

GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תוכן עניינים

פרק 1 – פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות.....	4
פרק 2 – מטריצות.....	9
פרק 3 – דטרמיננטות.....	13
פרק 4 – גבולות.....	18
הסבר כללי.....	18
חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה.....	18
חישוב גבול של פונקציה בשיטת הצמצום.....	18
חישוב גבול של פונקציה בשיטת כפל בצמוד.....	19
חישוב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף.....	20
חישוב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף.....	20
חישוב הגבול של אוילר.....	22
חישוב גבול של פונקציה לפי הגדרה.....	23
פרק 5 – חישוב נגזרות.....	24
כללי הגזירה.....	24
נגזרת של פונקציה רציונלית.....	26
נגזרת של פונקציה מעריכית.....	27
נגזרת של פונקציה לוגריתמית.....	28
נגזרת של פונקצית x בחזקת פונקציה של x	29
פרק 6 – נגזרת סתומה.....	31
פרק 7 – כלל לופיטל.....	33
כלל לופיטל $0/0$	33
כלל לופיטל $0 \cdot \infty$	34
כלל לופיטל – משהו בחזקת משהו.....	35
כלל לופיטל $\infty - \infty$	35
פרק 8 – חקירת פונקציה.....	36
שלבי חקירת פונקציה.....	36
חקירת פולינום.....	36
חקירת פונקציה רציונלית.....	37
חקירת פונקציה מעריכית.....	39
חקירת פונקציה לוגריתמית.....	41
חקירת פונקציה עם שורשים.....	43
פרק 9 – אינטגרלים.....	45
אינטגרלים לא מסוימים.....	45
אינטגרלים בשיטת ההצבה.....	46

47.....	אינטגרלים של פונקציות רציונלית
47.....	אינטגרציה בחלקים
48.....	פרק 10 - סדרות

פרק 1 – פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

- בסרטון זה הסבר על מהי מערכת משוואות לינאריות.
- בסרטון זה הסבר על מהו פתרון למערכת משוואות לינאריות.
- בסרטון זה הסבר על מהו מספר הפתרונות של מערכת משוואות לינאריות.
- בסרטון זה הסבר על מהי מערכת משוואות לינאריות מדורגת.
- בסרטון זה הסבר על כיצד פותרים מערכת משוואות לינאריות מדורגת.
- בסרטון זה הסבר על כיצד מדרגים מערכת משוואות לינאריות.
- בסרטון זה הסבר על שימוש במטריצה לפתרון מערכת משוואות לינאריות.

1. רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} x=3 \\ 2x+y=4 \\ z+t=8 \end{cases} \quad \text{ד.} \quad \begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x-z=0 \end{cases} \quad \text{ג.} \quad \begin{cases} x-4y+z=-7 \\ x-y=-1 \\ x+y+z=5 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} x+10y=11 \\ 2x-2=0 \\ x+y=3 \end{cases} \quad \text{א.}$$

2. בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

א.	ב.	ג.
$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
$R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1$ $R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3$	$R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1$ $R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2$	$R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3$ $R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2$

3. מצא איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל כדי לקבל את המטריצה מימין:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{א.}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ב.}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ג.}$	

4.

א. הסבר והדגם את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.

ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה מדורגת (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה מדורגת קנונית):

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & -2 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(9) \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1+i & 2i \\ 2+i & 1+3i \end{pmatrix}$$

$$F=\mathbb{F} , F=\mathbb{F}_i$$

* בתרגיל 9, עליך לדרג את המטריצה פעם מעל השדה $\mathbb{F}_i$ ופעם מעל השדה $\mathbb{F}$.

5. פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

$$\begin{array}{lll} \text{א.} \begin{cases} 2x+3y=8 \\ 5x-4y=-3 \end{cases} & \text{ב.} \begin{cases} 4x+8y=20 \\ 3x+6y=14 \end{cases} & \text{ג.} \begin{cases} 8x-4y=10 \\ -6x+3y=1 \end{cases} \\ \text{ד.} \begin{cases} 2x_1-x_2-3x_3=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3=32 \end{cases} & \text{ה.} \begin{cases} x+2y+3z=-11 \\ 2x+3y-z=-5 \\ 3x+y-z=2 \end{cases} & \text{ו.} \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 4x+6y+16z=8 \\ 3x+2y+17z=1 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x-2y=1 \\ -9x+6y=-3 \\ 6x-4y=2 \end{cases} \quad \text{ט.} \quad \begin{cases} 4x-7y=0 \\ 8x-14y=2 \\ -16x+28y=4 \end{cases} \quad \text{ח.} \quad \begin{cases} x+3y=2 \\ 2x+y=-1 \\ x-y=-2 \end{cases} \quad \text{ז.}$$

$$\begin{cases} x+2y+2z=2 \\ 3x-2y-z=5 \\ 2x-5y+3z=-4 \\ 2x+8y+12z=0 \end{cases} \quad \text{יב.} \quad \begin{cases} x_1+5x_2+4x_3-13x_4=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4=0 \end{cases} \quad \text{יא.} \quad \begin{cases} x+2y-3z+2t=2 \\ 2x+5y-8z+6t=5 \\ 6x+8y-10z+4t=8 \end{cases} \quad \text{י.}$$

- בסרטון זה הסבר על דירוג מטריצה עם פרמטר.
- בסרטון זה הסבר על חקירת מערכת משוואות לינאריות עם פרמטר.
- בסרטון זה המשך ההסבר על חקירת מערכת משוואות לינאריות עם פרמטר.

6. מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:
א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{cases} x+2ky+z=0 \\ 3x+y+kz=2 \\ x+9ky+5z=-2 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} x+ky+z=1 \\ x+y+kz=1 \\ kx+y+z=1 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x-y+z=1 \\ 5x-7y+(k^2+3)z=k^2+1 \\ 3x-y+(k+3)z=3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} x+ky+3z=2 \\ kx-y+z=4 \\ 3x+y+(2+k)z=0 \end{cases} \quad (6) \quad \begin{cases} kx-y=1 \\ (k-2)x+ky=-2 \\ (k^2-1)z=9 \end{cases} \quad (5) \quad \begin{cases} 2x-y+z=0 \\ x+2y-z=0 \\ 5x+(1-k)y+k^2z=1 \end{cases} \quad (4)$$

7. מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:
א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$\begin{cases} 3x+4y-z=2 \\ kx-2y+z=-1 \\ x+8y-3z=k \\ 2x+6y-2z=0.5k+1 \end{cases} \quad (3) \quad \begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ 4x+(k^2-5k)y+2z=k \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} 2x+ky=3 \\ (k+3)x+2y=k^2+5 \\ 6x+3ky=7k^2+2 \end{cases} \quad (1)$$

8. מצא לאילו ערכים של a ו- b (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:
א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות

$$\begin{array}{lll} (1) & (2) & (3) \\ \begin{cases} x+2y-4z=b \\ 7x-10y+16z=7 \\ 2x-ay+3z=1 \end{cases} & \begin{cases} 2x+4y+az=-1 \\ x+2y+4z=-4 \\ x+2y-4z=0 \\ x+2y+6z=-2b \end{cases} & \begin{cases} x+y-z+t=1 \\ ax+y+z+t=b \\ 3x+2y+at=1+a \end{cases} \end{array}$$

$$9. \text{ נתונה המערכת: } \begin{cases} x+y-z=1 \\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1 \\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$$

- א. רשום את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
ב. רשום את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
ג. מצא לאילו ערכי k יש למערכת: 1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
ד. רשום את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
ה. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.
ו. מצא לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.
ז. מצא עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1, 2, 3)$. האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבר.
ח. מצא לאיזה ערך של k , $(1, 0, 0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

פתרונות

$$(1) \text{ א. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ג. } \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ד. } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(2) \text{ א. } \begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{ג. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 5 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{א. } R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2 \quad \text{ב. } R_1 \rightarrow 2R_1 + R_2$$

$$(4) \text{ א. } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ב. } R_2 \rightarrow R_2 - 4R_1 \quad \text{ג. } R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1 \quad \text{ד. } R_2 \rightarrow 2R_2 + 4R_1$$

פרק 2 – מטריצות

- בסרטון זה הסבר על מהן מטריצות.
- בסרטון זה הסבר על מהן מטריצות מיוחדות.
- בסרטון זה הסבר על כפל בסקלר וחיבור מטריצות.
- בסרטון זה הסבר על כפל מטריצות – חלק א.
- בסרטון זה הסבר על כפל מטריצות – חלק ב.
- בסרטון זה הסבר על כפל מטריצות – חלק ג.
- בסרטון זה הסבר על המטריצה המשוחלפת.
- בסרטון זה הסבר על העקבה של מטריצה.

1. נתונות מטריצות: $A_{4 \times 6}$, $B_{4 \times 6}$, $C_{6 \times 2}$, $D_{4 \times 2}$, $E_{6 \times 4}$.

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

א. $A+B$ ב. AB ג. $AC-D$ ד. $AE-B$ ה. $B+AB$
ו. $E(B+A)$ ז. $(E+A^T)D$ ח. $E^T B$ ט. $E(AC)$ י. $E(B-A)$

2. מצא את x, y, z , אם ידוע כי: $\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$.

3. נתונות המטריצות הבאות:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

א. $E+D$ ב. $E-D+I_3$ ג. $5C$ ד. $2D+4EI_3$ ה. $2tr(D^2-2E)$

ו. $4C^T + A$ ז. $\frac{1}{2}A^T + \frac{1}{4}C$ ח. $I_2 BC$ ט. $tr(C^T C)$ י. $DABC$

4. בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$ המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z + t = 1 \\ 4x + y + 2z = 4 \\ y + z + t = 1 \\ x - 4z - 2y = 10 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 2y - 4z = 5 \\ 6x + 4y + z = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

5. נתון:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות לינאריות:

א. $A\underline{x} = \underline{b}$ ב. $A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b}$ ג. $A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b}$ ד. $A\underline{x} = \underline{x}$ ה. $A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b}$

- בסרטון זה הסבר על מהי מטריצה הופכית.
- בסרטון זה הסבר על מציאת המטריצה ההופכית.
- בסרטון זה הסבר על פתרון מערכת משוואות לינאריות בעזרת המטריצה.

6. מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{lll} \text{א.} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{ב.} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{ג.} \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{ד.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \text{ה.} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \text{ו.} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix} \\ \text{ז.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{ח.} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{ט.} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

7.

א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2 + 3 \\ 3 & -1 & k + 3 \end{pmatrix}$.

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה איננה הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$\begin{cases} x+4y+2z+4t=1 \\ x+2y-z=0 \\ y+z+t=1 \\ x+3y-z-2t=0 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} 2x-y+z=3 \\ 3x-2y+2z=5 \\ 5x-3y+4z=11 \end{cases} \quad \text{א.}$$

פתרונות

1) א. 4×6 ג. 4×2 ו. 6×6 ז. 6×2 ט. 6×4 י. 6×6 (2) $(x, y, z) = (2, 1, -1)$

3) א. $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 5 & 20 & 10 \\ 20 & 5 & 25 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} 18 & 12 & 8 \\ -2 & 0 & 2 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$ ה. 230

ו. $\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ 17 & 6 \\ 7 & 21 \end{pmatrix}$ ז. $\begin{pmatrix} 2.25 & 1.5 & 0 \\ 1 & 1.25 & 1.75 \end{pmatrix}$ ח. $\begin{pmatrix} 8 & 17 & 13 \\ -8 & -2 & -10 \end{pmatrix}$ ט. 63

4) א. $\begin{pmatrix} -32 & 82 & -22 \\ 48 & 87 & 75 \\ -48 & 108 & -36 \end{pmatrix}$ ב. $\underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ג. $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ד. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ה. $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ ו. $\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$

5) א. $\begin{cases} 4x-2y+4z=1 \\ x-y+z=2 \\ x-6y+3z=3 \end{cases}$ ב. $\begin{cases} -2y+4z=1 \\ x-5y+z=2 \\ x-6y-z=3 \end{cases}$ ג. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{cases} (4+k)x-2y+4z=1 \\ x+(k-1)y+z=2 \\ x-6y+(3+k)z=3 \end{cases}$ ד. $\begin{cases} 3x-2y+4z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x-6y+2z=0 \end{cases}$ ה. $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ -2x-3y-6z=6 \\ 4x+y+z=9 \end{cases}$

6) א. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad .\text{ז} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad .\text{ז} \quad \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad .\text{ח}$$

$$k \neq 1, k \neq -2 \quad .\text{ט} \quad (7) \quad \begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad .\text{י} \quad \begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad .\text{י}$$

$$(x, y, z, t) = (-13, 4, -5, 2) \quad .\text{יא} \quad (x, y, z) = (1, 2, 3) \quad .\text{יב} \quad (8) \quad k = 1, k = -4 \quad .\text{יג}$$

פרק 3 – דטרמיננטות

• בסרטון זה הסבר על מהי דטרמיננטה.

1. חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \text{ב.} \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} & \text{ג.} \begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\
 \text{ד.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} & \text{ה.} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{ו.} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\
 \text{ז.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & \text{ח.} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix} & \text{ט.} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \\
 \text{י.} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{יא.} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix} &
 \end{array}$$

• בסרטון זה הסבר על כללי דטרמיננטות – חלק א.

2. חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

$$\begin{array}{lll}
 \text{א.} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} & \text{ב.} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} & \text{ג.} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\
 \text{ד.} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} & \text{ה.} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix} & \text{ו.} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

3. חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix} & \text{ב.} & \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix} & \text{ג.} & \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

4. ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} & \text{ב.} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix} & \text{ג.} & \begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix} \\ \text{ד.} & \begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \text{ה.} & \begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix} & \text{ו.} & \begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 z & 1 \end{pmatrix} \\ \text{ז.} & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} & & & & & \end{array}$$

5. נתון: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$. חשב:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix} & \text{ב.} & \begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix} & \text{ג.} & \begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

6.

א. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z) \quad \text{ב. הוכח כי}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (k-1)^4(k+1) \quad \text{ג. הוכח כי}$$

• בסרטון זה הסבר על כללי דטרמיננטות – חלק ב.

7. נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4$, $|B|=2$. חשב:

א. $|ABA^{-1}B^T|$ ב. $|4A^2B^3|$ ג. $| -A^{-2}B^T A^3 |$ ד. $| -2A^2 A^T adj B |$

8.

א. נתון: $(PQ)^{-1}APQ = B$.

הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB + 3I = 0$, $|A|=2$. חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2 - 2A^{-1} = 0$, $A + 3B = 0$. חשב את: $|A|$, $|B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ 2. $|adj(A_{n \times n})| = |A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי זוגי.

הוכח ש- $|A|=0$.

ו. נתונים: A, B מטריצות הפיכות מסדר n . $2AB = B^T A^2$, $|A|=128$. מצא את n .

ז. נתונים: $\det(A_{n \times n}) = 2$, $\det(B_{n \times n}) = \frac{1}{3}$.

חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

• בסרטון זה הסבר על כלל קרמר.

9. פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{cases} x+2z+5t=8 \\ -2x-6y=-8 \\ 5x+3y-7z+4t=5 \\ 2x+5y+44z=51 \end{cases} \quad \text{ג.} \quad \begin{cases} x+z=3 \\ 4x+y+8z=21 \\ 2x+3z=8 \end{cases} \quad \text{ב.} \quad \begin{cases} x+2y=5 \\ 3x+4y=11 \end{cases} \quad \text{א.}$$

10. נתונה מערכת המשוואות:

$$kx + y + z + t + r = 1$$

$$x + ky + z + t + r = 1$$

$$x + y + kz + t + r = 1$$

$$x + y + z + kt + r = 1$$

$$x + y + z + t + kr = 1$$

- א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד ?
 ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x = 0.5$?
 ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x = 0.2$?
 ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x = y = z = t = r$.

• בסרטון זה הסבר על המטריצה הצמודה.

11. מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

פתרונות

- (1) א. $ad - bc$ ב. 29 ג. -1 ד. -1 ה. -3 ו. -14 ז. 24 ח. 234 ט. -300 י. 9 יא. 6
 (2) א. 0 ב. 0 ג. 3 ד. 24 ה. 44 ו. 104 ז. 3 א. 120 ב. 114 ג. 6 ד. 5 א. -8 ב. 16 ג. 9
 (7) א. 4 ב. 2^{13} ג. -8 ד. -2^{11} (8) ב. $\frac{81}{32}$ ג. $|A|=18, |B|=-2/3$ ו. 7 ז. 4^n (9) א.
 (10) א. $k \neq 1, k \neq -4$ ב. $k = -2$ ג. $x = 1, y = 1, z = 2$ ד. $x = 1, y = 1, z = 2$ ה. $x = 1, y = 1, z = 2$ ו. $x = 1, y = 1, z = 2$ ז. $x = 1, y = 1, z = 2$ ח. $x = 1, y = 1, z = 2$ ט. $x = 1, y = 1, z = 2$ י. $x = 1, y = 1, z = 2$ יא. $x = 1, y = 1, z = 2$
 ג. לא (11) $k = 0$

פרק 4 – גבולות

הסבר כללי

- בסרטון זה הסבר כללי על חישוב גבול של פונקציה.

חישוב גבול של פונקציה בשיטת ההצבה

- בסרטון זה תוסבר טכניקת הצבה לחישוב גבול של פונקציה.

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 & .1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} & .3 \\ \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} & .2 \\ \lim_{x \rightarrow 100} 20 & .4 \end{array}$$

פתרונות

$$(1) \quad 21 \quad (2) \quad \frac{11}{12} \quad (3) \quad 2 \quad (4) \quad 20$$

חישוב גבול של פונקציה בשיטת הצמצום

- בסרטון זה תוסבר טכניקת צמצום לחישוב גבול של פונקציה.

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 4x}{x} & .1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^2 - 1} & .3 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^2 - x} & .2 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^3 - x} & .8 \\ \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & .4 \\ \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^2}{x^2 - 5^2} & .5 \\ \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x-5}{x^2 - 25} & .6 \\ \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 - 9} & .7 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + x - 21}{-x^2 + 2x + 3} & .10 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} & .9 \\ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} & .12 \\ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3} & .11 \\ \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} & .14 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} & .13 \\ \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 4} & .16 \\ \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 5x + 2}{6x^2 - 5x + 1} & .15 \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} \quad .18$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} \quad .20$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1} \quad .22$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} \quad .17$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^3 - 4x^2 + x - 4} \quad .19$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x - 1} \quad .21$$

פתרונות

$$\begin{aligned} & 7 \quad (12 \quad 1 \quad (11 \quad -\frac{13}{4} \quad (10 \quad \frac{5}{6} \quad (9 \quad \frac{1}{2} \quad (8 \quad -1.5 \quad (7 \quad \frac{1}{10} \quad (6 \quad 0 \quad (5 \quad 6 \quad (4 \quad \frac{1}{2} \quad (3 \quad -1 \quad (2 \quad -4 \quad (1 \\ & n-1 \quad (22 \quad 6 \quad (21 \quad 27 \quad (20 \quad \frac{8}{17} \quad (19 \quad 32 \quad (18 \quad 3 \quad (17 \quad -\frac{3}{4} \quad (16 \quad -3 \quad (15 \quad \frac{10}{8.5} \quad (14 \quad \frac{2}{3} \quad (13 \end{aligned}$$

חישוב גבול של פונקציה בשיטת כפל בצמוד

- בסרטון זה תוסבר טכניקת כפל בצמוד לחישוב גבול של פונקציה

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2} \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{2x - 6} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4} \quad .8$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{\sqrt{x^2 + x + 2} + x} \quad .10$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x} \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x + 2} - 2}{x - 2} \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x - 1} - \sqrt{x + 3}}{x^2 - x} \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad .7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x + 1}}{1 - \sqrt{2x - 1}} \quad .9$$

פתרונות

$$\begin{aligned} & -\frac{13}{4} \quad (10 \quad \frac{3}{4} \quad (9 \quad \frac{1}{6} \quad (8 \quad \frac{3}{8} \quad (7 \quad \frac{2}{3} \quad (6 \quad 1 \quad (5 \quad -\frac{1}{12} \quad (4 \quad \frac{1}{4} \quad (3 \quad 4 \quad (2 \quad \frac{1}{2} \quad (1 \end{aligned}$$

חישוב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול של פונקציה השואפת לאינסוף

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow 0^+} 7^{\frac{1}{x}} & 2. \lim_{x \rightarrow 0^-} 19876^{\frac{1}{x}} \\ 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} & 4. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \\ 5. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} & 6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \\ 7. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} & 8. \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \\ 9. \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) & 10. \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \\ 11. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} & 12. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \\ 13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \end{array}$$

$$14. \text{ נתון: מספר סופי } = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + x + k}{x^2 - 4} \text{ חשב את } k \text{ ואת ערך הגבול.}$$

פתרונות

$$\begin{array}{l} (1 \infty (2 \infty (3 \infty (4 \infty (5 \infty (6 \infty (7 \infty (8 \infty (9 \infty (10 \infty \text{ לא קיים גבול} \\ (11 \infty (12 \infty (13 \infty (14 \infty (15 \infty (16 \infty (17 \infty (18 \infty (19 \infty (20 \infty \text{ לא קיים גבול } k = -10, \frac{11}{4} \end{array}$$

חישוב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף

חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} 1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} & 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} \\ 3. \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x & 4. \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^x \end{array}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4} \right)^x .6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \right)^x .5$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^{\frac{1}{x}} .8$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 5^{\frac{1}{x}} .7$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} .10$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^3} .9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} .12$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} .11$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) .14$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} .13$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^4 - 1}{x^5 - 1} .16$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x^2}{5x^4 + x^3} .15$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x^2 + 1}{5x^4 - 5x^3 + x} .18$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x}{2x^2} .17$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} .20$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - x^3 - x^6}{1 - 5x^2 + 3x^6} .19$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} .22$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} .21$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x} - 6x}{3x + 2} .24$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} .23$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^2 - x} + x}{3x - 1} .26$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} .25$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} .28$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} .27$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} .30$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} .29$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot 2^x - 2^x}{2(2^x + 5^x)} .32$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 7^x}{-2^x + 7^{x-1}} .31$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} .34$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \cdot 5^x - 2^x}{2(2^x + 5^x)} .33$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4+2x^2+6}{3x^4+10x}} \quad .36$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3-5x-1}{x^3-2x^2+1} \right) \quad .35$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+5x} - x \right) \quad .38$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad .37$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} - x \right) \quad .40$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+kx} - x \right) \quad .39$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^4+x^2+1} - x^2 \right) \quad .42$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2+x+1} + x \right) \quad .41$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+2x-1} - x \right) \quad .44$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx} \right) \quad .43$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2-x+3} - 2x \right) \quad .46$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2+2x-1} - x \quad .45$$

פתרונות

$$\begin{aligned} & 0 \quad (13 \quad -\infty \quad (12 \quad 4 \quad (11 \quad 0 \quad (10 \quad 0 \quad (9 \quad 1 \quad (8 \quad 1 \quad (7 \quad \infty \quad (6 \quad 0 \quad (5 \quad 0 \quad (4 \quad \infty \quad (3 \quad 0 \quad (2 \quad 0 \quad (1 \\ & -2 \quad (24 \quad \frac{3}{2} \quad (23 \quad -3 \quad (22 \quad -1 \quad (21 \quad 1 \quad (20 \quad -\frac{1}{3} \quad (19 \quad \frac{2}{5} \quad (18 \quad \frac{1}{2} \quad (17 \quad 0 \quad (16 \quad 0 \quad (15 \quad -5 \quad (14 \\ & 4 \quad (34 \quad -\frac{1}{2} \quad (33 \quad 1 \quad (32 \quad -10 \quad (31 \quad \frac{1}{9} \quad (30 \quad 4 \quad (29 \quad 0 \quad (28 \quad \frac{1}{4} \quad (27 \quad -\frac{1}{3} \quad (26 \quad \frac{\sqrt{1}-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} \quad (25 \\ & \frac{1}{2} \quad (42 \quad -\frac{1}{2} \quad (41 \quad \frac{1}{2} \quad (40 \quad \frac{k}{2} \quad (39 \quad 2.5 \quad (38 \quad \sqrt[5]{\frac{1}{2}}, \sqrt[5]{\frac{a}{b}}, 0, \infty, -\infty \quad (37 \quad \frac{1}{3} \quad (36 \quad \ln 3 \quad (35 \\ & -\frac{1}{4} \quad (46 \quad \infty \quad (45 \quad 1 \quad (44 \quad \frac{a-b}{2} \quad (43 \end{aligned}$$

חישוב הגבול של אוילר

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול לפי נוסחת אוילר

חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad .2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad .1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad .4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad .3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+x+1}{x^2+x+4} \right)^{4x^2} \quad .6$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad .5$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + x + 2} \right)^{10x} \quad .7$$

פתרונות

$$e^{30} \quad (7) \quad e^{-12} \quad (6) \quad e^3 \quad (5) \quad \frac{1}{e} \quad (4) \quad e^2 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad \sqrt{e} \quad (1)$$

חישוב גבול של פונקציה לפי הגדרה

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב גבול לפי הגדרה

1. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 2} 7x + 14$.

2. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 3} x^2$.

3. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 1$.

4. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 24} \sqrt{x+1}$.

5. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x}$.

6. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin x$.

7. חשב על פי הגדרת הגבול את $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$.

8. הוכח על פי הגדרת הגבול כי $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3+x}{x^2+1} = 1$.

פתרונות

$$\delta = \min\{1, 10\varepsilon\} \quad (4) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{3}\right\} \quad (3) \quad \delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{7}\right\} \quad (2) \quad \delta = \frac{\varepsilon}{7} \quad (1)$$

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\} \quad (5) \quad \delta = \varepsilon \quad (6) \quad \delta = \varepsilon \quad (7) \quad \frac{1}{x^2-1} < M \quad (7)$$

פרק 5 – חישוב נגזרות

כללי הגזירה

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקציות חזקה

1. גזור את הפונקציות הבאות:

ג. $f(x) = x^2$

ב. $f(x) = x^7$

א. $f(x) = x^3$

ו. $f(x) = x^{-1}$

ה. $f(x) = x^{-3}$

ד. $f(x) = x$

ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2. גזור את הפונקציות הבאות:

ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$

ב. $f(x) = 3x^7$

א. $f(x) = 2x^3$

ו. $f(x) = 3x^{-2}$

ה. $f(x) = 8x$

ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$

ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$

ז. $f(x) = \frac{4}{x}$

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של קבוע

3. גזור את הפונקציות הבאות:

ב. $f(x) = \frac{7}{8}$

א. $f(x) = 12$

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של סכום והפרש

4. גזור את הפונקציות הבאות:

ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של פונקצית חזקה מורכבת

5. גזור את הפונקציות הבאות:

ג. $f(x) = 3(x - x^2)^2$

ב. $f(x) = (x^3 + 6)^5$

א. $f(x) = (5x - 2)^3$

ה. $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$

ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של $\frac{1}{x}$

6. גזור את הפונקציות הבאות:

ג. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

ב. $f(x) = -\frac{2}{x}$

א. $f(x) = \frac{3}{x}$

ו. $f(x) = \frac{2}{3-x}$

ה. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x}$

ד. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ז. $f(x) = \frac{6}{x+5}$

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של מכפלה

7. גזור את הפונקציות הבאות:

ג. $f(x) = x^3(6-x)^4$

ב. $f(x) = (5x+1)^3(x-3)$

א. $f(x) = (5x+1)(x-3)$

בסרטון זה הסבר על הנגזרת של מנה

8. גזור את הפונקציות הבאות:

ג. $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$

ב. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{5x - 12}$

א. $f(x) = \frac{3x - 1}{1 + 2x}$

ו. $f(x) = \frac{3}{x^3}$

ה. $f(x) = \frac{1}{x}$

ד. $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x - 1}$

פתרונות

(1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$ ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8 ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

(3) א. 0 ב. 0 ג. $3x^2 + 4x - 3$ ד. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ ה. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$ ו. $\frac{3}{\sqrt{x}}$

(4) א. 0 ב. 0 ג. $15x^2(x^3 + 6)^4$ ד. $6(x - x^2)(1 - 2x)$ ה. $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$

(5) א. $15(5x - 2)^2$ ב. $15x^2(x^3 + 6)^4$ ג. $6(x - x^2)(1 - 2x)$ ד. $-\frac{3}{4}(5 - x)^2$

(6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$

(7) א. $10x - 14$ ב. $(5x + 1)^2(20x - 44)$ ג. $\frac{2}{(3 - x)^2}$ ד. $-\frac{6}{(x + 3)^2}$

(8) א. $\frac{5}{(1 + 2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2 - 24x - 5}{(5x - 12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$

ד. $\frac{(x - 4)(x + 2)}{(x - 1)^2}$ ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$

נגזרת של פונקציה רציונלית

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של מנה

גזור פעמיים את הפונקציות הבאות:

1. $f(x) = \left(\frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \right)$ 2. $f(x) = \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \right)$ 3. $f(x) = \left(\frac{2x^2}{(x + 1)^2} \right)$

4. $f(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 - 4} \right)$ 5. $f(x) = \left(\frac{x^3}{(x + 1)^2} \right)$ 6. $f(x) = \left(\left(\frac{x + 1}{x - 1} \right)^3 \right)$

פתרונות

(1) $\frac{4}{x^3}$ (2) $\frac{448}{(2x + 10)^3}$ (3) $\frac{4(1 - 2x)}{(x + 1)^4}$ (4) $\frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3}$ (5) $\frac{6x}{(x + 1)^4}$ (6) $\frac{12(x + 1)(x + 3)}{(x - 1)^3}$

נגזרת של פונקציה מעריכית

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של פונקציה מעריכית

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1$ ב. $f(x) = e^{x^2-3x} + ex$

ג. $f(x) = e^{\sin x}$ ד. $f(x) = 2^{3x}$

ה. $f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x \cdot e^x$ ב. $f(x) = x^2 \cdot e^{4x}$

ג. $f(x) = (x+1) \cdot 2^x$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$ ב. $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3$ ב. $f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}}$

5. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\right)$.

6. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = \left((x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}}\right)$.

7. גזור את הפונקציה $f(x) = \left(x \cdot e^{-2x^2}\right)$.

פתרונות

(1) א. $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$ ג. $\cos x \cdot e^{\sin x}$ ד. $3 \ln 2 \cdot 2^{3x}$

ה. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$ (2) א. $e^x(1+x)$ ב. $2x \cdot e^{4x}(1+2x)$ (3) א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$

$$\begin{aligned}
 & \text{ב. } \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \quad (4) \quad \text{א. } 30e^{2x}(e^{2x}-1)^2 \quad \text{ב. } \frac{(e^{2x}-e^{-2x})}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}} \quad (5) \quad e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right) \\
 & (6) \quad e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right) \quad (7) \quad -4xe^{-2x^2}(3-4x^2)
 \end{aligned}$$

נגזרת של פונקציה לוגריתמית

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של פונקציה לוגריתמית

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{aligned}
 & \text{א. } f(x) = 3\ln x + 4\ln(x+2) - \ln(5x-1) \quad \text{ב. } f(x) = \ln(x^2-3x) \\
 & \text{ג. } f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{ד. } f(x) = \ln(e^x+1) \\
 & \text{ה. } f(x) = \ln(\cos x) \quad \text{ו. } f(x) = \log_2(x) + 5\log_3(2x-1)
 \end{aligned}$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{aligned}
 & \text{א. } f(x) = x \ln x \quad \text{ב. } f(x) = (3x+1)^2 \cdot \ln x \\
 & \text{ג. } f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} \\
 & \text{ה. } f(x) = \sqrt{\ln x + x}
 \end{aligned}$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{aligned}
 & \text{א. } f(x) = \ln^3 x \quad \text{ב. } f(x) = 3\ln^2 x \\
 & \text{ג. } f(x) = x^2 \ln^2 x \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}
 \end{aligned}$$

4. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)$.

5. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$.

6. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = (x \cdot \ln x)$.

7. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = (x^2 \ln x)$.

8. גזור שלוש פעמים את הפונקציה $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$ ($x < 2$).

9. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 32)$.

10. גזור פעמיים את הפונקציה $f(x) = ((\ln x)^2 + (\ln x)^{-2})$.

פתרונות

(1) א. $\frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1}$ ב. $\frac{2x-3}{x^2-3x}$ ג. $\frac{-2}{(x+1)(x-1)}$ ד. $\frac{e^x}{e^x+1}$

ה. $-\tan x$ ו. $\frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$ (2) א. $\ln x + 1$ ב. $(3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right)$ ג. $\frac{1-\ln x}{x^2}$

ד. $\frac{4}{x(\ln x + 2)^2}$ ה. $\frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x + x}}$ (3) א. $\frac{3 \ln^2 x}{x}$

ב. $\frac{6 \ln x}{x}$ ג. $2x \ln x (\ln x + 1)$ ד. $\frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3}$ (4) $\frac{2 \ln x - 3}{x^3}$ (5) $\frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}}$ (6) $\frac{1}{x}$

(7) $2 \ln x + 3$ (8) $\frac{2}{(4-2x)^2}$ (9) $\frac{-2 \ln x}{x^2}$ (10) $-\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\}$

נגזרת של פונקצית x בחזקת פונקציה של x

- בסרטון זה יוסבר כיצד לחשב נגזרת של x בחזקת פונקציה של x

גזור את הפונקציות הבאות:

1. $y = x^{x^2}$ 2. $y = x^{\frac{x}{2}}$

$$y = (\ln x)^{4x} \quad .4 \qquad y = (x+1)e^x \quad .3$$

$$y = (x+1-k)^{\sqrt{x}} \quad .6 \qquad y = x^{ax} \quad .5$$

פתרונות

$$y' = e^x (x+1)^{e^x} \left[\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \right] \quad (3) \quad y' = \frac{1}{2} x^{\frac{x}{2}} [\ln x + 1] \quad (2) \quad y' = x^{x^2} [2x \cdot \ln x + x] \quad (1)$$

$$y' = ax^{ax} [\ln x + 1] \quad (5) \quad y' = 4(\ln x)^{4x} \left[\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right] \quad (4)$$

$$y' = (x+1-k)^{\sqrt{x}} \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln(x+1-k) + \frac{1}{x+1-k} \cdot \sqrt{x} \right] \quad (6)$$

פרק 6 – נגזרת סתומה

• בסרטון זה הסבר על נגזרת סתומה.

גזור את הפונקציות הבאות:

$$1. \quad x^2 + y^5 - y = 1 \quad 2. \quad 4 \ln x + 10 \ln y = y^2$$

$$3. \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy}$$

$$4. \quad \text{מצא את משוואת המשיק למעגל } x^2 + y^2 = 25 \text{ בנקודה } (3,4).$$

$$5. \quad \text{מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה } xy^2 + y - x = xy \text{ דרך הנקודה } (1,1) \text{ הנמצאת על גרף הפונקציה.}$$

$$6. \quad \text{מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה } x^2 y + e^{y^2 - 4x} = \ln x + 1 \text{ דרך הנקודה } (1,2) \text{ הנמצאת על גרף הפונקציה.}$$

$$7. \quad \text{מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה } \sqrt{xy + y} + x^2 y = xy^2 \text{ דרך הנקודה } (1,2) \text{ הנמצאת על גרף הפונקציה.}$$

$$8. \quad \text{מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה } x^2 y^3 + e^{x-2y} = 2x + y \text{ דרך הנקודה } (2,1) \text{ הנמצאת על גרף הפונקציה.}$$

$$9. \quad \text{מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה הסתומה } e^{xy^2} + y = y^2 - 1 \text{ דרך הנקודה } (0,2) \text{ הנמצאת על גרף הפונקציה.}$$

$$10. \quad \text{נתונה הפונקציה הסתומה } x + y \cdot e^y = xy^2 + x^2$$

א. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה בהן $y = 0$.

ב. מצא את משוואות הישרים המשיקים של גרף הפונקציה בנקודות שמצאת בסעיף א'.

$$11. \quad \text{גזור את הפונקציה הסתומה } x^y - xy = 10$$

$$12. \quad \text{גזור את הפונקציה הסתומה } x^y - y^x = 1$$

$$13. \quad \text{נתונה פונקציה סתומה } xy - y^3 + x^2 - x = 0 \text{ מצא את ערך } y'' \text{ בנקודה בה } y = 1$$

$$y' = \frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y} - 2y}, \frac{10}{y} - 2y \neq 0 \quad (2) \quad y' = \frac{-2x}{5y^4 - 1}, 5y^4 - 1 \neq 0 \quad (1)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (5) \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4} \quad (4) \quad y' = \frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}, \sqrt{x} \neq 0,1 \quad (3)$$

$$(0,0), (1,0) \text{ א } (10) \quad y = \frac{4}{3}x + 2 \quad (9) \quad y = -\frac{1}{3}x + 1\frac{2}{3} \quad (8) \quad y = \frac{1}{5}x + 1\frac{5}{6} \quad (7) \quad y = \frac{1}{5}x + 1\frac{4}{5} \quad (6)$$

$$y' = \frac{y - x^y \cdot \frac{y}{x}}{x^y \ln x - x}, (x^y \ln x - x \neq 0) \quad (11) \quad y = -x, y = x - 1 \quad \text{ב.}$$

$$-1 \quad (13) \quad y' = \frac{-x^y \cdot \frac{y}{x} + y^x \cdot \ln y}{x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y}}, \left(x^y \cdot \ln x - y^x \cdot \frac{x}{y} \neq 0 \right) \quad (12)$$

פרק 7 – כלל לופיטל

כלל לופיטל – $0/0$

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג $\frac{0}{0}$.

מצא את הגבולות הבאים:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9}$
2. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^5 - 50}{2x^2 + 3x - 35}$
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x + 1} - 2}$
5. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 5}}{x - 4}$
6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x - 2} - 1}$
7. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x - 1}$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}}$
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0)$
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}$
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3}$
13. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1}$
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)}{\frac{1}{x^2}}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x + 1) + x}{x}$
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)(e^{2x} - 1)}{x^2}$
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3}$
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x}$
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x}$
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{20}}{e^x}$

23. נתון כי $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + bx + 2}{x + 2} = 4$. מצא את הקבועים a ו- b .

24. נתון כי $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 7$. מצא את הקבועים a ו- b .

25. נתון כי $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2e^{a+2x} + bx}{1 - x^2} = 3e$. מצא את הקבועים a ו- b .

פתרונות

(1) $\frac{5}{6}$ (2) $\frac{20}{17}$ (3) $n-1$ (4) 4 (5) $\frac{1}{6}$ (6) $\frac{3}{2}$ (7) $\frac{5}{6}$ (8) $-\frac{3}{2}$ (9) 1 (10) $\ln\left(\frac{a}{b}\right)$ (11) $\frac{1}{2}$ (12) $\frac{1}{6}$

(13) $-\frac{1}{2}$ (14) 2 (15) 1 (16) 2 (17) $\frac{1}{2}$ (18) $-\infty$ (19) 0 (20) 0 (21) 0 (22) 0

(23) $a = 1.5, b = 4$ (24) $a = 12, b = -32$ (25) $a = 3 + \ln \frac{6}{5}, b = \frac{6}{5}e$

כלל לופיטל – $0 \cdot \infty$

• בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג $0 \cdot \infty$.

מצא את הגבולות הבאים:

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x$

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x$

4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+3}{x-3}\right)$

5. $\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x - 3)$

7. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left[\sqrt{1 + \frac{5}{x}} - 1 \right]$

פתרונות

(1) ∞ (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 0 (6) 0 (7) $\frac{5}{2}$

כלל לופיטל – משהו בחזקת משהו

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג משהו בחזקת משהו.

מצא את הגבולות הבאים:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0)$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad 4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$$

פתרונות

$$e^2 \quad (4) \quad 1 \quad (3) \quad 1 \quad (2) \quad e \quad (1)$$

כלל לופיטל – $\infty - \infty$

- בסרטון זה הסבר על כלל לופיטל מהסוג $\infty - \infty$.

מצא את הגבולות הבאים:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad 2. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} + x$$

פתרונות

$$-\frac{1}{2} \quad (3) \quad \frac{1}{2} \quad (2) \quad \frac{1}{2} \quad (1)$$

פרק 8 – חקירת פונקציה

שלבי חקירת פונקציה

1. בסרטון זה הסבר על נקודות קיצון.
2. בסרטון זה המשך ההסבר על נקודות קיצון.
3. בסרטון זה הסבר על נקודות פיתול.
4. בסרטון זה המשך ההסבר על נקודות פיתול.
5. בסרטון זה הסבר על אסימפטוטה אנכית.
6. בסרטון זה הסבר על אסימפטוטה משופעת.

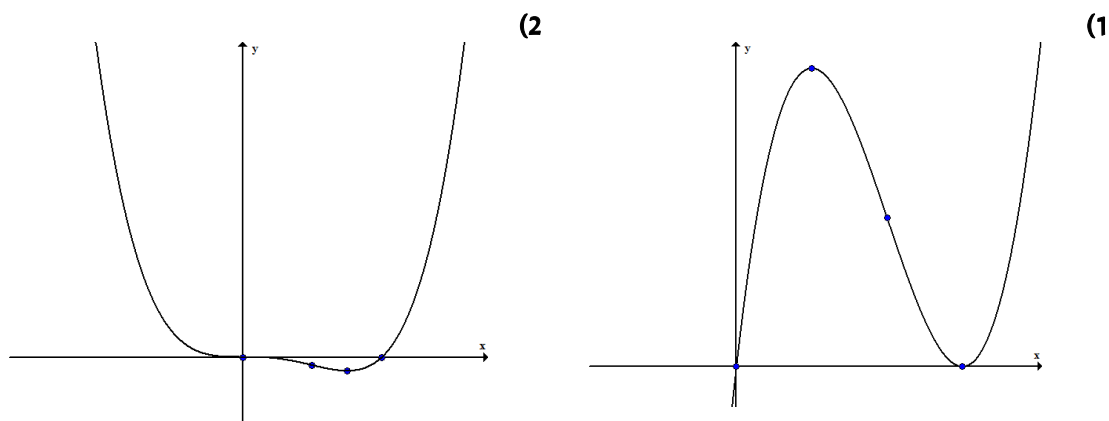
חקירת פולינום

1. חקור את הפונקציה $f(x) = x(x-9)^2$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = x^4 - 2x^3$.

פתרונות

- (1) תחום הגדרה: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(9,0)$, נקודות קיצון: $max(3,108)$, $min(9,0)$, תחומי עליה: $x < 3$ או $x > 9$, תחום ירידה: $3 < x < 9$, נקודת פיתול: $(6,54)$, תחום קמירות: $x > 6$, תחום קעירות: $x < 6$. (2) תחום הגדרה: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, $(2,0)$, נקודות קיצון: $min\left(1.5, -\frac{27}{16}\right)$, תחום עליה: $x > 1.5$, תחום ירידה: $x < 1.5$, נקודות פיתול: $(0,0)$, $(1,-1)$, תחומי קמירות: $x > 1$ או $x < 0$, תחום קעירות: $0 < x < 1$.



חקירת פונקציה רציונלית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2}$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{x^2-4}$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.

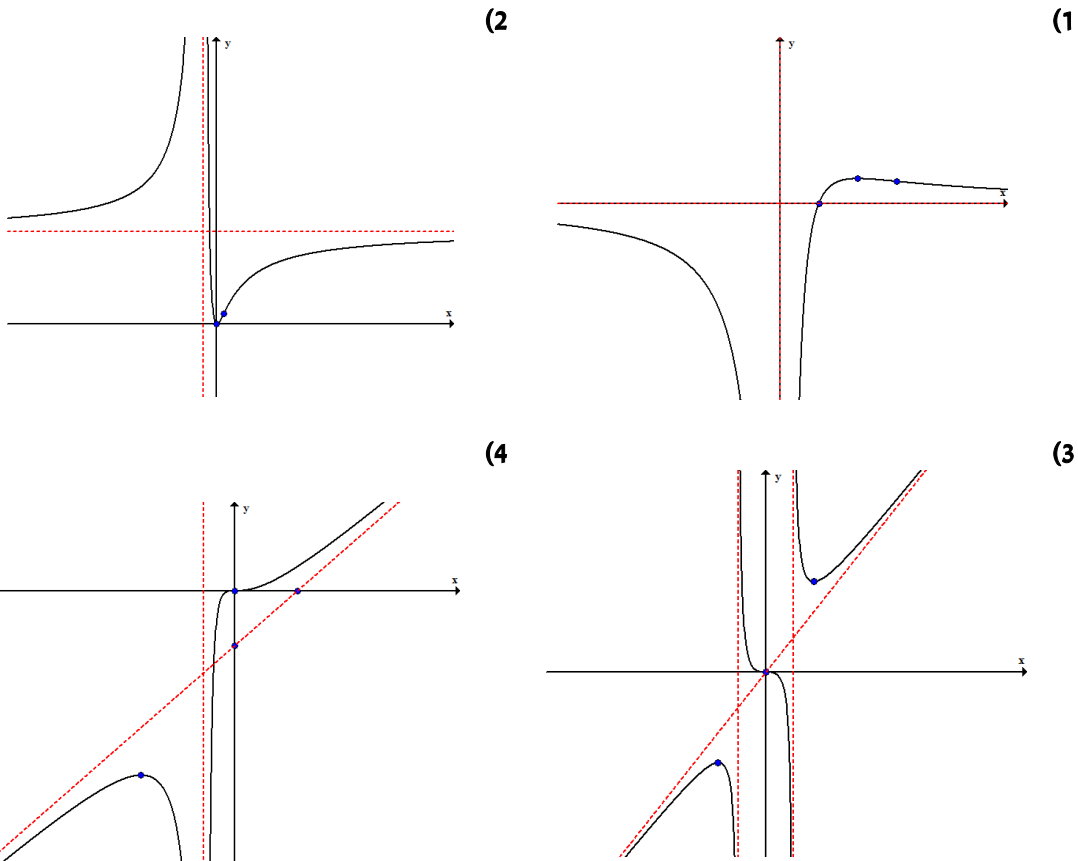
5. חקור את הפונקציה $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$.

6. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1}$.

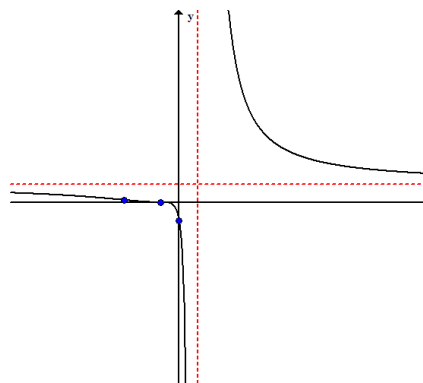
פתרונות

- (1) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$, נקודת קיצון: $\max(2, 0.25)$, תחום עליה: $0 < x < 2$, תחום ירידה: $x < 0$ או $x > 2$, נקודת פיתול: $\left(3, \frac{2}{9}\right)$, תחום קמירות: $x > 3$, תחום קעירות: $x < 0$ או $0 < x < 3$. (2) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq -1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=-1$, $y=2$, נקודת קיצון: $\min(0,0)$, תחום עליה: $x < -1$ או $x > 0$, תחום ירידה: $-1 < x < 0$, נקודת פיתול: $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{9}\right)$, תחום קמירות: $x < -1$ או $-1 < x < \frac{1}{2}$, תחום קעירות: $x > \frac{1}{2}$. (3) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq \pm 2$, זוגיות: אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=\pm 2$, $y=x$, נקודת קיצון: $\max(-\sqrt{12}, -\sqrt{27})$, $\min(\sqrt{12}, \sqrt{27})$, תחום עליה: $x < -\sqrt{12}$ או $x > \sqrt{12}$, תחום ירידה: $-\sqrt{12} < x \neq \pm 2 < \sqrt{12}$, נקודת פיתול: $(0,0)$, תחום קמירות: $-2 < x < 0$ או $x > 2$, תחום קעירות: $x < -2$ או $0 < x < 2$. (4) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq -1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=-1$, $y=x-2$.

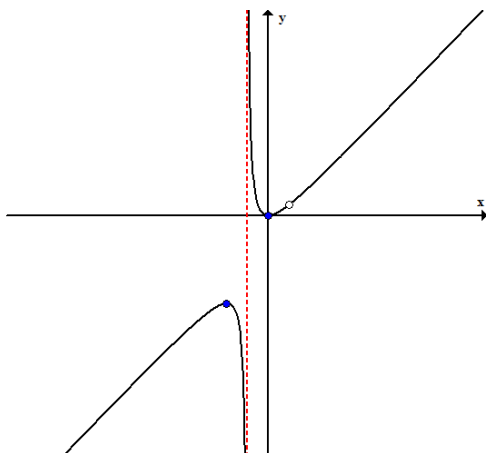
נקודת קיצון: $\max\left(-3, -\frac{27}{4}\right)$, תחום עליה: $x < -3$ או $x > -1$, תחום ירידה: $-3 < x < -1$,
 נקודת פיתול: $(0,0)$, תחום קמירות: $x > 0$, תחום קעירות: $x < -1$ או $-1 < x < 0$.
 (5) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 1$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,-1), (-1,0)$, אסימפטוטות: $x=1, y=1$, אין נקודות קיצון,
 תחום ירידה: כל x , נקודת פיתול: $(-1,0), \left(-3, \frac{1}{8}\right)$, תחום קמירות: $-3 < x < -1$ ו- $x > 1$,
 תחום קעירות: $x < -3$ או $-1 < x < 1$. (6) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq \pm 1$, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$, אסימפטוטות: $x=-1$, חור בנקודה $\left(1, \frac{1}{2}\right)$,
 נקודת קיצון: $\min(0,0), \max(-2,-4)$, תחום עליה: $x < -2$ או $0 < x < 1$ או $x > 1$, תחום ירידה: $-2 < x < -1$ או $-1 < x < 0$, אין נקודות פיתול, תחום קמירות: $-1 < x < 1$ או $x > 1$, תחום קעירות: $x < -1$.



(5)



(6)



חקירת פונקציה מעריכית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = x - e^x$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

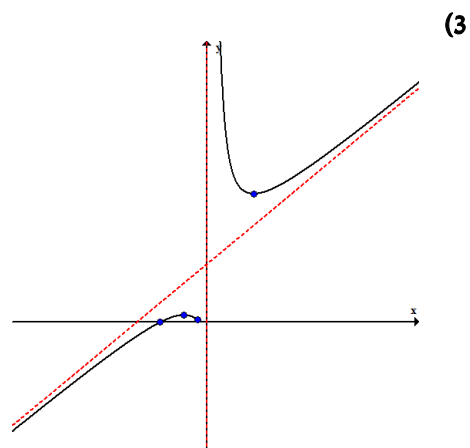
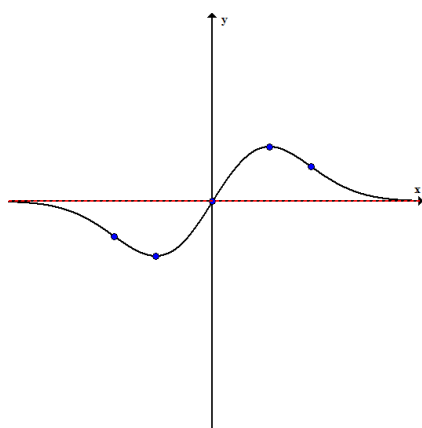
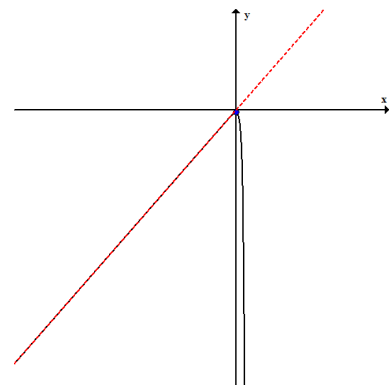
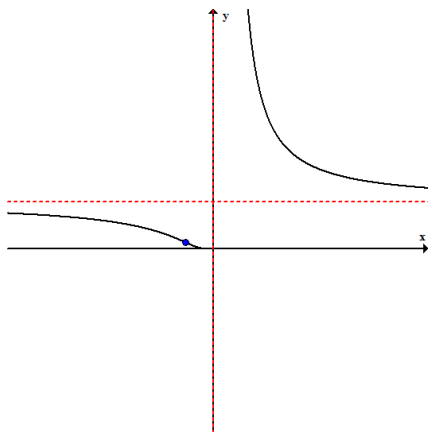
3. חקור את הפונקציה $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}}$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = xe^{-2x^2}$.

פתרונות

(1) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0, -1)$, אסימפטוטות: $y = x$, נקודת קיצון: $\max(0, -1)$, תחום עליה: $x < 0$, תחום ירידה: $x > 0$, אין נקודות פיתול, תחום קעירות: כל x .
 (2) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: אין, אסימפטוטות: $x = 0$, $y = 1$, נקודת קיצון: אין, תחום ירידה: כל x , נקודת פיתול: $\left(-\frac{1}{2}, e^{-2}\right)$, תחום קמירות: $-0.5 < x < 0$ או $x > 0$, תחום קעירות: $x < -0.5$.
 (3) תחום הגדרה ורציפות: כל $x \neq 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(-2, 0)$, אסימפטוטות: $x = 0$, $y = x + 3$, נקודת קיצון: $\max(-1, e^{-1})$, $\min(2, 4e^{1/2})$, תחום עליה: $x < -1$ או $x > 2$, תחום ירידה: $-1 < x < 0$ או $0 < x < 2$, נקודת פיתול: $(-0.4, 1.6e^{-2.5})$.

תחום קמירות: $-0.4 < x < 0$ או $x > 0$, תחום קעירות: $x < -0.4$.
 (4) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0)$,
 אסימפטוטות: $y = 0$, נקודת קיצון: $\min\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right), \min\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)$
 תחום עליה: $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, תחום ירידה: $x < -\frac{1}{2}$ או $x > \frac{1}{2}$,
 נקודת פיתול: $(0,0), (-\sqrt{3/4}, -\sqrt{3/4}e^{-3/2}), (\sqrt{3/4}, \sqrt{3/4}e^{-3/2})$
 תחום קמירות: $-\sqrt{3/4} < x < 0$ או $x > \sqrt{3/4}$, תחום קעירות: $0 < x < \sqrt{3/4}$ או $x < -\sqrt{3/4}$.



חקירת פונקציה לוגריתמית

1. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}}$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = x \ln x$.

5. חקור את הפונקציה $f(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln x - 3$.

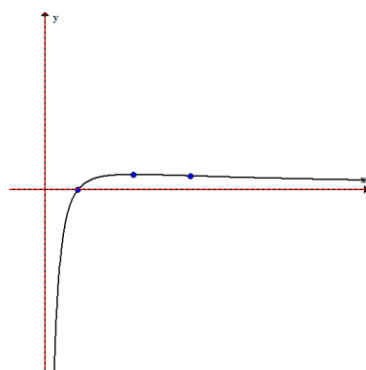
6. חקור את הפונקציה $f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3$.

פתרונות

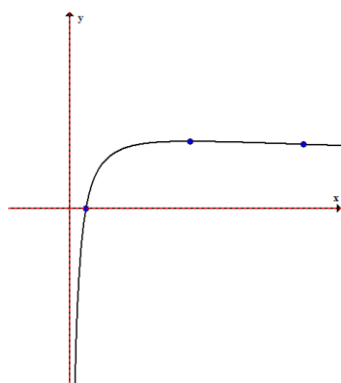
(1) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$, נקודת קיצון: $\max(e, 1/e)$, תחום עליה: $0 < x < e$, תחום ירידה: $x > e$, נקודת פיתול: $(e^{3/2}, (3/2)/e^{3/2})$, תחום קעירות: $0 < x < e^{3/2}$, תחום קמירות: $x > e^{3/2}$ (2) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: $x=0$, $y=0$, נקודת קיצון: $\max(e^2, 2/e)$, תחום עליה: $0 < x < e^2$, תחום ירידה: $x > e^2$, נקודת פיתול: $(e^{8/3}, \frac{8/3}{\sqrt{e^{8/3}}})$, תחום קמירות: $x > e^{8/3}$, תחום קעירות: $0 < x < e^{8/3}$ (3) תחום הגדרה ורציפות: כל $x < 2$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, $(0, -\frac{1}{2} \ln 2)$, אסימפטוטות: $x=2$, אין נקודות קיצון, תחום עליה: כל x , אין נקודות פיתול. (4) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(1,0)$, אסימפטוטות: חור בנקודה $(0,0)$, נקודת קיצון: $\min(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e})$, תחום עליה: $x > \frac{1}{e}$, תחום ירידה: $0 < x < \frac{1}{e}$, אין נקודות פיתול, תחום קמירות: כל x . (5) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(e,0)$, $(e^{-3},0)$, אסימפטוטות: $x=0$, נקודת קיצון: $\min(e^{-1}, -4)$, תחום עליה: $x > e^{-1}$, תחום ירידה: $0 < x < e^{-1}$, נקודת פיתול: $(1,-3)$, תחום קעירות: $x > 1$, תחום קמירות: $0 < x < 1$

(6) תחום הגדרה ורציפות: כל $x > 0$, זוגיות: לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים:
 $(e^{1.5}, 0), (e^{-0.5}, 0)$, אסימפטוטות: $x = 0$, נקודת קיצון: $\min(e^{1/2}, -4)$, תחום עליה: $x > e^{1/2}$,
תחום ירידה: $0 < x < e^{1/2}$, נקודת פיתול: $(e^{3/2}, 0)$, תחום קעירות: $x > 3/2$, תחום קמירות:
 $0 < x < 3/2$

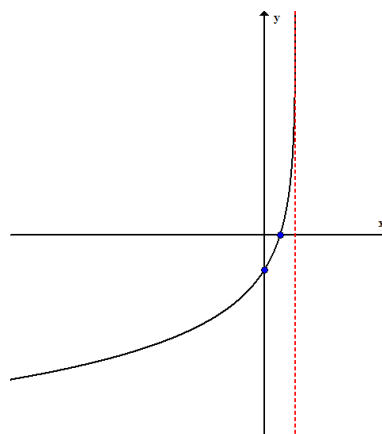
(1)



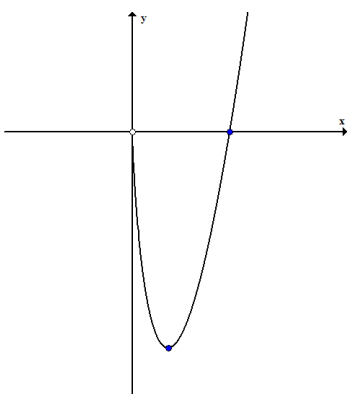
(2)



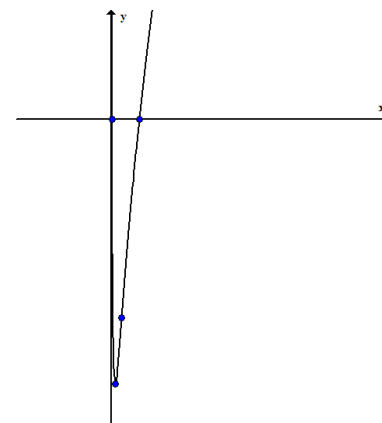
(3)



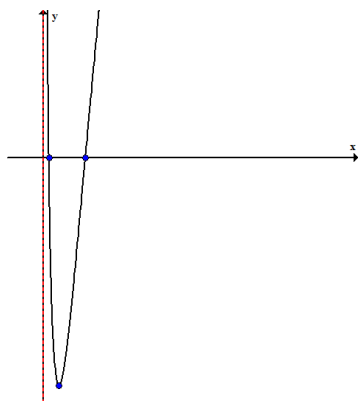
(4)



(5)



(6)



חקירת פונקציה עם שורשים

1. חקור את הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

2. חקור את הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x)$.

3. חקור את הפונקציה $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)^2$.

4. חקור את הפונקציה $f(x) = \sqrt[3]{x^2}-1$.

פתרונות

(1) תחום הגדרה ורציפות: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,1)$, אסימפטוטות: $y=0$, נקודת קיצון: $\max(0,1)$, תחום עליה: $x < 0$, תחום ירידה: $x > 0$, נקודת פיתול: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{1.5}}\right), \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{1.5}}\right)$, תחום קעירות: $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$, תחום קמירות: $x > \sqrt{\frac{1}{2}}$.

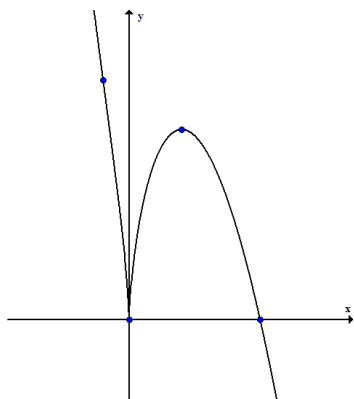
(2) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: לא, לא זוגית ולא אי-זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,0), (1,0)$, אין אסימפטוטות, נקודת קיצון: $\max(2/5, 0.326), \min(0,0)$, תחום עליה: $0 < x < 2/5$, תחום ירידה: $x < 0$ או $x > 2/5$, נקודת פיתול: $(-0.2, 0.41)$, תחום קמירות: $x < -0.2$, תחום קעירות: $-0.2 < x < 0$.

או $x > 0$. (3) תחום הגדרה ורציפות: כל x , נקודות חיתוך עם הצירים: $(0,1), (-1,0), (1,0)$, אין אסימפטוטות, נקודות קיצון: $\max(0,1), \min(1,0), \min(-1,0)$, תחום עליה: $-1 < x < 0$.

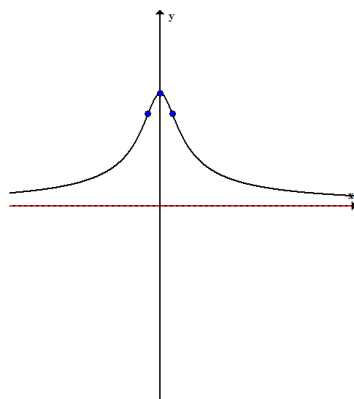
או $x > 1$, תחום ירידה: $x < -1$ או $0 < x < 1$, אין נקודות פיתול, תחום קמירות: לכל x .

(4) תחום הגדרה ורציפות: כל x , זוגיות: זוגית, נקודות חיתוך עם הצירים: $(-1,0), (1,0), (0,-1)$, אין אסימפטוטות, נקודת קיצון: $\min(0,-1)$, תחום עליה: $0 < x < 1$ או $x > 1$, תחום ירידה: $x < -1$ או $-1 < x < 0$, נקודות פיתול: $(-1,0), (1,0)$, תחום קמירות: $-1 < x < 1$, תחום קעירות: $x < -1$ או $x > 1$.

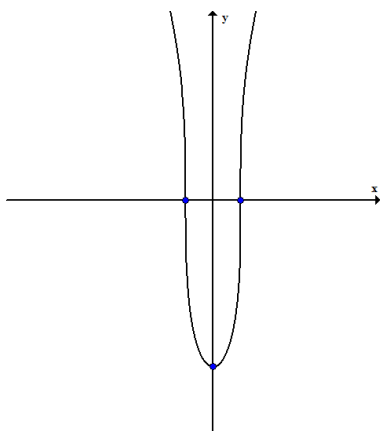
(2)



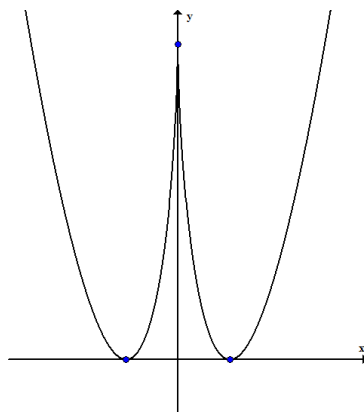
(1)



(4)



(3)



פרק 9 – אינטגרלים

אינטגרלים לא מסוימים

- בסרטון זה הסבר על אינטגרלים לא מסוימים.

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int 4dx \quad .1 \qquad \int x^4 dx \quad .2 \qquad \int \frac{1}{x^2} dx \quad .3$$

$$\int \sqrt{x} dx \quad .4 \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad .5 \qquad \int 4x^{10} dx \quad .6$$

$$\int (2x^2 - x + 1) dx \quad .7 \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x} \right) dx \quad .8 \qquad \int (x^2 + 1)^2 dx \quad .9$$

$$\int (x^2 + 1)(x + 2) dx \quad .10 \qquad \int \frac{1 + 2x^2 + x^4}{x^2} dx \quad .11 \qquad \int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad .12$$

$$\int (4x+1)^{10} dx \quad .13 \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad .14 \qquad \int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad .15$$

$$\int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad .16 \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad .17 \qquad \int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad .18$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad .19 \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad .20 \qquad \int \frac{1}{4x} dx \quad .21$$

$$\int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad .22 \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x} \right)^2 dx \quad .23 \qquad \int \frac{1}{4x-1} dx \quad .24$$

$$\int \frac{x+3}{x+2} dx \quad .25 \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad .26 \qquad \int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad .27$$

$$\int (e^{x+1})^2 dx \quad .28 \qquad \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad .29 \qquad \int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}} \right) dx \quad .30$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad .31$$

פתרונות

$$\begin{aligned}
 & \frac{4x^{11}}{11} + c \quad (6) \quad -\frac{2}{\sqrt{x}} + c \quad (5) \quad \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad (4) \quad -\frac{1}{x} + c \quad (3) \quad \frac{x^5}{5} + c \quad (2) \quad 4x + c \quad (1) \\
 & \frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + c \quad (9) \quad -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^4} + c \quad (8) \quad \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c \quad (7) \\
 & \frac{x^{1.5}}{1.5} + \frac{x^{0.5}}{0.5} + c \quad (12) \quad -\frac{1}{x} + 2x + \frac{x^3}{3} + c \quad (11) \quad \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x + c \quad (10) \\
 & \frac{3}{16} \cdot \sqrt[3]{(4x-10)^4} + c \quad (16) \quad -\frac{1}{(x-2)^4} + c \quad (15) \quad \frac{(x-1)^{21}}{21} + c \quad (14) \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{(4x+1)^{11}}{11} + c \quad (13) \\
 & -\left[\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right] + c \quad (19) \quad -\frac{1}{2(x-2)^2} - \frac{1}{3(x-1)^3} + c \quad (18) \quad 10\sqrt{2x+4} + c \quad (17) \\
 & x + 2\ln|x| - \frac{1}{x} + c \quad (23) \quad \ln|x| + x + \frac{x^2}{2} + c \quad (22) \quad \frac{1}{4} \cdot \ln|x| + c \quad (21) \quad \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x+1)^3} - x + c \quad (20) \\
 & 4\left[x - 1.75\ln|x+2| \right] + c \quad (26) \quad x + \ln|x+2| + c \quad (25) \quad \frac{1}{4} \cdot \ln|4x-1| + c \quad (24) \\
 & \frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln(215)} + \frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln(16/5)} + \frac{(200)^x}{\ln(200)} + c \quad (29) \quad \frac{1}{2}e^{2x+2} + c \quad (28) \quad \frac{1}{4}e^{4x} - e^{-x} + c \quad (27) \\
 & -\left[x - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| \right] + c \quad (31) \quad 8e^{\frac{1}{2}x} - \frac{3}{4}e^{-\frac{4}{3}x} + c \quad (30)
 \end{aligned}$$

אינטגרלים בשיטת ההצבה

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad .3 \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad .2 \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad .1 \\
 & \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad .6 \quad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad .5 \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad .4 \\
 & \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} \quad .8 \quad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad .7
 \end{aligned}$$

פתרונות

$$\begin{aligned}
 & 2 \left[\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3} - \sqrt{x^2+1} \right] + c \quad (3) \quad \frac{2}{3} \left[\frac{(\sqrt{x^3+4})^5}{5} - \frac{4}{3} \sqrt{x^3+4}^3 \right] + c \quad (2) \quad \frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} + c \quad (1) \\
 & \frac{(\ln x)^5}{5} + c \quad (6) \quad \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1} \right| + c \quad (5) \quad \frac{(\ln x)^{-3}}{-3} + c \quad (4) \\
 & -\frac{1}{x^3} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^4} + c \quad (8) \quad -\frac{1}{4} \left[\frac{(1-x^4)^{-1}}{-1} - \ln|1-x^4| \right] + c \quad (7)
 \end{aligned}$$

אינטגרלים של פונקציות רציונליות

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{aligned}
 & \int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad 1. \quad \int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad 2. \quad \int \frac{1}{x^2-4} dx \quad 3. \\
 & \int \frac{2-x}{x^2+5x} dx \quad 4. \quad \int \frac{x}{x^2+5x+6} dx \quad 5.
 \end{aligned}$$

פתרונות

$$\begin{aligned}
 & \ln|x-4| - \frac{5}{x-4} + c \quad (1) \quad -\frac{1}{3(x-1)^6} - \frac{1}{(x-1)^7} + c \quad (2) \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c \quad (3) \\
 & \frac{2}{5} \ln|x| - \frac{7}{5} \ln|x+5| + c \quad (4) \quad 3 \ln|x+3| - 2 \ln|x+2| + c \quad (5)
 \end{aligned}$$

אינטגרציה בחלקים

חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{aligned}
 & \int x e^x dx \quad 1. \quad \int x^4 \ln x dx \quad 2. \quad \int (x^2+2x+3) \ln x dx \quad 3. \\
 & \int x^2 e^{-4x} dx \quad 4. \quad \int \ln x dx \quad 5. \quad \int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad 6.
 \end{aligned}$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 10 - סדרות

(1) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^3 + 10n} \quad (3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n} \quad (2)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-n})^{\ln n} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n} \quad (6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 5n + 6}{2n + 10} - \frac{n}{2} \right) \quad (5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^5 + 10n} \quad (4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^n + 4^{n+1}}{2^{4n+2} + 2^{n+3}} \quad (9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{3n-3}}{\sqrt{4n+1} - \sqrt{5n-1}} \quad (8)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 + 2n^2 + 6 + 27n^6}}{\sqrt{3n^3 + 10n + 4n^4}} \quad (7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3n^3 - 5n - 1}{n^3 - 2n^2 + 1} \right) \quad (12)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4n^2 + 2}{n^2 + 1000n}} \quad (11)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^n + 3^{n+1}}{81^{0.5n} + 3^{n+3}} \quad (10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n) \quad (15)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{an+1}{bn+2}} \quad (14)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{n^4 + 2n^2 + 6}{3n^4 + 10n}} \quad (13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^2 + 1} - n^2) \quad (18)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n + 1} - n) \quad (17)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + kn} - n) \quad (16)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^n \quad (21)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \quad (20)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + an} - \sqrt{n^2 + bn}) \quad (19)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+3}{2n-3} \right)^n \quad (24)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)^{n^2-1} \quad (23)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^n \quad (22)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{n} \right)^n \quad (27)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 4n + 1}{n^2 + 2n + 2} \right)^{10n} \quad (26)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n + 4} \right)^{4n^2} \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \sin n}{4n + \cos n} \quad (30)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(2n+1)}{n} \quad (29)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 4^n} \quad (33)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + \arctan(2n-3)}{4n + \arctan(n - \ln n)} \quad (32)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n + \sin 2n}{n^2 + \cos 3n} \quad (31)$$

הערה חשובה מאוד !

בפתרון המלא, יופיע במקום המשתנה n , המשתנה x . יש להתייחס אל x כאל מספר טבעי !

בנוסף, יש לזכור שסדרה היא פונקציה (מהטבעיים לממשיים) ולכן לעיתים אומר פונקציה

במקום סדרה.

(2) חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{lll} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n!)^2} \sqrt[2n]{(2n)!} & (3) & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} & (2) & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} & (1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4n]{1 + 2^{4n + \frac{1}{n}}} & (6) & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2n]{(2n)!}}{2n} & (5) & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{4n} & (4) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3 + n^2 + 1} & (9) & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2 + 4n + 1} & (8) & \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sin\left(\frac{4}{n}\right) & (7) \\ 4^n \sin \frac{1}{n} & (12) & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n + (-1)^n}{n} \right]^n & (11) & \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi n}{2} & (10) \end{array}$$

(3) חשב את הגבולות הבאים:

$$\begin{array}{ll} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} & (2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} \right) & (1) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) & (4) & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{n} & (3) \\ * \text{ רמזים: סעיף 1 - } \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} . \text{ סעיף 2 - הוכח כי } a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}} . \end{array}$$

(4) בתרגילים הבאים נתונה סדרה בעזרת נוסחת נסיגה (רקורסיה).

הוכח שהסדרה מתכנסת וחשב את גבולה.

$$(1) \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad a_1 = \sqrt{2} \quad (2) \quad a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}, \quad a_1 = 2 \quad (3) \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{1}{a_n} \right), \quad a_1 = 2$$

(5) נתונה הסדרה $a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

א. 1. נגדיר סדרה חדשה b_n על ידי: $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. הוכח שהגבול $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ קיים וחשב אותו.

2. בעזרת התוצאה של הסעיף הקודם הוכח שהסדרה a_n שואפת לאינסוף.

ב. 1. מצא ביטוי סגור עבור הסדרה a_n (כלומר נוסחה לא רקורסיבית).

2. ענה שוב על סעיף א.1. בעזרת הביטוי הסגור שמצאת.

3. הוכח באינדוקציה שהביטוי הסגור שמצאת בסעיף הקודם הוא אכן נכון.

(6) על סמך ההגדרה של גבול של סדרה הוכח כי:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n}{2n^2 + 3} = \frac{1}{2} \quad \text{א.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ב.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{4n+3} = \frac{1}{2} \quad \text{ג.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \cos^2 n}{n^2 + 2} = 0 \quad \text{ד.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 - 2n + 1}{2n^2 + n + 3} = 2 \quad \text{ה.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1} = 1 \quad \text{ו.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 - n^2 + 5n + 6 = \infty \quad \text{ז.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 2n + 4 = \infty \quad \text{ח.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n) = 2 \quad \text{ט.}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log \frac{1}{n} = -\infty \quad \text{י.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} e^{2n+1} = \infty \quad \text{יא.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log(2n+5) = \infty \quad \text{יב.}$$

(7) הוכח או הפרך:

(1) אם a_n סדרה חסומה אז יש לה גבול.

(2) אם b_n סדרה לא חסומה אז $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$.

(3) אם $\lim_{n \rightarrow \infty} |c_n| = k$ אז $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = k$ או $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -k$.

(4) אם d_n סדרה עולה אז היא לא חסומה.

(5) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול אז גם ל- $(a_n + b_n)$ וגם ל- $(a_n \cdot b_n)$ אין גבול.

(6) אם ל- a_n ו- b_n אין גבול אז גם ל- (a_n / b_n) אין גבול.

(7) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתבדרת.

(8) אם a_n מתכנסת ו- b_n מתבדרת, אז $(a_n \cdot b_n)$ מתכנסת.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{L} \quad \text{אם} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = L \quad \text{זא}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{אם} \quad a_n < b_n \quad \text{לכל } n \quad \text{זא}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty \quad \text{אם} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{ואם } b_n \text{ חסומה אז}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k \quad \text{אם} \quad a_n < 1 \quad \text{לכל } n \quad \text{זא} \quad k < 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = 1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \quad (13)$$

פתרונות

(1) (1) 0 (2) 4 (3) ∞ (4) 0 (5) -5 (6) 1 (7) 1.5 (8) $\frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}}$ (9) 0.25 (10) 4 (11) 2

(12) $\ln 3$ (13) $e^{1/3}$ (14) $(\lim a_n = \sqrt[5]{a/b}) \Leftrightarrow (b \neq 0)$,
 $(\lim a_n = \infty) \Leftrightarrow (a > 0, b = 0)$

(15) $(\lim a_n = -\infty) \Leftrightarrow (a < 0, b = 0)$ (16) $\frac{k}{2}$ (17) 0.5 (18) 0.5 (19) $\frac{a-b}{2}$ (20) $e^{0.5}$

(21) 1 (22) e^{-1} (23) e^3 (24) e^{-12} (25) e^{30} (26) e (27) 0 (28) 0 (29) 0 (30) 0.75 (31) 3

(32) $\frac{3}{4}$ (33) 4 (2) (1) 0 (2) 0 (3) 4 (4) $\frac{1}{4e}$ (5) ∞ (6) 1 (7) 4 (8) 0.5 (9) $\frac{1}{3}$

(10) אין גבול. (11) אין גבול. (12) ∞ (3) (1) 1 (2) 0 (3) 1 (4) 1 (4) (1) הגבול 2

(2) הגבול 1 (3) הגבול 1 (5) א.1. הגבול $\frac{1}{3}$ ב.1. $a_n = \frac{1}{6} \cdot 3^n - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n$