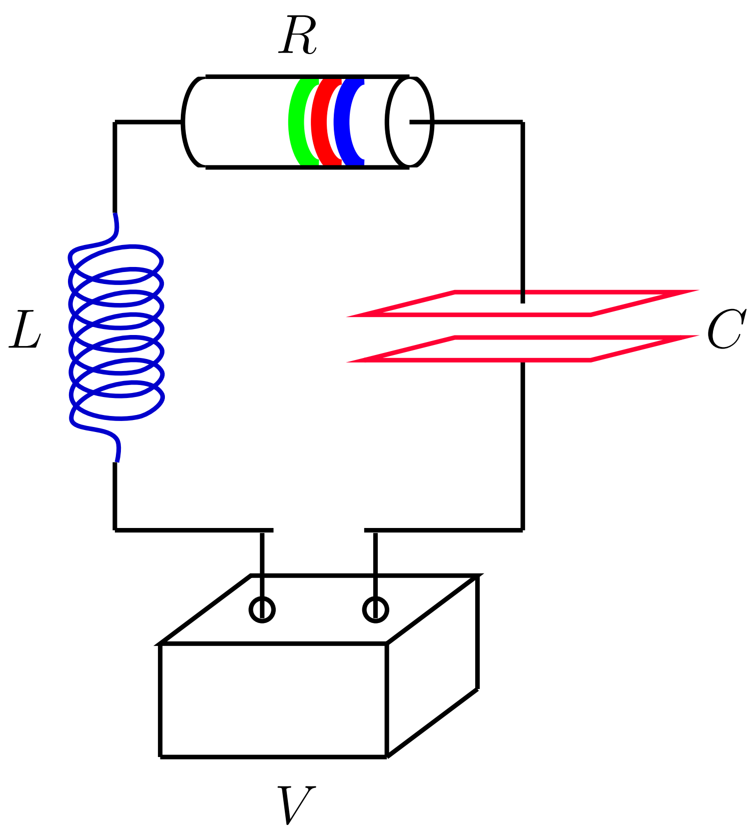
פיסיקה 2 - חשמל ומגנטיות



אייל לוי

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות נסיון רבות של המחבר בהוראת פיסיקה באוניברסיטת תל אביב, במכללת אפקה, ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בפיסיקה 2 - חשמל ומגנטיות, והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה - אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתכניות הלימוד השונות. הנסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא שספר זה ישמש כמורה־דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה!

אייל לוי

gool
בשביל התרגול

תוכן עניינים

פרק 1

חוק קולומב והשדה החשמלי

1.1 מערכת מטענים נקודתיים

1.1.1

מטען $q_1 = 1\ C$ נמצא במנוחה על הקרקע.
באיזה גובה ניתן לשים מסה $m = 1\ ton$ בעלת מטען זהה $q_2 = 1\ C$ שתרחף באויר כנגד כח הכובד?

פתרון:

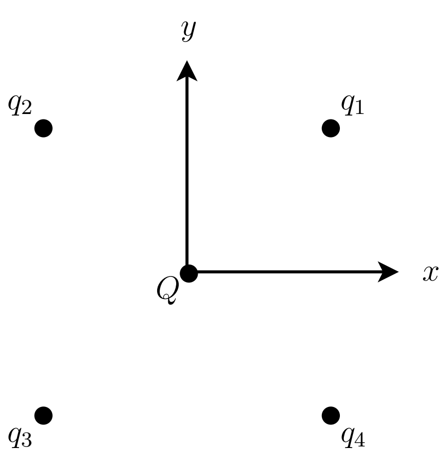
$$h = 958.3\ m$$

1.1.2

ארבעה מטענים נקודתיים q_1, q_2, q_3, q_4 נמצאים במיקומים:

$$\vec{r}_1 = (1,1)\ m\ ;\ \vec{r}_2 = (-1,1)\ m\ ;\ \vec{r}_3 = (-1,-1)\ m\ ;\ \vec{r}_4 = (1,-1)\ m$$

בהתאמה. המטענים $q_1 = q_2 = -200\ \mu C$ והמטענים $q_3 = q_4 = 200\ \mu C$. מטען נקודתי $Q = 100\ \mu C$ נמצא בראשית הצירים.



(א) מהו הכח שמרגיש המטען Q?
(ב) מהו הכח שמרגיש המטען q_3?

פתרון:

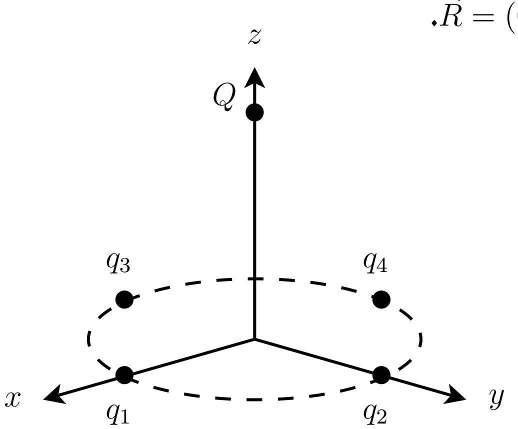
(א) $\sum \vec{F} = (0, 254.56)\ N$ **(ב)** $\sum \vec{F} = (-121.82, 58.18)\ N$

1.1.3

ארבעה מטענים נקודתיים $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 300\ nC$ **נמצאים במיקומים:**

$$\vec{r}_1 = (1,0,0)\ m\ ;\ \vec{r}_2 = (0,1,0)\ m\ ;\ \vec{r}_3 = (0,-1,0)\ m\ ;\ \vec{r}_4 = (-1,0,0)\ m$$

בהתאמה. מטען נקודתי $Q = 500\ nC$ **נמצא על ציר** z **במיקום** $\vec{R} = (0,0,3)\ m$.



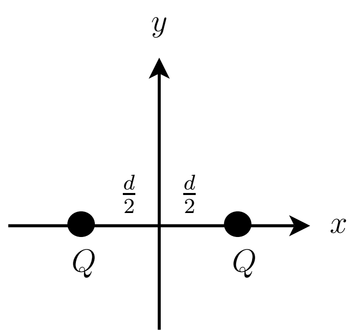
מה צריכה להיות מסתו של המטען Q **כדי שהוא ירחף באוויר כנגד כח הכובד?**

פתרון:

$m = 52.27\ kg$

1.1.4

שני מטענים נקודתיים זהים Q **מצאים במנוחה על ציר** x **במרחק** d **זה מזה.**



(א) היכן על ציר y מתקבל הערך המקסימלי של השדה החשמלי?

(ב) הראו כי במרחק רב ($y >> d$), השדה מתנהג כמו שדה חשמלי של מטען נקודתי בעל גודל $2Q$ (המטען הכולל של המערכת)!

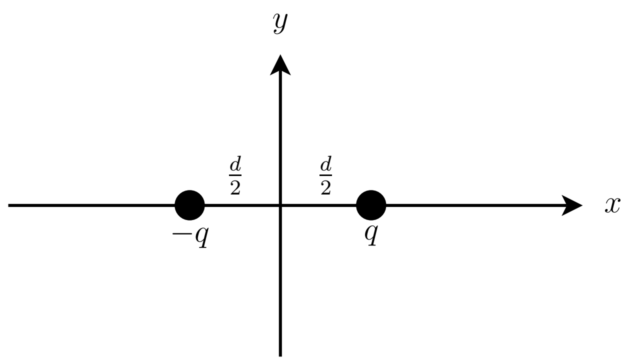
פתרון:

(א) $y = \pm\dfrac{d}{2\sqrt{2}}$

1.1.5

נתונה מערכת של שני מטענים נקודתיים בעלי גודל q וסימן הפוך (דיפול), הנמצאים על ציר x במיקומים:

$$\vec{r}_1 = (\frac{d}{2},0)\ m\ ;\ \vec{r}_2 = (-\frac{d}{2},0)\ m$$



(א) מצאו את השדה החשמלי בכל מקום לאורך ציר x, כפונקציה של המרחק x מהראשית. יש לבטא בעזרת k,q,d,x!

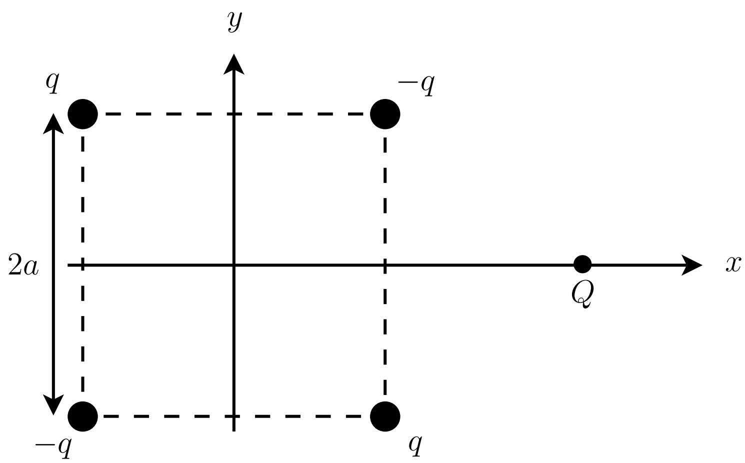
(ב) מהו השדה החשמלי במרחק רב מהדיפול ($x >> d$)?

פתרון:

(א) $\vec{E}(x,0,0) = kq\left[\dfrac{x-\frac{d}{2}}{\left|x-\frac{d}{2}\right|^3} - \dfrac{x+\frac{d}{2}}{\left|x+\frac{d}{2}\right|^3}\right]\cdot(1,0,0)$ **(ב)** $\vec{E}(x >> d) = \dfrac{2kqd}{x^3}\cdot(1,0,0)$

1.1.6

נתונה מערכת של ארבעה מטענים נקודתיים בעלי גודל q כל אחד, הנמצאים בקודקודיו של ריבוע בעל צלע $2a$ שמרכזו בראשית. לכל זוג מטענים סמוכים יש מטען הפוך (קוואדרופול):



(א) מצאו את הכח שפועל על מטען נקודתי Q **שמונח על ציר** x **כפונקציה של המרחק** x **מראשית הצירים! יש לבטא באמצעות** k, Q, q, a, x**.**

(ב) מהו הכח שיפעל על Q **אילו הוא היה ממוקם במרחק רב מהראשית (**$x >> a$**)?**

פתרון:

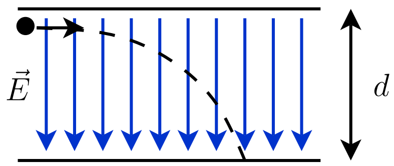
(א) $$\vec{F}(x,0,0) = 2kqQa \cdot \left[\frac{1}{[(x-a)^2+a^2]^{3/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2+a^2]^{3/2}} \right] \cdot (1,0,0)$$

(ב) $$\vec{F}(x >> a) = \frac{2kqQa^2}{x^4} \cdot (1,0,0)$$

1.2 תנועת חלקיק בשדה חשמלי

1.2.1

פרוטון (מטענו $q_p = 1.602 \cdot 10^{-19}\ C$ ומסתו $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}\ kg$) מוכנס בין שני לוחות שהמרחק ביניהם $d = 0.8\ cm$. הלוחות טעונים כך שנוצר ביניהם השדה החשמלי אחיד המכוון אנכית מטה וגודלו $E = 3 \cdot 10^4\ \frac{N}{C}$.
הפרוטון מוכנס בצמוד ללוח העליון עם מהירות אופקית $v_0 = 5 \cdot 10^6\ \frac{m}{s}$.



(א) תוך כמה זמן יפגע הפרוטון בלוח התחתון?
(ב) מהו המרחק האופקי אותו יעבור הפרוטון עד שיפגע בלוח התחתון?

פתרון:

(א) $t = 7.47 \cdot 10^{-8}\ s$ (ב) $x = 37.4\ cm$

1.2.2

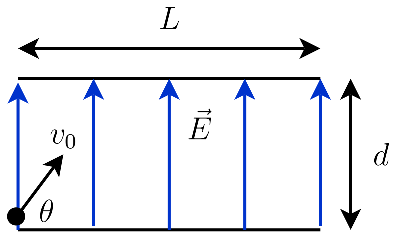
נתונים שני לוחות אינסופיים. מזריקים גוף שמסתו $M = 5\ gr$ ומטענו $Q = -10\ \mu C$ אל בין הלוחות. מהו גודלו וכיוונו של שדה חשמלי שיש ליצר בין הלוחות כדי שהמטען יתמיד במגמת תנועתו, כלומר ימשיך לנוע בקו ישר, אם נתון שתאוצת הגרביטציה פועלת אנכית מטה?

פתרון:

$E = 4900\ \dfrac{N}{C}$ במגמה אנכית מטה.

1.2.3

נתונים שני לוחות טעונים שהמרחק ביניהם $d = 0.7\ cm$ ושאורך כל אחד מהם הוא $L = 10\ cm$. הלוחות טעונים כך שנוצר ביניהם שדה חשמלי אחיד המכוון אנכית מעלה וגודלו $E = 2500\ \frac{N}{C}$. אלקטרון (מטענו $q_e = -1.602 \cdot 10^{-19}\ C$ ומסתו $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\ kg$) מוזרק אל בין שני לוחות בצמוד לקצה השמאלי של הלוח התחתון במהירות שגודלה $v_0 = 1 \cdot 10^7\ \frac{m}{s}$.



מהו תחום הזוויות θ עבורו ניתן להזריק את האלקטרון, כדי שהוא לא יפגע באף אחד מהלוחות?

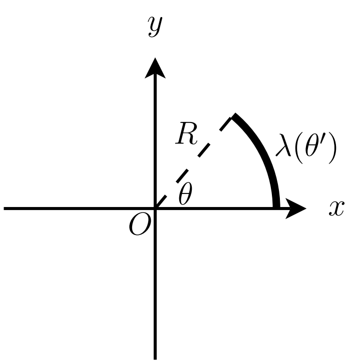
פתרון:

$14.36^\circ > \theta > 13.04^\circ$

1.3 התפלגויות מטענים רציפות

1.3.1

נתונה קשת מעגלית בעלת רדיוס R, הנשענת על זווית θ וטעונה בצפיפות מטען קווית $\lambda(\theta')$, כאשר θ' הזווית מציר x. מרכזה של הקשת בנקודה O.



(א) חשבו את המטען הכולל לאורך הקשת אם נתון כי צפיפות המטען

1) **אחידה:** $\lambda(\theta') = \lambda_0$

2) **משתנה:** $\lambda(\theta') = \lambda_0 \sin\theta'$

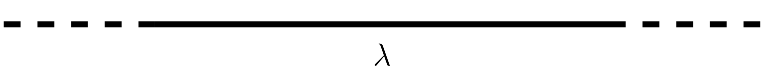
(ב) חשבו את השדה החשמלי שמפעילה הקשת בנקודה O עבור שתי צפיפויות המטען שנתונות ב־(א).

פתרון:

(א) **1)** $q = \lambda_0 R\theta$ **2)** $\lambda_0 R(1-\cos\theta)$ **(ב)** **1)** $\vec{E}(0,0,0) = \frac{k\lambda_0}{R}(-\sin\theta, \cos\theta - 1, 0)\ \frac{N}{C}$ **2)** $\vec{E}(0,0,0) = \frac{k\lambda_0}{R}\left(-\frac{\sin^2\theta}{2}, -\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}, 0\right)\ \frac{N}{C}$

1.3.2

נתון מוט דק אינסופי טעון בצפיפות מטען קווית אחידה $\lambda = 5 \cdot 10^{-6}\ \frac{C}{m}$.



(א) חשבו את השדה החשמלי שיוצר המוט בכל נקודה במרחב, כלומר כפונקציה של המרחק האנכי מציר התיל, r (רדיוס גלילי)!

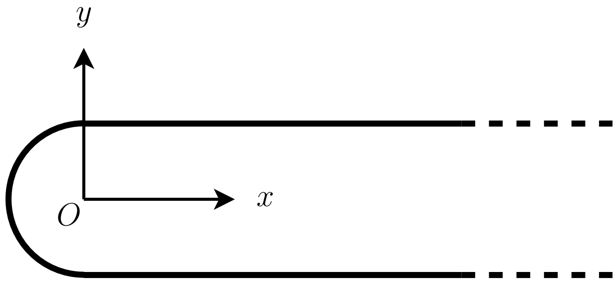
(ב) מניחים מטען נקודתי $Q = 10\ \mu C$ במרחק $r = 10\ cm$ מהתיל. מהו הכח החשמלי שמרגיש המטען?

פתרון:

(א) $E(r) = \frac{9 \cdot 10^4}{r}\ \frac{N}{C}$ **(ב)** $F = 9\ N$

1.3.3

תיל אינסופי הטעון בצפיפות מטען קווית אחידה λ מכופף באמצעו כך שהוא יוצר קשת שצורתה חצי מעגל שרדיוסו R.



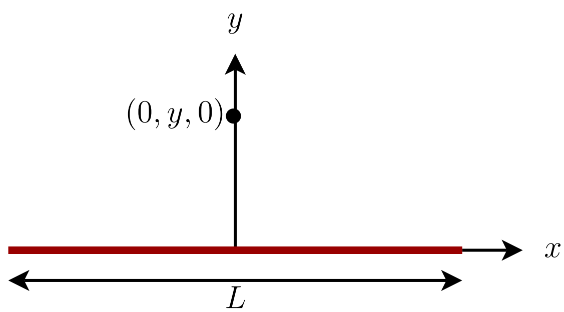
מהו השדה החשמלי שיוצר התיל בנקודה O, מרכז הקשת המעגלית?

פתרון:

$\vec{E}(0,0,0) = 0$

1.3.4

מוט דק בעל אורך L שוכב לאורך ציר x כשמרכזו בראשית. המוט טעון באופן אחיד במטען כולל Q.

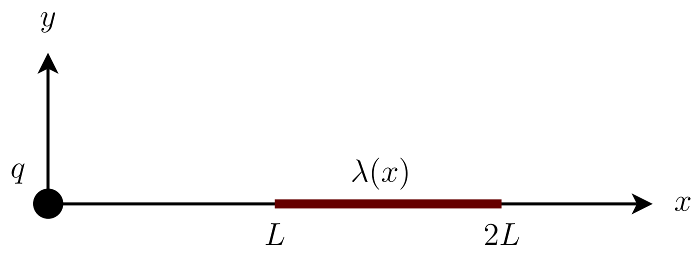


הראו כי השדה החשמלי שיוצר המוט בנקודה $(0,y,0)$ הוא:

$$\vec{E}(0,y,0) = \frac{2kQ}{y\sqrt{L^2+4y^2}}(0,1,0)$$

1.3.5

חשבו את הכח ההדדי שפועל בין מטען נקודתי $q = 1\ \mu C$ שמיקומו ראשית הצירים, ובין מוט דק שאורכו $L = 0.2\ cm$, הטעון בצפיפות מטען קווית $\lambda(x) = 100x^2\ \frac{C}{m}$ כאשר נתון כי המוט שוכב לאורך ציר x כך שקצהו השמאלי נמצא במרחק $x = L$ מהראשית.

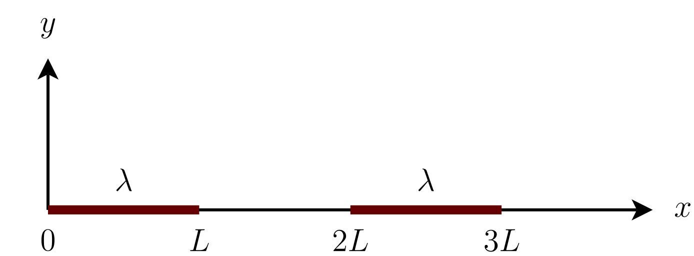


פתרון:

$F = 1800\ N$

1.3.6

חשבו את הכח ההדדי שפועל בין שני מוטות דקים שאורכו של כל אחד מהם הוא L. כל מוט טעון בצפיפות מטען אחידה λ. מוט אחד שוכב לאורך ציר x כך שקצהו השמאלי בראשית, והמוט השני שוכב לאורך ציר x כך שקצהו השמאלי במרחק $2L$ מהראשית.

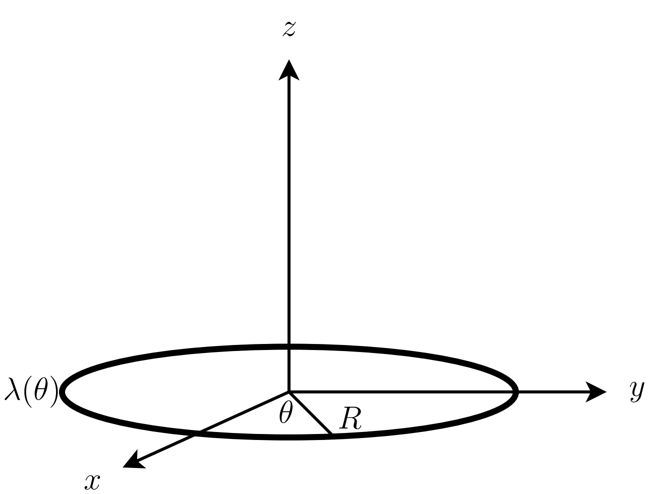


פתרון:

$$F = \ln\left(\frac{4}{3}\right) k\lambda^2$$

1.3.7

נתונה טבעת מעגלית שרדיוסה R הטעונה בצפיפות מטען קווית $\lambda(\theta)$ כאשר θ הזווית שנמדדת על מישור xy מציר ה־ x.



(א) חשבו את השדה החשמלי שיוצרת הטבעת לאורך הציר האנכי מרכזי שלה (ציר z) עבור:

1) $\lambda(\theta) = \lambda_0$

2) $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin\theta$

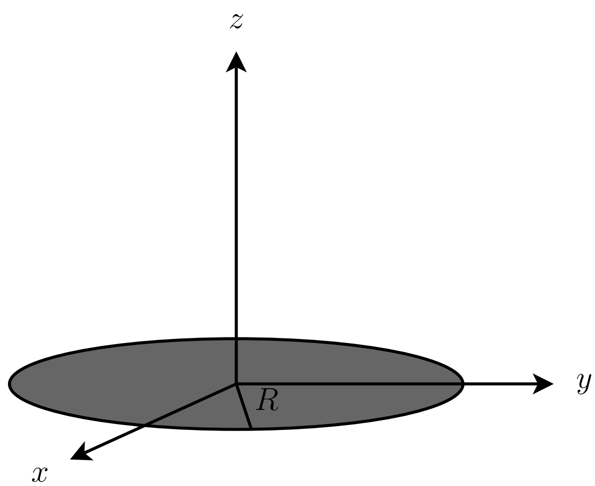
(ב) במקרה של צפיפות מטען אחידה, הראו כי במרחק רב ($z >> R$) מתקבל שדה של מטען נקודתי!

פתרון:

(א) 1) $\vec{E}(0,0,z) = \frac{2\pi k\lambda_0 Rz}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{z}$ **2)** $\vec{E}(0,0,z) = -\frac{\pi k\lambda_0 R^2}{\left(R^2+z^2\right)^{3/2}}\hat{y}$

1.3.8

נתונה דיסקה מעגלית שרדיוסה R הטעונה בצפיפות מטען משטחית אחידה σ.



(א) חשבו את השדה החשמלי שיוצרת הדיסקה לאורך הציר האנכי מרכזי שלה (ציר z)!

(ב) הראו כי במרחק רב ($z >> R$) מתקבל שדה של מטען נקודתי!

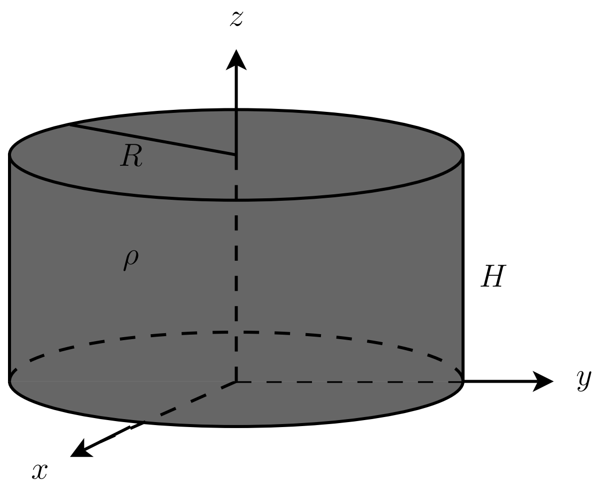
(ג) בעזרת הפתרון לסעיף (א), חשבו את השדה החשמלי שיוצר מישור אינסופי (הטעון בצפיפות משטחית אחידה) בכל מקום במרחב.

פתרון:

(א) $\vec{E}(0,0,z) = 2\pi k\sigma z\left(\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\hat{z}$ **(ג)** $E = 2\pi k\sigma = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ **בכיוון מאונך למישור בכל נקודה (סימן חיובי מתאר דחייה).**

1.3.9

נתון גליל מלא שרדיוסו R וגובהו H הטעון בצפיפות מטען נפחית אחידה ρ.



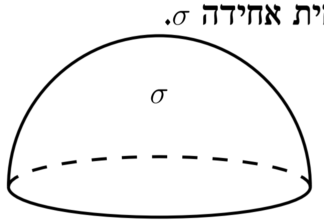
חשבו את השדה החשמלי שיוצר הגליל לאורך הציר האנכי מרכזי שלו (ציר z)!

פתרון:

$$\vec{E}(0,0,z) = 2\pi k\rho \left(2z - H + \sqrt{R^2 + (z-H)^2} - \sqrt{R^2 + z^2}\right)\hat{z}$$

1.3.10

חשבו את השדה החשמלי במרכזה של קליפה חצי כדורית הטעונה בצפיפות מטען משטחית אחידה σ.



פתרון:

$$E = \pi k\sigma = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

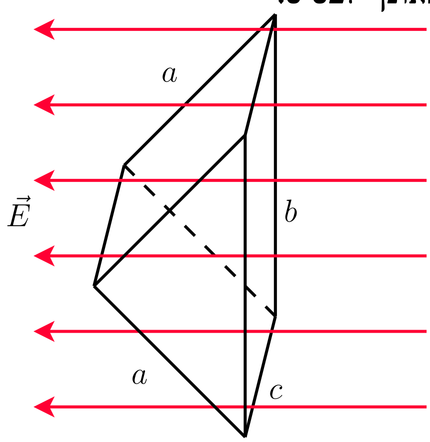
פרק 2

חוק גאוס

2.1 שטף חשמלי

2.1.1

חשבו ישירות מההגדרה את השטף החשמלי של שדה חשמלי אחיד $\vec{E}$ דרך מנסרה משולשת (חתך שהוא משולש שווה שוקיים בעל אורך שוק a ואורך בסיס b. עומקה של המנסרה c). השדה מאונך לבסיס.

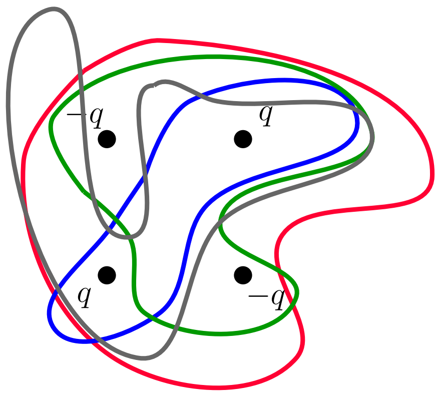


פתרון:

$\phi_E = 0$

2.1.2

נתון קוואדרופול חשמלי (מערך של שני דיפולים חשמליים) כמשורטט:



חשבו בעזרת חוק גאוס מהו השטף החשמלי דרך כל אחד מהמשטחים הצבעוניים.

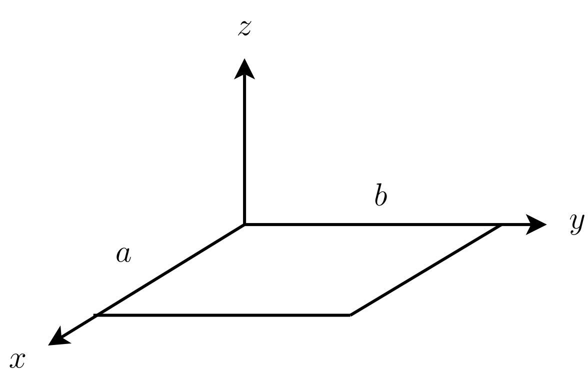
פתרון:

$$\phi_E(\text{כחולה}) = \frac{2q}{\varepsilon_0} \;\; ; \;\; \phi_E(\text{אפורה}) = \frac{2q}{\varepsilon_0} \;\; ; \;\; \phi_E(\text{אדומה}) = 0 \;\; ; \;\; \phi_E(\text{ירוקה}) = -\frac{q}{\varepsilon_0}$$

2.1.3

נתון מלבן שנמצא על מישור $x-y$ בעל צלעות $a = 1\ m$ (לאורך ציר x) ו־$b = 2\ m$ (לאורך ציר y). המלבן נמצא ברביע הראשון כך שקצה אחד שלו בראשית. כמו כן נתון כי בכל המרחב קיים שדה חשמלי:

$$\vec{E} = (3x^2y, 3xy^2, x^2y + y^2z + z^2x)\ \frac{N}{C}$$



(א) מהו השטף של השדה החשמלי דרך המלבן?

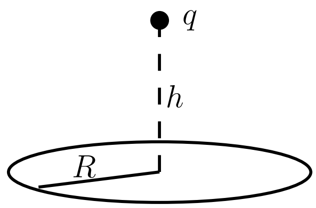
(ב) מהו השטף דרך המלבן אם נתון כי מרימים את המלבן 2 מטרים כך שהוא נמצא על המישור $z = 2\ m$?

פתרון:

(א) $\phi_E = \frac{a^3b^2}{6} = \frac{2}{3}\ \frac{N \cdot m^2}{C}$ **(ב)** $\phi_E = \frac{a^3b^2}{6} + \frac{2}{3}ab^3 + 2a^2b = 10\ \frac{N \cdot m^2}{C}$

2.1.4

מטען נקודתי q נמצא בגובה h מעל מרכזה של דיסקה שרדיוסה R.



(א) מהו השטף החשמלי דרך הדיסקה?

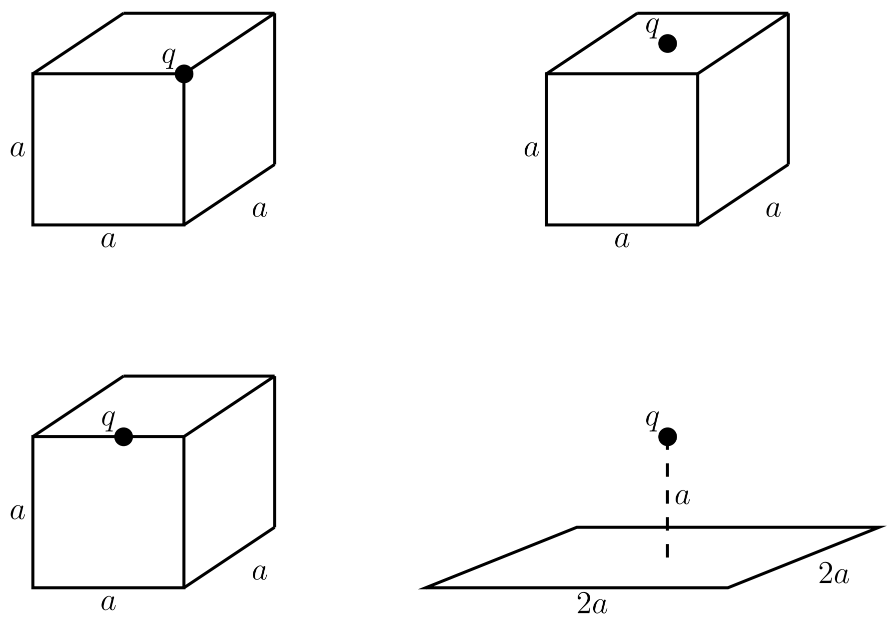
(ב) השתמשו בפתרון ל־(א) כדי לחשב את השטף החשמלי דרך מישור אינסופי.

פתרון:

(א) $\phi_E = 2\pi kq\left(1-\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$ **(ב)** $\phi_E = 2\pi kq = \frac{q}{2\varepsilon_0}$

2.1.5

חשבו את שטף השדה החשמלי שיוצר המטען הנקודתי דרך הצורות בשרטוטים הבאים:



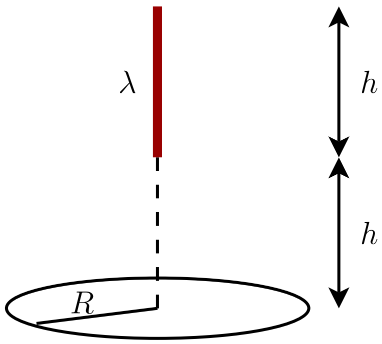
פתרון:

שורה ראשונה: מימין $\phi_E = \frac{q}{2\varepsilon_0}$; משמאל $\phi_E = \frac{q}{8\varepsilon_0}$

שורה שניה: מימין $\phi_E = \frac{q}{6\varepsilon_0}$; משמאל $\phi_E = \frac{q}{4\varepsilon_0}$

2.1.6

מוט דק שאורכו h טעון בצפיפות מטען קווית אחידה λ. המוט שוכב לאורך הציר האנכי־מרכזי של דיסקה שרדיוסה R כך שקצהו התחתון נמצא בגובה h מעל מרכזה של הדיסקה.



מהו השטף החשמלי דרך הדיסקה?

פתרון:

$$\phi_E = 2\pi k\lambda \left(h - \sqrt{R^2+4h^2} + \sqrt{R^2+h^2}\right)$$

2.2 חוק גאוס (האינטגרלי)

2.2.1

חשבו את השדה החשמלי שיוצר מטען נקודתי Q בעזרת חוק גאוס.

פתרון:

$$E = \frac{kQ}{r^2}$$

2.2.2

נתון כדור מלא בעל רדיוס R. חשבו את השדה החשמלי שיוצר הכדור בכל מקום במרחב, בעזרת חוק גאוס, אם נתון כי צפיפות המטען הנפחית בכדור היא:

(א) קבועה $\rho(r) = \rho_0$

(ב) תלויה במרחק מהמרכז r: $\rho(r) = \rho_0 \dfrac{r^2}{R^2}$

פתרון:

(א) $E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & r \le R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} & r \ge R \end{cases}$ **(ב)** $E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{5\varepsilon_0 R^2} r^3 & r \le R \\ \dfrac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0} \cdot \dfrac{1}{r^2} & r \ge R \end{cases}$

2.2.3

נתונה קליפה כדורית בעלת רדיוס R הטעונה בצפיפות מטען משטחית אחידה σ.

(א) חשבו את השדה החשמלי שיוצרת הקליפה בכל מקום במרחב, בעזרת חוק גאוס.

(ב) הראו כי הקפיצה בשדה החשמלי במעבר דרך צפיפות מטען משטחית σ שווה ל- $\Delta E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

פתרון:

(א) $E = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2} & r > R \end{cases}$

2.2.4

קליפה כדורית עבה, בעלת רדיוסים פנימי a וחיצוני b טעונה בצפיפות מטען נפחית $\rho(r) = \frac{A}{r}$. במרכז המערכת נמצא מטען נקודתי Q.

(א) מה צריך להיות הקבוע A כדי שהשדה החשמלי בכל מקום בתחום $a \le r \le b$ יהיה קבוע?

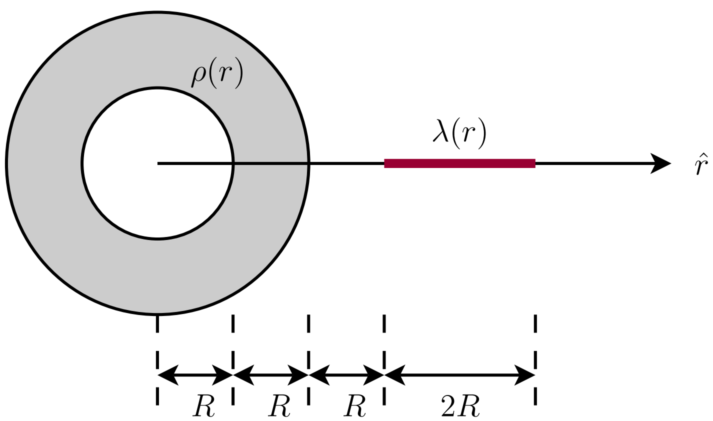
(ב) עבור הקבוע שמצאתם ב־(א), מצאו את השדה החשמלי בכל מקום במרחב.

פתרון:

(א) $A = \dfrac{Q}{\pi a^2}$ **(ב)**
$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r \le a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} & a \le r \le b \\ \dfrac{Q\left(2\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r \ge a \end{cases}$$

2.2.5

נתונה קליפה כדורית בעלת עובי, שרדיוסה הפנימי R והחיצוני $2R$. הקליפה טעונה בצפיפות מטען נפחית $\rho(r) = \rho_0 \frac{R}{r}$. במרחק $3R$ ממרכז הקליפה נמצא קצהו השמאלי של מוט דק שאורכו $2R$ הטעון צפיפות מטען $\lambda(r) = \lambda_0 r$.



(א) מהו השדה החשמלי בכל מקום לאורך הציר הרדיאלי $\hat{r}$ בתחום $0 < r < 3R$?

(ב) מהו הכח שמפעיל הכדור על המוט?

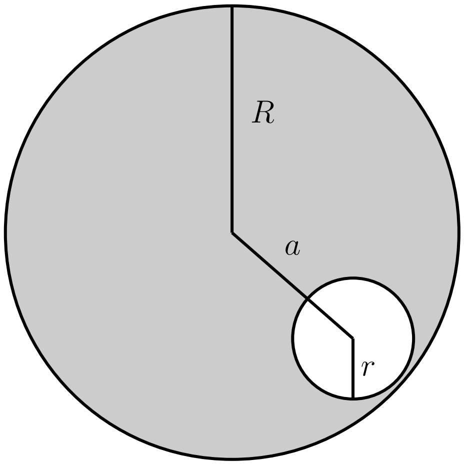
פתרון:

(א)
$$\vec{E}(r) = \begin{cases} -k\lambda_0 \cdot \left[\ln\left(\dfrac{r-5R}{r-3R}\right) + \dfrac{2Rr}{(r-5R)(r-3R)}\right]\hat{r} & r \le R \\ \left\{\dfrac{\rho_0 R(r^2-R^2)}{2\varepsilon_0 r^2} - k\lambda_0 \cdot \left[\ln\left(\dfrac{r-5R}{r-3R}\right) + \dfrac{2Rr}{(r-5R)(r-3R)}\right]\right\}\hat{r} & R \le r \le 2R \\ \left\{\dfrac{3\rho_0 R^3}{2\varepsilon_0 r^2} - k\lambda_0 \cdot \left[\ln\left(\dfrac{r-5R}{r-3R}\right) + \dfrac{2Rr}{(r-5R)(r-3R)}\right]\right\}\hat{r} & 2R \le r < 3R \\ \left\{\dfrac{3\rho_0 R^3}{2\varepsilon_0 r^2} + k\lambda_0 \cdot \left[\ln\left(\dfrac{r-5R}{r-3R}\right) + \dfrac{2Rr}{(r-5R)(r-3R)}\right]\right\}\hat{r} & r > 5R \end{cases}$$

(ב) $\vec{F} = \dfrac{3}{2}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right) \cdot \dfrac{\rho_0 \lambda_0 R^3}{\varepsilon_0}\hat{r}$

2.2.6

נתון כדור מלא בעל רדיוס R הטעון בצפיפות מטען נפחית אחידה ρ. יוצרים בכדור חלל כדורי בעל בעל רדיוס r כך שמרכזו נמצא בוקטור מיקום $\vec{a}$ ביחס למרכז הכדור. נתון $R > r + a$.



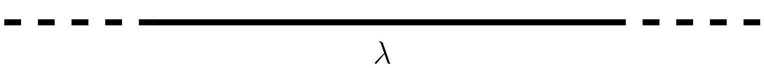
מהו השדה החשמלי בכל נקודה בחלל הכדורי?

פתרון:

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{a}}{3\varepsilon_0}$$

2.2.7

נתון מוט דק אינסופי טעון בצפיפות מטען קווית אחידה λ.



חשבו את השדה החשמלי שיוצר המוט בכל נקודה במרחב, בעזרת חוק גאוס.

פתרון:

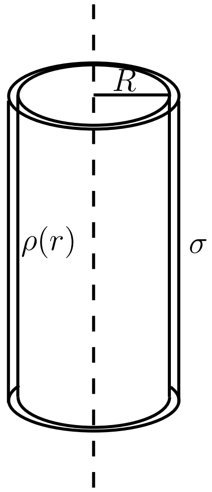
$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2k\lambda}{r}$$

2.2.8

נתון גליל אינסופי בעל רדיוס R הטעון בצפיפות מטען נפחית

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 R}{r}\sin\left(\frac{2\pi r}{R}\right)$$

לחלק החיצוני של הגליל צמודה קליפה גלילית אינסופית הטעונה בצפיפות מטען אחידה σ.
מצאו את השדה החשמלי בכל מקום במרחב, כתלות במרחק האנכי מציר הגליל (r, הרדיוס הגלילי).



פתרון:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0 R^2 \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi r}{R}\right)\right]}{2\pi\varepsilon_0 r} & r < R \\ \dfrac{\sigma R}{\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

2.2.9

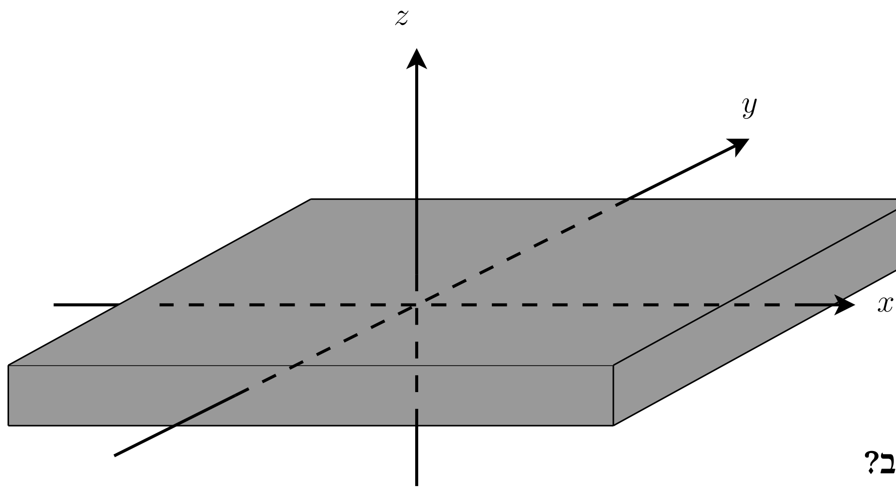
שני לוחות אינסופיים מקבילים טעונים בצפיפויות מטען $+\sigma$ ו־$-\sigma$. המרחק בין הלוחות הוא d.
(א) מהו השדה החשמלי בכל נקודה במרחב?
(ב) ממלאים את המרחב שבין הלוחות בחומר בעל צפיפות מטען נפחית אחידה ρ. מהו השדה החשמלי בכל נקודה במרחב במצב החדש?

פתרון:

(א) $E(z) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & |z| < \frac{d}{2} \\ 0 & |z| > \frac{d}{2} \end{cases}$ **כאשר** z **המרחק האנכי מהמרכז.** **(ב)** $E(z) = \begin{cases} -\dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0} & z < -\frac{d}{2} \\ \dfrac{\rho z}{\varepsilon_0} - \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & -\frac{d}{2} z < \frac{d}{2} \\ \dfrac{\rho d}{2\varepsilon_0} & z > \frac{d}{2} \end{cases}$ **כאשר** z **המרחק האנכי מהמרכז.**

2.2.10

לוח אינסופי בעל עובי $d = 8\ cm$ טעון בצפיפות מטען נפחית $\rho(z) = 5 \cdot 10^{-5} z^2\ \frac{C}{m^3}$, כאשר z המרחק האנכי ממרכז הלוח (כלומר, ראשית הצירים ממוקמת במרכז הלוח).



(א) מהו השדה החשמלי בכל נקודה המרחב?

(ב) מוט דק בעל אורך $L = d$ **מונח לאורך ציר** z **כשקצהו התחתון בראשית. המוט טעון באופן אחיד במטען כולל** Q**. מהו הכח שמרגיש המוט?**

פתרון:

(א) $\frac{N}{C}$ $E(z) = \begin{cases} 1884955.6 \cdot z^3 & |z| \le \frac{d}{2} \\ 120.6 & |z| \ge \frac{d}{2} \end{cases}$ **(ב)** $F = Q \cdot 75.4\ N$ **בכיוון דחייה מהלוח.**

2.3 חוק גאוס (הדיפרנציאלי)

2.3.1

נתון במרחב שדה חשמלי רדיאלי בעל סימטריה כדורית:

$$\vec{E}(r) = \frac{\alpha}{r}\hat{r}$$

מצאו את התפלגות המטען $\rho(r)$ שיוצרת את השדה.

פתרון:

$$\rho(r) = \frac{\varepsilon_0\alpha}{r^2}$$

2.3.2

שדה אלקטרוסטטי $\vec{E}$ מקיים:

$$\vec{E} = \begin{cases} E_0\hat{r} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

כאשר r הוא המרחק מהראשית (קואורדינטות כדוריות) ו־ E_0 ו־ R קבועים חיוביים.

(א) האם יש מטענים נקודתיים במרחב? אם לא ־ נמקו! אם כן־ מהו גודלם והיכן הם נמצאים?

(ב) האם יש צפיפות מטען משטחית σ במרחב? אם לא ־ נמקו! אם כן ־ מהי ומהו מיקומה?

(ג) האם יש צפיפות מטען נפחית ρ במרחב? אם לא ־ נמקו! אם כן ־ מהי ומהו מיקומה?

פתרון:

(א) לא! נוכחות מטען נקודתי יוצרת שדה חשמלי שתלוי במרחב באופן $E \propto \frac{1}{r^2}$.

(ב) $\sigma = -\varepsilon_0 E_0$ (ג) $\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{2\varepsilon_0 E_0}{r} & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$

2.3.3

נתון שדה חשמלי בכל המרחב בעל סימטריה כדורית:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r < R \\ \dfrac{Q}{4\varepsilon_0 r^2}\left[\left(\dfrac{r}{R}\right)^4 - 1\right]\hat{r} & R < r \leq 2R \\ \dfrac{15Q}{4\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & r \geq 2R \end{cases}$$

כאשר Q קבוע בעל יחידות של מטען, ו־ R קבוע בעל יחידות של מרחק.
איזה מערך מטענים יוצר שדה זה?

פתרון:

מטען נקודתי Q במרכז ($r=0$), צפיפות מטען משטחית $\sigma=-\frac{Q}{4\pi R^2}$ ברדיוס R וצפיפות מטען נפחית $\rho(r)=\frac{Qr}{R^4}$ בתחום $R<r\leq 2R$.

פרק 3

אנרגיה ופוטנציאל חשמליים

3.1 אנרגיה פוטנציאלית חשמלית ופוטנציאל חשמלי

3.1.1

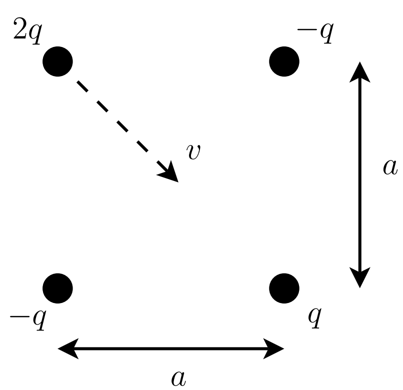
חשבו את האנרגיה האלקטרוסטטית של מערך של זוג מטענים q_1 ו־q_2 שנמצאים במרחק r זה מזה.

פתרון:

$$U = \frac{kq_1q_2}{r}$$

3.1.2

ארבעה מטענים מסודרים בארבע פינותיו של ריבוע שצלעו a, כמשורטט. המטענים מוחזקים במקומם ואינם יכולים לנוע.



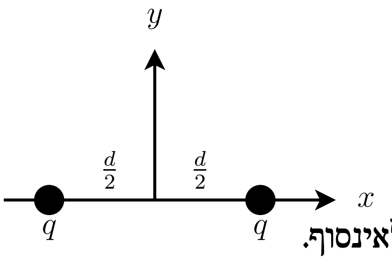
(א) חשבו את האנרגיה האלקטרוסטטית של המערך (כלומר את העבודה שיש להשקיע כדי לבנות אותו).
(ב) המטען $2q$ משוחרר ויכול לנוע במרחב. ברגע מסוים הוא מגיע למרכז הריבוע. מהי מהירותו שם, v, אם נתון כי מסתו היא m?

פתרון:

(א) $U=-3.88\sqrt{\frac{kq^2}{a}}$ (ב) $v=0.7\sqrt{\frac{kq^2}{ma}}$

3.1.3

זוג מטענים זהים q המרוחקים זה מזה מרחק d נמצא על ציר ה־x כמשורטט:



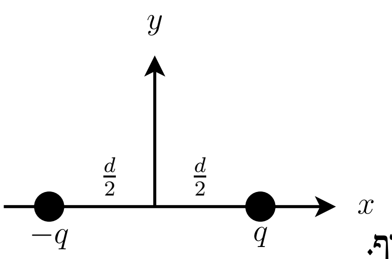
(א) חשבו את הפוטנציאל החשמלי שיוצר זוג המטענים בכל נקודה במרחב, ביחס לאינסוף.
(ב) הראו כי במרחק רב מתקבל פוטנציאל של מטען נקודתי!

פתרון:

(א) $$\varphi(\vec{r})=kq\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-xd+\frac{d^2}{4}}}+\frac{1}{\sqrt{r^2+xd+\frac{d^2}{4}}}\right)$$

3.1.4

דיפול חשמלי נמצא על ציר ה־x כמשורטט:



(א) חשבו את הפוטנציאל החשמלי שיוצר הדיפול בכל נקודה במרחב, ביחס לאינסוף.
(ב) מהו הפוטנציאל במרחק רב מהדיפול?

פתרון:

(א) $\varphi(\vec{r})=kq\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-xd+\frac{d^2}{4}}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+xd+\frac{d^2}{4}}}\right)$ (ב) $\varphi(r\gg d)=\frac{kqxd}{r^3}$

3.1.5

בשמונת קודקודי קוביה שצלעה a נמצאים שמונה מטענים זהים בגודלם q, אך סימנם של כל זוג שכנים קרובים הוא הפוך.
(א) מהי האנרגיה האלקטרוסטטית של המערך?

(ב) מהו הפוטנציאל החשמלי במרכז הקוביה, ביחס לאינסוף?

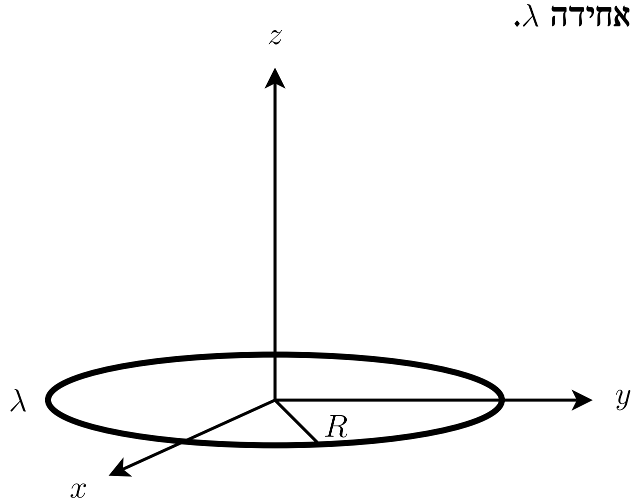
(ג) מהי העבודה הדרושה בהבאת מטען נקודתי Q מאינסוף למרכז הקוביה?

פתרון:

(א) $U = -5.82\frac{kq^2}{a}$ **(ב)** $\varphi(\text{מרכז}) = 0$ **(ג)** $W = 0$

3.1.6

נתונה טבעת מעגלית שרדיוסה R הטעונה בצפיפות מטען קווית אחידה λ.



(א) חשבו את הפוטנציאל החשמלי שיוצרת הטבעת לאורך הציר האנכי מרכזי שלה (ציר z), ביחס לאינסוף.

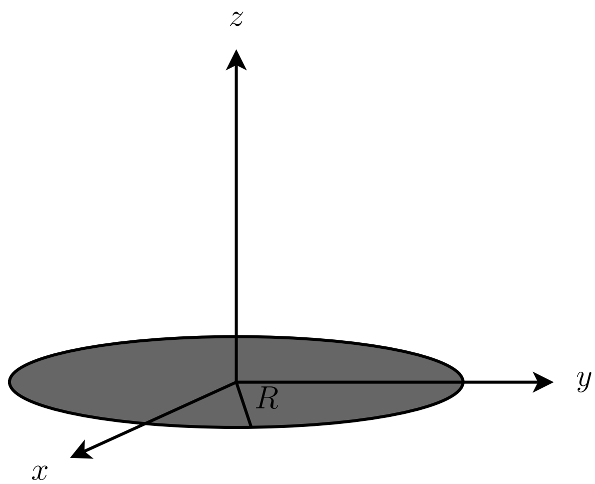
(ב) הראו כי במרחק רב ($z \gg R$) מתקבל פוטנציאל של מטען נקודתי!

פתרון:

(א) $\varphi(0,0,z) = \frac{2\pi k\lambda R}{\sqrt{R^2+z^2}}$

3.1.7

נתונה דיסקה מעגלית שרדיוסה R הטעונה בצפיפות מטען משטחית אחידה σ.



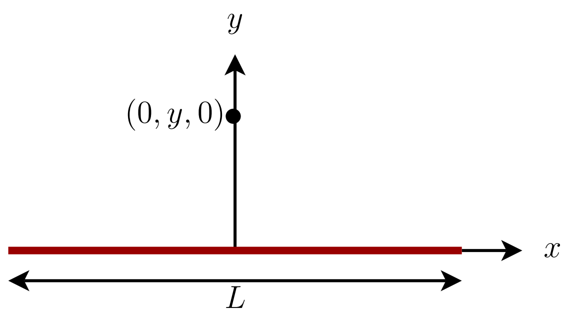
(א) חשבו את הפוטנציאל החשמלי שיוצרת הדיסקה לאורך הציר האנכי מרכזי שלה (ציר z), ביחס לאינסוף.
(ב) הראו כי במרחק רב ($z \gg R$) מתקבל פוטנציאל של מטען נקודתי!
(ג) נתון: $R = 20\ cm$ ו־$\sigma = 3 \cdot 10^{-8}\ \frac{C}{m^2}$. מטען נקודתי $q = -10\ \mu C$ שמסתו $m = 2\ gr$ נעזב ממנוחה בגובה $z = 30\ cm$ מעל מרכז הדיסקה. באיזו מהירות הוא יפגע בדיסקה? (הזניחו גרביטציה).

פתרון:

(א) $\varphi(0,0,z) = 2\pi k\sigma \cdot \left(\sqrt{R^2+z^2} - |z|\right)$ **(ג)** $v = 1.54\ \frac{m}{s}$

3.1.8

מוט דק בעל אורך L שוכב לאורך ציר x כשמרכזו בראשית. המוט טעון באופן אחיד במטען כולל Q.



חשבו את הפוטנציאל החשמלי שיוצר המוט בנקודה $(0,y,0)$, ביחס לאינסוף.

ניתן להשתמש באינטגרל: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right)$

פתרון:

$$\varphi(0,y,0) = \frac{kQ}{L} \cdot \ln\left[\frac{\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}{-\frac{L}{2} + \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + y^2}}\right]$$

3.1.9

חשבו את הפוטנציאל החשמלי בכל המרחב שיוצר כדור מלא שרדיוסו R הטעון בצפיפות מטען נפחית:

(א) אחידה ρ, בשני מקרים:

1) ביחס לאינסוף (כלומר $\varphi(\infty)=0$).

2) ביחס לשפת הכדור (כלומר $\varphi(R)=0$).

(ב) תלויה ברדיוס $\rho(r)=\rho_0\cdot\left(1+\frac{r}{R}\right)$, בשני המקרים הנתונים ב־(א).

פתרון:

(א) 1) $$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}-\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} & r\le R\\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} & r\ge R\end{cases}$$

2) $$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{\rho R^2}{6\varepsilon_0}-\dfrac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} & r\le R\\ \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}-\dfrac{\rho R^2}{3\varepsilon_0} & r\ge R\end{cases}$$

(ב) 1) $$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{5\rho_0 R^2}{6\varepsilon_0}-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\left(\dfrac{r^2}{6}+\dfrac{r^3}{12R}\right) & r\le R\\ \dfrac{7\rho_0 R^3}{12\varepsilon_0 r} & r\ge R\end{cases}$$

2) $$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{\rho_0 R^2}{4\varepsilon_0}-\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\left(\dfrac{r^2}{6}+\dfrac{r^3}{12R}\right) & r\le R\\ \dfrac{7\rho_0 R^2}{12\varepsilon_0}\cdot\left(\dfrac{R}{r}-1\right) & r\ge R\end{cases}$$

3.1.10

כדור מוליך בעל רדיוס R טעון באופן אחיד במטען כולל Q.

(א) חשבו את הפוטנציאל החשמלי שיוצר המוליך בכל המרחב.

(ב) יוצרים בכדור חלל כדורי קונצנטרי (שמרכזו במרכז הכדור) בעל רדיוס $0.3R$. חשבו מחדש את הפוטנציאל החשמלי בכל המרחב.

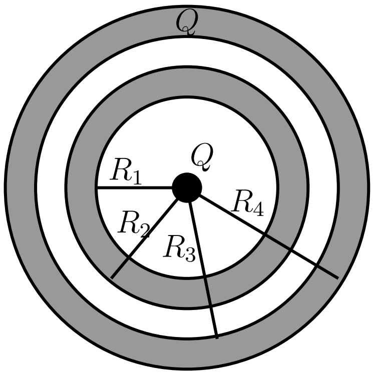
(ג) במצב של (ב), חשבו מחדש את הפוטנציאל החשמלי בכל המרחב אם נתון כי במרכז נמצא מטען נקודתי $-Q$.

פתרון:

(א) $$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{kQ}{R} & r\le R\\ \dfrac{kQ}{r} & r\le R\end{cases}$$ **ביחס לאינסוף! (ב) זהה ל־(א). (ג)** $$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{kQ}{0.3R}-\dfrac{kQ}{r} & r\le 0.3R\\ 0 & r\le 0.3R\end{cases}$$ **ביחס לאינסוף!**

3.1.11

שתי קליפות מוליכות עבות בעלות מרכז משותף נמצאות אחת בתוך השניה. לקליפה הפנימית רדיוס פנימי R_1 וחיצוני R_2. לקליפה החיצונית רדיוס פנימי R_3 ורדיוס חיצוני R_4. נתון כי הקליפה הפנימית נייטרלית, והחיצונית טעונה במטען כולל Q. כמו כן, במרכז המערכת נמצא מטען נקודתי Q.



(א) מצאו את צפיפויות המטענים על דפנות המוליכים.

(ב) מהו השדה החשמלי בכל מקום?

(ג) מהו הפוטנציאל החשמלי בכל מקום, ביחס לאינסוף?

פתרון:

(א) $\sigma_1 = -\frac{Q}{4\pi R_1^2}$; $\sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2^2}$; $\sigma_3 = -\frac{Q}{4\pi R_3^2}$; $\sigma_4 = \frac{Q}{2\pi R_4^2}$

(ב)

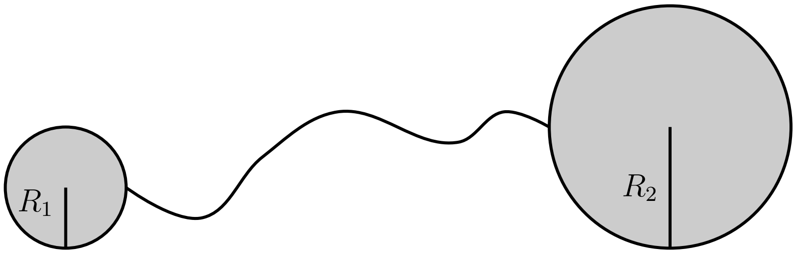
$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r < R_1 \\ 0 & R_1 < r < R_2 \\ \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & R_3 < r < R_2 \\ 0 & R_3 < r < R_4 \\ \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r^2} & r > R_4 \end{cases}$$

(ג)

$$\varphi(r) = \begin{cases} kQ\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} + \frac{2}{R_4}\right) & r \le R_1 \\ kQ\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} + \frac{2}{R_4}\right) & R_1 \le r \le R_2 \\ kQ\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_3} + \frac{2}{R_4}\right) & R_2 \le r \le R_3 \\ \frac{2kQ}{R_4} & R_3 \le r \le R_4 \\ \frac{2kQ}{r} & r \ge R_4 \end{cases}$$

3.1.12

שני כדורים מוליכים, האחד בעל רדיוס $R_1 = R$ והשני בעל רדיוס $R_2 = 2R$ נמצאים במרחק רב זה מזה (כך שאינם משפיעים זה על זה). כל אחד מהכדורים טעון במטען q. מחברים את הכדורים בעזרת חוט מוליך דק.



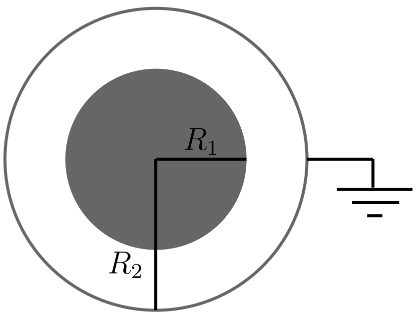
מהו המטען על כל אחד מהכדורים לאחר זמן רב?

פתרון:

$$q_1 = \frac{2}{3}q \ ; \ q_2 = \frac{4}{3}q$$

3.1.13

כדור מוליך בעל רדיוס $R_1 = 0.1\ m$ טעון במטען כולל $Q = 100\ nC$. מסביב לכדור ישנה קליפה כדורית מוליכה קונצנטרית בעלת רדיוס $R_2 = 0.15\ m$. נתון כי הקליפה מוארקת.



(א) מצאו את התפלגויות המטענים בכל המרחב.
(ב) מצאו את השדה החשמלי בכל נקודה במרחב.
(ג) מצאו את הפוטנציאל החשמלי בכל נקודה במרחב.
(ד) משחררים ממנוחה מטען נקודתי $q = -1\ nC$ שמסתו $m = 3.2 \cdot 10^{-6}\ kg$ בצמוד לחלק הפנימי של הקליפה. באיזו מהירות הוא יפגע בכדור המוליך?

פתרון:

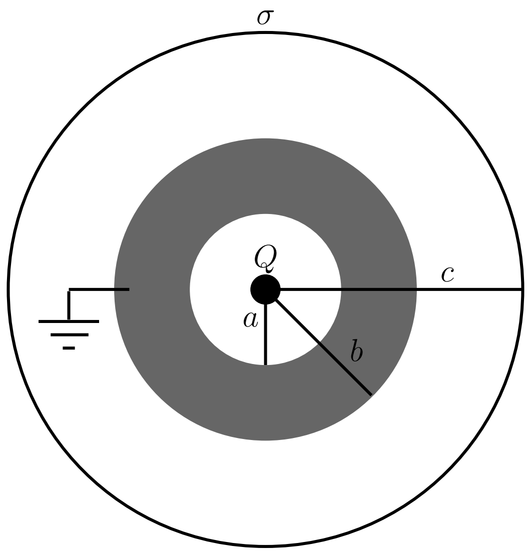
(א) על שפת הכדור המוליך מטען $Q = 100\ nC$ ועל הקליפה המוליכה מטען $-Q = -100\ nC$.

(ב) $E(r) = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{900}{r^2} & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}\ \dfrac{N}{C}$ (ג) $\varphi(r) = \begin{cases} 3000 & r < R_1 \\ \dfrac{900}{r} - 6000 & R_1 < r < R_2 \\ 0 & r > R_2 \end{cases}\ V$ (ד) $v = 1.37\ \frac{m}{s}$

3.1.14

במערכת כדורית קונצנטרית, מטען נקודתי Q נמצא במרכז. מסביבו ישנה קליפה כדורית עבה ומוליכה בעלת רדיוסים פנימי a וחיצוני b. הקליפה העבה מוארקת. מסביב לקליפה העבה ישנה קליפה דקה בעלת רדיוס c הטעונה

באופן אחיד בצפיפות מטען משטחית σ.



(א) מהן צפיפויות המטען על הדפנות הפנימית והחיצונית של הקליפה המוליכה העבה?
(ב) מהו הפוטנציאל החשמלי בכל נקודה במרחב?

פתרון:

(א) $\sigma_a = -\frac{Q}{4\pi a^2}\ ;\ \sigma_b = -\sigma c$ (ב) V

$$\varphi(r) = \begin{cases} kQ\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) & r \leqslant a \\ 0 & a \leqslant r \leqslant b \\ 4\pi k\sigma c\left(1 - \frac{b}{r}\right) & b \leqslant r \leqslant c \\ \frac{4\pi k\sigma c}{r}(c-b) & r \geqslant c \end{cases}$$

3.1.15

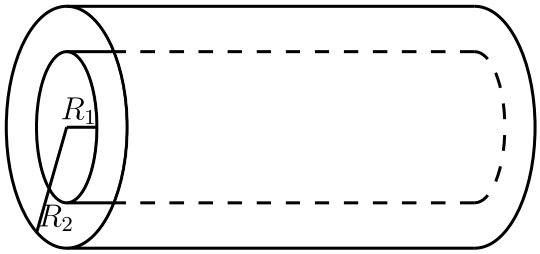
חשבו את האנרגיה האלקטרוסטטית של כדור בעל רדיוס R הטעון בצפיפות מטען אחידה ρ.

פתרון:

$$U = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}$$

3.1.16

גליל אינסופי מבודד שרדיוסו $R_1 = R$ טעון בצפיפות מטען נפחית $\rho(r) = Ar$ כאשר r המרחק האנכי מציר הגליל. הגליל מוקף בקליפה גלילית מוליכה קואקסיאלית (בעלות ציר משותף) שרדיוסה $R_2 = 1.5R$. נתון כי הקליפה נייטרלית. נתון כי הפוטנציאל החשמלי במרחק $r = 2R$ שווה לאפס (זהו ה־ref).



(א) מהו הפוטנציאל החשמלי בכל מקום במרחב (ביחס ל־ref)?
(ב) מאריקים את הקליפה המוליכה. מהי צפיפות המטען עליה לאחר זמן רב?
(ג) מהי האנרגיה החשמלית של המערכת ליחידת אורך במצב של סעיף (ב)?

פתרון:

(א) $\varphi(r)=\begin{cases} 0.12\dfrac{AR^3}{\varepsilon_0}-0.11\dfrac{Ar^3}{\varepsilon_0} & r\leqslant R \\ -\dfrac{AR^3}{3\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{2R}\right) & r\geqslant R\end{cases}$ **(ב)** $\sigma=-\dfrac{AR^2}{3}$ **(ג)** $\dfrac{U}{L}=0.572\cdot\dfrac{\pi A^2R^6}{9\varepsilon_0}$

3.1.17

שדה אלקטרוסטטי $\vec{E}$ מקיים:

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{E_0}{r}\hat{r} & r<R \\ 0 & r>R\end{cases}$$

כאשר r הוא המרחק מהראשית (קואורדינטות כדוריות) ו־ E_0 ו־ R קבועים חיוביים.
(א) מהו מערך המטענים שנמצא במרחב?
(ב) מהו הפוטנציאל החשמלי בכל נקודה במרחב?
(ג) מהי האנרגיה האלקטרוסטטית של המערכת?

פתרון:

(א) **צפיפות מטען נפחית** $\rho(r)=\dfrac{\varepsilon_0E_0}{r^2}$ **בתחום** $r<R$ **וכן צפיפות מטען משטחית** $\sigma=-\dfrac{\varepsilon_0E_0}{r}$ **ברדיוס** $r=R$.

(ב) $\varphi(r)=\begin{cases}0 & r<R \\ -E_0\ln\left(\dfrac{r}{R}\right) & r>R\end{cases}$ **(ג)** $U=2\pi\varepsilon_0E_0R$

3.1.18

נתון פוטנציאל חשמלי בקואורדינטות כדוריות:

$$\varphi(r,\theta)=\frac{A\cos\theta}{r^2}$$

כאשר A קבוע כלשהו, θ הזווית ביחס לציר z ו־r המרחק מהראשית.
(א) מהו השדה החשמלי בכל מקום במרחב?
(ב) מהי התפלגות המטענים בכל נקודה במרחב?

פתרון:

(א) $\vec{E}(r,\theta,\phi)=\hat{r}\cdot\frac{2A\cos\theta}{r^3}+\hat{\theta}\cdot\frac{A\sin\theta}{r^3}$ **(ב)** דיפול חשמלי שנמצא על ציר z. את הפוטנציאל הנתון יוצר דיפול חשמלי כאשר המרחק בין המטענים הוא קטן מאד יחסית ל־ r.

3.1.19

נתון גליל מלא אינסופי בעל רדיוס R שצפיפות המטען עליו $\rho(r)$ לא ידועה, כאשר r הוא המרחק מציר הגליל.
נתון כי הפוטנציאל החשמלי ביחס לשפת הגליל הוא:

$$\varphi(r)=\begin{cases}-\frac{\varphi_0 r^2}{R^2}+C & r\le R\\ \varphi_0\ln\frac{r}{R} & r\ge R\end{cases}$$

כאשר φ_0 הוא פוטנציאל כלשהו.
(א) מהו הקבוע C?
(ב) מהו השדה החשמלי בכל מקום?
(ג) מהי צפיפות המטען, $\rho(r)$, בכל מקום במרחב?

פתרון:

(א) $C=\varphi_0$ **(ב)** $\vec{E}(r)=\hat{r}\cdot\begin{cases}-\frac{2\varphi_0 r}{R^2} & r<R\\ \frac{\varphi_0}{r} & r>R\end{cases}$ **(ג)** $\rho(r)=\begin{cases}-\frac{4\varepsilon_0\varphi_0}{R^2} & r<R\\ 0 & r>R\end{cases}$

3.1.20

בקואורדינטות כדוריות נתון כי הפוטנציאל בתחום $r<R$ הוא

$$\varphi(r<R)=A\left(r-\frac{R}{2}\right)^2$$

וכן שהשדה החשמלי בתחום $r>R$ הוא

$$\vec{E}(r>R)=\frac{B}{r^2}\hat{r}$$

כאשר A ו־B קבועים חיוביים.
(א) מהו הפוטנציאל בכל מקום?

(ב) מהו השדה בכל מקום?

(ג) מצאו את היחס $\frac{B}{A}$.

(ד) מצאו את התפלגות המטענים במרחב.

פתרון:

(א) $\varphi(r) = \begin{cases} A\left(r - \frac{R}{2}\right)^2 & r < R \\ \frac{B}{r} & r > R \end{cases}$ **(ב)** $\vec{E}(r) = \begin{cases} -2A\left(r - \frac{R}{2}\right)\hat{r} & r < R \\ \frac{B}{r^2}\hat{r} & r > R \end{cases}$ **(ג)** $\frac{B}{A} = \frac{R^3}{4}$

(ד) צפיפות מטען משטחית $\sigma = \frac{5\varepsilon_0 AR}{4}$ **במיקום** $r = R$ **וכן צפיפות מטען נפחית** $\rho(r) = \begin{cases} 2\varepsilon_0(R - 3r) & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$

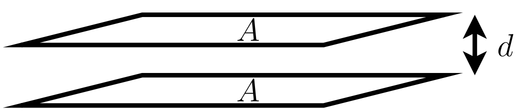
פרק 4

קיבול חשמלי והתנגדות חשמלית

4.1 קיבול וחומרים דיאלקטרים

4.1.1

חשבו ישירות ממהגדרה את הקיבול של קבל לוחות. הניחו כי ישנם שני לוחות מוליכים, ששטחם A והמרחק ביניהם d. יש להניח כי $A \gg d^2$, כלומר ניתן להתייחס ללוחות כאל אינסופיים. מעבירים מטען Q מהלוח התחתון לעליון, כך שהלוח העליון טעון במטען Q והתחתון במטען $-Q$ וכן שהמרחב בין המוליכים מלא בחומר דיאלקטרי עם מקדם ε_r.

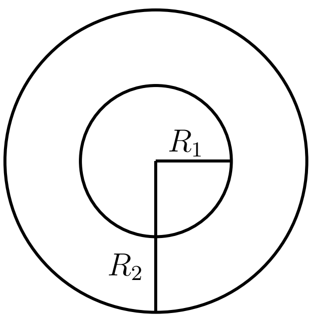


פתרון:

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r A}{d}$$

4.1.2

חשבו ישירות מההגדרה את הקיבול של קבל כדורי. הניחו כי ישנן שתי קליפות כדוריות מוליכות וקונצנטריות בעלות רדיוסים R_1 ו־R_2, ומעבירים מטען Q מהקליפה החיצונית לפנימית, כך שהקליפה הפנימית טעונה במטען Q והחיצונית במטען $-Q$ וכן שהמרחב בין המוליכים מלא בחומר דיאלקטרי עם מקדם ε_r.

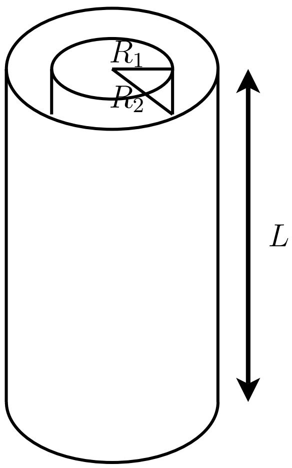


פתרון:

$$C=\frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2}{(R_2-R_1)}$$

4.1.3

חשבו ישירות ממהגדרה את הקיבול של קבל גלילי (ליחידת אורך). הניחו כי ישנן שתי קליפות גליליות בעלות רדיוסים R_1 ו־R_2. יש להניח כי אורך הקליפות L הרבה יותר גדול מהרדיוסים שלהן, כך שניתן להתייחס אליהן כאל אינסופיות. מעבירים מטען Q מהקליפה החיצונית לפנימית, כך שהקליפה הפנימית טעונה במטען Q והחיצונית במטען $-Q$ וכן שהמרחב בין המוליכים מלא בחומר דיאלקטרי עם מקדם ε_r.



פתרון:

$$\frac{C}{L}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\left(R_2/R_1\right)}$$

4.1.4

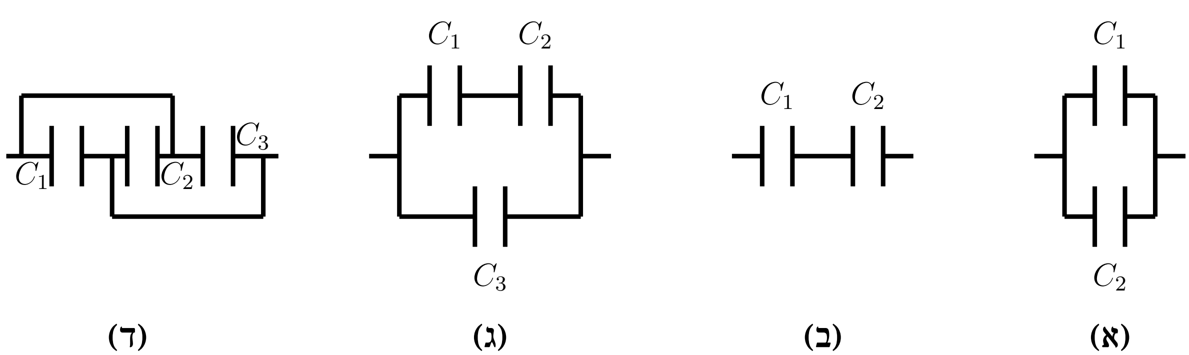
מהו הקיבול השקול של:

(א) שני קבלים המחוברים במקביל?

(ב) שני קבלים המחוברים בטור?

(ג) שלושה קבלים, שניים בטור והשלישי במקביל אליהם?

(ד) שלושת הקבלים הנתונים בשרטוט?

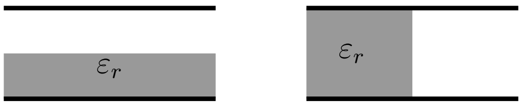


פתרון:

(א) $C_{tot} = C_1 + C_2$ **(ב)** $C_{tot} = \dfrac{C_1C_2}{C_1 + C_2}$ **(ג)** $C_{tot} = \dfrac{C_1C_2 + C_1C_3 + C_2C_3}{C_1 + C_2}$ **(ד)** $C_{tot} = C_1 + C_2 + C_3$

4.1.5

קיבולו של קבל לוחות בריק הינו C_0. ממלאים את חציו בחומר דיאלקטרי בעל קבוע ε_r, בשני אופנים שונים, כמשורטט. מהו הקיבול החדש בכל מקרה?



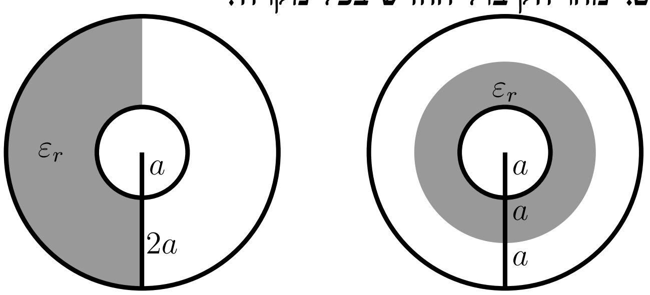
(א) **(ב)**

פתרון:

(א) $C_{tot} = \dfrac{1+\varepsilon_r}{2}C_0$ **(ב)** $C_{tot} = \dfrac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}C_0$

4.1.6

קבל כדורי מורכב מרדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני $3a$. אל תוך הקבל מכניסים חומר דיאלקטרי בעל מקדם ε_r כך שהוא ממלא רק את חלק מנפחו, בשני אופנים שונים, כמשורטט. מהו הקיבול החדש בכל מקרה?



(א) **(ב)**

פתרון:

(א) $C_{tot} = \dfrac{24\pi\varepsilon_0\varepsilon_r a}{3+\varepsilon_r}$ **(ב)** $C_{tot} = 3\pi\varepsilon_0(1+\varepsilon_r)a$

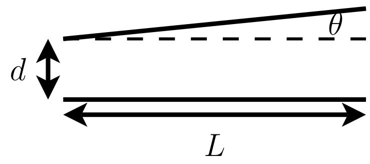
4.1.7

קבל לוחות עשוי מלוח ריבועי ששטחו $A = L \times L$, ומרחק בין הלוחות d.

מטים את אחד הלוחות בזווית קטנה $\theta \simeq \sin\theta \simeq \tan\theta$.

מהו קיבול הקבל?

ניתן להשתמש בקירוב $\ln(1+x) \simeq x - \dfrac{x^2}{2}$

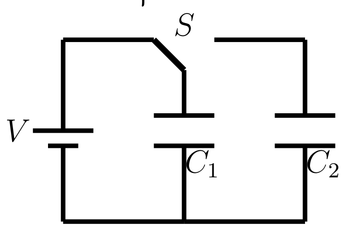


פתרון:

$$C = \frac{\varepsilon_0 L^2}{d}\left(1 - \frac{L}{2d}\theta\right)$$

4.1.8

במעגל המופיע בשרטוט מחוברים שני קבלים C_1 ו־C_2 ומקור מתח V.
(א) כאשר המפסק S נמצא במצב השמאלי, הקבל C_1 נטען. לאחר גמר הטעינה, מה יהיה המתח עליו? המטען עליו? והאנרגיה האגורה בו?
(ב) כאשר מעבירים את המפסק למצב הימני (לאחר ש־C_1 נטען) חלק מהמטען יעבור לקבל C_2. לאחר גמר המעבר, מה יהיה המתח על כל אחד מהקבלים? המטען על כל אחד מהקבלים? והאנרגיה האגורה בכל אחד מהקבלים?



פתרון:

(א) $V_1 = V\ ;\ Q_1 = C_1 V\ ;\ U_1 = \frac{1}{2}C_1 V^2$

(ב) $V_1^{'} = V_2^{'} = \frac{C_1}{C_1 + C_2}V\ ;\ Q_1^{'} = \frac{C_1^2}{C_1 + C_2}V\ ;\ Q_2^{'} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}V$

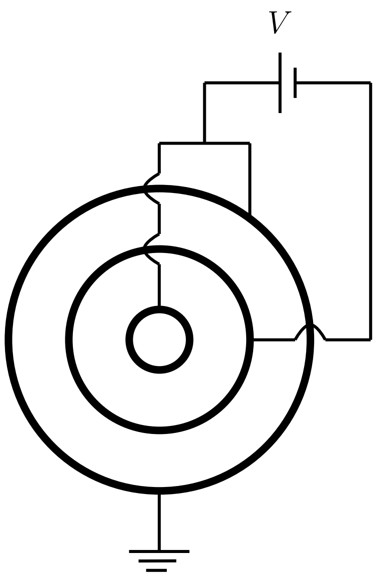
$$U_1^{'} = \frac{1}{2}\frac{C_1^3}{(C_1 + C_2)^2}V^2\ ;\ U_2^{'} = \frac{1}{2}\frac{C_1^2 C_2}{(C_1 + C_2)^2}V^2$$

4.1.9

שלוש קליפות כדוריות (דקות) מוליכות וקונצנטריות בעלות רדיוסים:

$$R_1 = R\ ;\ R_2 = 3R\ ;\ R_3 = 5R$$

מחוברות לסוללה בת מתח V, באופן הבא:
הקליפה הפנימית והקליפה החיצונית מחוברת להדק החיובי של הסוללה, והקליפה האמצעית מחוברת להדק השלילי.
כמו כן נתון כי הקליפה החיצונית מוארקת.



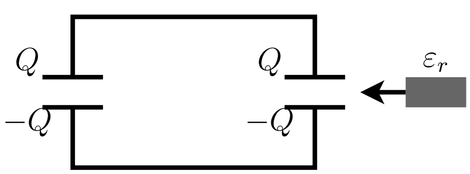
(א) מהם המטענים על כל אחת מהקליפות?
(ב) מהו קיבול המערכת?

פתרון:

(א) $q_3 = \frac{15VR}{2k}$; $q_2 = -\frac{9VR}{k}$; $q_1 = \frac{3VR}{2k}$ (ב) $C = 36\pi\varepsilon_0 R$

4.1.10

שני קבלי לוחות זהים, בעלי שטח A ומרחק בין לוחות d מחוברים כמתואר בשרטוט. כל אחד מהקבלים טעון במטען זהה Q (כלומר שלוח אחד של כל קבל טעון במטען חיובי והשני במטען שלילי). מכניסים חומר עם מקדם דיאלקטרי ε_r לתוך הקבל הימני, כך שהוא ממלא את כל נפח הקבל.



(א) מהו המטען על כל אחד מהקבלים זמן רב לאחר הכנסת הלוח?
(ב) מהי העבודה שהושקעה בעת הכנסת החומר הדיאלקטרי?

פתרון:

(א) $q_2 = \frac{2}{1+\varepsilon_r}Q$; $q_1 = \frac{2\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}Q$ (ב) $W = \frac{Q^2 d}{\varepsilon_0 A}\left(\frac{1-\varepsilon_r}{1+\varepsilon_r}\right)$

4.1.11

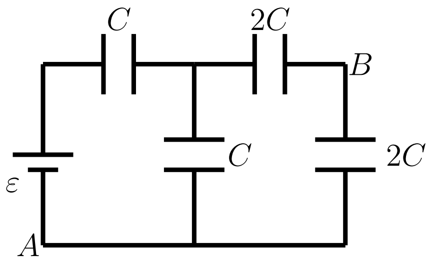
קבל לוחות בעל לוח ריבועי ששטחו $A = 0.25\ m^2$ ומרחק בין לוחות $d = 5\ mm$ מחובר לסוללה בת מתח $V = 250\ V$. מכניסים לתוך הקבל לוח עשוי סיליקון $(\varepsilon_r = 12)$ ששטחו A ועוביו $p = 2\ mm$. בכמה משתנים הקיבול, המטען, והאנרגיה האגורה בקבל לאחר הכנסת הלוח, ביחס למצב המקורי?

פתרון:

$$\Delta C = 256.3\ \text{pF}\ ;\ \Delta Q = 65\ \text{nC}\ ;\ \Delta U = 8\ \mu\text{J}$$

4.1.12

נתון המעגל הבא, ובו קבלים בעלי קיבול C וקבלים בעלי קיבול כפול $2C$. מקור המתח הוא בעל כא"מ ε.



(א) מהם המטען והמתח על כל קבל?

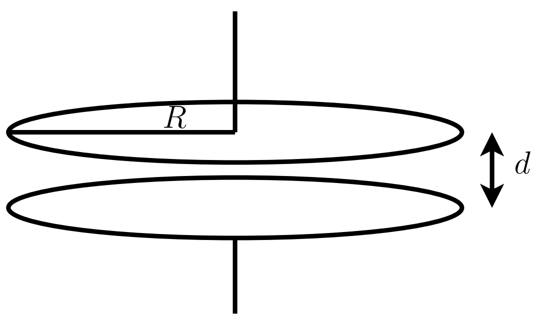
(ב) מהו הפרש הפוטנציאלים בין הנקודות A ו־B?

פתרון:

(ב) $V_{AB} = -\frac{1}{6}\varepsilon$

4.1.13

קבל שלוחותיו עגולים בעלי רדיוס R ומרוחקים זה מזה מרחק d ממולא בחומר דיאלקטרי התלוי במרחק r ממרכז המערכת, $\varepsilon_r = \alpha r + 1$ כאשר $\alpha = \frac{3}{2R}$. הקבל מחובר למקור מתח V.



מהי האנרגיה האגורה בקבל?

פתרון:

$$U = \frac{\pi\varepsilon_0 R^2 V^2}{d}$$

4.2 התנגדות

4.2.1

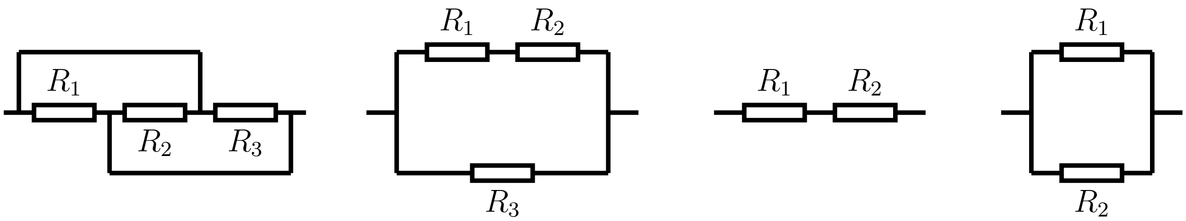
מהו ההתנגדות השקולה של:

(א) שני נגדים המחוברים במקביל?

(ב) שני נגדים המחוברים בטור?

(ג) שלושה נגדים, שניים בטור והשלישי במקביל אליהם?

(ד) שלושת הנגדים הנתונים בשרטוט?



(ד) (ג) (ב) (א)

פתרון:

(א) $R_{tot}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$ (ב) $R_{tot}=R_1+R_2$ (ג) $R_{tot}=\frac{(R_1+R_2)R_3}{R_1+R_2+R_3}$ (ד) $R_{tot}=\frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$

4.2.2

נתון גליל בעל שטח חתך A, אורך L ומוליכות $\sigma(x)=\sigma_0\frac{L}{x}$, כאשר x המרחק מקצה הגליל.

(א) מהי התנגדות הגליל?

(ב) מה תהיה צפיפות הזרם בגליל אם נחבר את קצותיו להפרש פוטנציאלים V?

(ג) מה יהיה השדה החשמלי במוליך כאשר יזרום בו זרם?

פתרון:

(א) $R=\frac{L}{2\sigma_0 A}$ (ב) $j=\frac{2\sigma_0 V}{L}$ (ג) $E(x)=\frac{2V}{L}x$

4.2.3

קליפה כדורית שרדיוסה הפנימי a והחיצוני b עשויה חומר שהתנגדותו הסגולית הינה ρ_0. הדופן הפנימית של הקליפה מוארקת והדופן החיצונית שלה מוחזקת בפוטנציאל V.

(א) מהי התנגדות הקליפה בין הדופן הפנימית לחיצונית?

(ב) מהו הזרם הכללי הזורם בקליפה?

(ג) מצאו את צפיפות הזרם כפונקציה של המרחק r ממרכז הקליפה?

(ד) מהו השדה החשמלי השורר בקליפה?
(ה) מהו הספק החום הנוצר בקליפה?

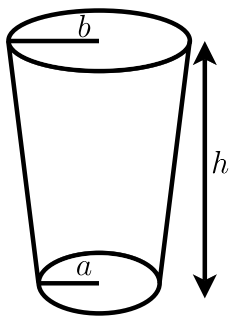
פתרון:

(א) $R=\frac{\rho_0}{4\pi}\left(\frac{b-a}{ab}\right)$ **(ב)** $I=\frac{4\pi V}{\rho_0}\left(\frac{ab}{b-a}\right)$ **(ג)** $j(r)=\frac{V}{\rho_0 r^2}\left(\frac{ab}{b-a}\right)$ **(ד)** $E(r)=\frac{V}{r^2}\left(\frac{ab}{b-a}\right)$

(ה) $P=\frac{4\pi V^2}{\rho_0}\left(\frac{ab}{b-a}\right)$

4.2.4

נתון נגד בעל גיאומטריה קונית, בעל רדיוס קטן a, רדיוס גדול b, וגובה h. בהנחה כי ההתנגדות הסגולית של החומר היא ρ, מצאו את התנגדותו של הנגד.
כמו כן, בדקו כי התוצאה מתארת נכון את המצב $a=b$.

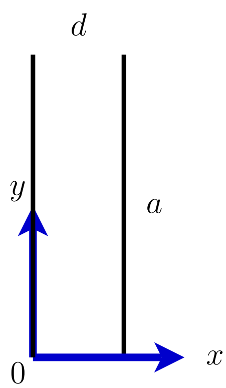


פתרון:

$$R=\rho\frac{h}{\pi ab}$$

4.2.5

בין שני לוחות בעלי שטח חתך ריבועי $a\times a$ ושהמרחק ביניהם d, מצוי חומר דיאלקטרי בעל מוליכות שאינה קבועה σ.



חשבו את ההתנגדות במקרים הבאים:

(א) $\sigma = \sigma_0 + \beta y$.

(ב) $\sigma = \sigma_0 + \beta x$.

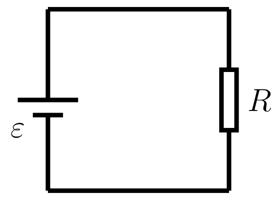
פתרון:

(א) $R = \dfrac{d}{a^2(\sigma_0 + \frac{\beta a}{2})}$ **(ב)** $R = \dfrac{1}{a^2\beta}\ln\left(1 + \dfrac{\beta a}{\sigma_0}\right)$

4.3 מעגלי זרם ישר

4.3.1

נתון מעגל חשמלי ובו סוללה ונגד, כמשורטט.



(א) היכן יש לחבר מד מתח למעגל כדי למדוד את המתח החשמלי על הנגד? מה יש לדרוש לגבי התנגדותו של מד המתח?

(ב) היכן יש לחבר מד זרם למעגל כדי למדוד את הזרם הזורם בו? מה יש לדרוש לגבי התנגדותו של מד הזרם?

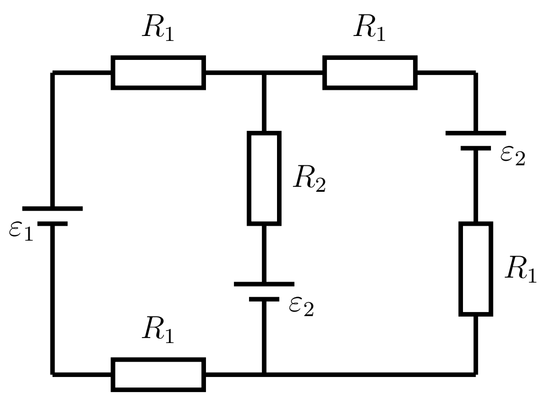
פתרון:

(א) יש לחבר מד מתח במקביל לנגד. על התנגדות מד המתח להיות הרבה יותר גדולה מהתנגדותו של הנגד הנמדד.

(ב) יש לחבר מד זרם בטור למעגל. על התנגדות מד הזרם להיות הרבה יותר קטנה מהתנגדות הנגד.

4.3.2

נתון המעגל הבא:



נתונים: $\varepsilon_2 = 6.3 \text{ V}$; $\varepsilon_1 = 2.1 \text{ V}$; $R_2 = 3.5\ \Omega$; $R_1 = 1.7\ \Omega$.

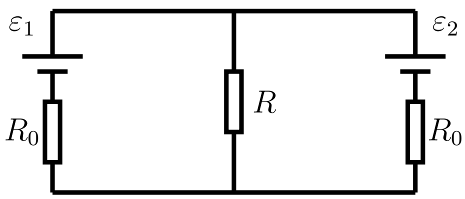
(א) מצאו את הזרם והמתח על כל נגד.

(ב) חשבו את הספק המעגל.

פתרון:

(ב) $P_{tot} = 3.44 \text{ W}$

4.3.3



נתון המעגל החשמלי הבא, ובו נתונים הכא"מים ε_1 ו־ε_2 וההתנגדויות R_0 ו־R.

מצאו עבור איזו התנגדות R הספק החום המתבזבז על נגד זה הוא המקסימלי, ואת ערכו של הספק זה. את הפתרונות יש לספק בעזרת הנתונים ε_1, ε_2 ו־R_0.

פתרון:

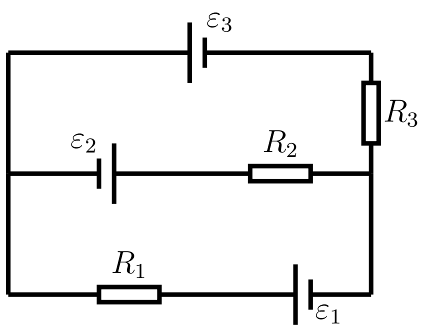
$$R = \frac{R_0}{2}\ ;\ P_{max} = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{8R_0}$$

4.3.4

נתון המעגל החשמלי הבא:

$\varepsilon_1 = 2\ \text{V}\ ;\ \varepsilon_2 = 3\ \text{V}\ ;\ \varepsilon_3 = 6\ \text{V}$

$R_1 = 20\ \Omega\ ;\ R_2 = 7\ \Omega\ ;\ R_3 = 12\ \Omega$



(א) חשבו את הזרם בכל ענף.

(ב) מהו ההספק על הנגד R_1?

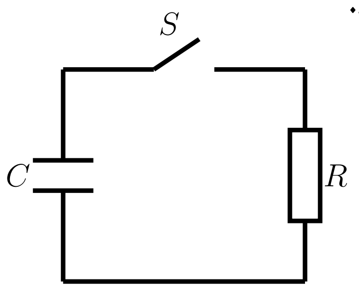
פתרון:

(א) $0.448\ \text{A}\ ;\ 0.517\ \text{A}\ ;\ 0.069\ \text{A}$ **(ב)** $P_{R_1} = 0.095\ \text{W}$

4.4 מעגלי RC (נגד וקבל)

4.4.1

נתון מעגל RC (פריקה). ברגע $t=0$ הקבל טעון במטען Q_0 ואז סוגרים את המפסק S.



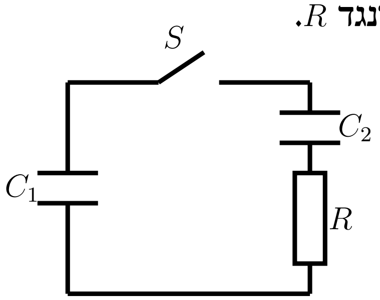
(א) רשמו את משוואת המעגל.
(ב) מצאו את $Q(t)$, המטען על הקבל כפונקציה של הזמן.
(ג) מצאו את הזרם במעגל בכל רגע, $I(t)$.

פתרון:

(א) $-R\frac{dQ}{dt}-\frac{Q}{C}=0$ (ב) $Q(t)=Q_0e^{-\frac{t}{RC}}$ (ג) $I(t)=\frac{Q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}$

4.4.2

קבל C_1 טעון במטען Q_0. כאשר סוגרים את המפסק מתחבר קבל זה בטור לקבל C_2 ונגד R.



(א) רשמו את משוואת המעגל.
(ב) מצאו את $Q_1(t)$, המטען על הקבל C_1 כפונקציה של הזמן.
(ג) מצאו את הזרם במעגל בכל רגע, $I(t)$.
(ד) מהי האנרגיה האלקטרוסטטית במעגל לפני סגירת במפסק, וזמן רב לאחר סגירתו.
(ה) הראו כי הפרש האנרגיות שחושבו בסעיף הקודם שווה לאנרגיית החום שהתבזבזה על הנגד בעת הזרימה.

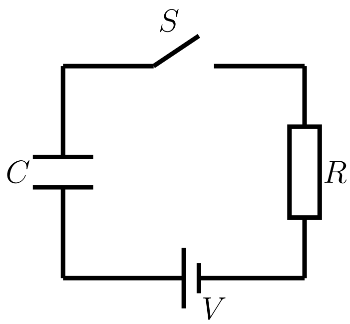
פתרון:

(א) $-R\frac{dQ_1}{dt}-\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)Q_1+\frac{Q_0}{C_2}=0$ (ב) $Q_1(t)=\frac{C_1}{C_1+C_2}Q_0+\frac{C_2}{C_1+C_2}Q_0e^{-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)t}$

(ג) $I(t)=\frac{Q_0}{RC_1}e^{-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)t}$ (ד) $U_0=\frac{Q_0^2}{2C_1}\ ;\ U(t\to\infty)=\frac{Q_0^2}{2(C_1+C_2)}$

4.4.3

נתון מעגל RC (טעינה). ברגע $t=0$ הקבל אינו טעון ואז סוגרים את המפסק S.



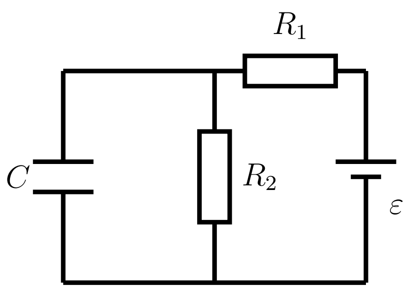
(א) רשמו את משוואת המעגל.
(ב) מצאו את $Q(t)$, המטען על הקבל כפונקציה של הזמן.
(ג) מצאו את הזרם במעגל בכל רגע, $I(t)$.

פתרון:

(א) $R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}-V=0$ (ב) $Q(t)=CV\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)$ (ג) $I(t)=\frac{V}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$

4.4.4

נתון המעגל הבא. ברגע $t=0$ המתח על הקבל הוא V_0. מצאו את המתח על הקבל כפונקציה של הזמן!



פתרון:

$$V_C(t)=\varepsilon\frac{R_2}{R_1+R_2}\left[1-e^{-\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)t}\right]+V_0e^{-\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)t}$$

4.4.5

סיליקון הוא בעל מקדם דיאלקטרי $\varepsilon_r=12$ והתנגדות סגולית $\rho=2.5\cdot10^3\ \Omega\cdot\mathrm{m}$, בטמפרטורת החדר. ממלאים בסיליקון קבל לוחות בעל מימדים ששטח לוחותיו $A=0.25\ \mathrm{m}^2$ ומרחק בין לוחות $d=0.2\ \mathrm{mm}$.
(א) מצאו את הקיבול, ההתנגדות, וזמן הפריקה האופייני של הקבל.
(ב) הראו כי האנרגיה שאובדת בזמן הפריקה שווה בדיוק לאנרגיית החום המתפתחת בנגד.

פתרון:

(א) $C = 132.81\ \text{nF}\ ;\ R = 2\ \Omega\ ;\ \tau = 265.62\ \text{ns}$

פרק 5

השדה המגנטי

5.1 כח ומומנט כח בשדה מגנטי

5.1.1

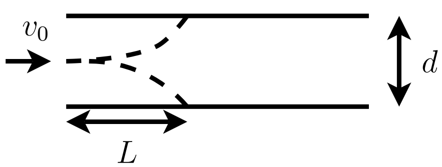
פרוטון ($m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg ; $q_p = |e| = 1.6 \cdot 10^{-19}$ c) בעל אנרגיה קינטית $E_k = 5.3$ MeV נע בזווית $30°$ ביחס לציר x. באיזור שורר שדה מגנטי אחיד שגודלו $B = 1.2$ T וכיוונו ציר y.
מהו הכח שפועל על הפרוטון?

פתרון:

$F = 5.3 \cdot 10^{-12}$ N בכיוון ציר z.

5.1.2

חלקיקים זהים בעלי מטען $q > 0$ ומסה m נכנסים במהירות v_0 בדיוק במרכז בין שני לוחות קבל שהמרחק ביניהם d.



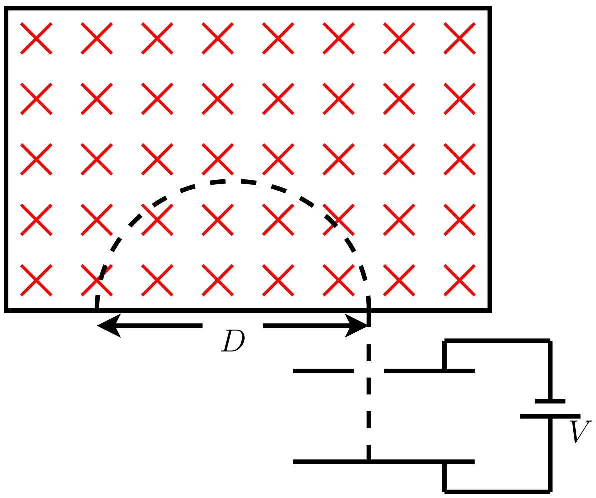
(א) מהו שדה חשמלי אחיד $\vec{E}$ (ללא שדה מגנטי $\vec{B}$) שיש להפעיל כדי שהחלקיקים יפגעו בלוח העליון במרחק אופקי L?
(ב) מהו שדה מגנטי אחיד $\vec{B}$ (ללא שדה חשמלי $\vec{E}$) שיש להפעיל כדי שהחלקיקים יפגעו בלוח התחתון במרחק אופקי L?
(ג) מפעילים יחדיו את שני השדות שמצאתם בסעיפים הקודמים. האם החלקיקים יתחילו לסטות לכיוון מסוים? אם כן, באיזה לוח הם יפגעו במידה והלוחות ארוכים מספיק?

פתרון:

(א) $E=\frac{mdv_0^2}{qL^2}$ בכיוון מעלה. **(ב)** $B=\frac{4mdv_0}{q(4L^2+d^2)}$ בכיוון החוצה מהדף. **(ג)** כן, הם יסטו כלפי מעלה ויפגעו בלוח העליון.

5.1.3

חלקיק בעל מטען $q=1.6\cdot10^{-19}$ c מואץ בהפרש פוטנציאלים $V=800$ V. בתום שלב ההאצה הוא נכנס לתוך ספקטרוגרף מסות, בו שורר שדה מגנטי אחיד ומאונך (פנימה לדף) $B=0.2$ T, ונתון כי הוא פוגע בשפת הספקטרוגרף במרחק $D=2.76$ m.



מהי מסתו של החלקיק?

פתרון:

$m=7.62\cdot10^{-24}$ kg

5.1.4

אלקטרון ($m_e=9.11\cdot10^{-31}$ kg ; $q_e=e=-1.6\cdot10^{-19}$ c) נע בהשפעת שדה מגנטי $\vec{B}=0.5\hat{i}$ T ושדה חשמלי $\vec{E}=-3\cdot10^4\hat{i}\ \frac{\text{V}}{\text{m}}$. ברגע $t=0$ לאלקטרון יש מהירות $\vec{v}_0=(1.5\cdot10^5,0,2\cdot10^5)$ m/s.

(א) תארו את מסלולו של האלקטרון ומצאו את T - זמן מחזור התנועה המעגלית.

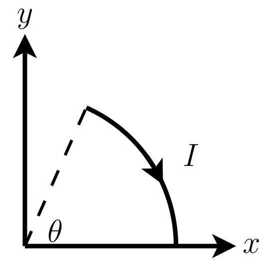
(ב) מצאו את המרחק שעובר האלקטרון לאורך ציר x מרגע ההתחלה ועד לרגע $t=\frac{T}{2}$.

פתרון:

(א) $T=71.5$ ps **(ב)** $\Delta x=8.73\ \mu$m

5.1.5

קשת מעגלית הנשענת על זווית θ נושאת זרם I עם כיוון השעון. רדיוסה של הקשת הוא R. באיזור שורר שדה מגנטי אחיד הניצב למישור הדף $\vec{B}=(0,0,B_0)$ כאשר B_0 קבוע חיובי כלשהו.



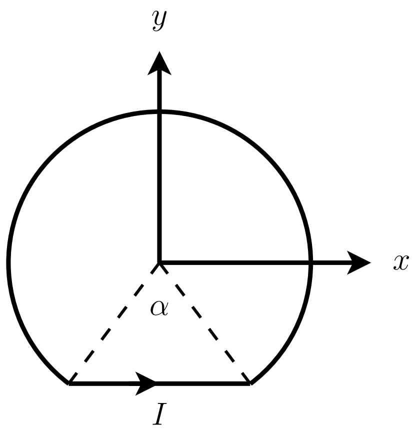
מהו הכח הפועל על הקשת?

פתרון:

$\vec{F}=IB_0R(-\sin\theta,\cos\theta-1,0)\ \mathrm{N}$

5.1.6

בקשת מעגלית שרדיוסה R הוחלף חלק הנשען על זווית α במיתר. הקשת נושאת זרם I נגד כיוון השעון. באיזור שורר שדה מגנטי $\vec{B}(r)=B_0\frac{R}{r}\hat{\varphi}$ כאשר B_0 קבוע כלשהו ו־r המרחק ממרכז הקשת. $\hat{\varphi}$ הוא הכיוון המשיקי.



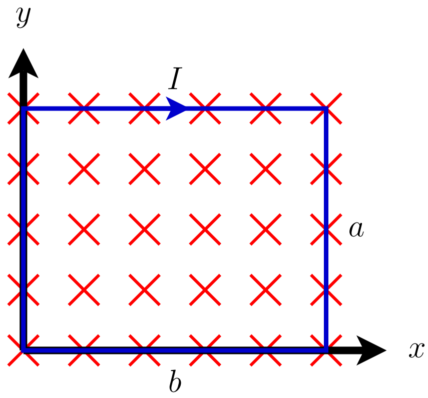
מהו הכח הפועל על הקשת?

פתרון:

$F=0$

5.1.7

מסדרת זרם מלבנית בעלת גיאומטריה $a=0.3\ \mathrm{m}\ ;\ b=0.4\ \mathrm{m}$ נושאת זרם $I=3\ \mathrm{A}$ עם כיוון השעון. המסגרת נמצאת באיזור ובו שדה מגנטי לא אחיד $\vec{B}=(0,0,-2xy^2)\ \mathrm{T}$.



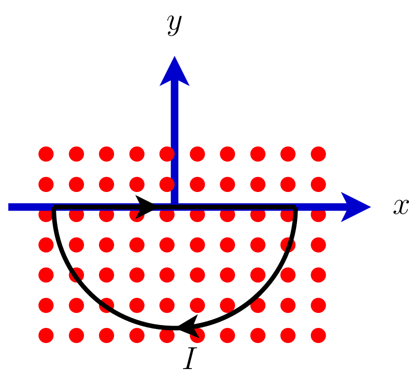
מצאו את הכח על המסגרת!

פתרון:

$\vec{F} = (0.0216, 0.0432, 0)\ \mathrm{N}$

5.1.8

נתון תיל המורכב מחצי קשת מעגלית בעלת רדיוס R וחלק ישר (לאורך הקוטר). התיל מונח כך שחלקו הישר על ציר ה־x ומרכז הקשת המעגלית בראשית. בתיל זורם זרם I עם כיוון השעון. באיזור שורר שדה מגנטי שאינו אחיד $\vec{B} = (0, 0, 6r^2)\ \mathrm{T}$ במערכת הצירים הנתונה, כאשר r המרחק מהראשית.



מהו הכח על התיל?

פתרון:

$\vec{F} = 8IR^3\hat{j}$

5.1.9

שדה מגנטי שגודלו $B = 0.05\ \mathrm{T}$ שורר במרחב בכיוון החיובי של ציר ה־x. זרם של $50\ \mathrm{A}$ זורם בתיל בעל צורה מלבנית שקודקודיו בנקודות $D = (-1, -1, -1)\ ;\ C = (-1, -1, 1)\ ;\ B = (1, 1, -1)\ ;\ A = (1, 1, 1)$. כיוון הזרם הוא מ־$A$ ל־B.

(א) חשבו את המומנט המגנטי של התיל המלבני.

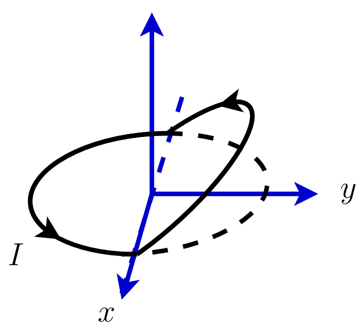
(ב) חשבו את הכח ואת מומנט הכח שפועלים על התיל המלבני.

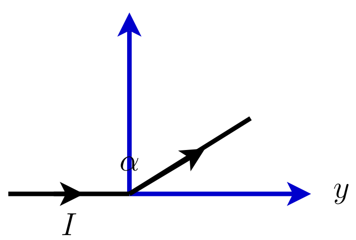
פתרון:

(א) $\vec{\mu} = (-200, 200, 0)\ \mathrm{A \cdot m^2}$ **(ב)** $\vec{\tau} = (0, 0, -10)\ \mathrm{N \cdot m} \quad ; \quad \vec{F} = 0$

5.1.10

נתונה טבעת נושאת זרם I שרדיוסה R. הטבעת שוכבת על מישור xy. מכופפים את הטבעת לאורך הקוטר ששוכב על ציר ה־x כך שנוצרת בין שני חצאיה זווית α. נתון שדה מגנטי אחיד שגודלו B וכיוונו ציר z.





(א) מהו הכח ומהו מומנט הכח הפועלים על הטבעת?

(ב) כיצד יש לכוון את הטבעת כדי שתימצא בשווי משקל?

פתרון:

(א) $\vec{\tau} = \left(-IB\frac{\pi R^2}{2}\sin\alpha\right)\hat{i}\ \mathrm{N \cdot m} \quad ; \quad \vec{F} = 0$

5.1.11

טבעת עגולה בעלת שטח $A = 4.45\ \mathrm{cm^2}$ נושאת זרם $I = 5\ \mathrm{A}$. הטבעת חופשיה להסתובב סביב קוטרה. ברגע $t = 0$ המומנט המגנטי של הטבעת נתון בביטוי $\vec{\mu} = \mu_0(-0.8\hat{i} + 0.6\hat{j})$ כאשר μ_0 הוא גודלו של המומנט המגנטי. ברגע זה מפעילים שדה מגנטי $\vec{B} = 1.4 \cdot 10^{-3}(\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k})\ \mathrm{T}$. כתוצאה מכך הטבעת מסתובבת, כך שלאחר שהסתובבה ב־$90°$ המומנט המגנטי שלה הוא $\vec{\mu} = -\mu_0\hat{k}$.

חשבו את השינוי באנרגיה הפוטנציאלית.

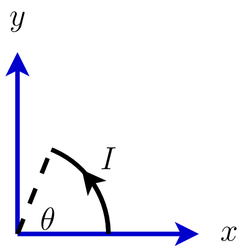
פתרון:

$\Delta U = -8.1 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}$

5.2 חוק ביו־סבר

5.2.1

קשת מעגלית הנשענת על זווית θ נושאת זרם I נגד כיוון השעון. רדיוס הקשת הוא R.



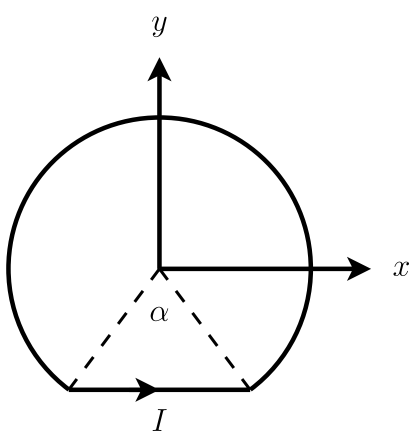
מהו השדה המגנטי במרכז הקשת?

פתרון:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\theta$$

5.2.2

בקשת מעגלית שרדיוסה R הוחלף חלק הנשען על זווית α במיתר. הקשת נושאת זרם I נגד כיוון השעון.



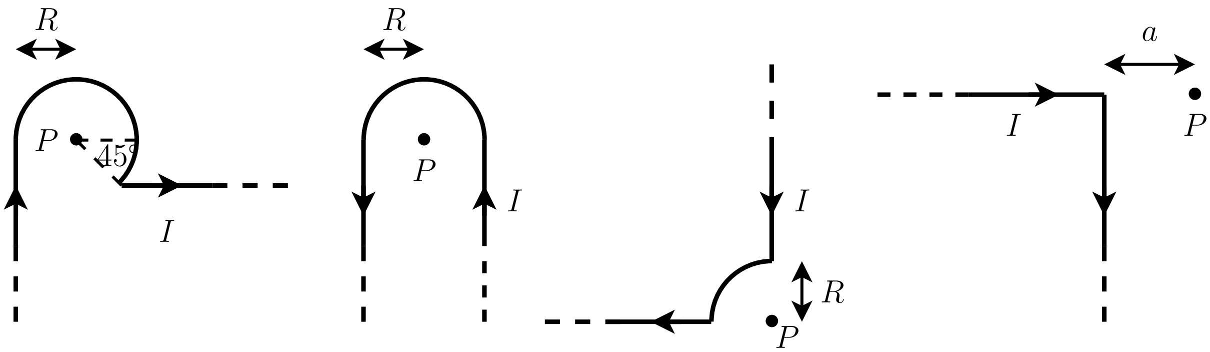
מהו השדה המגנטי בראשית (מרכז הקשת המעגלית)?

פתרון:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(2\pi - \alpha + 2\tan\alpha)$$

5.2.3

ארבעה תיילים אינסופיים נושאים זרם I ומקופלים בצורות הבאות:



(ד) (ג) (ב) (א)

מהו השדה המגנטי בנקודה P בכל אחד מהמקרים?

פתרון:

(א) $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}$ **(ב)** $B=\dfrac{\mu_0 I}{8R}$ **(ג)** $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}(2+\pi)$ **(ד)** $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi R}(2+5\pi/4-\sqrt{2})$

5.2.4

טבעת בעלת רדיוס R טעונה במטען Q המפולג לאורכה באופן אחיד. הטבעת מסתובבת סביב מרכזה בתדירות f.

(א) מצאו את השדה המגנטי שיוצרת הטבעת לאורך הציר האנכי מרכזי שלה.

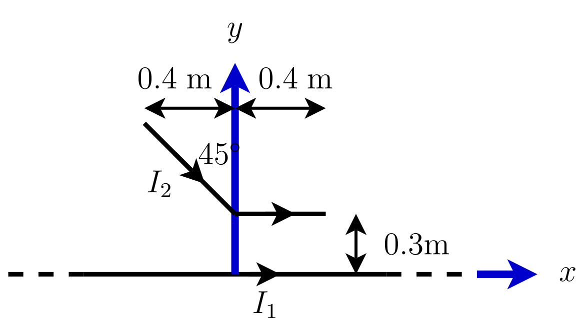
(ב) בדקו כי השדה שמצאתם מקיים את חוק אמפר.

פתרון:

(א) $\vec{B}=\dfrac{\mu_0 Q f R^2}{2(R^2+z^2)^{3/2}}\hat{k}$

5.2.5

תיל אינסופי שוכב על ציר ה־x ונושא זרם $I_1=1.3\text{ A}$. תיל נוסף, שאורכו סופי, נושא זרם $I_2=0.6\text{ A}$ כמשורטט.



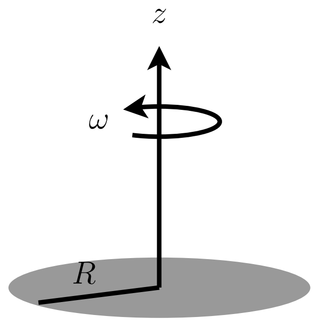
מהו הכח שפועל על התיל נושא זרם I_2?

פתרון:

$$\vec{F} = (-1.32 \cdot 10^{-7}, -3.4 \cdot 10^{-7})\ \mathrm{N}$$

5.2.6

נתונה דיסקה בעלת רדיוס R הטעונה בצפיפות מטען משטחית לא אחידה $\sigma(r) = \sigma_0 \frac{r}{R}$, כאשר r המרחק ממרכזה. מסובבים את הדיסקה במהירות זוויתית קבועה ω סביב הציר האנכי־מרכזי שלה (ציר z).



(א) חשבו את השדה המגנטי במרכז הדיסקה.

(ב) חשבו את המומנט המגנטי של הדיסקה.

(ג) נתון כי במרחב פועל שדה מגנטי חיצוני $\vec{B} = B_0(\hat{i} - \hat{j})$. מהו מומנט הכח הפועל על הדיסקה?

פתרון:

(א) $\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma_0 \omega R}{4}\hat{k}$ **(ב)** $\vec{\mu} = \frac{\pi \sigma_0 \omega R^4}{5}\hat{k}$ **(ג)** $\vec{\tau} = \frac{\pi \sigma_0 \omega R^4 B_0}{5}\hat{k}$

5.3 חוק אמפר

5.3.1

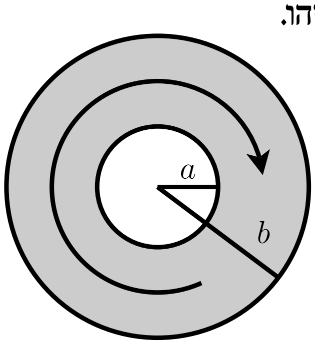
בגליל אינסופי שרדיוסו R זורם זרם I לאורכו. התפלגות הזרם אינה אחידה כך שצפיפות הזרם תלויה במרחק r מציר הגליל באופן הבא: $j(r) = j_0\frac{r}{R}$.
מצאו את השדה המגנטי בכל נקודה במרחב.

פתרון:

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 j_0 r^2}{3R} & r \leq R \\ \dfrac{\mu_0 j_0 R^2}{3r} & r \geq R \end{cases}$$

5.3.2

בגליל חלול וארוך מאד בעל רדיוס פנימי a וחיצוני b זורם זרם בצורה היקפית, עם כיוון השעון. צפיפות הזרם אינה אחידה ותלויה במרחק r מציר הגליל באופן הבא $\vec{j}(r) = \alpha r^2 \hat{\varphi}$, כאשר α קבוע כלשהו.



(א) מהן היחידות הפיסיקליות של הקבוע α?
(ב) מהו השדה המגנטי בכל מקום במרחב?

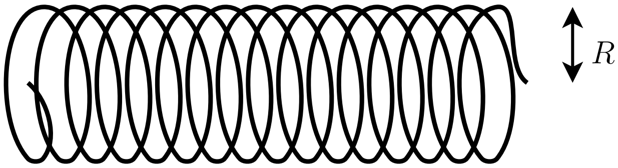
פתרון:

(א) $[\alpha] = \dfrac{A}{m^4}$ **(ב)**

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 \alpha \dfrac{b^3 - a^3}{3} & r \leq a \\ \mu_0 \alpha \dfrac{b^3 - r^3}{3} & a \leq r \leq b \\ 0 & b \leq r \end{cases}$$

5.3.3

נתון סליל ארוך מאד, בעל רדיוס R. צפיפות הליפופים של הסליל היא 5000 ליפופים למטר. חשבו את השדה המגנטי בכל נקודה בסליל, אם נתון כי זורם בו זרם $I = 30\ \text{mA}$.

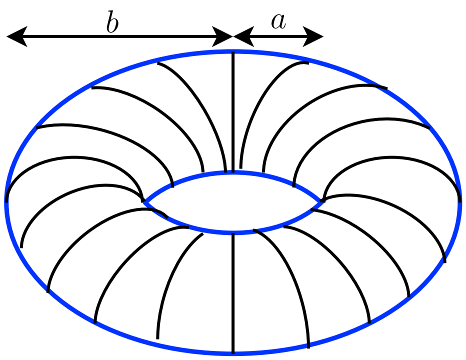


פתרון:

$$B = 1.885 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{T}$$

5.3.4

טורוס הוא טבעת עבה עם חתך מעגלי (צורה של בייגלה). על טורוס בעל רדיוס פנימי a ורדיוס חיצוני b מלפפים חוט מוליך N פעמים כך שצפיפות הליפופים קבועה.



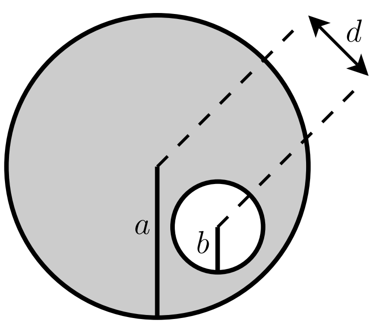
מהו השדה המגנטי בכל מקום במרחב, אם נתון כי מזרימים זרם I בחוט המוליך?

פתרון:

$$B(r) = \begin{cases} 0 & r \le a \\ \dfrac{\mu_0 N I}{2\pi r} & a \le r \le b \\ 0 & b \le r \end{cases}$$

5.3.5

נתון גליל אינסופי בעל רדיוס a ובתוכו קדח גלילי אינסופי בעל רדיוס b. מרכז הקדח נמצא במרחק d ממרכז הגליל. נתון כי לאורך הגליל זורם זרם I בצפיפות אחידה. השרטוט מתאר מבט מלמעלה על המערכת.



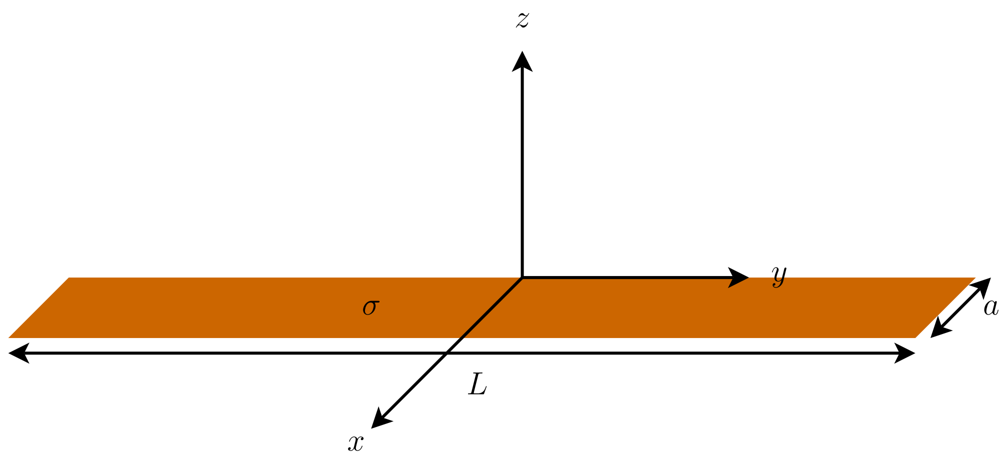
מהו השדה המגנטי בכל נקודה בקדח הגלילי?

פתרון:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I d}{2\pi(a^2-b^2)} \underbrace{(-\hat{r}\times\hat{z})}_{\hat{\varphi}}$$

5.3.6

פס מבודד דק, שאורכו L גדול מאד ורוחבו a, טעון בצפיפות מטען אחידה σ. הפס נמצא על מישור $z=0$ כך שאחת מצלעותיו מתלכדת עם ציר y. הפס נע במהירות קבועה v בכיוון $\hat{y}$ (אורכו כה גדול כך שניתן להתייחס אליו כאל אינסופי).



(א) חשבו את וקטור השדה החשמלי לאורך ציר z.

(ב) מהו הזרם I?

(ג) חשבו את וקטור השדה המגנטי לאורך ציר z.

(ד) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \vec{B}\cdot d\vec{\ell}$ לאורך ציר z. הסבירו את התוצאה שהתקבלה!

ניתן להשתמש בפתרון האינטגרלים הבאים:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) \quad ; \quad \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) \quad ; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dx = 2\pi a$$

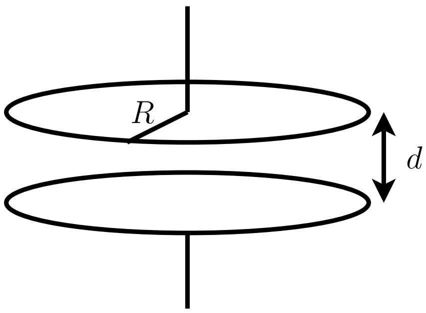
פתרון:

(א) $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right), 0, \tan^{-1}\left(\frac{a}{z}\right)\right)$ **(ב)** $I = \sigma v a$

(ג) $\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma v}{2\pi}\left(\tan^{-1}\left(\frac{a}{z}\right), 0, \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)\right)$ **(ד)** $\int_{-\infty}^{\infty} \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \frac{\mu_0 \sigma v a}{2}$

5.3.7

שני לוחות קבל עגולים בעלי רדיוס R נמצאים במרחק d זה מזה (הניחו $d \ll R$). הקבל נטען בקצב אחיד כך שהמטען עליו תלוי בזמן באופן $Q(t) = \alpha t$ (הלוח העליון בעל המטען החיובי).



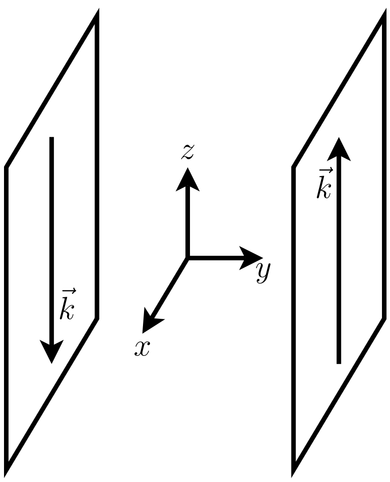
מצאו את השדות החשמלי והמגנטי בין לוחות הקבל!

פתרון:

$$E = \frac{\alpha t}{\pi R^2 \varepsilon_0} \quad ; \quad B(r) = \frac{\mu_0 \alpha}{2\pi R^2} r$$

5.3.8

שני מישורים אינסופיים מקבילים למישור xz. המישורים הם $y = a$ ו־$y = -a$. במישור הראשון יש צפיפות זרם ליחידת אורך $\vec{k} = k_0 \hat{z}$ ובמישור השני יש צפיפות זרם ליחידת אורך $\vec{k} = -k_0 \hat{z}$.



(א) מהו השדה המגנטי בכל מקום במרחב?

(ב) מהי צפיפות האנרגיה המגנטית בכל מקום במרחב?

פתרון:

$\vec{B} = \mu_0 k_0 \hat{x}$ בין המישורים. מחוץ למישורים השדה הוא אפס.

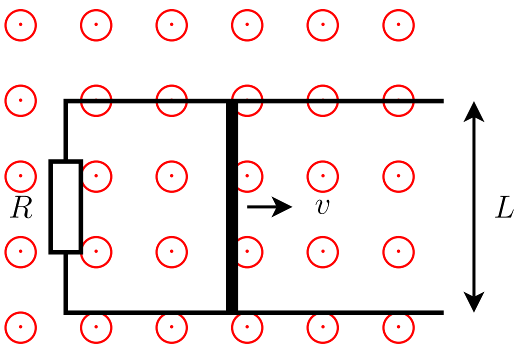
פרק 6

השראה אלקטרומגנטית

6.1 חוק פאראדיי־לנץ

6.1.1

מוט מוליך באורך $L = 0.2\ \mathrm{m}$ מונח על מסילה מוליכה שצורתה "ח", כמשורטט. למסילה מחובר נגד בעל התנגדות $R = 10\ \Omega$. באיזור שורר שדה מגנטי שכיוונו החוצה מהדף וגודלו $B = 10\ \mathrm{mT}$. מושכים את המוט ימינה כך שהוא נע במהירות קבועה $v = 2\ \mathrm{m/s}$.



(א) מהו גודלו וכיוונו של הזרם המושרה במעגל ברגע $t = 4\ \mathrm{s}$?

(ב) מהו הכח שיש להפעיל על המוט כדי להניע אותו במהירות הנתונה?

(ג) ברגע מסוים מפסיקים להפעיל את הכח המניע. מהו הזרם המושרה במעגל מרגע זה ואילך?

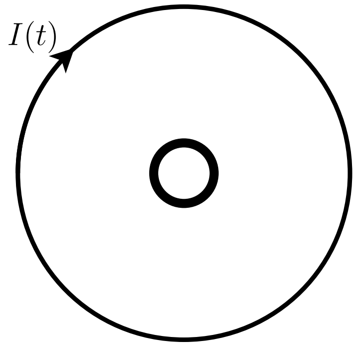
פתרון:

(א) $I_{\text{ind}} = 4 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{A}$ עם כיוון השעון. **(ב)** $F_{\text{ind}} = 8 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{N}$ **(ג)** $I_{\text{ind}} = \frac{BLv}{R} e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}$ כאשר m מסת המוט.

6.1.2

טבעת מוליכה בעלת רדיוס $b = 50\ \mathrm{cm}$ נושאת זרם חילופין $I(t) = 100 \sin(2t)\mathrm{A}$ (כאשר הכיוון עם השעון נחשב לחיובי). במרכז הטבעת נמצא סליל שטוח בעל 20 ליפופים שהתנגדותו הכללית היא $R = 10^{-3}\ \Omega$. רדיוס הסליל $a = 0.1\ \mathrm{cm}$.

⋆ ניתן להתייחס למקרה $b \ll a$ כך שהשדה המגנטי בכל נקודה בסליל שווה בקירוב טוב לשדה במרכזו.



מהו הזרם המושרה (גודל וכיוון) בסליל ברגע $t = 1\ \mathrm{s}$?

פתרון:

$I_{\text{ind}} = 6.66 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{A}$ עם כיוון השעון.

6.1.3

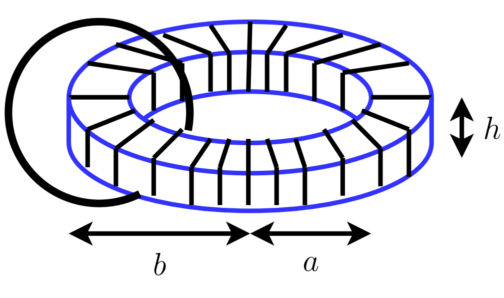
לכריכה מעגלית בעלת N ליפופים ושהתנגדותה R יש שטח חתך S. הכריכה נמצאת בשדה מגנטי B. המאונך למישור בו היא נמצאת. מסובבים את הכריכה בזווית θ סביב קוטרה.
כמה מטען זרם בכריכה במהלך התהליך?

פתרון:

$$q = \frac{NBS}{R}\left(1 - \cos\theta\right)$$

6.1.4

חוט מוליך מגולגל על טורוס בעל חתך מלבני כך שמספר הכריכות הוא N. רדיוסו הפנימי של הטורוס הוא a, רדיוסו החיצוני b, וגובהו h. מזרימים זרם $I(t) = I_0 \sin(\omega t)$ בחוט המוליך. כמו כן נתון כי טבעת מוליכה שהתנגדותה R עוטפת את הטורוס.



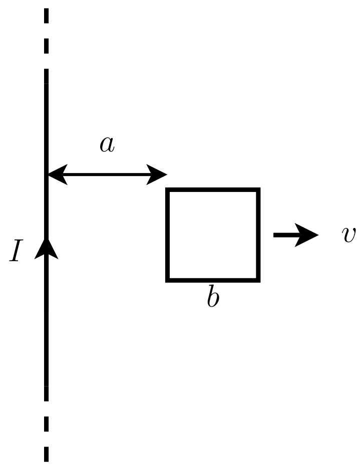
(א) מהו השדה המגנטי בטורוס?
(ב) מהו גודלו של הזרם המושרה בטבעת?

פתרון:

(א) $B(a \le r \le b) = \frac{\mu_0 N I_0}{2\pi r} \sin(\omega t)$ **(ב)** $I_{\text{ind}} = \frac{\mu_0 N I_0 h \omega}{2\pi R} \cos(\omega t)$

6.1.5

בתיל אינסופי זורם זרם משתנה $I(t) = 10t$ A. במרחק $a = 0.2$ m נמצאת כריכה מרובעת בעלת 50 ליפופים שהתנגדותה הכוללת $R = 10\ \Omega$. צלע הכריכה היא $b = 0.15$ m. מניעים את הכריכה ימינה במהירות קבועה $v = 0.3$ m/s.



(א) מהו גודלו וכיוונו של הזרם המושרה בכריכה ברגע $t = 1$ s?
(ב) מהו הכח שיש להשקיע בכדי להניע את הכריכה במהירות הנתונה?

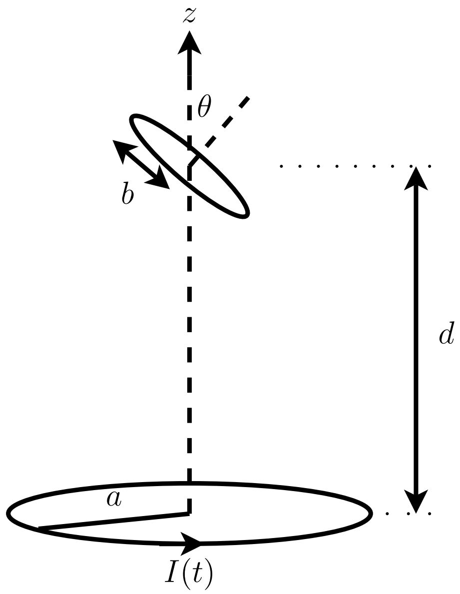
פתרון:

(א) $I_{\text{ind}} = 1.86 \cdot 10^{-7}$ A **נגד כיוון השעון. (ב) למשל ברגע $t = 1$ s הכח שיש להשקיע הוא $F = 2.57 \cdot 10^{-14}$ N במגמה שמאלה.**

6.1.6

טבעת מוליכה בעלת רדיוס a נמצאת על מישור $x - y$ ונושאת זרם משתנה $I(t) = \alpha t^2$ כמשורטט. בגובה d מעליה נמצא מרכזה של טבעת נוספת, בעלת רדיוס b, אשר הציר האנכי־מרכזי שלה מוטה בזווית θ ביחס לציר z. טבעת

זו עשויה חומר בעל התנגדות ליחידת אורך r. נתון כי $a \gg b$ וכן $d \gg a, b$.



(א) מהו הזרם המושרה בטבעת בעלת רדיוס b?

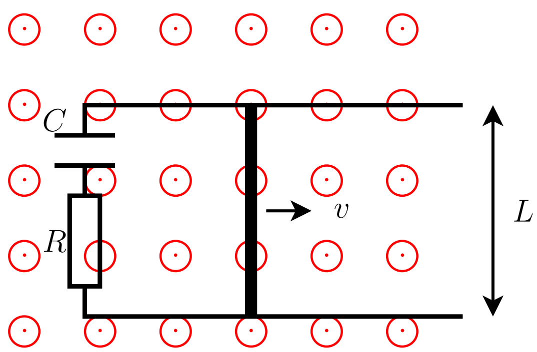
(ב) מהו מומנט הכח הפועל על הטבעת בעלת הרדיוס b?

פתרון:

(א) $I_{\text{ind}} = \dfrac{\mu_0 \alpha a^2 b^2 \cos\theta}{2bd^3 r} t$ **(ב)** $\tau = \dfrac{\pi \mu_0^2 \alpha^2 a^4 b^3 \sin 2\theta}{8d^6 r} t$ בכיוון פנימה.

6.1.7

מוט מוליך באורך L מונח על מסילה מוליכה שצורתה "ח", כמשורטט. למסילה מחובר נגד בעל התנגדות R וקבל בעל קיבול C. באיזור שורר שדה מגנטי שכיוונו החוצה מהדף וגודלו B. מושכים את המוט ימינה כך שהוא נע במהירות קבועה v.



(א) מהו גודלו וכיוונו של הזרם המושרה במעגל בכל רגע?

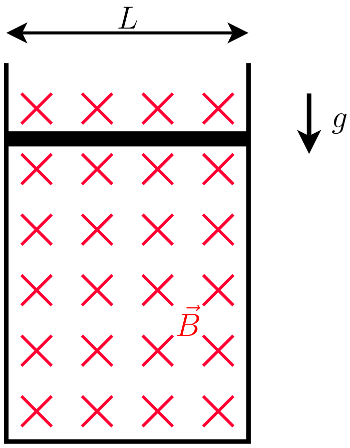
(ב) מהו הכח שיש להפעיל על המוט כדי להניע אותו במהירות הנתונה?

פתרון:

(א) $\dfrac{BLv}{R} e^{-t/RC}$ עם כיוון השעון. **(ב)** $\dfrac{B^2 L^2 v}{R} e^{-t/RC}$ במגמה ימינה.

6.1.8

מוט מוליך בעל אורך L והתנגדות R נע על מסילה אנכית מוליכה שהתנגדותה זניחה (יש גרביטציה). באיזור שורר שדה מגנטי אחיד שכיוונו מאונך למסילה (פנימה לדף). ברגע $t=0$ משחררים את המוט ממנוחה.



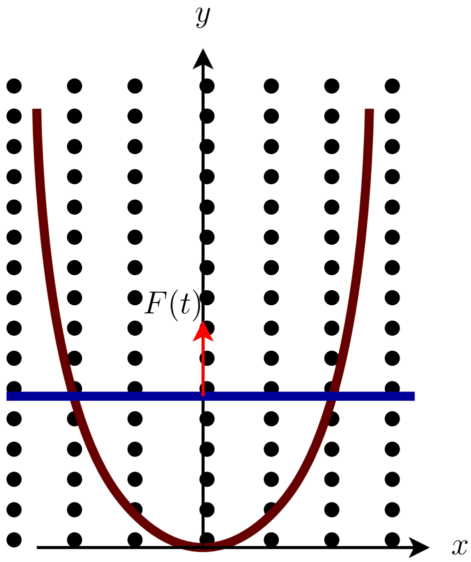
(א) מצאו את המהירות של המוט בכל רגע? לאיזו מהירות יגיע הגוף לאחר זמן ארוך מאד?
(ב) בנקודה כלשהי במסילה מחברים מקור מתח, והמוט מתחיל לנוע כלפי מעלה כך שלאחר זמן ארוך מספיק מהירותו מתייצבת על ערך קבוע u. שרטטו את אופן החיבור של מקור המתח ומצאו את גודלו.
(ג) הראו כי מתקיים בבעיה חוק שימור האנרגיה, ע"י השוואת ההספקים המכני והחשמלי.

פתרון:

(א) $v(t)=\frac{mgR}{B^2L^2}\left(1-e^{-\frac{B^2L^2}{mR}t}\right)$ **ומכאן שמהירותו הסופית** $v(t\to\infty)=\frac{mgR}{B^2L^2}$ **(ב)** $V=\frac{mgR}{BL}+BLu$

6.1.9

תיל מוליך (בעל התנגדות זניחה) שצורתו פרבולה ($y=Cx^2$) מונח על שולחן אופקי חסר חיכוך. באיזור שורר שדה מגנטי אחיד שגודלו B וכיוונו אנכית מעלה (בציור החוצה מהדף). מוט מוליך דק וארוך מאד, בעל התנגדות ליחידת אורך λ, נמצא במנוחה לאורך ציר x. ברגע $t=0$ מתחיל לפעול על המוט כח $F(t)$ שכיוונו $\hat{y}$ כך שהוא נמשך במהירות קבועה v.



(א) מצאו את השטף המגנטי דרך שטח המעגל המורכב מחלק המוט (בין שתי נקודות המגע שלו עם הפרבולה) וחלק הפרבולה (בין שתי נקודות המגע שלה עם המוט) כפונקציה של הזמן!

(ב) מהו הכא"מ המושרה במעגל?

(ג) מהו הזרם המושרה במעגל (גודל וכיוון)?

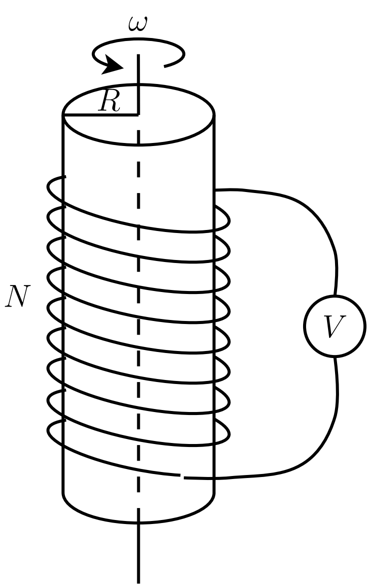
(ד) מהו הכח $F(t)$ הדרוש כדי להניע את המוט במהירות קבועה?

פתרון:

(א) $\phi_B = \frac{4Bv^{3/2}}{3\sqrt{C}}t^{3/2}$ **(ב)** $\varepsilon = \frac{2Bv^{3/2}}{\sqrt{C}}\sqrt{t}$ **(ג)** $I_{\text{ind}} = \frac{Bv}{\lambda}$ **(ד)** $F(t) = \frac{2B^2v^{3/2}}{\lambda\sqrt{C}}\sqrt{t}$

6.1.10

גליל אינסופי שרדיוסו R טעון בצפיפות מטען נפחית אחידה ρ. מסובבים את הגליל במהירות זוויתית קבועה ω סביב צירו.



(א) חשבו את צפיפות הזרם כפונקציה של המרחק מציר הגליל, $J(r)$.

(ב) חשבו את השדה המגנטי בכל מקום במרחב כפונקציה של המרחק ממציר הגליל, $B(r)$.

(ג) מלפפים סביב הגליל סליל בעל N ליפופים, ומחברים את קצותיו למד מתח. מה תהיה קריאת מד המתח אם מרגע מסוים ($t = 0$) פועלת תאוטה זוויתית קבועה (תאוצה זוויתית שלילית) שגודלה α?

פתרון:

(א) $J(r) = \rho\omega r$ **(ב)** $B(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0\rho\omega}{2}\left(R^2 - r^2\right) & r \le R \\ 0 & r \ge R \end{cases}$ **(ג)** $\varepsilon = \frac{\pi N \mu_0 \rho \alpha R^4}{4}$