81	תרנ"ל 64	
סרמון 82	תרנ"ל 65	
סרמון 83	תרנ"ל 66	
סרמון 84	תרנ"ל 67	
סרמון 85	תרנ"ל 68	
סרמון 86	תרנ"ל 69	
סרמון 87	תרנ"ל 70	
סרמון 88		זוויות
סרמון 89	תרנ"ל 71	זווית בין ישרים
סרמון 90	תרנ"ל 72	זווית בין ישר למישור
סרמון 91	תרנ"ל 73	
סרמון 92	תרנ"ל 74	זווית בין מישורים
סרמון 93	תרנ"ל 75	
סרמון 94		מרחקים
סרמון 95	תרנ"ל 76	מרחק בין שתי נקודות
סרמון 96	תרנ"ל 77	מרחק בין נקודה לישר
סרמון 97	תרנ"ל 78	
סרמון 98	תרנ"ל 79	
סרמון 99	תרנ"ל 80	
סרמון 100	תרנ"ל 81	מרחק בין נקודה למישור
סרמון 101	תרנ"ל 82	
סרמון 102	תרנ"ל 83	
סרמון 103	תרנ"ל 84	
סרמון 104	תרנ"ל 85	
סרמון 105	תרנ"ל 86	
סרמון 106	תרנ"ל 87	מרחק בין ישרים מקבילים
סרמון 107	תרנ"ל 88	מרחק בין ישר למישור (מקבילים)
סרמון 108	תרנ"ל 89	מרחק בין מישורים מקבילים
סרמון 109	תרנ"ל 90	
סרמון 110	תרנ"ל 91	
סרמון 111	תרנ"ל 92	מרחק בין ישרים מצטלבים
סרמון 112	תרנ"ל 93	
סרמון 113	תרנ"ל 94	
סרמון 114		מרחקים – סיכום
סרמון 115	תרנ"ל 95	
סרמון 116	תרנ"ל 96	דרך א'
סרמון 117	תרנ"ל 96	דרך ב'
סרמון 118	תרנ"ל 97	
סרמון 119	תרנ"ל 98	חלק א'
סרמון 120	תרנ"ל 98	חלק ב'
סרמון 121	תרנ"ל 99	
סרמון 122	תרנ"ל 100	
סרמון 123	תרנ"ל 101	
סרמון 124	תרנ"ל 102	
סרמון 125	תרנ"ל 103	חלק א'
סרמון 126	תרנ"ל 103	חלק ב'

תרגילים:

1. שרטט את הוקטורים הבאים על מערכת צירים:

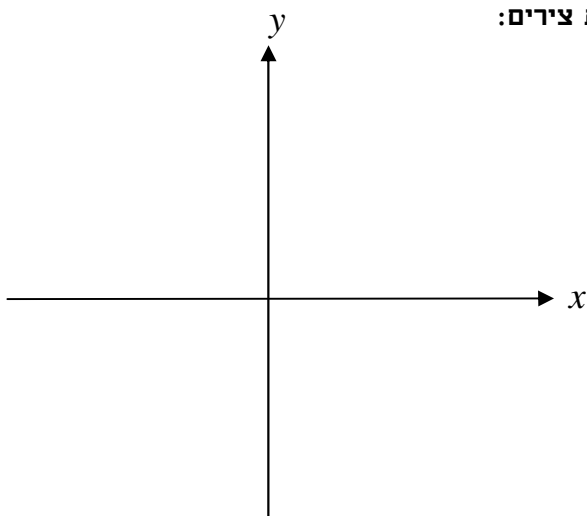
א. $\underline{u} = (4, 2)$

ב. $\underline{v} = (-5, 1)$

ג. $\underline{w} = (3, -4)$

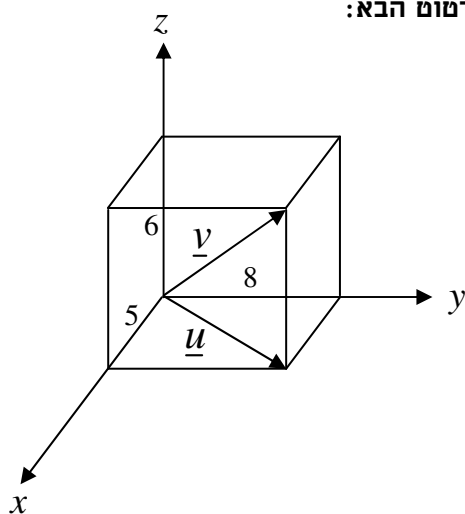
ד. $\underline{a} = (0, 3)$

ה. $\underline{b} = (-5, 0)$



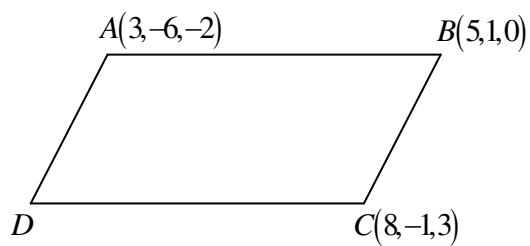
2. מצא מהו הוקטור $\underline{u}$ ומהו הוקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט הבא:

(נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):

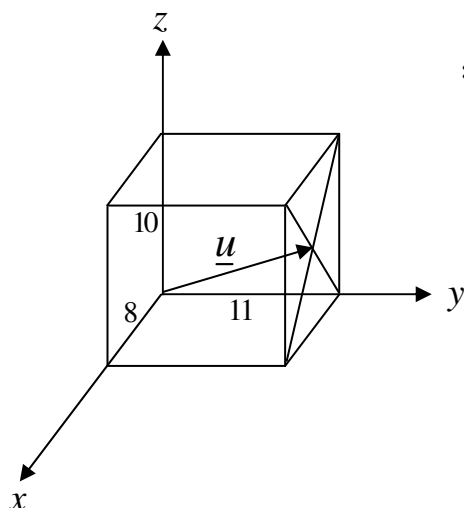


3. בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקודיה נתונים.

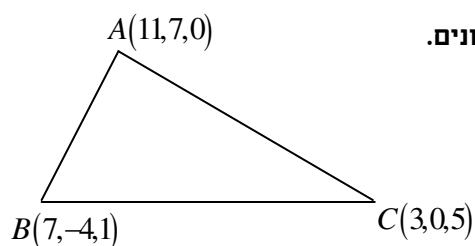
מצא את שיעורי הקודקוד D .



4. מצא מהו הוקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט הבא:
(נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):

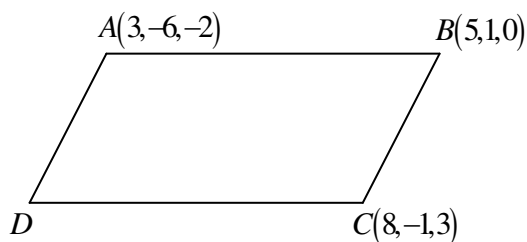


5. בשרטוט נתון משולש ששיעורי קודקדיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

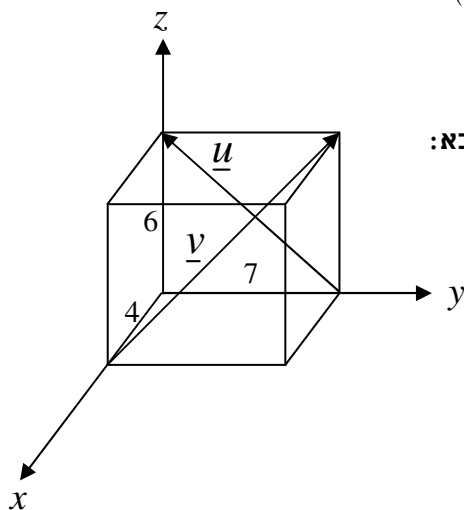


6. א. מצא את הוקטור $\overline{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3, 5)$ ו- $B(6, 1)$.
ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8, 11)$ והוקטור $\overline{PQ} = (4, -3)$.
7. א. מצא את הוקטור $\overline{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2, 0, -3)$ ו- $F(7, -1, -3)$.
ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0, -4, 1)$ והוקטור $\overline{MN} = (-1, -1, 9)$.

8. בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקודקדיה נתונים.
מצא את שיעורי הקודקוד D .



9. מצא מהו הוקטור $\underline{u}$ ומהו הוקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט הבא:
(נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):



10. נתונים שני וקטורים: $\underline{u} = (3, 7, 1)$, $\underline{v} = (2, -3, 5)$: חשב:

א. $\underline{u} + \underline{v} =$ ב. $\underline{u} - \underline{v} =$ ג. $2\underline{u} =$ ד. $3\underline{u} - \underline{v} =$ ה. $\underline{u} \cdot \underline{v} =$

11. חשב את גודלו של הוקטור $\underline{u} = (1, -2, 4)$.

12. נתונים ארבעת קודקודי המרובע $ABCD$: $A(-4, 2, 1)$, $B(0, 2, -1)$,

$C(-3, -5, 0)$, $D(-7, -5, 2)$. הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

13. נתונים ארבעת קודקודי המרובע $ABCD$: $A(1, 2, 0)$, $B(-2, 5, 3)$, $C(-1, 8, 4)$, $D(4, 3, -1)$.

א. הוכח כי המרובע הוא מרפז.

ב. האם המרפז שווה שוקיים?

14. חשב את הזווית בין הוקטורים $\underline{u} = (3, 7, 1)$ ו- $\underline{v} = (2, -3, 5)$:

15. חשב את הזווית בין הוקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u} = (-2, 2, 5)$, $\underline{v} = (4, 0, 1)$

ב. $\underline{u} = (6, -3, 1)$, $\underline{v} = (2, 5, 3)$

ג. $\underline{u} = (-2, 1, 3)$, $\underline{v} = (4, -2, -6)$

16. מצא את שטחו של משולש $\triangle ABC$ ששיעורי קודקודיו הם: $A(-3, 2, 1)$, $B(0, 3, 2)$, $C(5, -1, 0)$.

17. נתונים הוקטורים: $\underline{u} = (2, -1, 0)$, $\underline{v} = (5, 0, 3)$.

מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

18. האם הנקודה $A(7, 0, 3)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x} = (4, 3, 0) + t(1, -1, 1)$?

19. האם הנקודה $B(4, -2, -10)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x} = t(2, -1, 5)$?

20. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5, -2)$ ו- $B(1, 6)$.

21. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3, 0, -2)$ ו- $D(4, 1, 1)$.

22. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2, -7, 1)$ ומקביל

$$\text{לישר } \ell: \underline{x} = (0, 3, -1) + t(-4, 2, 1).$$

23. מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

24. מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3, -1, 4)$ ומקביל לציר ה- z .

25. מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell: \underline{x} = (1, -2, 6) + t(-2, 1, 2)$ עם המישור $[xy]$.

26. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_1: \underline{x} = (2, -3, 0) + t(5, -1, 2)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (12, -5, 4) + s(-10, 2, -4)$$

27. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_3: \underline{x} = (0, 1, -7) + t(-2, 1, 1)$$

$$\ell_4: \underline{x} = (2, 0, -6) + s(6, -3, -3)$$

28. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_5: \underline{x} = (-3, 5, 1) + t(4, 0, -1)$$

$$\ell_6: \underline{x} = (-1, 7, 4) + s(-1, 1, 2)$$

29. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_7 : \underline{x} = (3, 0, 0) + t(2, -2, 5)$$

$$\ell_8 : \underline{x} = (0, 1, -5) + s(3, 1, -2)$$

30. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_9 : \underline{x} = (-4, 1, -1) + t(3, 0, -1)$$

$$\ell_{10} : \underline{x} = s(6, 0, -2)$$

31. מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.

אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.

$$\ell_{11} : \underline{x} = (2, 8, -1) + t(1, 0, 0)$$

$$\ell_{12} : \underline{x} = (-5, 8, 2) + s(2, 0, -1)$$

32. מצא את ערכו של הפרמטר k שעבורו הישרים הבאים:

א. מקבילים

ב. מתלכדים

$$\ell_1 : \underline{x} = (k+1, 1-k, 6) + t(1, -2, 2)$$

$$\ell_2 : \underline{x} = (k-1, 7, -k) + s(1-k^2, k^2+2, -6)$$

33. נתונות הנקודות: $A(3, -1, 5)$, $B(k, -1, 3)$, $C(-6, 3, -1)$, $D(-2, 3, k)$

הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

34. מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות $A(1, -4, 0)$,

$B(3, 6, 2)$ ו- $C(0, -3, 1)$.

35. מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$.

ומכיל את הישר $\ell: \underline{x} = (-2, -2, 5) + t(1, 0, -4)$.

36. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (0, 1, -1) + t(1, 9, -3)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (2, 16, 11) + s(0, 1, -6)$$

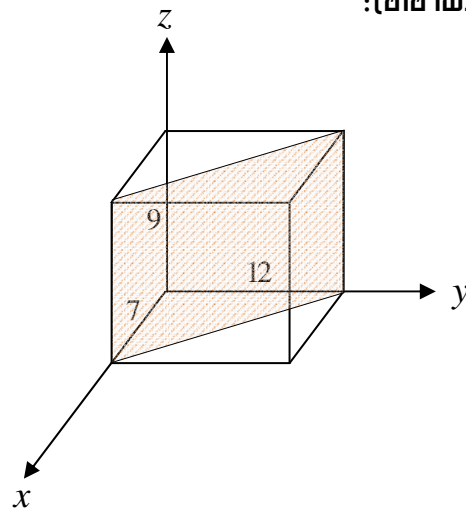
הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

37. מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5, -2, -1)$ ומכיל את ציר ה- x .

38. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

39. מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו שבשרטוט הבא:

(נתונה תיבה. מידות התיבה מצוינות בשרטוט):



40. קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi: 2x - y + 3z - 6 = 0$:

א. $D(5, 7, 1)$

ב. $E(2, -1, 1)$

41. מצא את ערכו של k שעבורו הנקודה $A(1, k, -1)$ נמצאת על המישור

$$\pi: kx - 2y + (k+1)z + 7 = 0$$

42. נתונה משוואת מישור: $\pi: 3x + 2y - z - 9 = 0$.

מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

43. נתונה משוואת מישור: $\pi: 4x + y - 2z + 8 = 0$.

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

44. נתונה משוואת מישור: $\pi: x + 4y - z + 8 = 0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

45. נתונה משוואת מישור: $\pi: 2x + 3z - 12 = 0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

46. נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x} = (2, -5, 0) + t(1, 0, 2) + s(0, -1, 3)$

מצא את משוואת המישור.

47. נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x} = t(-2, 2, 1) + s(3, 1, 0)$

מצא את משוואת המישור.

48. המישור π עובר בנקודות: $A(1, 0, -3)$, $B(2, 0, 0)$, $C(4, -1, 0)$.

מצא את משוואת המישור.

49. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (5, -4, 1) + t(0, 2, -1)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (0, -6, 2) + s(0, -2, 1)$$

הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

50. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (-1, 1, 3) + t(3, -2, 4)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (-7, 1, 0) + s(4, -3, 0)$$

הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1 ומקביל לישר ℓ_2 .

51. מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6, 0, -1)$ ומכיל את ציר ה- z .

52. נתונה משוואת מישור: $\pi: (k+2)x + (k^2 - 2k - 3)y - 3z + k^2 - 1 = 0$.

עבור איזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

53. פאותיו של ממראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$ ו- $x+3y+2z-6=0$.

מצא את נפח הממראדר.

54. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם.

אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (5, 0, 1) + t(4, 1, -2)$$

$$\pi: 2x - y - 3z + 6 = 0$$

55. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם.

אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (2, -1, 6) + t(-1, 1, 2)$$

$$\pi: x - 3y + 2z - 11 = 0$$

56. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם.

אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (-6, 1, 0) + t(3, 0, -1)$$

$$\pi: 2x + y + 6z + 11 = 0$$

57. נתונים ישר ומישור. קבע את המצב ההדדי ביניהם.

אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך:

$$\ell: \underline{x} = (0, 3, -2) + t(1, -1, 2)$$

$$\pi: \underline{x} = (-1, 0, 2) + s(1, 0, -2) + r(3, 0, -1)$$

58. נתונים ישר ומישור:

$$\ell: \underline{x} = (1, a, 3) + t(4, 1-b, 0)$$

$$\pi: 2x - y + z - 4 = 0$$

מצא את ערכי a ו- b עבורם הישר מוכל במישור.

59. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: x - 3y + 2z - 1 = 0$$

$$\pi_2: 4x + y - z - 6 = 0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

60. נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם:

א. $\pi_1: 2x - y + 4z - 5 = 0$

$\pi_2: 4x - 2y + 8z - 10 = 0$

ב. $\pi_3: x + 3y - z + 1 = 0$

$\pi_4: 3x + 9y - 3z - 8 = 0$

ג. $\pi_5: 5x - 2y - z + 3 = 0$

$\pi_6: 2x + 3y + z - 5 = 0$

61. נתונים שני מישורים:

$\pi_1: 2x + (k^2 + k)y - 2z + 1 = 0$

$\pi_2: 4x + 12y - 4z + k^2 - 2 = 0$

מצא את ערכי k עבורם המישורים: א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

62. במקבילון $ABCD A'B'C'D'$ נתונים שלושה קודקודים: $A(1, -1, 4)$, $B(9, 0, 2)$, $C(5, 2, -2)$.

מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה $A'B'C'D'$ אם ידוע שהנקודה $(2, -1, 0)$ נמצאת עליו.

63. נתונים שני מישורים נחתכים:

$\pi_1: 4x + y - 2z + 2 = 0$

$\pi_2: 2x - y + z + 10 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

64. נתונים שני מישורים נחתכים:

$\pi_3: 8x + 2y - 3z + 2 = 0$

$\pi_4: 2x - 3y + z + 4 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

65. נתונים שני מישורים נחתכים:

$\pi_5: 3x - 3y + z + 2 = 0$

$\pi_6: 5x - 2z + 20 = 0$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

66. נתונים שני מישורים נחתכים:

$$\pi_7: x - 2y - z + 6 = 0$$

$$\pi_8: z - 2 = 0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך בין המישורים.

67. מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi: 6x - 5y + z + 18 = 0$ עם המישור $[xz]$.

68. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: x - 3y + 2z - 1 = 0$$

$$\pi_2: 4x + y - z - 6 = 0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

69. המישורים π_1 ו- π_2 מאונכים זה לזה.

הישר $\ell: \underline{x} = (4, 1, -1) + t(2, -1, 1)$ הוא ישר החיתוך בין המישורים.

מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור π_1 עובר בראשית.

70. נתונים ישר ומישור:

$$\ell: \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(3, 1, -1)$$

$$\pi: 4x - 2y - 3z - 6 = 0$$

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר ℓ על המישור.

71. מצא את הזווית בין הישרים הבאים:

$$\ell_1: \underline{x} = (3, -11, 2) + t(2, 4, -1)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (7, 0, -1) + s(0, 5, -1)$$

72. מצא את הזווית בין הישר והמישור הבאים:

$$\ell: \underline{x} = (1, 0, 3) + t(-3, 1, -5)$$

$$\pi: 2x - y - 3z + 5 = 0$$

73. מצא את הזווית בין הישר והמישור הבאים:

$$\ell: \underline{x} = (-2, 0, 5) + t(-2, 1, 2)$$

$$\pi: 3x - 2y + 2z + 9 = 0$$

74. מצא את הזווית בין המישורים הבאים:

$$\pi_1: 3x + 2y - z - 8 = 0$$

$$\pi_2: 5x - y - z + 10 = 0$$

75. מצא את הזווית בין המישורים הבאים:

$$\pi_1: 4x + 3y + z - 12 = 0$$

$$\pi_2: 4x - 7y + 5z + 3 = 0$$

76. מצא את המרחק בין הנקודות $A(-1, 3, 2)$ ו- $B(9, 1, 0)$.

77. מצא את המרחק בין הנקודה $A(-4, 12, -5)$ לישר $\ell: \underline{x} = (1, 1, -4) + t(3, -1, 2)$.

78. מצא את המרחק בין הנקודה $A(13, -1, -19)$ לישר $\ell: \underline{x} = t(2, 0, -7)$.

79. נתונות הנקודות: $A(1, 6, -1)$, $B(2, -1, 0)$, $C(6, -4, 0)$. חשב את שטח המשולש ΔABC .

80. על הישר $\ell: \underline{x} = (5, -2, 0) + t(0, 1, -1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע $ABCD$.

אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5, 4, 2)$. מצא את שיעורי הקודקוד B (שתי אפשרויות).

81. מצא את המרחק בין הנקודה $A(5, 3, -1)$ למישור $x - 2y + 2z - 12 = 0$.

82. מצא את מרחקו של המישור $4x - 2y - 4z + 15 = 0$ מראשית הצירים.

83. מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell: \underline{x} = (1, -8, 3) + t(3, -2, 1)$

ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4, 5, -9)$.

84. נתונים ישר ומישור:

$$\ell: \underline{x} = (7, 19, -3) + t(3, 14, -4)$$

$$\pi: 2x + 4y - 4z + 15 = 0$$

מצא את הנקודות על הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

85. חשב את נפחה של פירמידה משולשת $SABC$ שקודקדיה הם:

$$S(11, -2, 4), C(6, -4, 0), B(2, -1, 0), A(1, 6, -1)$$

86. בפירמידה משולשת $SABC$ המקצועות SA, SB ו- SC מאונכים זה לזה.

$$\text{נתון: } SA = 6, SB = 8, SC = 12.$$

חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקודקוד S לבסיס ABC .

87. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (-4, 6, 4) + t(2, 3, 0)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (1, 7, 1) + s(2, 3, 0)$$

הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

88. נתונים ישר ומישור:

$$\ell: \underline{x} = (2, -4, 1) + t(-5, 1, -4)$$

$$\pi: 2x + 6y - z + 6 = 0$$

הראה שהישר מקביל למישור ומצא את המרחק בין הישר למישור.

89. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x + 2y - z + 7 = 0$$

$$\pi_2: 2x + 2y - z - 5 = 0$$

הראה שהמישורים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

90. נתונה משוואת מישור:

$$\pi: 3x - 4y + 5z - 10 = 0$$

מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון ונמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

91. נתונים שני מישורים מקבילים:

$$\pi_1: x - 2y - 2z + 6 = 0$$

$$\pi_2: x - 2y - 2z - 12 = 0$$

מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים ונמצא במרחק שווה משניהם.

92. נתונים שני ישרים. הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק ביניהם:

$$\ell_1: \underline{x} = (-3, 2, 6) + t(-4, 1, 2)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (0, 2, -7) + s(1, 0, -1)$$

93. נתונים שני ישרים מצטלבים. מצא את המרחק ביניהם:

$$\ell_3: \underline{x} = (-1, 0, 5) + t(1, 1, -2)$$

$$\ell_4: \underline{x} = (2, -1, 9) + s(6, -1, 0)$$

94. מצא את מרחק הישר $\ell: \underline{x} = (4, -2, -1) + t(-1, 1, 6)$ מציר ה- z .

95. נתונה קוביה $ABCD A'B'C'D'$ שנפחה הוא 8. משוואת המישור שעליו מונח הבסיס $ABCD$

$$\text{היא: } \pi_1: 4x + y + 3z - 28 = 0$$

$$\pi_2: x + 2y - 2z + 6 = 0 \text{ היא } ABB'A'$$

מצא הצגה פרמטרית של הישר עליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

96. נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: \underline{x} = (-2, 1, 5) + t(5, -4, 2)$$

$$\ell_2: \underline{x} = (-7, 3, -1) + s(-5, 4, -2)$$

א. מצא את המצב ההדדי בין הישרים.

ב. המישור π_1 מכיל את שני הישרים והמישור π_2 נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל

אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור π_1 . מצא את משוואות המישורים π_1 ו- π_2 .

97. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x - y + 4z - 8 = 0$$

$$\pi_2: x - y + 2z - 4 = 0$$

המישור π_3 מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה- y בנקודה A כך שמתקיים $OA = m$ (O ראשית הצירים).

$$\text{הזווית בין המישור } \pi_2 \text{ למישור } \pi_3 \text{ היא } \alpha \text{ ונתון כי: } \cos \alpha = \frac{2}{3}.$$

מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר m .

98. נתונות שלוש נקודות: $O(3,1,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(3,-1,1)$.

הנקודות A ו- B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו. מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A (הישר נמצא במישור המעגל).

99. הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור שמרכזו $O(1,1,2)$.

מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A .

100. נתונים מישור וישר:

$$\pi: 2x - y + 2z + 1 = 0$$

$$\ell: \underline{x} = (1, 5, 5) + t(1, 1, 0)$$

מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

101. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x - 4y + 4z - 5 = 0$$

$$\pi_2: 4x - 2y + 4z - 1 = 0$$

מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

102. נתונים ישר ומישור:

$$\ell_1: \underline{x} = (0, -3, 0) + t(1, 1, -8)$$

$$\pi: 6x + 2y - z + 5 = 0$$

ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1, 0, -4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q .
מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה Q' היא
הקרובה ביותר לנקודה Q . מצא את שטח המלבן $PQQ'P'$.
(הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2).

103. נתונים שני מישורים:

$$\pi_1: 2x + y + z - 5 = 0$$

$$\pi_2: 3x + y + 2z + 11 = 0$$

ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים. המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של 60°
עם הישר $\ell_2: \underline{x} = (1, 3, -4) + t(1, 1, 0)$. מצא את משוואת המישור π_3 .

פרק 13 - הסתברות קלאסית

ההסתברות להתרחשות מאורע A :

מספר האפשרויות הרצוי
מספר האפשרויות הכולל

$$P(A) = \frac{\text{מספר האפשרויות הרצוי}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad \text{המאורע המשלים:}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{חיתוך ואיחוד מאורעות:}$$

מאורעות זרים: מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.

$$\text{עבור מאורעות זרים מתקיים: } P(A \cap B) = 0, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

מאורעות בלתי תלויים: מאורעות בלתי תלויים הם מאורעות שקיום האחד מהם לא משפיע

על ההסתברות לקיומו של השני.

$$\text{עבור מאורעות בלתי תלויים מתקיים: } P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

אם מתקיים: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ המאורעות תלויים.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית:}$$

טבלת הסתברויות

///	$\bar{A}$	A	///
$P(B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	B
$P(\bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$\bar{B}$
1	$P(\bar{A})$	$P(A)$	///

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{התפלגות בינומית:}$$

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, מהו מאורע, הסתברות של מאורע
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3		המאורע המשלים
סרטון 4	תרגיל 2	
סרטון 5	תרגיל 3	
סרטון 6		חיתוך ואיחוד מאורעות
סרטון 7		מאורעות זרים
סרטון 8		מאורעות בלתי תלויים
סרטון 9	תרגיל 4	
סרטון 10	תרגיל 5	
סרטון 11	תרגיל 6	
סרטון 12	תרגיל 7	
סרטון 13	תרגיל 8	כולל הסבר על בניית עץ הסתברויות
סרטון 14	תרגיל 9	
סרטון 15	תרגיל 10	
סרטון 16	תרגיל 11	
סרטון 17	תרגיל 12	
סרטון 18		הסתברות מותנית
סרטון 19	תרגיל 13	
סרטון 20	תרגיל 14	
סרטון 21	תרגיל 15	
סרטון 22	תרגיל 16	
סרטון 23	תרגיל 17	
סרטון 24	תרגיל 17	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 25	תרגיל 18	
סרטון 26	תרגיל 19	
סרטון 27		מבלת הסתברויות
סרטון 28	תרגיל 20	
סרטון 29	תרגיל 21	
סרטון 30	תרגיל 22	
סרטון 31	תרגיל 23	
סרטון 32	תרגיל 24	
סרטון 33	תרגיל 25	
סרטון 34	תרגיל 26 א'	
סרטון 35	תרגיל 26 ב'	
סרטון 36		התפלגות בינומית א'
סרטון 37		התפלגות בינומית ב'
סרטון 38	תרגיל 27	
סרטון 39	תרגיל 28	
סרטון 40	תרגיל 29	
סרטון 41	תרגיל 30	
סרטון 42	תרגיל 31	
סרטון 43	תרגיל 32	
סרטון 44	תרגיל 33	
סרטון 45	תרגיל 34	
סרטון 46	תרגיל 35	
סרטון 47	תרגיל 36	
סרטון 48	תרגיל 37	
סרטון 49	תרגיל 38	

תרגילים

1. בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים. מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?

2. בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים. מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?

3. מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?

4. עבור שני מאורעות, A ו- B נתון: $P(A) = 0.6$, $P(\bar{B}) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.4$.

מצא את $P(A \cup B)$.

5. עבור שני מאורעות, A ו- B נתון: $P(\bar{A}) = 0.2$, $P(\bar{B}) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.95$.

מצא את $P(A \cap B)$.

6. עבור שני מאורעות, A ו- B נתון: $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.65$.

קבע האם המאורעות:

א. זרים.

ב. תלויים.

7. נתון כי שני מאורעות, A ו- B בלתי תלויים. בנוסף נתון: $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.4$.

מצא את $P(A \cup B)$.

8. בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים.

אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

9. בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.

אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. מה ההסתברות ששני הכדורים אינם באותו צבע?

10. בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (ללא החזרה). מה ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?
11. נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?
12. ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות. יואב מוציא גולה מכיסו הימני. אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי. אחר כך מוציא גולה מכיסו השמאלי. מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?
13. בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור. א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים? ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע? ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?
14. בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור. א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים? ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע? ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?
15. בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (ללא החזרה). ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים. מה ההסתברות שכולם גברים?
16. נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'. א. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן? ב. ידוע שללואיזה לא יצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהמלאת המטבע יצא "עץ"?

17. במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2. ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיתק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪. מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?
18. בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים. הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (ללא החזרה) הוא $\frac{5}{14}$. כמה כדורים בכד?
19. ההסתברות של צלף לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא p והיא גדולה מההסתברות שלו להחמיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע בירייה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחמיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק בירייה אחת היא 0.38. א. מצא את p .
ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?
20. 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים. נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים. א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?
ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?
ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?
ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?
21. 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט. 80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות. נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות. א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?
ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?
ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?
ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?
22. 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה. 75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה. א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?
ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך?
ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?

23. בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. מבין בעלי רישיון הנהיגה 30% הם גברים.

60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה.

בחרו באקראי שתי נשים מהעיר. מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?

24. 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור צבעים.

אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים.

אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים.

מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

25. בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה

בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז

הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים.

בוחרים באקראי חתול מהסניף. מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?

26. בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40%

מתלמידי מגמות אלה הם בני. הבנים מהווים $\frac{2}{5}$ מתלמידי הפיזיקה, $\frac{5}{12}$ מתלמידי הכימיה ו- $\frac{1}{3}$

מתלמידי המחשבים. $\frac{1}{4}$ מהבנים הם תלמידי פיזיקה.

א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה לבין מין התלמיד?

ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?

27. אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?

28. מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?

29. הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשו למבחן התיאוריה.

מה ההסתברות שבדיוק שישנה מהם יעברו?

30. בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד.

הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים שהוציא:

א. בדיוק ארבעה יהיו כחולים? ד. הרוב יהיו כחולים?

ב. חמישה יהיו כחולים? ה. לפחות אחד יהיה כחול?

ג. לפחות ארבעה יהיו כחולים? ו. הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?

31. בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים.
מה ההסתברות שכולם כחולים?
32. יערה מצליחה לקלוע לסל בשלושה מכל ארבעה ניסיונות. כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל.
ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל. מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?
33. בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה. ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027.
מה ההסתברות שרובם מעשנים?
34. בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיים מהן מעשנות קמנה פי 4 מההסתברות ששתיים מהן לא מעשנות. מה ההסתברות שכולן מעשנות?
35. בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה).
הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי $3\frac{3}{8}$ מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.
36. בחדר x גברים ו- $3x$ נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר.
ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6.
א. מצא את גודלו של x .
ב. חוזרים על התהליך 4 פעמים. מה הסיכוי שבשלוש ייצאו מהחדר שתי נשים?
37. במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש n תשובות מהן רק אחת נכונה. ישנו סיכוי של 50% שעשי יידע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן. אם שי לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש. ההסתברות שעשי יקבל במבחן 60 גדולה פי $1\frac{1}{3}$ מההסתברות שיקבל 80.
מצא את ערכו של n .
38. על מנת להתקבל לקורס מיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש. 40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו.
 $\frac{5}{17}$ מאלה שלא התקבלו לקורס מיס לא התקבלו בגלל הראיון בלבד. 3 חברים ניסו להתקבל לקורס מיס. ידוע שרובם התקבלו. מה ההסתברות שכולם התקבלו?

פרק 14 – בעיות מילוליות

אחוזים: אחוז אחד הוא מאית השלם

בעיות תנועה: מהירות $\times$ זמן = דרך

הערה: אם לא צוין אחרת, המהירויות בכל שאלה קבועות.

בעיות הספק: הספק $\times$ זמן = עבודה

הערה: אם לא צוין אחרת, ההספקים בכל שאלה קבועים.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	תזכורת על אחוזים
סרטון 2	תרגיל 2	
סרטון 3	תרגיל 3	
סרטון 4	תרגיל 4	
סרטון 5	תרגיל 5	
סרטון 6	תרגיל 6	בעיות תנועה
סרטון 7	תרגיל 7	דרך א'
סרטון 8	תרגיל 7	דרך ב'
סרטון 9	תרגיל 8	
סרטון 10	תרגיל 9	
סרטון 11	תרגיל 10	
סרטון 12	תרגיל 11	
סרטון 13	תרגיל 12	
סרטון 14	תרגיל 13	
סרטון 15	תרגיל 14	
סרטון 16	תרגיל 15	
סרטון 17	תרגיל 16	
סרטון 18	תרגיל 17	
סרטון 19	תרגיל 18	
סרטון 20	תרגיל 19	
סרטון 21	תרגיל 20 א'	
סרטון 22	תרגיל 20 ב'	
סרטון 23	תרגיל 21	בעיות הספק
סרטון 24	תרגיל 22	
סרטון 25	תרגיל 23	
סרטון 26	תרגיל 24	
סרטון 27	תרגיל 25	
סרטון 28	תרגיל 26	
סרטון 29	תרגיל 27	
סרטון 30	תרגיל 28	
סרטון 31	תרגיל 29 א'	
סרטון 32	תרגיל 29 ב'	

תרגילים:

1. א. כמה הם 20% מ-300? ב. כמה הם 120% מ-300? ג. מהו המספר הגדול מ-300 ב-20%?
2. א. חולצה עלתה 240 ₪ והתייקרה ב-30%. מה מחירה כעת? ב. נעליים עלו 450 ₪ והוזלו ב-40%. מה מחירם כעת?
3. מכונית נסעה במהירות 80 קמ"ש ואז הורידה את מהירותה ב-20%. מה מהירותה כעת?
4. אופנוע נסע במהירות x והעלה את מהירותו ב-30%. במא באמצעות x את מהירותו כעת.
5. צינור מילא בריכה בקצב של x ליטר בשעה. לאחר מכן ירד הספק המילוי שלו ב-20% ולבסוף עלה הספק המילוי שלו ב-30%. במא באמצעות x את הספק המילוי שלו כעת.
6. מכונית נסעה במהירות מסוימת במשך שעותיים. אחר כך העלתה את מהירותה ב-25% ונסעה עוד שעה וחצי. בסך הכל עברה המכונית 310 ק"מ. מה הייתה מהירותה ההתחלתית של המכונית?
7. רוכב אופניים יצא בשעה 06:00 לרכיבה במהירות 24 קמ"ש. בשעה 07:00 יצא מאותו מקום רוכב אופנוע באותו כיוון ובמהירות של 40 קמ"ש. באיזו שעה ובאיזה מרחק מנקודת היציאה ישיג רוכב האופנוע את רוכב האופניים?
8. המרחק בין ת"א לנצרת הוא 103 ק"מ. בשעה 08:00 יצאה מכונית מנצרת לת"א במהירות 90 קמ"ש. בשעה 08:20 יצאה משאית מת"א לנצרת במהירות 56 קמ"ש. באיזו שעה ייפגשו המכונית והמשאית?
9. רוכב אופנוע יצא מביתו מזרחה במהירות מסוימת ונסע במשך חצי שעה. לאחר מכן, פנה צפונה, הגדיל את מהירותו ב-20% ונסע כך שעה נוספת. לאחר שעה זו פנה חזרה לכיוון ביתו, העלה את מהירותו ל-65 קמ"ש ונסע (בקו ישר) עד שהגיע חזרה לביתו. א. מצא את מהירותו של רוכב האופנוע ביציאה מביתו אם ידוע שעבר בסך הכל 150 ק"מ. ב. מה הייתה מהירותו הממוצעת של רוכב האופנוע (בכל חלקי הדרך)?
10. משאית נסעה מדימונה לאילת, מרחק של 200 ק"מ. 50 דקות אחריה יצאה מכונית מדימונה לאילת במהירות הגבוהה ב-30 קמ"ש והגיעה לאילת 40 דקות לפני המשאית. מצא את מהירות המכונית.
11. המרחק בין ת"א לקריית שמונה הוא 180 ק"מ. שני רוכבי אופנוע יצאו בו זמנית, האחד מת"א לקריית שמונה והשני מקריית שמונה לת"א. כעבור 45 דקות הרוכבים עדיין לא נפגשו והמרחק ביניהם היה 52.5 ק"מ. רוכב האופנוע שיצא מת"א הגיע ליעדו 15 דקות לפני שהרוכב השני הגיע ליעדו. מצא את מהירות רוכבי האופנוע.

12. רכבת נוסעת בקו ת"א – ב"ש במשך שעה ורבע. יום אחד, לאחר חצי שעת נסיעה, הייתה תקלה ברכבת והיא נאלצה לעצור ל-10 דקות עד שהתקלה תוקנה. על מנת לנסות ולהגיע ליעדה בזמן העלתה את מהירותה ב-10 קמ"ש בהמשך הדרך והגיעה ליעדה באיחור קל של 5 דקות בלבד. מצא את מהירות הרכבת.
13. אדם הולך ברגל מביתו למקום העבודה שלו במהירות מסוימת. יום אחד יצא מביתו מאוחר מאוד ולכן נאלץ להגביר את מהירות ההליכה שלו ב-3 קמ"ש. הוא הגיע לעבודה בזמן והדרך ארכה מחצית מהזמן שבדרך כלל היא אורכת. מצא את מהירות ההליכה של האדם (בשגרה).
14. שני הולכי רגל הולכים זה לקראת זה, האחד מנקודה A לנקודה B והשני מנקודה B לנקודה A. הם נפגשים כעבור חצי שעה וממשיכים ליעדם. הולך הרגל הראשון הגיע לנקודה B 25 דקות לפני שהולך הרגל השני הגיע לנקודה A. מצא את היחס בין מהירויות הולכי הרגל.
15. היישובים A ו-B נמצאים על גדת נהר בעל זרם קבוע. יום אחד, יצאה ספינה מיישוב A ליישוב B במהירות מסוימת. שעה לאחר מכן יצאה ספינה שנייה מיישוב B ליישוב A וכעבור שעתיים פגשה את הספינה הראשונה. הספינות המשיכו ליעדן וחזרו חזרה ליישוב המוצא באותו יום. למחרת, שוב יצאה הספינה מיישוב A ליישוב B אך במהירות כפולה מביום הקודם. הספינה מיישוב B יצאה גם היא במהירות כפולה לכיוון היישוב A אך הפעם רק חצי שעה אחרי שיצאה הספינה הראשונה. כעבור שעה עוד לא פגשה את הספינה הראשונה אך הייתה במרחק של שני ק"מ ממנה. מצא את עוצמת הזרם אם ידוע שכיוונו מיישוב A ליישוב B.
16. שלוש רוכבי אופנוע יצאו מירושלים לאילת ונסעו דרך עין גדי. המרחק בין עין גדי לאילת הוא 240 ק"מ. שלוש הרוכבים יצאו מירושלים בהפרשי זמן קבועים והגיעו לעין גדי באותו זמן. הרוכב שיצא ראשון הגיע לאילת שעה אחרי שהגיע לשם הרוכב שיצא שני. הרוכב שיצא שלישי הגיע לאילת ומייד פנה חזרה ופגש את הרוכב שיצא ראשון במרחק 80 ק"מ מאילת. מצא את מהירויות רוכבי האופנוע.
17. מכונית ואופנוע יצאו באותו זמן מנקודה A לנקודה B. כשהאופנוע היה באמצע הדרך הייתה המכונית במרחק 16 ק"מ מנקודה B. כשהאופנוע היה במרחק 6 ק"מ מנקודה B המכונית הייתה במרחק 12 ק"מ מנקודה B. א. מצא את המרחק בין הנקודה A לנקודה B. ב. פי כמה גדולה מהירות האופנוע ממהירות המכונית?
18. דן ורן עורכים מרוץ לאורך מסלול של 10 ק"מ. מהירותו של דן גדולה ב-5 קמ"ש ממהירותו של רן. שניהם יצאו למרוץ באותו זמן ודן הגיע לקו הסיום יותר מעשרים דקות לפני רן. מהו תחום המספרים בו נמצאת מהירותו של רן?
19. רכבת נוסעת בקו ת"א – ב"ש במשך שעה ורבע. יום אחד, לאחר חצי שעת נסיעה, הייתה תקלה ברכבת והיא נאלצה לעצור ל-10 דקות עד שהתקלה תוקנה. על מנת לנסות ולהגיע ליעדה בזמן העלתה את מהירותה ב-10 קמ"ש בהמשך הדרך והגיעה ליעדה באיחור קל שלא עלה על 5 דקות (שים לב – הרכבת הגיעה באיחור, אך איחור זה לא עלה על 5 דקות). מצא את תחום המספרים בו נמצאת מהירות הרכבת.

20. שלושה חברים הלכו מבית הספר לספורטק בהליכה מהירה. מהירותו של הראשון הייתה גדולה ב-8 קמ"ש ממהירותו של השני וב- m קמ"ש ממהירותו של השלישי, לכן, הגיע הראשון m שעות לפני השני ושעתיים לפני השלישי.
א. הבע באמצעות m את מהירותו וזמן הליכתו של החבר הראשון.
ב. לאילו ערכים של m יש לבעיה פתרון?
21. מבח הכין פנקייקים בקצב קבוע במשך שעתיים. אחר כך העלה את קצב עבודתו ב-25% והכין פנקייקים עוד שעה וחצי בקצב החדש. בסך הכל הכין הטבח 310 פנקייקים. כמה פנקייקים בשעה הכין הטבח בשעתיים הראשונות לעבודתו?
22. צינור ממלא בריכה בקצב קבוע. לאחר שעתיים נפתח צינור נוסף הממלא את הבריכה בקצב של 25% מהצינור הראשון. לאחר עוד שעה וחצי התמלאה הבריכה לאחר שנכנסו אליה בסה"כ 310 ליטר מים. כמה ליטרים לשעה מכניס הצינור הראשון לבריכה?
23. צינור א' ממלא בריכה בשלוש שעות. צינור ב' ממלא את אותה בריכה בשעתיים. שני הצינורות נפתחו יחדיו בשעה 10:00. באיזו שעה תהיה הבריכה מלאה?
24. קבוצת פועלים סללה כביש. את השליש הראשון של הכביש סללו בקצב של 10 מטר ביום. את השליש השני של הכביש סללו בקצב הגדול ב-15 מטר ביום מהקצב בו סללו את השליש השלישי של הכביש. זמן סלילת השליש הראשון היה שווה לזמן סלילת שאר הכביש. מצא את קצב סלילת השליש האחרון של הכביש.
25. למיכל שני ברוזים, ברוז א' ממלא אותו וברוז ב' מרוקן אותו. יום אחד כאשר במיכל היו 20% מנפח הקיבול שלו, פתחו בטעות את שני הברזים בו זמנית והמיכל התרוקן תוך 6 דקות. מצא בכמה זמן ממלא ברוז א' לבדו את המיכל כשהוא ריק אם ידוע שזמן זה ארוך ב-5 דקות מהזמן הדרוש לברוז ב' לרוקן את המיכל כשהוא מלא.
26. שתי קבוצות של חקלאים אספו מלונים משדה. תחילה, עבדה רק הקבוצה המהירה יותר ואספה מלונים משליש מהשדה. אחר כך, עבדה רק הקבוצה האיטית יותר ואספה מלונים מעוד שישית מהשדה. לבסוף, הצטרפה הקבוצה המהירה לעבודה ויחד אספו מלונים במשך 9 ימים נוספים. מתחילת איסוף המלונים ועד סיומו עברו 29 ימים.
מצא בכמה ימים יכולה הייתה הקבוצה המהירה לאסוף את המלונים מכל השדה לו עבדה לבדה.
27. מורה שברשותו היו מבחני המתמטיקה של כל השכבה, 224 במספר, תכנן לבדוק אותם תוך מספר ימים מסוים. הוא התחיל בעבודתו ואחרי 6 ימי עבודה, קיבל לידיו עוד 7 מבחנים שנשכחו בבית הספר וקיבל הודעה כי עליו להחזיר את הבחינות 3 ימים לפני המועד שתכנן. הוא חישב וגילה שכדי לעמוד ביעד עליו לבדוק עוד 11 מבחנים בכל יום.
בכמה ימים תכנן המורה לסיים את בדיקת המבחנים?
28. למיכל שנפחו 300 ליטר יש שני ברוזים: ברוז אחד למילוי והשני להרקה. מילוי המיכל (כשהוא ריק) אורך 8 דקות יותר מריקון המיכל (כשהוא מלא). יום אחד, כשהמיכל היה מלא, פתחו בטעות את שני הברזים והמיכל התרוקן בפחות מחצי שעה.
באיזה תחום מספרי נמצאת כמות המים הנכנסת למיכל בדקה מברז המילוי?

29. שני פועלים תכננו לבצע עבודה מסוימת כך שהראשון יעבוד 8 ימים ואחריו השני יעבוד 6 ימים. ואולם, 4 ימים אחרי תחילת העבודה חלה הפועל הראשון והפסיק לעבוד והפועל השני נאלץ לעבוד m ימים לבדו וגם אז הסתיימה רק 75% מהעבודה.
- א. הבע באמצעות m את הזמן שבו כל פועל היה מסיים את העבודה לו עבד לבדו.
- ב. לאילו ערכים של m יש לבעיה פתרון?