

מתמטיקה 5 יחידות

GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תלמידים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכילות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכנית הלימודים של משרד החינוך. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

יוחאי טוויג



תוכן

פרק 1- מרינום.....	5
פרק 2 - אי שיויונים	7
פרק 3 – חקירת משוואות	9
3.1 - חקירת משוואות ממעלה ראשונה.....	9
3.2- חקירת משוואות ממעלה שנייה	12
פרק 4 – גיאומטריה.....	14
4.1 –רקע קווים חזויות	14
4.2 –משולש כללי, משולש שווה שוקיים, משולש ישר זווית.....	16
4.3 –חפיפת משולשים.....	18
4.4 –זווית חיצונית למשולש ומשולש ישר זווית	20
4.5 – קמע אמצעים במשולש ומפגש תיכונים במשולש.....	23
4.6 -מרובעים	25
4.7 – המעגל.....	33
4.8 - פרופורציה ודמיון.....	39
פרק 5 – סדרות	45
5.1 - סדרה חשבונית	45
5.2 - סדרה הנדסית	48
5.3 - סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת	51
5.4 – סדרת נסיגה.....	53
פרק 6- מריגונומטריה.....	56
6.1 - מריגונומטריה במשולש ישר זווית.....	56
6.2 –זהויות מריגונומטריות	60
6.3 - מריגונומטריה – משוואות	64
6.4 - מריגונומטריה במישור	70
פרק 7- חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	77
7.1 – נגזרות ומשיקים	77
7.2 - חקירת פולינום.....	84
7.3 - חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש	89
7.4 - חקירת פונקציה עם פרמטר.....	97
7.5 - חשבון דיפרנציאלי – בעיות קיצון.....	100
7.6 - חשבון אינטגרלי.....	106
7.7 - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת.....	114
7.8 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מריגונומטריות	118
7.9 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות.....	129
7.10 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות.....	138

פרק 8 - הסתברות קלאסית	147
פרק 9 – בעיות מילוליות	155

פרק 1 - מרינום

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף תרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	כולל הסבר כיצד עושים מרינום
סרטון 2	תרגיל 2	
סרטון 3	תרגיל 3	
סרטון 4	תרגיל 4	
סרטון 5	תרגיל 5	
סרטון 6	תרגיל 6	כולל הסבר כיצד עושים מרינום מקוצר
סרטון 7	תרגיל 7	
סרטון 8	תרגיל 8	
סרטון 9	תרגיל 1	כולל הסבר כיצד ניתן להסתדר בכל התרגילים גם ללא מרינום
סרטון 10	תרגיל 4	פתרון ללא מרינום
סרטון 11	תרגיל 6	פתרון ללא מרינום

תרגילים:

1. $4x^2 + 8x + 3 =$

2. $2x^2 + 7x - 15 =$

3. $3x^2 - 11x + 6 =$

4. $6x^2 + 5x + 1 =$

5. $2x^2 + x - 6 =$

6. $x^2 + 5x + 4 =$

7. $x^2 - 8x + 15 =$

8. $x^2 - 33x + 62 =$

פתרונות:

1. $(2x+1)(2x+3)$.2 $(2x-3)(x+5)$.3 $(3x-2)(x-3)$.4 $(3x+1)(2x+1)$

5. $(x+2)(2x-3)$.6 $(x+1)(x+4)$.7 $(x-3)(x-5)$.8 $(x-2)(x-31)$

פרק 2 - אי שוויונים

מותר

1. לחבר/לחסר כל מספר/ביטוי
2. לכפול/לחלק בכל מספר/ביטוי חיובי
3. לכפול/לחלק בכל מספר/ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי השוויון
4. להעלות בחזקה אי זוגית
5. להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי השוויון אינם שליליים

אסור

1. לכפול/לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו
2. להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 1		מהו אי שוויון, סימון אי שוויון על ציר
סרמון 2		חיתוך ואיחוד אי שוויון (מעלה ראשונה)
סרמון 3	תרגיל 1	חיתוך ואיחוד אי שוויון (מעלה ראשונה) – המשך
סרמון 4		מותר ואסור באי שוויונים
סרמון 5	תרגיל 2	
סרמון 6	תרגיל 3	אי שוויונים ממעלות גבוהות – הסבר על שימת הנחש
סרמון 7	תרגיל 4	
סרמון 8	תרגיל 5	
סרמון 9	תרגיל 6	דוגמא לאי שוויון ללא מכנה
סרמון 10	תרגיל 7	הסבר על נחש עם נקודת השקה
סרמון 11	תרגיל 8	דוגמא לנחש עם נקודת השקה
סרמון 12	תרגיל 9	אי שוויון שמכיל ביטוי שלא מתפרק
סרמון 13	תרגילים 10, 11, 12	דוגמאות לאי שוויון שמכיל ביטוי שלא מתפרק
סרמון 14	תרגיל 13	אי שוויון לא מסודר (לראשונה)
סרמון 15	תרגיל 14	אי שוויון לא מסודר
סרמון 16	תרגיל 15	מערכת אי שוויונים לא מסודרים
סרמון 17	תרגיל 16	מערכת אי שוויונים לא מסודרים
סרמון 18	תרגיל 17	אי שוויון כפול
סרמון 19	תרגיל 18	הסבר ודוגמא – פונקציה מעל פונקציה

תרגילים:

$$1. x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\}$$

$$2. x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x)$$

$$3. \frac{(x-4)(x+2)}{x-1} < 0$$

$$4. \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$$

$$5. \frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0$$

$$6. x(x+3)(2x-5) < 0$$

$$7. \frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$$

$$8. \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0$$

$$9. \frac{x-3}{x^2+2} > 0$$

$$10. \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$$

$$11. \frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$$

$$12. \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$$

$$13. \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$$

$$14. \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2}$$

$$15. x^2 > 3x+10 \cap 6 < 5x-x^2$$

$$16. \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$$

$$17. 1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2$$

$$18. \text{ עבור אילו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

פתרונות:

$$1. -2 < x \leq -\frac{3}{4} \quad 2. x \leq -4 \quad 3. 1 < x < 4 \quad 4. x < -2 \quad 5. x < -7$$

$$6. -1 < x \leq 1.5 \quad 7. x < -3 \quad 8. 4 < x \leq 12 \quad 9. x < -1$$

$$10. 3 < x \quad 11. x < -3 \quad 12. 0 < x < 1 \quad 13. x > 4 \quad 14. 1 < x < 3 \quad 15. 1 < x < 3$$

$$16. x \leq 0 \quad 17. x \neq 1 \quad 18. x \geq 7 \quad 19. 3 < x \quad 20. -3 < x < -\frac{3}{5}$$

פרק 3 – חקירת משוואות

3.1 - חקירת משוואות ממעלה ראשונה

שלבי עבודה:

1. נפתור את המשוואה.
2. נאתר את ערכי הפרמטר המאפסים את המכנה בכל שלבי הפתרון.
3. נבדוק עבור כל ערך כזה בנפרד כמה פתרונות יש למשוואה על ידי הצבתו במשוואה המקורית.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	תזכורת לפתרון משוואה עם פרמטר
סרטון 2	תרגיל 2	תזכורת לפתרון משוואה עם פרמטר
סרטון 3	תרגיל 3	תזכורת לפתרון מערכת משוואות עם פרמטר
סרטון 4		סוגי מערכת משוואות עם פרמטר
סרטון 5	תרגיל 4	הסבר כיצד פותרים שאלה העוסקת במספר הפתרונות של משוואה ממעלה ראשונה
סרטון 6	תרגיל 4	המשך הסבר מסרטון קודם
סרטון 7		שלבי עבודה בשאלה העוסקת במספר הפתרונות של משוואה ממעלה ראשונה
סרטון 8	תרגיל 5א	
סרטון 9	תרגיל 5א	המשך פתרון שאלה מהסרטון הקודם
סרטון 10	תרגיל 5ב	
סרטון 11	תרגיל 6	דוגמא לשאלה בה יש פרמטר במכנה של המשוואה המקורית
סרטון 12	תרגיל 7	פתרון מערכת המשוואות
סרטון 13	תרגיל 7א	פתרון סעיף א
סרטון 14		שלבי עבודה בשאלה העוסקת במספר הפתרונות של מערכת משוואות ממעלה ראשונה
סרטון 15	תרגיל 7ב	פתרון סעיף ב
סרטון 16	תרגיל 8	פתרון מערכת המשוואות
סרטון 17	תרגיל 8א	פתרון סעיף א והסבר על ניסוח השאלה בתור מספר נקודות החיתוך של שני ישרים
סרטון 18	תרגיל 8ב	פתרון סעיף ב

תרגילים:

1. פתור את המשוואה: $kx + 6k = 2x + 3k^2$

2. פתור את המשוואה: $a^2(x-1) = 3ax + 4(x-a)$

3. פתור את מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} 2kx + 5y = 2k^2 \\ 2x - y = -10 \end{cases}$$

4. נתונה המשוואה: $m(mx-2) = 3(2+3x)$

מצא עבור אילו ערכי m למשוואה: (1) יש פתרון יחיד (2) אין פתרון (3) יש אינסוף פתרונות

5. נתונה המשוואה: $k^2(5-2x) = 3(15-2kx)$

א. מצא עבור אילו ערכי k למשוואה: (1) יש פתרון יחיד (2) אין פתרון (3) יש אינסוף פתרונות

ב. מצא עבור אילו ערכי k פתרון המשוואה: (1) חיובי (2) מקיים את אי השוויון $2x-3 > x$

6. נתונה המשוואה:
$$\frac{mx}{m-2} = \frac{2m}{m-5} - \frac{6x}{m^2-7m+10}$$

מצא עבור אילו ערכי m למשוואה: (1) יש פתרון יחיד (2) אין פתרון (3) יש אינסוף פתרונות

7. נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} (4-a)x + 3(2a-1)y = 3 \\ x + ay = 1 \end{cases}$$

א. מצא עבור אילו ערכי a למערכת המשוואות: (1) יש פתרון יחיד (2) אין פתרון (3) יש

אינסוף פתרונות

ב. מצא עבור אילו ערכי a פתרון מערכת המשוואות מקיים את אי השוויון $2x+y > -1$

8. נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{cases} x + 3ay = a \\ ax + 3y = 4a - 3 \end{cases}$$

א. מצא עבור אילו ערכי a למערכת המשוואות: (1) יש פתרון יחיד (2) אין פתרון (3) יש

אינסוף פתרונות

ב. מצא עבור אילו ערכי a נקודת החיתוך בין הישרים (המיוצגים על ידי המשוואות) נמצאת ברביע

השלישי.

פתרונות:

1. $x = 3k$ 2. $x = \frac{a}{a+1}$ 3. $(k-5, 2k)$ 4. $m \neq \pm 3$ [1] $m = 3$ [2] $m = -3$ [3]

5. א. [1] $k \neq 0, k \neq 3$ [2] $k = 0$ [3] $k = 3$ ב. [1] $0 < k$ או $k < -3$ וגם $k \neq 3$

[2] $0 < k < 15$ וגם $k \neq 3$ 6. [1] $m \neq 3, m \neq 2, m \neq 5$ [2] $m = 3, m = 2, m = 5$ [3] אף m

$a \neq 1$ $a < -10$ $-3 < a$ $a = 1$ $a = -3$ $a \neq -3, a \neq 1$
 $-1 < a < 0$ $a = 1$ $a = -1$ $a \neq -1, a \neq 1$

3.2 - חקירת משוואות ממעלה שנייה

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		סוגי משוואות או פונקציות ממעלה שנייה על פי מספר הפתרונות
סרטון 2		פרבולה חותכת/משיקה/מרחפת והתלות ב- a ובדלתא
סרטון 3	תרגיל 1	תזכורת לגבי פתרון משוואה ממעלה שנייה עם פרמטר
סרטון 4	תרגיל 2	דוגמא נוספת – פתרון משוואה ממעלה שנייה עם פרמטר
סרטון 5		התנהגות משוואה ממעלה שנייה עם פרמטר לפי ערכי פרמטר שונים
סרטון 6	תרגיל 3	הסבר על דרך הפתרון של שאלה העוסקת במספר הפתרונות של משוואה ממעלה שנייה
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8		הסבר על המקרה הליניארי
סרטון 9	תרגיל 4	הדגמת המקרה הליניארי על תרגיל 4 סעיף 2
סרטון 10	תרגיל 4	הסבר על ניסוח שאלה בתור פונקציה במקום בתור משוואה
סרטון 11	תרגיל 5	שאלה הכוללת מקרה ליניארי
סרטון 12	תרגיל 6	פתרון שאלה ללא מקרה ליניארי
סרטון 13	תרגיל 6	פתרון המקרה הליניארי
סרטון 14	תרגיל 7	שאלה המנוסחת כאי שוויון (וכוללת מקרה ליניארי)

תרגילים:

1. פתור את המשוואה: $x^2 + mx - 12m^2 = 0$

2. פתור את המשוואה: $2x^2 + 5m^2 = (11m + 1)x - 5m$

3. נתונה המשוואה: $x^2 + mx + 9 = 0$

מצא עבור אילו ערכי m למשוואה:

(1) יש שני פתרונות ממשיים שונים

(2) יש פתרון ממשי אחד

(3) אין פתרונות ממשיים

4. נתונה המשוואה: $(3 - m)x^2 + 4mx - 2m = 0$ ($m \neq 3$)

מצא עבור אילו ערכי m למשוואה:

(1) יש שני פתרונות ממשיים שונים

(2) יש פתרון ממשי אחד

(3) אין פתרונות ממשיים

5. נתונה הפונקציה: $y = 2mx^2 + mx - 1$

מצא עבור אילו ערכי m הפונקציה אינה חותכת את ציר ה- x .

6. נתונה הפונקציה: $y = (m^2 - 9)x^2 + (m + 3)x + 4$ ($m \neq \pm 3$)

מצא עבור אילו ערכי m הפונקציה נמצאת מעל ציר ה- x לכל ערך של x .

7. נתון אי השוויון: $mx^2 > (m + 4)(x - 1) - x^2$

מצא עבור אילו ערכי m אי השוויון מתקיים לכל ערך של x .

פתרונות:

1. $x_1 = 3m$, $x_2 = -4m$ 2. $x_1 = 5m$, $x_2 = \frac{m+1}{2}$ 3. $m < -6$ או $6 < m$ [1]

4. $-6 < m < 6$ [3] 5. $m = \pm 6$ [2] 6. $0 < m$ או $m < -3$ וגם $m \neq 3$ [2] 7. $m = 0$, $m = -3$

8. $-3 < m < 0$ 9. $-8 < m \leq 0$ 10. $m > 3\frac{2}{5}$ או $m < -3$ 11. $m > 0$

פרק 4 – גיאומטריה

4.1 – רקע קווים וזוויות

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף תרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		קצת היסטוריה + מושגי יסוד
סרטון 2		ממושגי יסוד להגדרות
סרטון 3		מאקסיומות למשפטים + העשרה על גיאומטריות לא אוקלידיות
סרטון 4		זווית – הגדרה וסימון
סרטון 5	תרגיל 1	תרגיל בנושא זוויות
סרטון 6		הגדרות – זווית חדה/ישרה/קה/שטוחה
סרטון 7		חוצה זווית וזוויות צמודות
סרטון 8		הוכחת המשפט: שתי זוויות צמודות שוות הן בהכרח ישרות
סרטון 9		זוויות קודקודיות – הגדרה והוכחת המשפט (...שוות זו לזו)
סרטון 10	תרגיל 2	תרגיל בנושא זוויות
סרטון 11		ישרים מקבילים והזוויות ביניהם + משפט על הזוויות העונות
סרטון 12		משפט הפוך – הוכחת מקבילות לפי זוויות
סרטון 13	תרגיל 3	תרגיל בנושא קוים מקבילים

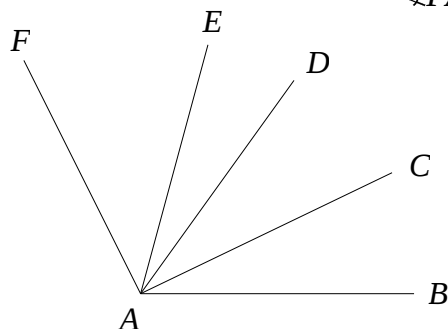
תרגילים:

1. נתון: $\angle FAE = 2 \cdot \angle EAD$, $\angle CAB = \angle DAC$

$$\angle EAB = 80^\circ, \angle FAD = 60^\circ$$

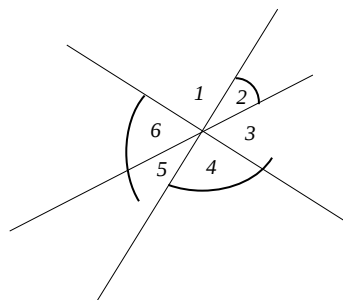
חשב את הזוויות הבאות:

$$\angle FAB, \angle EAC, \angle CAB$$



2. חשב את סכום הזוויות הבאות (נמק):

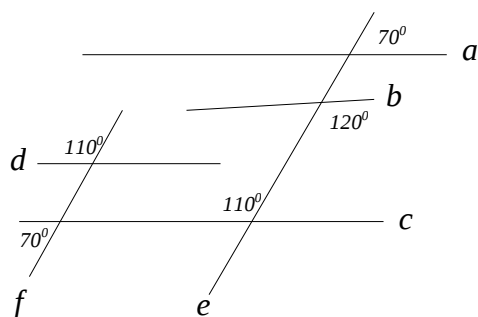
$$\angle 2 + \angle 4 + \angle 6$$



3. מצא את זוויות

הישרים המקבילים

בשרטוט הבא (נמק):



פתרונות:

1. $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle EAC = 50^\circ$, $\angle FAB = 120^\circ$ 2. 180° 3. $d \parallel c$, $a \parallel c$, $e \parallel f$

4.2 – משולש כללי, משולש שווה שוקיים, משולש ישר זווית

משפטים כלליים במשולשים:

משפט: סכום הזוויות במשולש הוא 180°

משפט: סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית

משפט: במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך

במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך

במשולש מול זווית שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך

משולש שווה שוקיים:

משפט: במשולש שווה שוקיים זוויות הבסיס שוות זו לזו

משפט הפוך: משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים

משפט: במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים

משפט הפוך: משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון

הוא משולש שווה שוקיים

משולש שווה צלעות:

הגדרה: משולש שבו כל הצלעות שוות הוא משולש שווה צלעות.

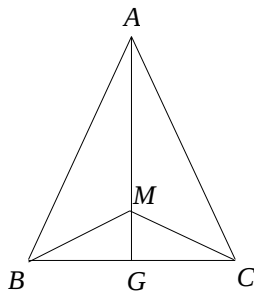
משפט: במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות 60° .

משפט הפוך: משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

לפיניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 14		הגדרות – משולש חד/ישר/קהה זווית, משולש שווה שוקיים/שווה צלעות/שווה צלעות.
סרטון 15		קווים במשולש – חוצה זווית, תיכון, גובה, אנך אמצעי
סרטון 16		משפטים במשולש: סכום זוויות, מול הזווית הגדולה/קטנה נמצאת... ולהפך
סרטון 17		משפטים במש"ע (משולש שווה שוקיים): זוויות הבסיס, חוצה זווית/תיכון גובה
סרטון 18		משולש שווה צלעות – הגדרה ושוויון הזוויות (משפט ומשפט הפוך)
סרטון 19	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 20	תרגיל 4	רישום מדויק של ההוכחה + כיצד רושמים הוכחה בגיאומטריה
סרטון 21	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 22	תרגיל 5	רישום מדויק של ההוכחה

תרגילים:

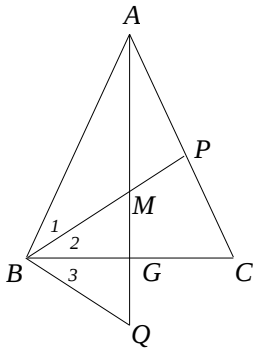


4. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש שווה

שוקיים ($AB = AC$). AG חוצה את זווית $\angle A$.

M היא נקודה כלשהי על AG .

הוכח: $BM = CM$.



5. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש שווה

שוקיים ($AB = AC$). AG ו- BP חוצים את

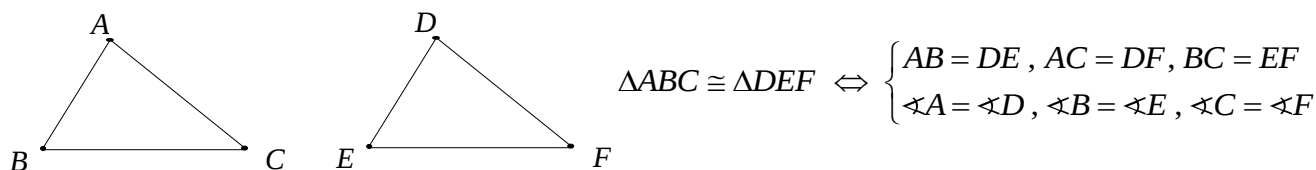
הזווית $\angle A$ ו- $\angle ABC$ בהתאמה. הנקודה Q

נמצאת על המשך AG . נתון: $GM = GQ$.

הוכח: $\angle B_1 = \angle B_3$.

4.3 – חפיפת משולשים

הגדרה: משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.



משפטי החפיפה:

1. משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ.): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
2. משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז.): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
3. משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ.): אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
4. משפט חפיפה צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה ה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
23		מהי חפיפה, סימונים
24		ארבעת משפטי החפיפה
25	תרגיל 6	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
26	תרגיל 6	רישום מדויק של ההוכחה
27	תרגיל 7	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
28	תרגיל 7	רישום מדויק של ההוכחה
29	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
30	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה

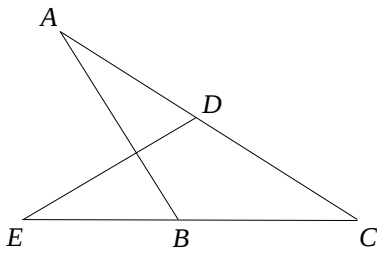
תרגילים:

6. בציר נתון: $AC = EC$, $DC = BC$.

הוכח:

א. $\triangle CDE \cong \triangle CBA$.

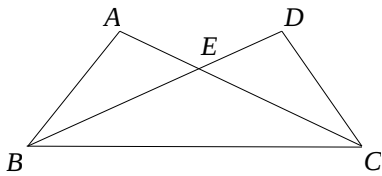
ב. $\angle ADE = \angle ABE$.



7. בציר נתון: $\angle ABC = \angle DCB$,

$\angle DBC = \angle ACB$.

הוכח: $AB = DC$.

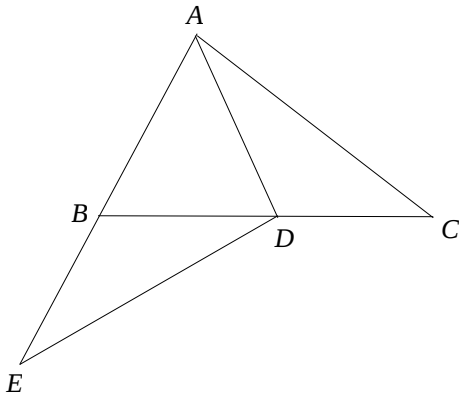


8. בציר נתון: $AB = BE = AD$,

$AC = DE$.

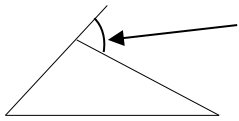
הוכח: הנקודה D היא

אמצע הצלע BC.



4.4 – זווית חיצונית למשולש ומשולש ישר זווית

זווית חיצונית למשולש:



הגדרה: זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.
משפט: זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

משולש ישר זווית:

משפט 1: סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90° .

משפט 2: במשולש שזוויותיו 90° , 60° , 30° , הניצב שמול הזווית של ה- 30° שווה למחצית היתר.

משפט הפוך (ל-2): אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה

היא בת 30° .

משפט 3: במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

משפט הפוך (ל-3): אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית

(כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).

משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

$$\text{כלומר: } (\text{יתר})^2 = (\text{ניצב})^2 + (\text{ניצב})^2$$

משפט הפוך (למשפט פיתגורס): אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית,

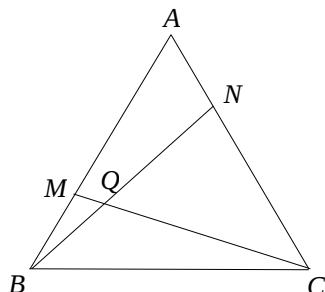
המשולש ישר זווית.

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 31		זווית חיצונית - הגדרה ומשפט
סרמון 32	תרגיל 9	הוכחת המשפט
סרמון 33	תרגיל 10	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 34	תרגיל 10	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 35		משולש שזוויותיו 90° , 60° , 30°
סרמון 36	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 37	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 38		משפט התיכון ליתר והמשפט הפוך לו
סרמון 39	תרגיל 12	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 40	תרגיל 12	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 41	תרגיל 13	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 42	תרגיל 13	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 43		משפט פיתגורס והמשפט הפוך לו
סרמון 44	תרגיל 14א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 45	תרגיל 14א	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 46	תרגיל 14ב	רישום מדויק של ההוכחה

תרגילים:

9. הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה".

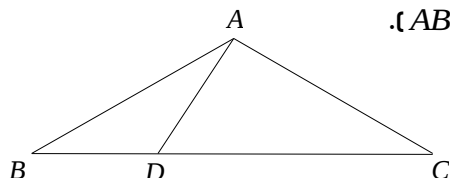


10. משולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש

שווה צלעות.

נתון: $AN = MB$.

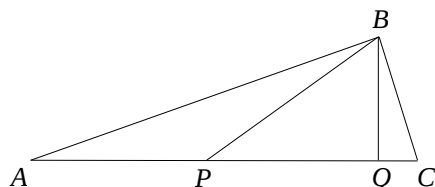
הוכח: $\angle NQC = 60^\circ$.



11. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

נתון: $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle DAC = 90^\circ$, $BC = 18\text{ cm}$.

חשב את אורכו של הקטע BD .

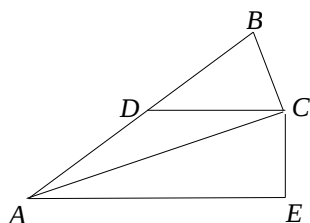


12. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

BQ הוא הגובה ליתר AC ו- BP הוא התיכון ליתר AC .

נתון: $BQ = \frac{1}{2} BP$.

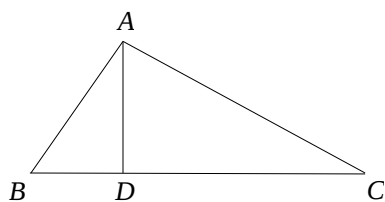
חשב את גודלה של הזווית $\angle C$.



13. המשולש $\triangle BDC$ שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($BD = DC$).

AC חוצה את הזווית $\angle BAE$. נתון: $DC \parallel AE$.

חשב את גודלה של הזווית $\angle ACB$.



14. AD הוא גובה במשולש $\triangle ABC$.

נתון: $BC = 25_{cm}$, $AC = 20_{cm}$, $AB = 15_{cm}$.

א. מצא את אורכו של AD ואת שטח המשולש $\triangle ABC$.

ב. האם המשולש $\triangle ABC$ ישר זווית? נמק.

פתרונות:

11. $BD = 6_{cm}$ 12. $\angle C = 75^\circ$ 13. $\angle ACB = 90^\circ$ 14. א. $AD = 12_{cm}$,
 ב. $S_{\triangle ABC} = 150_{cm^2}$ ב. כן.

4.5 – קטע אמצעים במשולש ומפגש תיכונים במשולש

קטע אמצעים במשולש:

הגדרה: קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.
משפט: קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
משפט הפוך 1: קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
משפט הפוך 2: קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

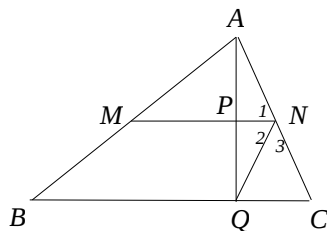
מפגש התיכונים במשולש:

משפט: שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
הערה: נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.
הערה: אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 1:2 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 47		ק"א במשולש – הגדרה ומשפט
סרטון 48		ק"א במשולש – משפטים הפוכים
סרטון 49	תרגיל 15	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 50	תרגיל 15	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 51	תרגיל 16 א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 52	תרגיל 16 א	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 53	תרגיל 16 ב	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 54	תרגיל 16 ב	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 55		מפגש תיכונים במשולש – הסבר ומשפט
סרטון 56	תרגיל 17	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 57	תרגיל 17	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 58	תרגיל 17	רישום מדויק של ההוכחה – המשך התרגיל

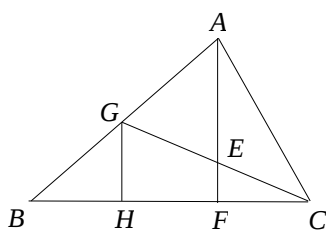
תרגילים:



15. הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ABC$.

AQ הוא גובה לצלע BC .

הוכח: $\angle N_1 = \angle N_2$.



16. AF הוא גובה לצלע BC ו- CG הוא תיכון לצלע AB .

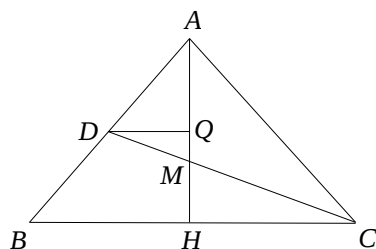
במשולש $\triangle ABC$ הקטע GH מאונך לצלע BC .

א. הוכח: $BH = HF$.

נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את

התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.

ב. חשב את אורך הקטע EF .



17. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$)

שבו AH הוא הגובה לבסיס BC . CD התיכון לשוק AB ,

יוצר זווית של 30° עם הבסיס BC .

נתון: $DQ \parallel BC$, $BC = 12\sqrt{3} \text{ cm}$.

חשב את אורך הקטע MQ .

פתרונות:

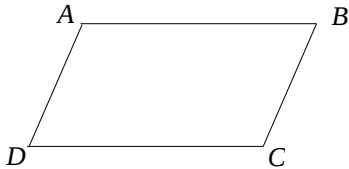
16. ב. $EF = 3 \text{ cm}$ 17. $MQ = 3 \text{ cm}$

4.6 - מרובעים

מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

משפט: סכום הזוויות במרובע הוא 360° .

מקבילית:



הגדרה: מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.

תכונות המקבילית:

משפט 1: במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.

משפט 2: במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.

משפט 3: במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא 180° .

משפט 4: במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע $\cdot$ גובה לצלע

כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.

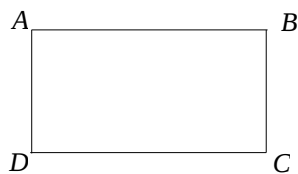
משפט 2: מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.

משפט 3: מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.

משפט 4: מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.

משפט 5: מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

מלבן:



הגדרה: מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.

מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית.

תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):

משפט 1: ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.

משפט 2: האלכסונים במלבן שווים זה לזה.

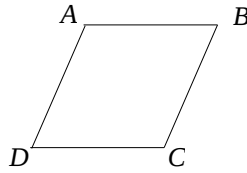
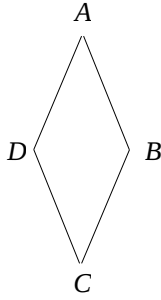
היקף מלבן = סכום הצלעות, שטח מלבן = צלע $\cdot$ [גובה לצלע]

כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מרובע שבו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.

משפט 2: מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.

משפט 3: מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.



מעוין:

הגדרה: מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.

מסקנה: מעוין הוא סוג של מקבילית.

תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):

משפט 1: במעוין כל הצלעות שוות.

משפט 2: במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.

משפט 3: במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.

היקף מעוין = צלע $\cdot 4$, שטח מעוין = צלע $\cdot$ (גובה לצלע) = $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון})/2$

כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.

משפט 2: מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.

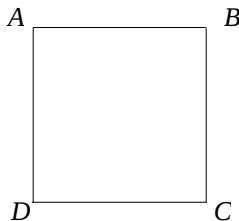
משפט 3: מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

משפט 4: מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין. (מספיק אחד)

ריבוע:

הגדרה: ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.

מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין.



מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיים כי אלכסוני הריבוע חוצים

זה את זה, שווים זה לזה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.

היקף ריבוע = צלע $\cdot 4$, שטח ריבוע = $(\text{צלע})^2/2 = (\text{אלכסון})^2/2$

כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.

משפט 2: מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.

משפט 3: מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.

משפט 4: מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.

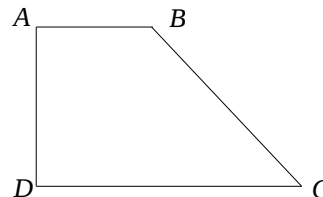
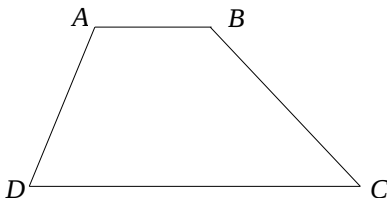
משפט 5: מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

טרפז:

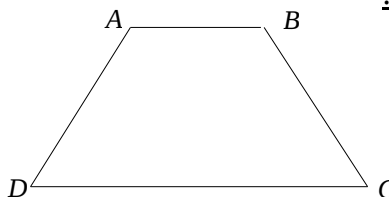
הגדרה: טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.

היקף טרפז = סכום הצלעות, שטח טרפז = $(\text{גובה} \cdot \text{סכום הבסיסים})/2$

טרפז ישר זווית:



טרפז שווה שוקיים:



משפטים הנוגעים לטרפז שווה שוקיים:

משפט 1: בטרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.

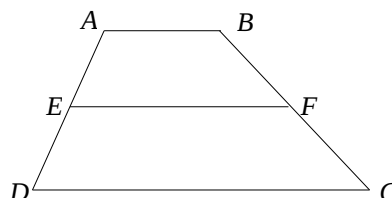
משפט הפוך (ל-1): טרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא טרפז שווה שוקיים.

משפט 2: בטרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

משפט הפוך (ל-2): טרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא טרפז שווה שוקיים.

קטע אמצעים בטרפז:

הגדרה: קטע אמצעים בטרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים בטרפז.



משפט: קטע אמצעים בטרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.

משפט הפוך: קטע היוצא מאמצע שוק אחת בטרפז ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים בטרפז).

דלתון:

הגדרה: דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.

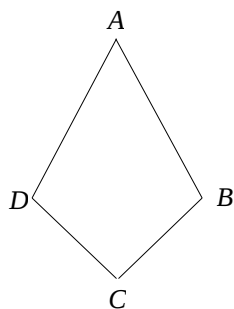
מסקנה: דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווים שוקיים בעלי בסיס משותף.

תכונות האלכסונים בדלתון:

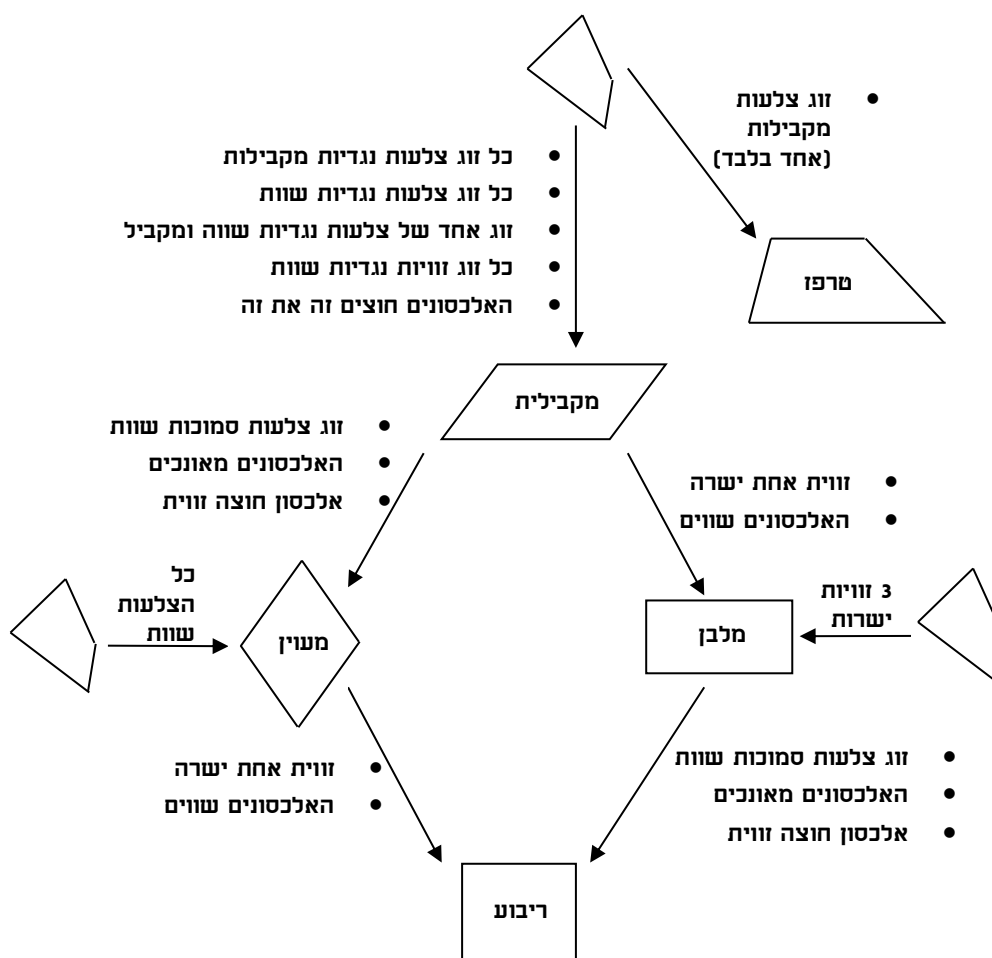
משפט: האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זווית הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

הערה: האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.

היקף דלתון = סכום הצלעות, שטח דלתון = $\frac{(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון})}{2}$



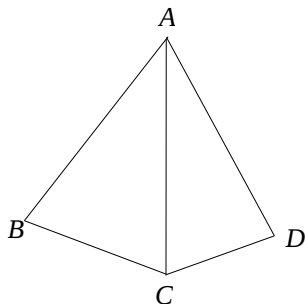
משפחת המרובעים:



לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל מדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הגדרת מרובע, סכום הזוויות במרובע
סרטון 2	תרגיל 1	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 3	תרגיל 1	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 4		הגדרה + תכונות המקבילית + חישוב היקף ושטח מקבילית
סרטון 5	תרגיל 2	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 6	תרגיל 2	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 7		כיצד מוכיחים שמרובע הוא מקבילית
סרטון 8	תרגיל 3	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 9	תרגיל 3	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 10		הגדרה + תכונות המלבן + חישוב היקף ושטח מלבן
סרטון 11	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 12	תרגיל 4	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 13		כיצד מוכיחים שמרובע הוא מלבן
סרטון 14	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 15	תרגיל 5	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 16	תרגיל 5	המשך רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 17		הגדרה + תכונות המעוין + חישוב היקף ושטח מעוין
סרטון 18	תרגיל 6	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 19	תרגיל 6	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 20		כיצד מוכיחים שמרובע הוא מעוין
סרטון 21	תרגיל 7	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 22	תרגיל 7	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 23		הגדרה + תכונות הריבוע + חישוב היקף ושטח ריבוע
סרטון 24	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 25	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 26		כיצד מוכיחים שמרובע הוא ריבוע
סרטון 27	תרגיל 9	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 28	תרגיל 9	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 29	תרגיל 9	המשך רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 30		הגדרת המרפז ותכונותיו, כיצד מוכיחים שמרובע הוא מרפז, חישוב היקף ושטח מרפז
סרטון 31	תרגיל 10	שאלת חישוב שטח מרפז (ללא רישום הוכחה מסודרת)
סרטון 32		מרפז ישר זווית ומרפז שווה שוקיים – משפטים ומשפטים הפוכים
סרטון 33	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 34	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 35		הגדרת קטע אמצעים במרפז, משפט ומשפט הפוך
סרטון 36	תרגיל 12	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 37	תרגיל 12	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 38	תרגיל 12	המשך רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 39		הגדרת הדלתון, תכונות, משפט לגבי האלכסונים, כיצד מוכיחים שמרובע הוא דלתון
סרטון 40	תרגיל 13	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 41	תרגיל 13	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 42		משפחת המרובעים: שרטוט מסכם שמכיל בצורה נוחה את כל הידע שנלמד בפרק המרובעים. מומלץ מאוד!

תרגילים:

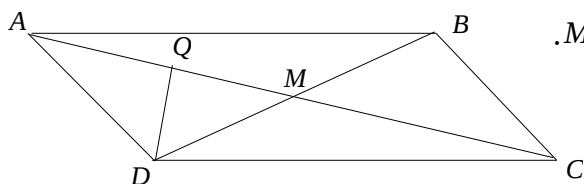


1. המשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle ACD$ שבציור הם

משולשים שווים שוקיים $(AB = AC = AD)$.

נתון: $\angle BAD = 80^\circ$.

חשב את גודלה של הזווית $\angle BCD$.



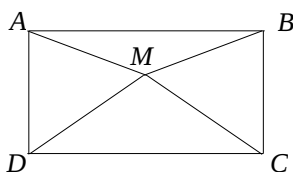
2. נתונה מקבילית $ABCD$ שאלכסוניה נפגשים בנקודה M .

. $AC = 20_{cm}$, $BC = \frac{1}{2} DB$, $DQ \perp AC$: נתון

חשב את אורך הקטע AQ .

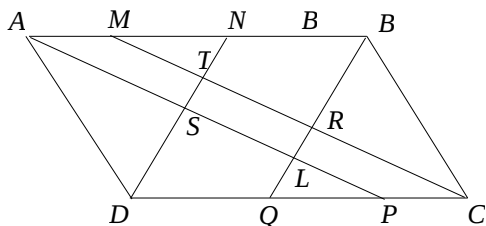
3. את הצלע AB במקבילית $ABCD$ האריכו כאורכה עד לנקודה T .

הוכח: $BTCD$ מקבילית.



4. נתון מלבן $ABCD$ שבו $DM = MC$.

הוכח: $\sphericalangle MAB = \sphericalangle MBA$.



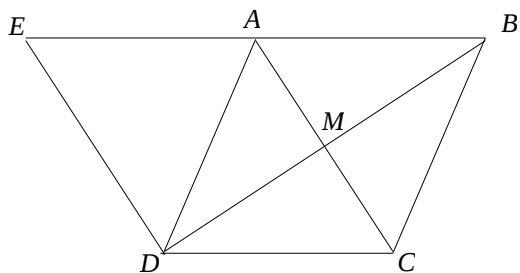
5. נתונה מקבילית $ABCD$ ובה AP ,

CM, BQ ו- DN הם חוצי

הזוויות $\sphericalangle A, \sphericalangle B, \sphericalangle C$

1-D $\nless D$ בהתאמה.

הוכח: $TRLS$ מלבן.



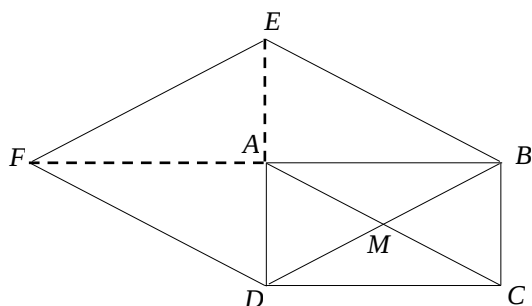
6. נתון מעוין $ABCD$ שאלכסונו

נפגשים בנקודה M . האריכו את

הצלע AB עד לנקודה E כך

שמתקיים $ED \perp DB$.

הוכח: $AD = AE$.



7. נתון מלבן $ABCD$ שאלכסוניו

נפגשים בנקודה M . האריכו

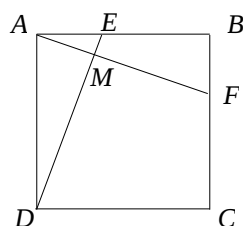
את הצלע AB כאורכה

עד לנקודה F ואת

הצלע AD כאורכה עד

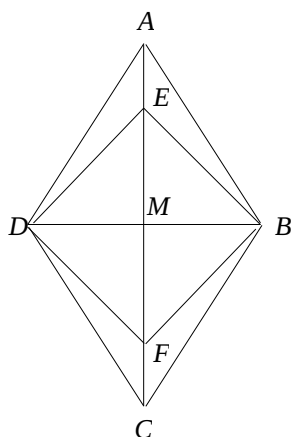
לנקודה E כמתואר בשרטוט.

הוכח: המרובע $EBDF$ הוא מעוין.



8. בריבוע $ABCD$ נתון כי $AE = BF$.

הוכח: $DE \perp AF$.

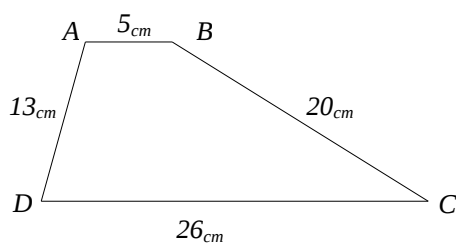


9. נתון מעוין $ABCD$ שאלכסוניו נפגשים

בנקודה M . נתון: $AE = FC$,

$\angle EBA = 15^\circ$, $MB = \frac{1}{2} AB$.

הוכח: המרובע $EBFD$ הוא ריבוע.

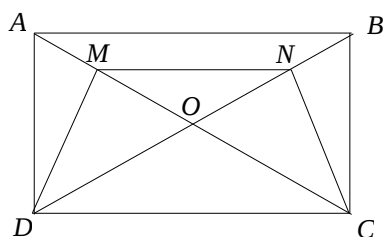


10. נתון מרפז $ABCD$ שאורכי

צלעותיו נתונים בשרטוט.

חשב את שטח המרפז

(פתור כתרגיל חישוב).

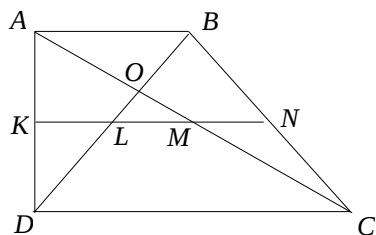


11. נתון מלבן $ABCD$ שאלכסוניו

נפגשים בנקודה O .

נתון: $MN \parallel DC$.

הוכח: $DMNC$ מרפז שווה שוקיים.



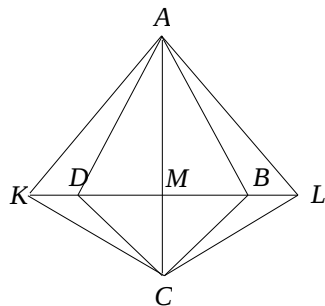
12. KN הוא קטע אמצעים במרפז ישר זווית

$ABCD$ ($AD \perp AB, AB \parallel DC$) שאלכסוניו

נפגשים בנקודה O .

נתון: $\angle ADB = 45^\circ$, $DC = 2AB$, $AD = 12_{cm}$.

חשב את אורך הקטע LM .



13. בדלתון $ABCD$ האריכו את האלכסון

המשני משני צידיו כמתואר בשרטוט

כך שמתקיים: $KD = BL$.

הוכח: המרובע $ALCK$ הוא דלתון.

פתרונות:

1. $\angle BCD = 140^\circ$ 2. $AQ = 5_{cm}$ 10. $S = 186_{cm^2}$ 12. $LM = 6_{cm}$

4.7 – המעגל

הגדרות:

מעגל – המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה קבוע.

הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל.

רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.

מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.

קוטר – מיתר העובר במרכז המעגל.

$$\text{היקף מעגל} = 2\pi R$$

$$\text{שטח מעגל} = \pi R^2$$

קשת – חלק מהיקף המעגל

גזרה – חלק משטח המעגל

זווית מרכזית – זווית שקודקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים

זווית היקפית – זווית שקודקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים

משפטים:

משפט 1: מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות ולהיפך

משפט 2: על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהיפך

משפט 3: מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל

משפט הפוך ל-3: מיתרים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל שווים

משפט 4: אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר

משפט הפוך ל-4 (1): רדיוס החוצה מיתר מאונך לו

משפט הפוך ל-4 (2): קטע היוצא מאמצע מיתר ומאונך לו, עובר במרכז המעגל

משפט 5: שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת/קשתות שוות, שוות ביניהן

משפט הפוך ל-5: זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות

משפט 6: זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת

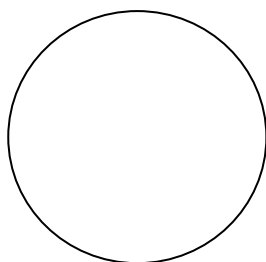
משפט 7: זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה

משפט הפוך ל-7: מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר

משפט 8: משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה

משפט הפוך ל-8: קטע המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל

משפט 9: שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה



משפט 10 : קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים חוצה את הזווית בין המשיקים

משפט 11 : הזווית הכלואה בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצידו השני

משפט 12 : קטע המרכזים על שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו

משפט 13 : קטע המרכזים (או המעגל) של שני מעגלים משיקים עובר בנקודת ההשקה

משפט 14 : מרכז מעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים במשולש

משפט 15 : מרכז מעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזווית במשולש

משפט 16 : במרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180°

משפט הפוך ל-16 : אם במרובע סכום זוג זוויות נגדיות הוא 180° , המרובע בר חסימה במעגל

משפט 17 : במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני

משפט הפוך ל-17 : אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז ניתן לחסום

בתוכו מעגל

משפט 18 : כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל וניתן לחסום בתוכו מעגל

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הגדרת מעגל, רדיוס, מיתר, קוטר
סרטון 2		הגדרת ונוסחאות היקף ושטח מעגל, הגדרת קשת, גזרה, זווית מרכזית וזווית היקפית
סרטון 3		הסבר על מדידת קשתות במעלות
סרטון 4		משפטים 1,2,3 וההפוך ל-3 בסיכום
סרטון 5		משפט 4 ושני המשפטים ההפוכים ל-4 בסיכום
סרטון 6	תרגיל 1א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 7	תרגיל 1א	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 8	תרגיל 1ב	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 9	תרגיל 1ב	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 10		משפט 5 וההפוך ל-5 בסיכום
סרטון 11	תרגיל 2	תרגיל חישוב
סרטון 12		משפט 6 בסיכום
סרטון 13	תרגיל 3	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 14	תרגיל 3	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 15		משפט 7 וההפוך ל-7 בסיכום
סרטון 16	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 17	תרגיל 4	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 18		מהו משיק למעגל + משפט 8 וההפוך ל-8 בסיכום
סרטון 19		משפט 9 בסיכום
סרטון 20	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 21	תרגיל 5	רישום מדויק של ההוכחה

סרמון 22		משפט 10 בסיכום
סרמון 23	תרגיל 6א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 24	תרגיל 6ב	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 25	תרגיל 6א	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 26	תרגיל 6ב	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 27		משפט 11 בסיכום
סרמון 28	תרגיל 7	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 29	תרגיל 7	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 30		הסבר על שני מעגלים + משפטים 12 ו-13 בסיכום
סרמון 31	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 32	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 33		משולש חסום + משפט 14 בסיכום, משולש חוסם + משפט 15 בסיכום
סרמון 34	תרגיל 9	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 35	תרגיל 9	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 36	תרגיל 10	מרובע חסום + משפט 16 וההפוך ל-16 בסיכום + פתרון תרגיל 10
סרמון 37	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 38	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 39	תרגיל 12	מרובע חוסם + משפט 17 וההפוך ל-17 בסיכום + פתרון תרגיל 12
סרמון 40		מצולע משוכלל + משפט 18 בסיכום

תרגילים:

1. AB , CD ו- KL הם מיתרים במעגל שמרכזו O , והם חותכים את הקטע

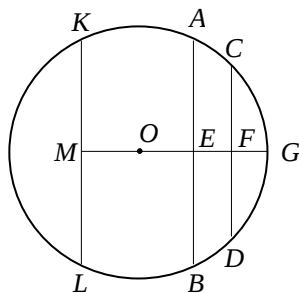
MG , העובר במרכז המעגל, בנקודות E ו- F בהתאמה.

נתון: $KL \parallel CD$, $CF = FD$.

א. הוכח: $KM = ML$.

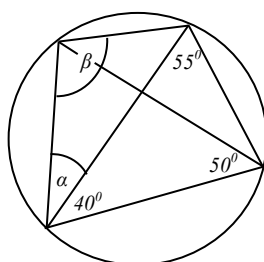
ב. נתון בנוסף כי $AB \perp MG$, $ML = EB$.

הוכח: $MO = OE$.



2. חשב את גודל הזוויות α ו- β

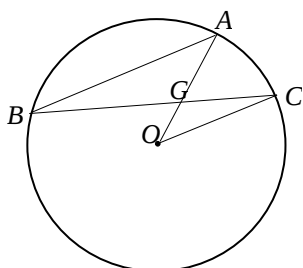
במעגל הנתון.



3. AB ו- BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O .

נתון: $BA \parallel OC$, $\angle AGC = 60^\circ$.

חשב את גודלה של הזווית $\angle AOC$.

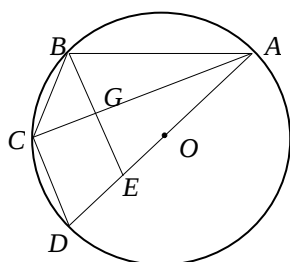


4. AB , AC , AD ו- BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O (המיתר

AD עובר ב- O). הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה G .

נתון: $BE \parallel CD$, $BG = GE$.

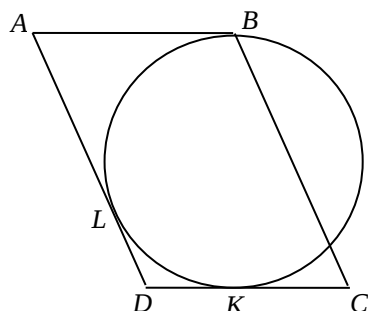
הוכח: $BC = CD$.

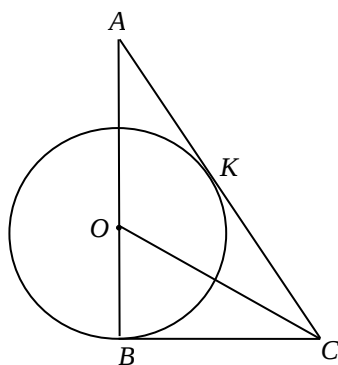


5. הצלעות AB , AD ו- DC של המקבילית

$ABCD$ משיקות למעגל בנקודות B , L ו- K בהתאמה (ראה שרטוט).

נתון: $BC = 14_{cm}$, $KC = 6_{cm}$. חשב את היקף המקבילית.





6. הצלעות AC ו- BC של המשולש $\triangle ABC$ משיקות

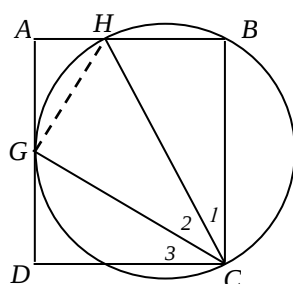
למעגל שמרכזו O , בנקודות K ו- B בהתאמה.

הצלע AB עוברת בנקודה O .

נתון: $AB = 15_{cm}$, $AK = KC$.

א. חשב את גודלה של זווית $\angle A$.

ב. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.



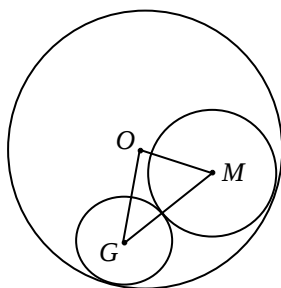
7. הקודקודים B ו- C של המלבן $ABCD$ מונחים

על מעגל. הצלע AD משיקה למעגל בנקודה G

והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה H .

הוכח: $\angle C_2 = \angle C_3$.

הדרכה: סמן $\angle AGH = \alpha$.



8. המעגלים שמרכזיהם M ו- G משיקים מבחוץ

זה לזה ומשיקים מבפנים למעגל שמרכזו O .

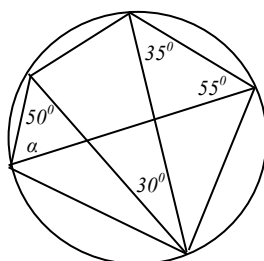
נתון כי רדיוס המעגל שמרכזו O הוא 8_{cm} .

חשב את היקף המשולש $\triangle OMG$.

9. AD הוא התיכון לצלע BC במשולש $\triangle ABC$.

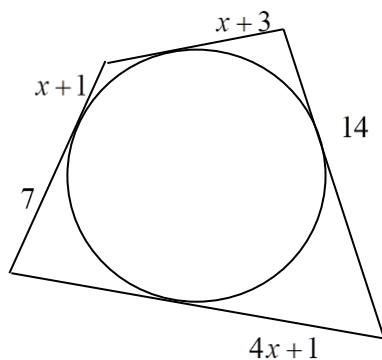
א. הוכח: אם מרכז המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$ נמצא על AD אז המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה שוקיים.

ב. בהמשך לסעיף א', האם מרכז המעגל החסום את משולש $\triangle ABC$ נמצא על AD ?



10. חשב את גודלה של הזווית α בשרטוט הבא:

11. במרפז ישר זווית $ABCD$ שבו השוק AD מאונכת לבסיסים AB ו- DC הנקודות K ו- L נמצאות על הצלעות AD ו- DC בהתאמה כך שהקטעים BK ו- CL הם חוצי הזוויות $\angle B$ ו- $\angle C$ בהתאמה. חוצי הזוויות נפגשים בנקודה M . הוכח: את המרובע $DKML$ ניתן לחסום במעגל.



12. חשב את גודלו של x בשרטוט הבא:

פתרונות:

2. $\alpha = 35^\circ, \beta = 95^\circ$ 3. $\angle AOC = 40^\circ$ 5. $P = 48_{cm}$ 6. $\angle A = 30^\circ$ 7. $R = 5_{cm}$
8. $P = 16_{cm}$ 10. $\alpha = 70^\circ$ 12. $x = 2$

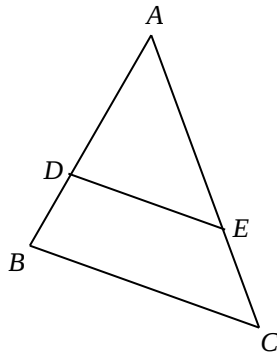
4.8 - פרופורציה ודמיון

פרופורציה:

משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים

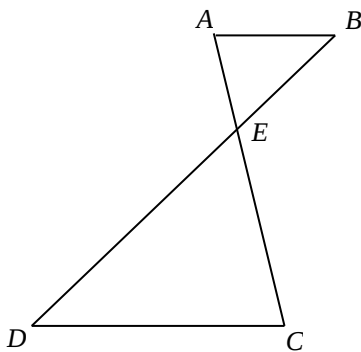
משפט הפוך למשפט תאלס: אם שני ישרים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים

פרופורציוניים הישרים מקבילים



$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{משפט תאלס + ההפוך:}$$

$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{משפט תאלס המורחב + ההפוך:}$$



$$AB \parallel DC \Leftrightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{DC} \quad \text{משפט תאלס "שעון חול" + ההפוך:}$$

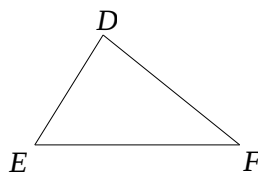
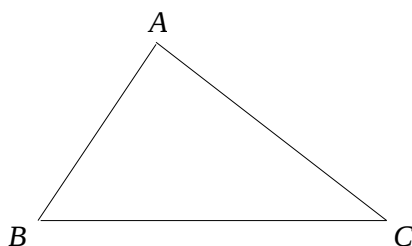
משפט חוצה הזווית: חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הזהה ליחס בין

הצלעות שביניהן הוא כלוא ולהפך.

דמיון משולשים:

הגדרה: משולשים דומים הם משולשים ששווים זה לזה בכל זוויותיהם ושצלעותיהם שומרות

בהתאמה על אותו יחס.



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$



$$\sphericalangle A = \sphericalangle D, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle F$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

משפט הדמיון:

1. משפט דמיון זווית-זווית (ז.ז.): אם בין שני משולשים שוות שתי זווית או המשולשים דומים.
2. משפט דמיון צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ.): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזווית שביניהן שווה אז המשולשים דומים.
3. משפט דמיון צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ.): אם בין שני משולשים שלוש הצלעות שומרות על אותו יחס אז המשולשים דומים.
4. משפט דמיון צלע-צלע-הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן שווה אז המשולשים דומים.

יחס בין גדלים במשולשים דומים:

- משפט 1: בין שני משולשים דומים היחס בין הגבהים/תיכונים/חוצי זווית/היקפים/רדיוס המעגל החוסם/רדיוס המעגל החסום הוא כיוחס הדמיון.
- משפט 2: היחס בין שטחי משולשים דומים הוא ריבוע יחס הדמיון.

פרופורציות במשולש ישר זווית:

- משפט 1: במשולש ישר זווית, הגובה ליתר בריבוע שווה למכפלת היטלי הניצבים על היתר.
- משפט 2: במשולש ישר זווית, ניצב בריבוע שווה למכפלת היתר והיטל הניצב על היתר.
- משפט 3 (הפוך למשפט 1): אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת היטלי הצלעות האחרות על צלע זאת, המשולש ישר זווית.

פרופורציות במעגל:

- משפט 1: אם שני מיתרים נחתכים במעגל, מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.
- משפט 2: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל, מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
- משפט 3: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל, מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

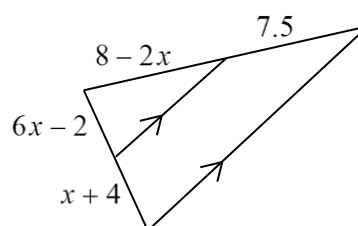
לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, מהי פרופורציה, משפט תאלס וההפוך לתאלס
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3		הרחבה ראשונה למשפט תאלס + משפט הפוך
סרטון 4		הרחבה שנייה למשפט תאלס (תאלס "שעון חול") + משפט הפוך
סרטון 5	תרגיל 2	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 6	תרגיל 2	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 7	תרגיל 3 א'	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 8	תרגיל 3 א'	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 9	תרגיל 3 ב'	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 10	תרגיל 3 ב'	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 11		משפט חוצה הזווית והמשפט ההפוך לו
סרטון 12	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 13	תרגיל 4	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 14		דמיון משולשים – מהו דמיון, סימונים בדמיון
סרטון 15		דמיון משולשים – ארבעת משפטי הדמיון
סרטון 16	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ורישום מדויק של ההוכחה
סרטון 17		סוגי דמיון נפוצים, הקשר בין משפט תאלס לדמיון משולשים
סרטון 18	תרגיל 6	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 19	תרגיל 6	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 20	תרגיל 7 א'	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 21	תרגיל 7 א'	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 22		היחס בין גדלים במשולשים דומים, כולל יחס שטחי משולשים דומים
סרטון 23	תרגיל 7 ב'	הרעיון להוכחה ורישום מדויק של ההוכחה
סרטון 24	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 25	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 26		פרופורציה במשולש ישר זווית – רקע והסבר כללי
סרטון 27		פרופורציה במשולש ישר זווית – שלושת המשפטים
סרטון 28	תרגיל 9	תרגיל חישוב. לא נדרשת הוכחה
סרטון 29	תרגיל 10	תרגיל חישוב. לא נדרשת הוכחה
סרטון 30	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 31	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 32		פרופורציה במעגל – שלושת משפטי המשיק/חותך/מיתר במעגל
סרטון 33	תרגיל 12	תרגיל חישוב. לא נדרשת הוכחה
סרטון 34	תרגיל 13	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 35	תרגיל 13	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 36	תרגיל 14	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 37	תרגיל 14	רישום מדויק של ההוכחה

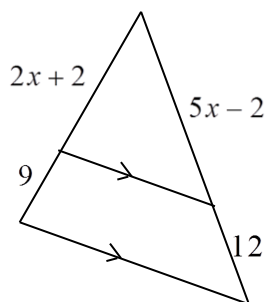
תרגילים:

1. מצא את ערכו של x בשרטוטים הבאים:

א.



ב.

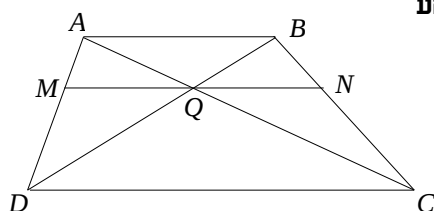


2. במרופו $ABCD$ האלכסונים נפגשים בנקודה Q . בנקודה Q העבירו קטע

המקביל לבסיסי המרופו וחותר את שוקי המרופו בנקודות M ו- N

כמתואר בשרטוט. נתון: $QB = 3_{cm}$, $DQ = 9_{cm}$, $DC = 18_{cm}$.

חשב את גודל הקטע MQ .

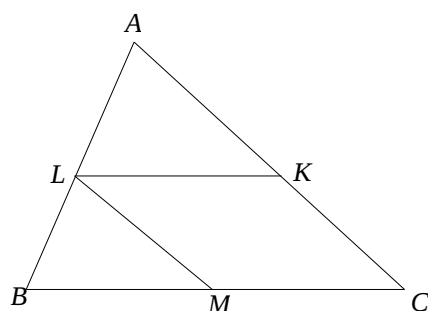


3. בשרטוט נתון: $\frac{AK}{KC} = \frac{MC}{BM} = \frac{AL}{LB}$

א. הוכח: המרובע $KLMC$ הוא מקבילית.

ב. נתון: $BC = 10_{cm}$, $AL = 1.5BL$.

חשב את אורך הקטע LK .

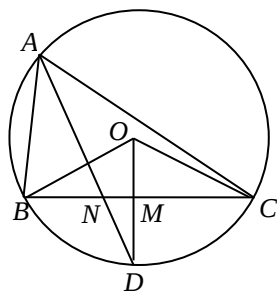


4. הנקודות A , B , C ו- D מונחות על היקפו של מעגל שמרכזו O .

הרדיוס OD חוצה את הזווית $\angle BOC$.

נתון: $BC = 10_{cm}$, $AC = 12_{cm}$, $AB = 8_{cm}$.

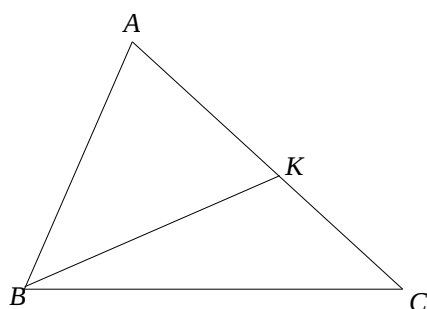
חשב את אורכו של הקטע MN .

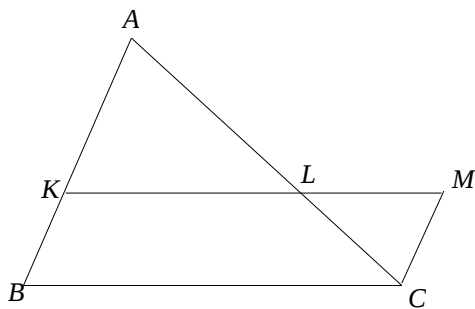


5. במשולש $\triangle ABC$ העבירו את הקטע BK כך

ש- $\angle AKB = \angle ABC$.

הוכח: $\triangle AKB \sim \triangle ABC$.



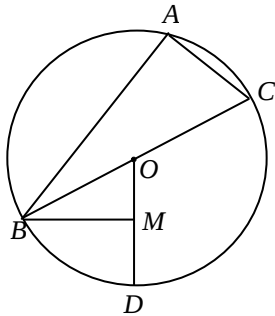


6. נתונה מקבילית $BKMC$. המשיכו את הצלע

BK עד לנקודה A . הקטע AC חותך את

הצלע KM בנקודה L .

הוכח: $LC \cdot BC = LM \cdot AC$.

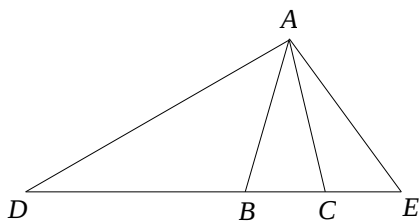


7. המשולש $\triangle ABC$ חסום במעגל שמרכזו O . הצלע BC

היא קוטר המעגל. הקטע BM מאונך לרדיוס OD . נתון: $AC = 2OM$.

א. הוכח: $AB = 2BD$.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\triangle BOM}}{S_{\triangle ABC}}$.



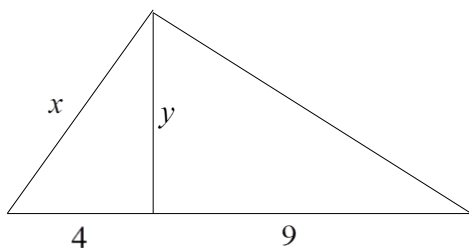
8. $\triangle ABC$ הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) שבו השוק גדולה

פי 2 מהבסיס. המשיכו את הבסיס משני צידי עד לנקודות D

ו- E כך שמתקיים $BC = CE$ ו- $\angle D = \angle CAE$.

נתון: $S_{\triangle ABC} = m$.

בטא באמצעות m את שטח המשולש $\triangle ADE$.



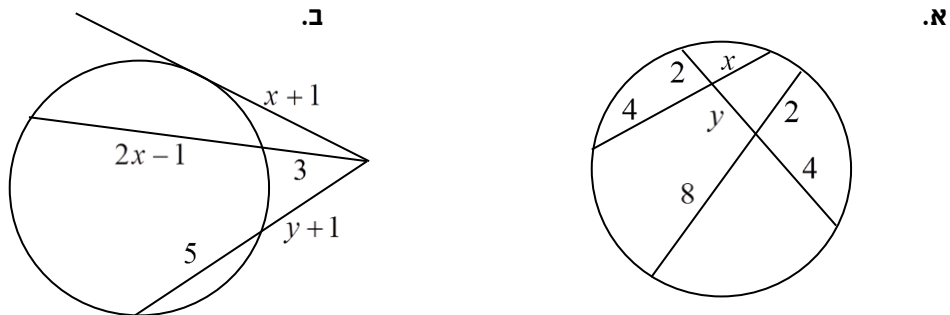
9. מצא את ערכם של x ו- y בשרטוט הבא:

10. במשולש ישר זווית שאורכי ניצביו m ו- n נתון כי אורך הגובה ליתר הוא h .

הראה שמתקיים: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$ (אין צורך ברישום מסודר של הוכחה).

11. הוכח את המשפט: אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת היטלי הצלעות האחרות על צלע זאת, המשולש ישר זווית.

12. חשב את גודלם של x ו- y בשרטוטים הבאים:



13. הוכח את המשפט: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק למעגל, מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.

14. הוכח את המשפט: אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים שני חותכים למעגל, מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.

פתרונות:

1. א. $x=1$ ב. $x=2$ 2. $MQ=4.5_{cm}$ 3. ב. 4. $LK=6_{cm}$ 5. $MN=1_{cm}$
6. $\frac{S_{\triangle BOM}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{1}{4}$ 7. $S_{\triangle ADE} = 6m$ 8. $y=6, x=\sqrt{52}$ 9. א. 10. $y=2, x=3$
11. ב. $x=5, y=3$

פרק 5 – סדרות

5.1 - סדרה חשבונית

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[a_1 + a_n]$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהי סדרה, דוגמאות לסדרות, סימונים
סרטון 2		הסבר ודוגמאות לסדרות כלליות
סרטון 3		הסבר ודוגמאות לסדרות נסיגה
סרטון 4		מהי סדרה חשבונית, נוסחת איבר כללי בסדרה חשבונית
סרטון 5	תרגיל 1	
סרטון 6	תרגיל 2	
סרטון 7	תרגיל 3	
סרטון 8	תרגיל 4	
סרטון 9	תרגיל 5	
סרטון 10	תרגיל 6	
סרטון 11	תרגיל 7	
סרטון 12	תרגיל 8	הסבר על תכונות האיברים בסדרה חשבונית
סרטון 13	תרגיל 9	
סרטון 14		שתי נוסחאות לסכום סדרה חשבונית
סרטון 15	תרגיל 10	
סרטון 16	תרגיל 11	
סרטון 17	תרגיל 12	
סרטון 18	תרגיל 13	
סרטון 19	תרגיל 14	
סרטון 20	תרגיל 15	
סרטון 21	תרגיל 16	
סרטון 22	תרגיל 17א	
סרטון 23	תרגיל 17ב	
סרטון 24		הסבר על סדרה עם מספר זוגי של איברים וחישוב סכומי איברים במקומות הזוגיים או האי זוגיים
סרטון 25	תרגיל 18	
סרטון 26	תרגיל 19	
סרטון 27	תרגיל 20	

תרגילים:

1. נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
2. בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
3. מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4\frac{1}{2}, 7, 9\frac{1}{2}, 12, 14\frac{1}{2}, \dots, 49\frac{1}{2}$
4. בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 וההפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24. מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
5. תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?
6. כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?
7. כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$
8. מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית: $x-3, 3x-4, x^2-1$
9. נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.
10. מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $-3, 2, 7, 12, \dots$
11. נתונה הסדרה החשבונית: $-13, -7, -1, 5, \dots$
כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) על מנת להגיע לסכום של 987?
12. תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?
13. נתונה הסדרה החשבונית: $-71, -67, -63, \dots$
כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה על מנת שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

14. נתונה הסדרה החשבונית: 4, 13, 22, 31, ...

בסדרה יש 36 איברים.

חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

15. נתונה הסדרה החשבונית: 4, 9, 14, 19, ..., 599

מחקו כל איבר שלישי בסדרה.

מצא את סכום האיברים שנותרו.

16. סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב- 1024

מסכום n האיברים הראשונים בה.

א. במא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .

ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

17. נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

18. נתונה הסדרה החשבונית: -21, -17, -13, ...

בסדרה יש 18 איברים.

חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים

הנמצאים במקומות הזוגיים.

19. בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-

זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612. הוכח כי $nd = 60$.

20. בסדרה חשבונית שבה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה

פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים.

כמה איברים יש בסדרה?

פתרונות:

1. $a_{43} = -235$ 2. $d = 4, a_1 = -5$ 3. 20 איברים 4. 48 איברים 5. 15 קפיצות 6.

58 מספרים 7. 31 איברים חיוביים 8. $x = 1, x = 4$ 9. $a_{19} = 59$ 10. $S_{14} = 413$ 11.

21 איברים. 12. 16 דקות 13. 37 איברים. 14. 3637 15. 23,920

16. א. $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים. 17. א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$

18. זוגיים: $S = 135$ זוגיים: $S = 99$ 20. 29 איברים.

5.2 - סדרה הנדסית

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 28		מהי סדרה הנדסית, נוסחת איבר כללי בסדרה הנדסית
סרמון 29	תרגיל 1	
סרמון 30	תרגיל 2	
סרמון 31	תרגיל 3	
סרמון 32	תרגיל 4	
סרמון 33	תרגיל 5	
סרמון 34	תרגיל 6	
סרמון 35	תרגיל 7	
סרמון 36	תרגיל 8	
סרמון 37		נוסחת סכום סדרה הנדסית
סרמון 38	תרגיל 9	
סרמון 39	תרגיל 10	
סרמון 40	תרגיל 11	פתרון בדרך א'
סרמון 41	תרגיל 11	פתרון בדרך ב'
סרמון 42	תרגיל 12	
סרמון 43	תרגיל 13	
סרמון 44		הסבר על סדרה עם מספר זוגי של איברים וחישוב סכומי איברים במקומות הזוגיים/אי-זוגיים
סרמון 45	תרגיל 14	
סרמון 46	תרגיל 15	
סרמון 47	תרגיל 16	
סרמון 48	תרגיל 17	

תרגילים:

1. נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.
2. מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$
3. בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
4. בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
5. בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר העשירי לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
6. תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?
7. מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מצא גם את מנת הסדרה: $x-6, x+4, 4x+1$
8. נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:
$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases}$$
 הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר העשירי בה.
9. מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: 5, 10, 20, 40,
10. תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?
11. סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?
12. בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.
13. סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

7, 14, 28, ...

14. נתונה הסדרה ההנדסית:

בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

15. בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

16. נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לבין סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בה.

17. בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון בה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

פתרונות:

1. $a_9 = 729$ 2. $n = 7$ 3. $a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2$ 4. $q = \pm 3, a_1 = \frac{2}{3}$
5. $q = 5, a_1 = \frac{1}{25}$ 6. 5 דקות. 7. $x = 11 \rightarrow q = 3$ 8. $a_8 = 384$ 9. $S_9 = 2555$ 10. 5 דקות. 11. $n = 12$ 12. $q = 2$ 13. $n = 6$
14. אי-זוגיים: $S = 595$ זוגיים: $S = 1190$ 15. $q = 4$ 16. $\frac{q+1}{q}$ 17. $a_1 = \frac{3}{8}$

5.3 - סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת

—סדרה שבה $0 < |q| < 1$

$$S = \frac{a_1}{1-q}$$

סכום סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 49		מהי סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת, נוסחת סכום איברי סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת
סרמון 50	תרגיל 1	
סרמון 51	תרגיל 2	
סרמון 52	תרגיל 3	
סרמון 53	תרגיל 4	
סרמון 54	תרגיל 5	

תרגילים:

1. מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$
2. סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
3. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה $62\frac{1}{2}$. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).
4. האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.
5. נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$
- א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
- ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32. מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

פתרונות:

1. $S = 18$ 2. $a_1 = 24$ 3. $a_1 = 50, q = \frac{1}{5}$ או $a_1 = 12\frac{1}{2}, q = \frac{4}{5}$ 4. $S = 18\frac{2}{3}$
5. $a_1 = 16, q = \frac{1}{3}$

5.4 – סדרת נסיגה

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 55		מהי סדרת נסיגה
סרטון 56	תרגיל 1	
סרטון 57	תרגיל 2	
סרטון 58	תרגיל 3	
סרטון 59	תרגיל 4	
סרטון 60	תרגיל 5	

תרגילים:

1. נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases}$$

א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.

ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{12} ו- a_{14} .

ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k . הבע באמצעות k את a_{30} ו- a_{32} .

ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 113.

ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

2. נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות k את a_{k+2} .

3. נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases}$$

מצא את ערכו של t שעבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

4. סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 6n - 2$.

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_{n+1} - a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1 .

5. סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = 3a_n + 4$.

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_n + 2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5 = 162$. חשב את a_1 .

פתרונות:

1. א. $a_3 = -22$ ב. $a_{14} = 33$, $a_{12} = 5$ ג. $a_{32} = k + 51$, $a_{30} = k - 49$

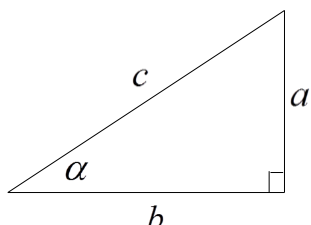
ד. a_{62}, a_{63} 2. $a_{k+2} = 74 + 4k$ 3. $t = -33$ 4. א. $d = 6$ ב. $b_1 = 4$

5. א. $q = 3$ ב. $a_1 = 0$

פרק 6 – טריגונומטריה

6.1 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{\text{מול}}{\text{יתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{\text{ליד}}{\text{יתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{\text{מול}}{\text{ליד}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{הניצב שמול הזווית}} = \frac{\text{ליד}}{\text{מול}} = \frac{b}{a}$$

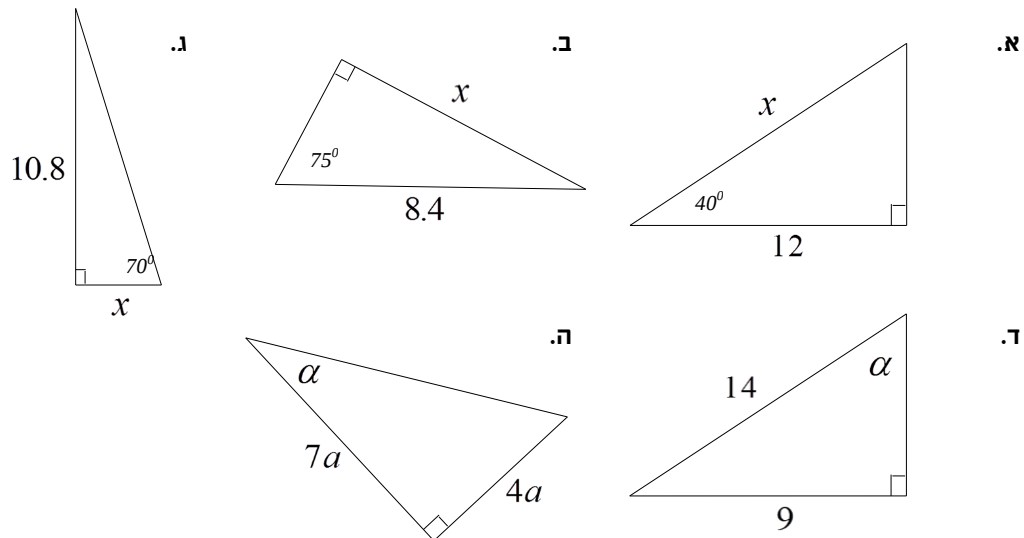
$$a^2 + b^2 = c^2 \quad \text{משפט פיתגורס:}$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

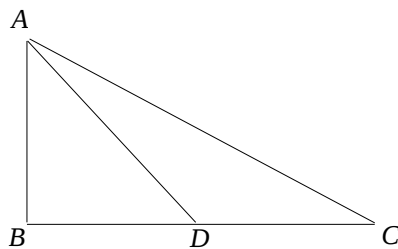
מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע היסטורי על טריגונומטריה, הגדרת ארבע הפונקציות הטריגונומטריות במשולש ישר זווית
סרטון 2	תרגיל 1	תרגילי חישוב בסיסיים
סרטון 3	תרגיל 1	תרגילי חישוב בסיסיים – המשך
סרטון 4		טיפים לטריגונומטריה א'
סרטון 5		טיפים לטריגונומטריה ב'
סרטון 6		טיפים לטריגונומטריה ג'
סרטון 7	תרגיל 2	
סרטון 8	תרגיל 3	
סרטון 9	תרגיל 4	
סרטון 10	תרגיל 5	הדגמת השימוש בנעלם
סרטון 11	תרגיל 6	הדגמה ראשונה של שאלה עם פרמטרים
סרטון 12	תרגיל 7	
סרטון 13	תרגיל 8	
סרטון 14	תרגיל 9	כולל הסבר על היתכנות כמה תשובות נכונות שנראות שונה
סרטון 15	תרגיל 10	
סרטון 16	תרגיל 11	
סרטון 17	תרגיל 12	

תרגילים:

1. מצא את ערכו של x / α במשולשים ישרי הזווית הבאים:



2. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

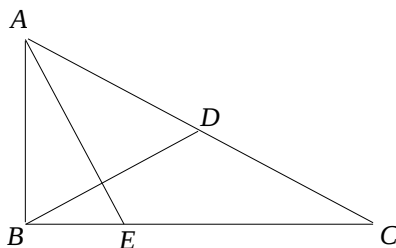


AD הוא התיכון לניצב BC .

נתון: $\angle C = 28^\circ$, $AB = 6_{cm}$.

מצא: $\angle BAD = ?$, $AD = ?$.

3. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

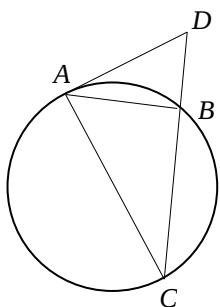


BD הוא התיכון ליתר AC ו- AE הוא חוצה הזווית $\angle A$.

נתון: $BC = 8_{cm}$, $BD = 5.6_{cm}$.

מצא: $\angle BAE = ?$, $BE = ?$.

4. מצא את זוויתו של מעויין שאורכי אלכסוניו 24_{cm} ו- 18_{cm} .



5. המשולש $\triangle ABC$ חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.

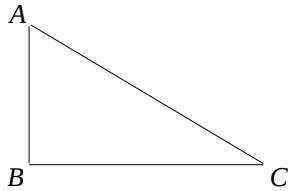
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D .

נתון: $BD = 4_{cm}$, $\angle DAB = 32^\circ$.

מצא את אורכו של רדיוס המעגל.

6. במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב- 4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92° .

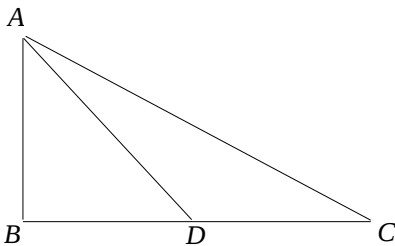
מצא את שטח המשולש.



7. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

נתון: $\angle A = \alpha$, $AB = a$.

הבע באמצעות α ו- a את היקף המשולש.



8. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

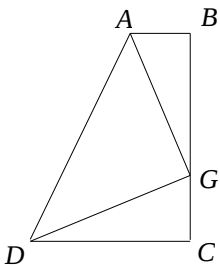
AD הוא התיכון לניצב BC .

נתון: $\angle C = \alpha$, $AB = b$.

הבע באמצעות α ו- b את אורכי הקטעים BD ו- AD .

9. במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k . הבע באמצעות α

ו- k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



10. מרפז $ABCD$ הוא מרפז ישר זווית ($\angle B = \angle C = 90^\circ$).

הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$.

נתון: $\angle BAG = \beta$, $AG = DG = m$.

הבע באמצעות β ו- m את שטח המרפז.

11. משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k חזוית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל. הבע באמצעות

β ו- k את רדיוס המעגל.

12. במרפז ישר זווית חסום מעגל. אורך השוק הארוכה במרפז היא b והזווית שהיא יוצרת עם הבסיס

הגדול היא α . הבע באמצעות α ו- b את אורכו של הבסיס הגדול במרפז ואת שטחו.

פתרונות:

$$\begin{array}{llll}
 \alpha = 40.005^\circ & .7 & x = 3.931_{cm} & .1 \quad x = 8.114_{cm} & .3 \quad x = 15.665_{cm} & .א & .1 \\
 , \angle BAE = 22.792^\circ & .3 & AD = 8.236_{cm} & , \angle BAD = 43.24^\circ & .2 & \alpha = 29.745^\circ & .ה \\
 R = 6.04_{cm} & .5 & 73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ, 106.26^\circ & .4 & BE = 3.294_{cm} & & \\
 , BD = \frac{b}{2 \tan \alpha} & .8 & P = a \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) & .7 & S = 28.618_{cm^2} & .6 & \\
 AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} & & , S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2} & .9 & AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}} & & \\
 , S = \frac{1}{4} b^2 \sin^2 \alpha \left(3 + \frac{1}{\tan \frac{\alpha}{2}} \right) & .12 & R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2} & .11 & \frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2} & .10 & \\
 & & & & \frac{1}{2} b \sin \alpha + \frac{\frac{1}{2} b \sin \alpha}{\tan \frac{\alpha}{2}} & &
 \end{array}$$

6.2 – זהויות טריגונומטריות

זהויות היסוד

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

זהויות של סכום והפרש זוויות

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

זהויות של זווית כפולה

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

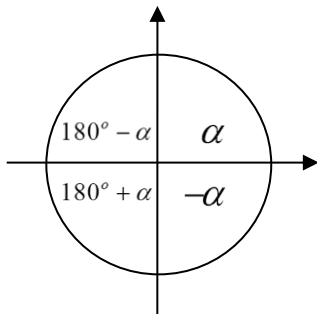
זהויות של סכום והפרש פונקציות

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$



המעגל הטריגונומטרי

המעגל הטריגונומטרי הוא מעגל היחידה (מעגל קונוני שרדיוסו 1)

טבלת ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור הזוויות המיוחדות:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\emptyset$
$\cot \alpha$	$\emptyset$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$\sin 0^\circ = 0 \quad \cos 0^\circ = 1 \quad \tan 0^\circ = 0$$

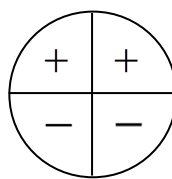
$$\sin 90^\circ = 1 \quad \cos 90^\circ = 0 \quad \tan 90^\circ = \emptyset$$

$$\sin 180^\circ = 0 \quad \cos 180^\circ = -1 \quad \tan 180^\circ = 0$$

$$\sin 270^\circ = -1 \quad \cos 270^\circ = 0 \quad \tan 270^\circ = \emptyset$$

הזהויות של מעגל היחידה

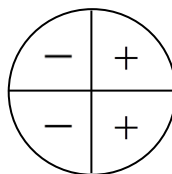
$$\sin / \cos / \tan(360^\circ + \alpha) = \sin / \cos / \tan \alpha$$



$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin \alpha$$

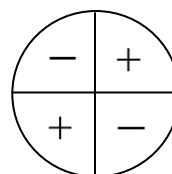
$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$



$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$



$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\tan(180^\circ + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		זהויות היסוד – חלק א'
סרטון 2		זהויות היסוד – חלק ב'
סרטון 3		זהויות היסוד – חלק ג'
סרטון 4	תרגיל 1	כולל הסבר על מה עושים עם זהויות ומהי הוכחת זהויות
סרטון 5	תרגיל 1	המשך שאלה מהסרטון הקודם
סרטון 6		זהויות של סכום והפרש זוויות
סרטון 7	תרגיל 2	
סרטון 8		זהויות של זווית כפולה
סרטון 9	תרגיל 3	
סרטון 10	תרגיל 3	
סרטון 11		זהויות של סכום והפרש פונקציות
סרטון 12	תרגיל 4	
סרטון 13		ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור הזוויות $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$
סרטון 14		המעגל הטריגונומטרי: הקדמה והסבר על זוויות ראי
סרטון 15		המעגל הטריגונומטרי: תרגול זוויות ראי
סרטון 16		המעגל הטריגונומטרי: הסבר על שימוש במעגל הטריגונומטרי
סרטון 17		המעגל הטריגונומטרי: סיכום הזהויות הנובעות מהמעגל הטריגונומטרי
סרטון 18		המעגל הטריגונומטרי: חישוב ללא מחשבון של פונקציה טריגונומטרית על פי המעגל הטריגונומטרי
סרטון 19	תרגיל 5	
סרטון 20		המעגל הטריגונומטרי: ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור הזוויות $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$
סרטון 21	תרגיל 6	

תרגילים:

1. הוכח את הזהויות הבאות:

$$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \sin^2 \alpha = \cos \alpha$$

$$\frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2$$

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha$$

2. הוכח את הזהות הבאה:

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

3. הוכח את הזהויות הבאות:

$$4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$$

$$(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$$

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$$

$$\frac{\cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$$

4. הוכח את הזהויות הבאות:

$$\frac{\sin \alpha + \sin 5\alpha}{\cos \alpha + \cos 5\alpha} = \tan 3\alpha$$

$$\sin^2 3\alpha - \sin^2 \alpha = \sin 2\alpha \sin 4\alpha$$

5. ענה ללא שימוש במחשבון:

$$\cos(-45^\circ) = \quad \tan 225^\circ = \quad \sin 150^\circ =$$

$$\sin 510^\circ = \quad \sin 315^\circ = \quad \cos 210^\circ =$$

$$\cos 930^\circ = \quad \cos 120^\circ = \quad \tan 120^\circ =$$

$$\tan(-225^\circ) = \quad \tan(-30^\circ) = \quad \sin 330^\circ =$$

6. הוכח את הזהות הבאה:

$$\frac{\sin(180^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(-2\alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

6.3 - טריגונומטריה – משוואות

$$\cos x = \cos \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$x = \alpha + 360^\circ k$$

$$x = -\alpha + 360^\circ k$$

$$x = \pm \alpha + 360^\circ k$$

$$\tan x = \tan \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$x = \alpha + 180^\circ k$$

$$\sin x = \sin \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$x = \alpha + 360^\circ k$$

$$x = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$$

סיכום פתרונות המשוואות המיוחדות:

$$\cos x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\tan x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 180^\circ k$$

$$x = \pi k$$

$$\sin x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 180^\circ k$$

$$x = \pi k$$

$$\cos x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 360^\circ k$$

$$x = 2\pi k$$

$$\sin x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\cos x = -1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$x = \pi + 2\pi k$$

$$\sin x = -1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	רקע, ידע מקדים, כיצד פותרים משוואה עם סינוס
סרטון 2	תרגיל 2	
סרטון 3	תרגיל 3	
סרטון 4	תרגיל 4	
סרטון 5	תרגיל 5	כיצד פותרים משוואה עם קוסינוס
סרטון 6	תרגיל 6	
סרטון 7	תרגיל 7	כיצד פותרים משוואה עם טנגנס
סרטון 8	תרגיל 8	
סרטון 9	תרגיל 9	
סרטון 10	תרגיל 10	
סרטון 11	תרגיל 11	
סרטון 12	תרגיל 12	הסבר על המשוואות המיוחדות (שבאנף ימין שלהן 0, 1 או -1)
סרטון 13	תרגיל 13	משוואות sin-sin

	14 תרגיל	סרמון 14
משוואות COS-COS	15 תרגיל	סרמון 15
	16 תרגיל	סרמון 16
משוואות tan-tan	17 תרגיל	סרמון 17
משוואות מסוג $abc=0$	18 תרגיל	סרמון 18
	19 תרגיל	סרמון 19
	20 תרגיל	סרמון 20
משוואות עם הצבת t	21 תרגיל	סרמון 21
	22 תרגיל	סרמון 22
	23 תרגיל	סרמון 23
משוואות עם מכנה ותחום הגדרה	24 תרגיל	סרמון 24
	25 תרגיל	סרמון 25
הכרות עם שימוש בזהויות בפתרון משוואות מריגונומטריות	26 תרגיל	סרמון 26
	27 תרגיל	סרמון 27
	28 תרגיל	סרמון 28
	29 תרגיל	סרמון 29
	30 תרגיל	סרמון 30
	31 תרגיל	סרמון 31
משוואות עם חלוקה ב-COS לקבלת tan	32 תרגיל	סרמון 32
פתרון משוואות בתחום נתון	33 תרגיל	סרמון 33
	34 תרגיל	סרמון 34
	35 תרגיל	סרמון 35
רדיאנים – הסבר על מהו רדיאן והקשר $\pi = 180^\circ$	36 תרגיל	סרמון 36
	37 תרגיל	סרמון 37
	38 תרגיל	סרמון 38
	39 תרגיל	סרמון 39
	40 תרגיל	סרמון 40
	41 תרגיל	סרמון 41
	42 תרגיל	סרמון 42
	43 תרגיל	סרמון 43

תרגילים:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad .1$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad .2$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .3$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad .4$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad .5$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .6$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad .7$$

$$\tan x = -1 \quad .8$$

$$\tan x = 5 \quad .1 \quad \cos x = -0.6 \quad .2 \quad \sin x = 0.7 \quad .3 \quad .9$$

$$\tan 5x = -1 \quad .1 \quad 2\cos 2x = -\sqrt{3} \quad .2 \quad \sin 3x = \frac{1}{2} \quad .3 \quad .10$$

$$\tan(50^\circ - x) = 1.3 \quad .1 \quad \cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad .2 \quad \sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .3 \quad .11$$

$$\cos x = 0 \quad .1 \quad \sin x = -1 \quad .2 \quad \sin x = 1 \quad .3 \quad \sin x = 0 \quad .4 \quad .12$$

$$\tan x = 1 \quad .1 \quad \tan x = 0 \quad .2 \quad \cos x = -1 \quad .3 \quad \cos x = 1 \quad .4 \quad .13$$

$$\sin x = \sin 3x \quad .14$$

$$\sin x = \sin(120^\circ - x) \quad .1 \quad \sin 2x = \sin(x + 30^\circ) \quad .2 \quad .15$$

$$\cos x = \cos 3x \quad .16$$

$$\cos x = \cos(40^\circ - x) \quad .16$$

$$\tan 2x = \tan(60^\circ - x) \quad .17 \quad \tan x = \tan 3x \quad .18$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad .18$$

$$\sin 2x - 2\sin^2 2x = 0 \quad .19$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \quad .20$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad .21$$

$$\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0 \quad .22$$

$$\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad .23$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad .24$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad .25$$

$$\sin x = \cos x \quad .26$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad .27$$

$$\sin x - \sin 2x = 0 \quad .28$$

$$3\cos x - \cos 2x = 0 \quad .29$$

$$\cos 2x = -\cos 3x \quad .1 \quad \sin x = -\sin 3x \quad .18 \quad .30$$

$$\sin(x + 30^\circ) = -\cos x \quad .31$$

$$3\sin^2 x = \cos^2 x \quad .1 \quad \sin x = 2\cos x \quad .1 \quad \sin x = -\cos x \quad .1 \quad \sin x = \cos x \quad .18 \quad .32$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad [-360^\circ, 360^\circ] \quad .1 \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad [0^\circ, 360^\circ] \quad .18 \quad .33$$

$$\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x \quad [-180^\circ, 180^\circ] \quad .34$$

$$\frac{\sin 6x}{1 - \cos 4x} = 0 \quad [0^\circ, 135^\circ] \quad .35$$

$$\pi = 180^\circ \quad .36$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad [-2\pi, 2\pi] \quad .37$$

$$\cos 4x + 1 = 3 \sin 2x \quad [-\pi, \pi] \quad .38$$

$$\frac{\sin 6x}{1 - \cos 4x} = 0 \quad \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \quad .39$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \sin x \quad [-\pi, \pi] \quad .40$$

$$2 \cos^2 x = \sin 5x + \sin x + 1 \quad \left[0, \frac{3\pi}{2}\right] \quad .41$$

$$\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \cos 2x \quad \left[-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right] \quad .42$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 \quad [0, 2\pi] \quad .43$$

פתרונות:

$$x = 45^\circ + 360^\circ k, x = 135^\circ + 360^\circ k \quad .2 \quad x = 30^\circ + 360^\circ k, x = 150^\circ + 360^\circ k \quad .1$$

$$x = 210^\circ + 360^\circ k, x = -30^\circ + 360^\circ k \quad .4 \quad x = -60^\circ + 360^\circ k, x = 240^\circ + 360^\circ k \quad .3$$

$$x = -45^\circ + 180^\circ k \quad .8 \quad x = 30^\circ + 180^\circ k \quad .7 \quad x = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad .6 \quad x = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad .5$$

$$x = \pm 126.87^\circ + 360^\circ k \quad .1 \quad x = 44.427^\circ + 360^\circ k, x = 135.573^\circ + 360^\circ k \quad .8 \quad .9$$

$$x = \pm 75^\circ + 180^\circ k \quad .1 \quad x = 10^\circ + 120^\circ k, x = 50^\circ + 120^\circ k \quad .8 \quad .10 \quad x = 78.69^\circ + 180^\circ k \quad .1$$

$$x = 90^\circ + 180^\circ k, x = -30^\circ + 180^\circ k \quad .8 \quad .11 \quad x = -9^\circ + 36^\circ k \quad .1$$

$$x = 180^\circ k \quad .8 \quad .12 \quad x = -2.431^\circ + 180^\circ k \quad .1 \quad x = 10^\circ + 120^\circ k, x = 40^\circ + 120^\circ k \quad .1$$

$$x = 360^\circ k \quad .7 \quad x = 90^\circ + 180^\circ k \quad .7 \quad x = -270^\circ + 360^\circ k \quad .1 \quad x = 90^\circ + 360^\circ k \quad .1$$

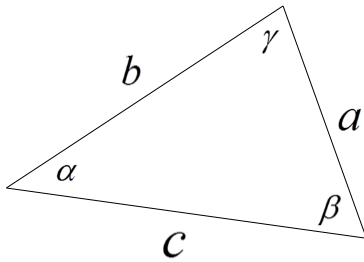
$$x = 180^\circ k, x = 45^\circ + 90^\circ k \quad .13 \quad x = 45^\circ + 180^\circ k \quad .11 \quad x = 180^\circ \quad .1 \quad x = 180^\circ + 360^\circ \quad .1$$

$$x = 90^\circ k \quad .15 \quad x = 60^\circ + 180^\circ k \quad .1 \quad x = 30^\circ + 360^\circ k, x = 50^\circ + 120^\circ k \quad .8 \quad .14$$

$$\begin{aligned}
& x = 180^\circ k, x = 30^\circ + 60^\circ k \quad .18 \quad x = 20^\circ + 60^\circ \quad .1 \quad x = 90^\circ k \quad .N \quad .17 \quad x = 20^\circ + 180^\circ k \quad .16 \\
& x = 90^\circ k, x = 15^\circ + 180^\circ k, x = 75^\circ + 180^\circ k \quad .19 \\
& x = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad .20 \\
& x = 90^\circ + 360^\circ k, x = 210^\circ + 360^\circ k, x = -30 + 360^\circ k \quad .21 \\
& x = 360^\circ k \quad .23 \quad x = 75.964^\circ + 180^\circ k, x = -45^\circ + 180^\circ k \quad .22 \\
& x = 45^\circ + 180^\circ k \quad .26 \quad x = 45^\circ + 90^\circ, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad .25 \quad x = 180^\circ k, x \neq 360^\circ \quad .24 \\
& x = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k \quad .29 \quad x = 360^\circ k, x = 60^\circ + 120^\circ k \quad .28 \quad x = 180^\circ k, x = 360^\circ k \quad .27 \\
& x = 36^\circ + 72^\circ k, x = 180^\circ + 360^\circ k \quad .1 \quad x = 90^\circ k, x = -90^\circ + 180^\circ k \quad .N \quad .30 \\
& x = -45^\circ + 360^\circ k \quad .1 \quad x = 45^\circ + 180^\circ k \quad .N \quad .32 \quad x = 120^\circ + 180^\circ k \quad .31 \\
& x = 30^\circ + 180^\circ k, x = -30^\circ + 180^\circ k \quad .7 \quad x = 63.435^\circ + 180^\circ k \quad .1 \\
& x = -210^\circ, x = -30^\circ, x = 150^\circ, x = 330^\circ \quad .1 \quad x = 30^\circ, x = 150^\circ \quad .N \quad .33 \\
& x = 30^\circ, x = 60^\circ, x = 120^\circ \quad .35 \quad x = -165^\circ, x = 15^\circ, x = -105^\circ, x = 75^\circ \quad .34 \\
& x = -\frac{7}{6}\pi, x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{5}{6}\pi, x = \frac{11}{6}\pi \quad .37 \\
& x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2}{3}\pi \quad .39 \quad x = -\frac{11}{12}\pi, x = \frac{\pi}{12}, x = -\frac{7}{12}\pi, x = \frac{5}{12}\pi \quad .38 \\
& x = -\frac{\pi}{2}, x = -\frac{3}{4}\pi, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{4} \quad .40 \\
& x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{\pi}{18}, x = \frac{13\pi}{18}, x = \frac{25\pi}{18}, x = \frac{5\pi}{18}, x = \frac{17\pi}{18} \quad .41 \\
& x = 0, x = \pi, x = 2\pi, x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2} \quad .43 \quad x = -\frac{\pi}{3}, x = \frac{\pi}{3} \quad .42
\end{aligned}$$

6.4 - מריגונומטריה במישור

משפט הסינוסים



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

משפט הקוסינוסים

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{או} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

מתי נשתמש בכל משפט

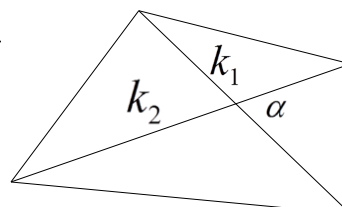
- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
 - נתונות שתי זוויות וצלע
 - נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן
 - נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
 - נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן
 - נתונות שלוש צלעות
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט בו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים תיתכנה שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

שטח משולש

$$S_{\Delta} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} \quad \text{או} \quad S_{\Delta} = \frac{ab \sin \gamma}{2} \quad \text{או} \quad S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2}$$

שטח מרובע על פי אלכסוניו

$$S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$$



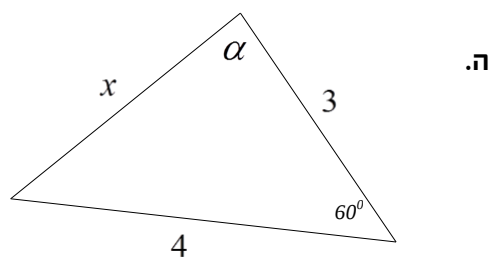
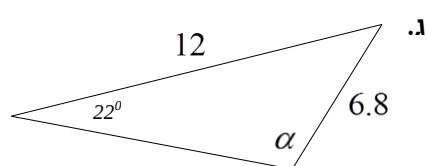
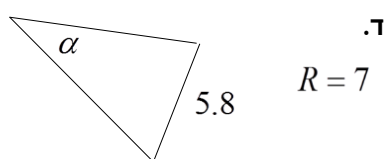
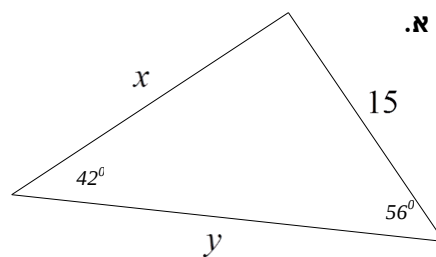
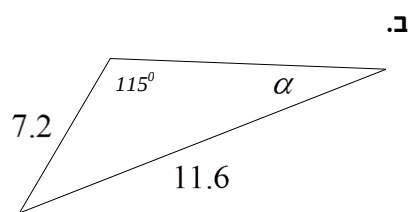
לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 1		הסבר על משפט הסינוסים
סרמון 2	תרגיל 1	תרגילי בסיס משפט הסינוסים – חלק א'
סרמון 3	תרגיל 1	תרגילי בסיס משפט הסינוסים – חלק ב' – היתכנות שתי תשובות לזווית
סרמון 4	תרגיל 1	תרגילי בסיס משפט הסינוסים – חלק ג' – קבלת משוואה ופתרונה
סרמון 5		הסבר על משפט הקוסינוסים
סרמון 6	תרגיל 2	תרגילי בסיס משפט הקוסינוסים + למה אין שתי תשובות לזווית
סרמון 7		הסבר על מתי משתמשים במשפט הסינוסים ומתי במשפט הקוסינוסים
סרמון 8	תרגיל 3	
סרמון 9	תרגיל 4	
סרמון 10	תרגיל 5	
סרמון 11	תרגיל 6	
סרמון 12	תרגיל 7	
סרמון 13	תרגיל 8	
סרמון 14		שימוש פעמיים במשפט הקוסינוסים ליצירת שתי משוואות בענני נעלמים
סרמון 15	תרגיל 9	
סרמון 16	תרגיל 10	
סרמון 17	תרגיל 11	
סרמון 18	תרגיל 12	
סרמון 19		שלוש נוסחאות לשטח משולש
סרמון 20	תרגיל 13	
סרמון 21		נוסחת שטח מרובע על פי אלכסוניו
סרמון 22	תרגיל 14	
סרמון 23	תרגיל 15	
סרמון 24	תרגיל 16	
סרמון 25	תרגיל 17	כולל שימוש בזהויות על מנת להגיע לתשובה
סרמון 26	תרגיל 18	כולל פתרון משוואה טריגונומטרית
סרמון 27	תרגיל 19	כולל פתרון משוואה טריגונומטרית

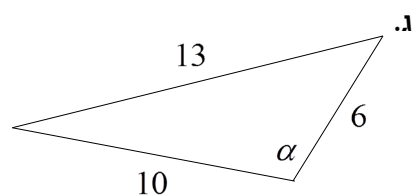
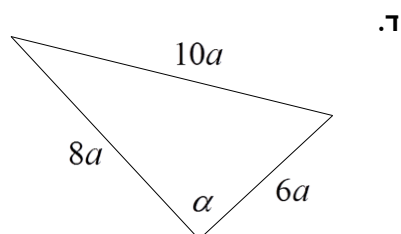
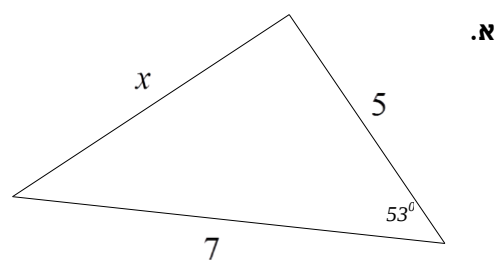
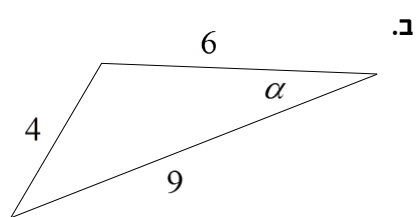
תרגילים:

1. מצא את ערכו של $\alpha/x/y$ במשולשים הבאים (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני

הצלעות בס"מ):



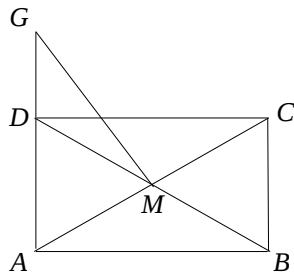
2. מצא את ערכו של α/x במשולשים הבאים:



3. נתון משולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה

של זווית הבסיס בו הוא 70° . CD הוא חוצה זווית הבסיס $\angle C$.

מצא את אורכו של הקטע AD .



4. אלכסוני המלבן $ABCD$ נפגשים בנקודה M . הנקודה G נמצאת

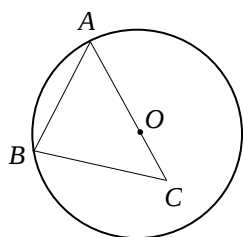
על המשך הצלע AD .

נתון: $DG = 1.2_{cm}$, $AB = 4_{cm}$, $AD = 3_{cm}$.

מצא את גודלו של הקטע GM .

5. מרובע שאורכי אלכסוניו 8_{cm} ו- 11_{cm} חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6_{cm} .

חשב את זוויות המרובע.



6. הצלע AB במשולש $\triangle ABC$ היא מיתר במעגל שמרכזו O .

הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.

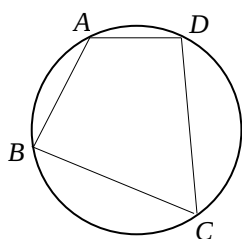
נתון: $\angle BAC = 38^\circ$, $OC = 3_{cm}$, $BC = 9_{cm}$.

מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB .

7. אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם צלע אחת של המקבילית וזווית של

61.05° עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה.

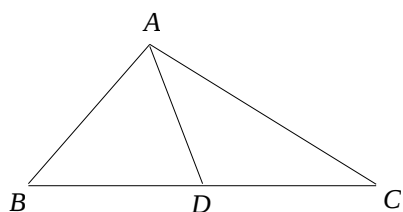
חשב את היקף המקבילית.



8. המרובע $ABCD$ חסום במעגל.

נתון: $AD = 4_{cm}$, $CD = 10_{cm}$, $BC = 9_{cm}$, $AB = 6_{cm}$.

מצא את אורכם של האלכסון AC ושל רדיוס המעגל.



9. בשרטוט נתון: $AD = 5_{cm}$, $AC = 8_{cm}$, $AB = 6_{cm}$.

הנקודה D היא אמצע הצלע BC .

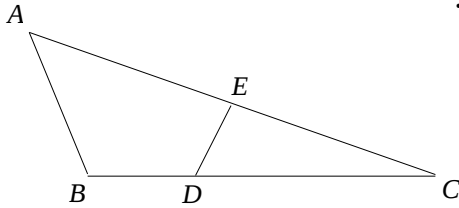
חשב את אורך הקטע BC .

10. הצלע AC במשולש $\triangle ABC$ גדולה פי 4 מהצלע AB . הנקודה E היא אמצע הצלע AC

והנקודה D נמצאת על הצלע BC כך שמתקיים $DC = 2BD$.

נתון: $AB = a$, $BC = b$.

הבע באמצעות a ו- b את אורך הקטע DE .

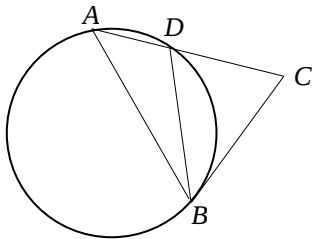


11. המשולש $\triangle ABD$ חסום במעגל שרדיוסו R .

המשך הצלע AD והמשיק למעגל בנקודה B נפגשים בנקודה C .

נתון: $\angle C = \alpha$, $\angle ADB = \beta$.

הבע באמצעות α ו- β את אורך הקטע BC .

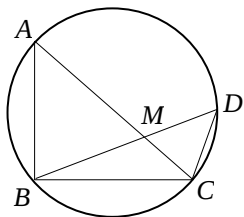


12. AC ו- BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R ,

שנפגשים בנקודה M . זווית $\angle B$ היא זווית ישרה.

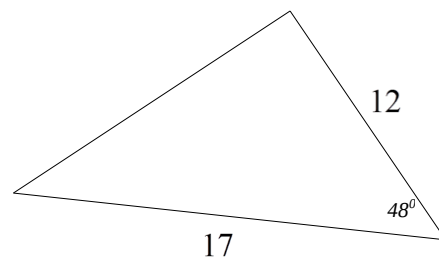
נתון: $AB = k$, $DM = p$, $DC = q$.

הבע באמצעות R , k , p ו- q את אורך הקטע MC .

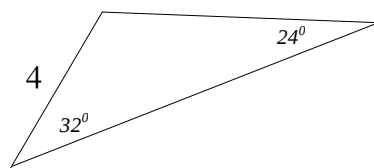


13. חשב את שטחי המשולשים הבאים:

א.



ב.



14. חשב את שטחו של מרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של

15° עם הבסיסים.

15. אורכו של מלבן הוא m ורוחבו n . הזווית בין אלכסוני המלבן היא θ .

הוכח כי מתקיים: $\sin \theta = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$

16. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$) חוצה את הזווית $\angle B$.

נתון: $\angle A = \alpha$, $AB = m$.

הבע באמצעות α ו- m את שטח המשולש $\triangle BCD$.

17. במשולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) שאורך השוק בו הוא k וזווית הבסיס שלו

היא β , BE חוצה את זווית $\angle B$ ו- CD הוא הגובה לשוק AB .

$$S_{\triangle ADE} = -\frac{k^2 \sin \frac{\beta}{2} \sin 4\beta}{4 \sin \frac{3\beta}{2}} \quad \text{הוא: } \triangle ADE$$

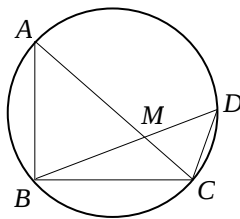
18. AC ו- BD הם מיתרים במעגל שרדיוסו R , שנפגשים בנקודה M .

זווית $\angle B$ היא זווית ישרה.

נתון: $\angle MBC = \alpha$, $\angle MCB = \beta$.

א. הבע באמצעות R , α ו- β את שטח המשולש $\triangle BDC$.

ב. נתון: $\beta = 2\alpha$, $S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} R^2$. חשב את α .



19. במרפז שווה שוקיים, שאורך השוק בו הוא b והזווית ליד הבסיס הגדול היא γ נתון

שהאלכסונים מאונכים זה לזה.

א. הבע באמצעות γ ו- b את אורכי בסיסי המרפז.

ב. חשב את γ אם ידוע שהבסיס הגדול ארוך פי $\sqrt{3}$ מהבסיס הקטן.

פתרונות:

1. א. $x = 18.585_{cm}$, $y = 22.199_{cm}$ ב. $\alpha = 34.231^\circ$ ג. $\alpha = 41.382^\circ$ או $\alpha = 138.618^\circ$

ד. $\alpha = 155.526^\circ$ או $\alpha = 24.474^\circ$ ה. $x = 3.606_{cm}$, $\alpha = 73.898^\circ$ 2. א. $x = 5.646_{cm}$

ב. $\alpha = 20.742^\circ$ ג. $\alpha = 105.962^\circ$ ד. $\alpha = 90^\circ$ 3. $AD = 13.064_{cm}$

4. $GM = 3.360_{cm}$ 5. $66.444^\circ, 113.556^\circ, 41.810^\circ, 138.190^\circ$

6. $AB = 14.56_{cm}$, $R = 9.242_{cm}$ 7. $P = 22_{cm}$ 8. $AC = 10.790_{cm}$, $R = 5.395_{cm}$

$$BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha} \quad .11 \quad DE = \sqrt{\frac{1}{9}b^2 - a^2} \quad .10 \quad BC = 10_{cm} \quad .9$$

$$S = 8.641_{cm^2} \quad .1 \quad S = 75.801_{cm^2} \quad .8 \quad .13 \quad MC = \sqrt{p^2 + q^2 - \frac{pqk}{R}} \quad .12$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)} \quad .16 \quad S = 16_{cm^2} \quad .14$$

$$\alpha = 22.5^\circ \quad .1 \quad S = 2R^2 \sin \alpha \cos \beta \sin(90^\circ - \alpha + \beta) \quad .8 \quad .18$$

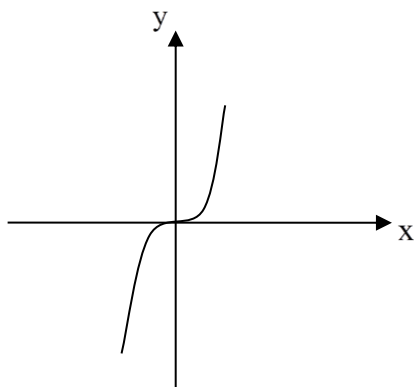
$$\gamma = 75^\circ \quad .1 \quad \frac{b \sin(135^\circ - \gamma)}{\sin 45^\circ}, \frac{b \sin(\gamma - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} \quad .8 \quad .19$$

פרק 7 – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

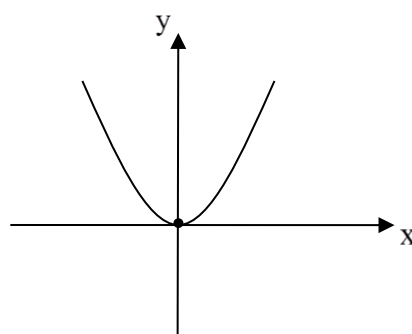
7.1 – נגזרות ומשיקים

פונקציות נפוצות

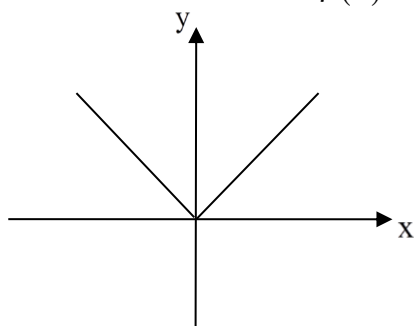
הפונקציה $f(x) = x^3$:



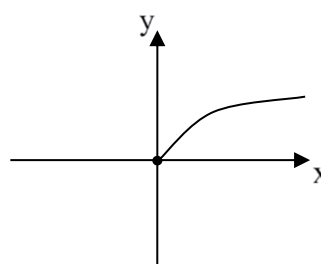
הפונקציה $f(x) = x^2$:



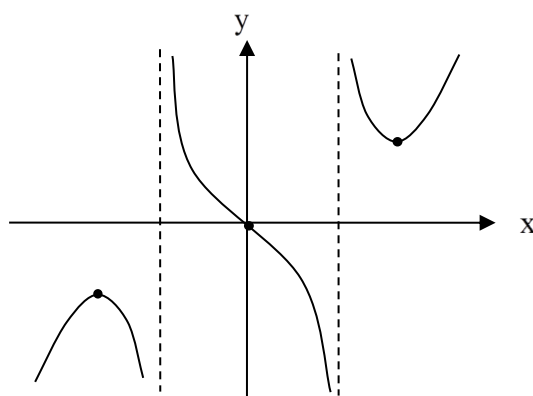
הפונקציה $f(x) = |x|$:



הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$:



פונקציה עם מכנה, למשל $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:



הנגזרת

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

כללי הגזירה

$$\text{כלל גזירה מס' 1: } f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): } f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): } f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\text{כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): } f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

$$\text{כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): } f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$\text{כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של } \frac{1}{x} \text{): } f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): } f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$$

$$\text{כלל גזירה מס' 8 (מנה): } f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 9 (שורש): } f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

שיפוע של פונקציה

השיפוע (m) של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה

$$A(x_1, y_1). \text{ כלומר: } m = f'(x_1)$$

השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע

הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.

משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת

$$\text{ישר: } y - y_1 = m(x - x_1)$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהי פונקציה, פונקציות נפוצות, פונקציה רציפה
סרטון 2		משיפוע של ישר לשיפוע של פונקציה
סרטון 3	תרגיל 1	כלל גזירה 1 (x^n)
סרטון 4	תרגיל 2	כלל גזירה 2 (כפל בקבוע)
סרטון 5	תרגיל 3	כלל גזירה 3 (גזירת קבוע)
סרטון 6	תרגיל 4	כלל גזירה 4 (סכום והפרש)
סרטון 7	תרגיל 5	כלל גזירה 5 (פונקציה מורכבת)
סרטון 8	תרגיל 6	כלל גזירה 6 $\left(\frac{1}{x}\right)$
סרטון 9	תרגיל 7	כלל גזירה 7 (מכפלה)
סרטון 10	תרגיל 8	כלל גזירה 8 (מנה)
סרטון 11	תרגיל 9 א-ו	כלל גזירה 9 (שורש) – חלק א'
סרטון 12	תרגיל 9 ז-ט	כלל גזירה 9 (שורש) – חלק ב'
סרטון 13	תרגיל 9 י-י"ג	כלל גזירה 9 (שורש) – חלק ג'
סרטון 14	תרגיל 10	גזירת פונקציות עם פרמטרים
סרטון 15	תרגילים 11,12	שיפוע של פונקציה
סרטון 16	תרגיל 13	שיפוע של המשיק לפונקציה
סרטון 17	תרגיל 14	משוואת המשיק לפונקציה (כולל מציאת משוואת משיק כשנתון x)
סרטון 18	תרגילים 15,16	מציאת משוואת משיק כשנתון y
סרטון 19	תרגילים 17,18	מציאת משוואת משיק כשנתון m
סרטון 20	תרגיל 19	מציאת משוואת משיק כשנתונה θ (הזווית בין הישר לכיוון החיובי של ציר ה- x).
סרטון 21	תרגילים 20,21	משוואת משיק עם מציאת פרמטר יחיד
סרטון 22	תרגיל 22	משוואת משיק עם מציאת שני פרמטרים
סרטון 23	תרגיל 23	כיצד מוצאים משיק כללי וכיצד מוצאים משיק מנקודה חיצונית
סרטון 24	תרגיל 24	משיק מנקודה חיצונית
סרטון 25	תרגיל 25	משיק מנקודה חיצונית

תרגילים:

1. גזור:

$$\text{א. } f(x) = x^3 \quad \text{ב. } f(x) = x^7 \quad \text{ג. } f(x) = x^2 \quad \text{ד. } f(x) = x \quad \text{ה. } f(x) = x^{-3}$$

$$\text{ו. } f(x) = x^{-1} \quad \text{ז. } f(x) = x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ח. } f(x) = x^{\frac{1}{3}} \quad \text{ט. } f(x) = x^{\frac{3}{4}}$$

2. גזור:

$$\text{א. } f(x) = 2x^3 \quad \text{ב. } f(x) = 3x^7 \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{2}x^4 \quad \text{ד. } f(x) = \frac{x^6}{7} \quad \text{ה. } f(x) = 8x$$

$$\text{ו. } f(x) = 3x^{-2} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{4}{x} \quad \text{ח. } f(x) = 6x^{\frac{1}{2}} \quad \text{ט. } f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$$

3. גזור:

$$\text{א. } f(x) = 12 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{7}{8}$$

4. גזור:

$$\text{א. } f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$$

5. גזור:

$$\text{א. } f(x) = (5x - 2)^3 \quad \text{ב. } f(x) = (x^3 + 6)^5 \quad \text{ג. } f(x) = 3(x - x^2)^2$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$$

6. גזור:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב. } f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{3}{x^3} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{2}{3-x} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{6}{x+5}$$

7. גזור:

$$\text{א. } f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב. } f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ג. } f(x) = x^3(6-x)^4$$

8. גזור:

$$\text{א. } f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{3}{x^3}$$

9. גזור:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ב. } f(x) = 4\sqrt{x+1} \quad \text{ג. } f(x) = \sqrt{x^3-1}$$

$$\text{ד. } f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \quad \text{ה. } f(x) = x^2\sqrt{x+3} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$$

$$\text{ז. } f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ח. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{1-2x} \quad \text{ט. } f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\text{י. } f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$$

10. גזור:

$$\text{א. } f(x) = ax^4 - bx \quad \text{ב. } f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ד. } f(x) = a\sqrt{bx^2+c}$$

11. מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

12. מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$ בנקודה שבה $x = -2$.

13. מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה שבה $x = 1$.

14. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה שבה $x = -1$.

15. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה שבה $y = 2$.

16. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם

ציר ה- x .

17. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

18. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו -2.

19. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר

ה- x זווית של 135° .

20. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא 8.

מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

21. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4.

מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

22. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1,6)$ הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

23. א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x = t$.

ב. מצא את ערכו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1,1)$.

24. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ העובר בנקודה $(3,0)$.

25. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ אם ידוע ששטח המשולש שהוא יוצר

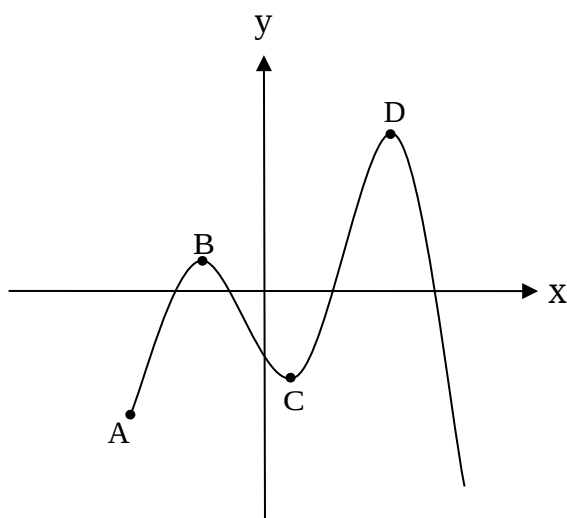
עם הצירים הוא 4.5 יחידות שטח.

פתרונות:

1. א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$ ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
2. א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8 ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$
3. א. 0 ב. 0 ג. 0 ד. $3x^2 + 4x - 3$ ה. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ ו. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ז. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$
5. א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$
6. א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$
7. א. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ב. $-\frac{6}{(x+3)^2}$ ג. $10x-14$ ד. $(5x+1)^2(20x-44)$
8. א. $x^2(6-x)^3(18-7x)$ ב. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ג. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ד. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$
9. א. $-\frac{9}{x^4}$ ב. $-\frac{1}{x^2}$ ג. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ד. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ה. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ו. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ז. $\frac{x-8}{(1-2x)^2\sqrt{x^2-4}}$ ח. $\frac{x+2}{(x+1)\sqrt{x+1}}$ ט. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$ י. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ יא. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$
10. א. $4ax^3 - b$ ב. $\frac{2ax}{3} - \frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$ ה. $m=17$
12. א. $m=4$ ב. $m=2$ ג. $y=24x+22$ ד. $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$
16. א. $y=6x-24, y=-6x-12$ ב. $y=2x-3$ ג. $y=-2x+8$
19. א. $y=-x-1\frac{1}{3}$ ב. $y=-x+1\frac{1}{3}$ ג. $a=2, y=8x-18$ ד. $a=2, y=-4x-2$
22. א. $b=2, a=6, y=-6x+12$ ב. $y=2tx-t^2+1$ ג. $t=0, t=-2$
24. א. $y=-\frac{1}{2}x+1\frac{1}{2}$ ב. $y=-\frac{1}{16}x+\frac{3}{4}$

7.2 - חקירת פולינום

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום)



מינימום/מקסימום מקומי (פנימי) - B, C, D

מינימום/מקסימום קצה - A

מינימום/מקסימום מוחלט - D

נקודות קיצון מקומיות

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.

בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית – נקודה כזו

נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

מציאת נקודות קיצון מקומיות:

א. נגזור את הפונקציה.

ב. נשווה את הנגזרת לאפס ונחלק את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.

ג. נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .

ד. נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון ע"י טבלה.

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהן נקודות קיצון, קיצון מקומי/קצה/מוחלט
סרטון 2	תרגיל 1	מציאת נקודות קיצון מקומיות – שלבי עבודה + דוגמא
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6	תרגילים 5,6	שאלות על נקודות קיצון בשילוב מציאת פרמטרים
סרטון 7	תרגיל 7	חקירת פונקציית פולינום
סרטון 8	תרגיל 8	
סרטון 9	תרגיל 9	

	10 תרגיל	סרמון 10
	11 תרגיל	סרמון 11
	12 תרגיל	סרמון 12

תרגילים:

1. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.

2. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

3. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

4. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

5. לפונקציה $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.

מצא את ערכו של הפרמטר a .

6. לפונקציה $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

7. נתונה הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$. ענה על הסעיפים הבאים:

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. שרטוט.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. שרמוט.

10. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ה. שרמוט.

11. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. שרמוט.

12. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 54x - 50$.

א. לאילו ערכים של הפרמטר a עולה הפונקציה בכל תחום הגדרתה?

ב. הצב בפונקציה $a = 6$ וחקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y , שרמוט.

פתרונות:

1. $\max(5, 25)$ 2. א. $\min(2, -16), \max(-2, 16)$ ב. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$

ירידה: $-2 < x < 2$ 3. א. $\min(-\sqrt{5}, -16), \max(\sqrt{5}, -16)$

ב. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$ או $x > \sqrt{5}$ ירידה: $0 < x < \sqrt{5}$ או $x < -\sqrt{5}$

4. א. $\min(3, 5)$ ב. עלייה: $x > 3$ עלייה: $x < 3$, $x \neq 0$ 5. $a = 3$ 6. $a = 2$, $b = -16$

7. א. כל x ב. $\max(5, 25)$ ג. עלייה: $x < 5$ ירידה: $x > 5$ ד. $(0, 0), (10, 0)$

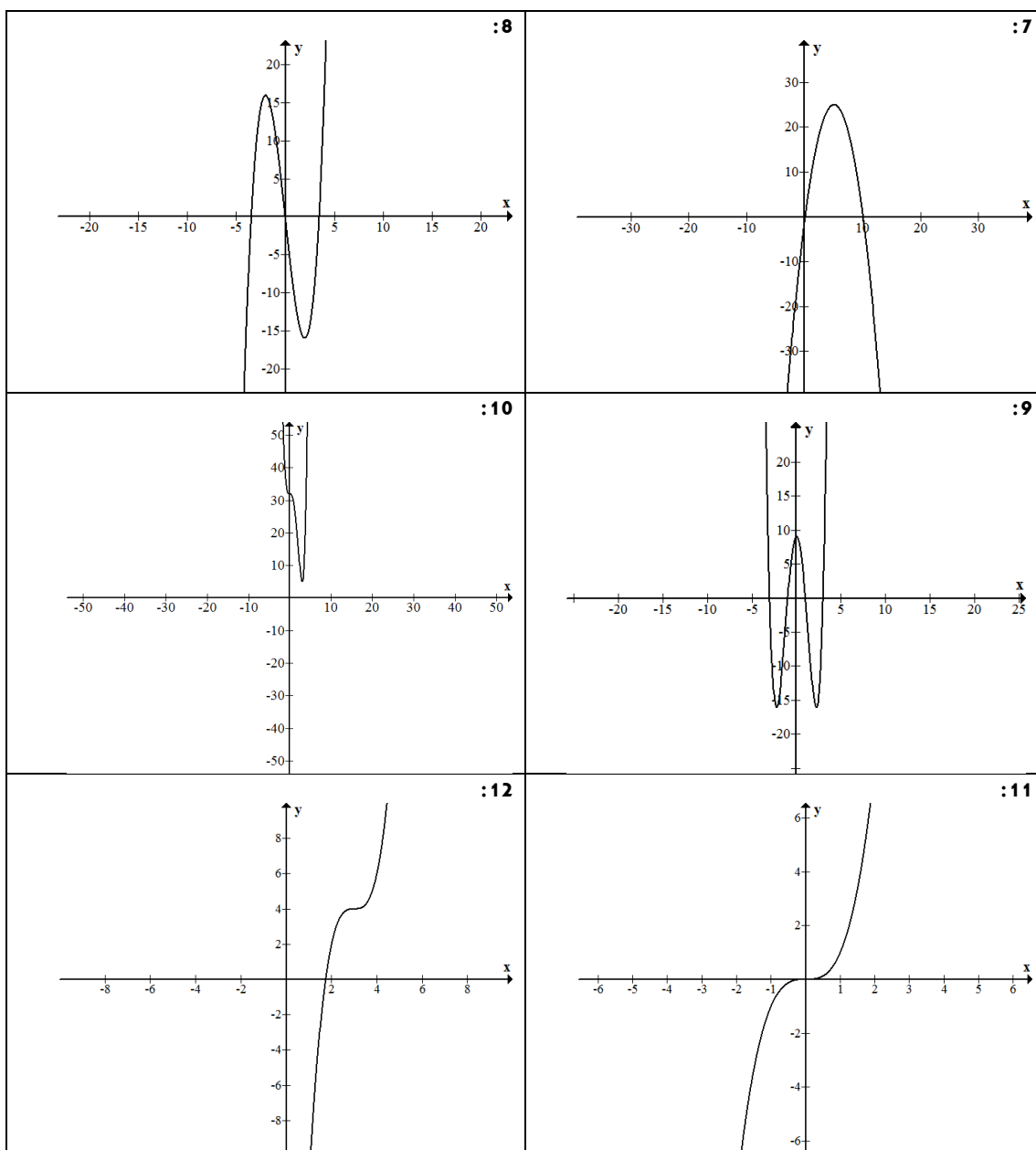
8. כל x ב. $\min(2, -16), \max(-2, 16)$ ג. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$

ירידה: $-2 < x < 2$ ד. $(0, 0), (\sqrt{12}, 0), (-\sqrt{12}, 0)$ 9. א. כל x

ב. $\min(-\sqrt{5}, -16), \max(\sqrt{5}, -16)$ ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$ או $x > \sqrt{5}$

ירידה: $0 < x < \sqrt{5}$ או $x < -\sqrt{5}$ ד. $(0, 9), (\pm 1, 0), (\pm 3, 0)$

גרפים:



7.3 - חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש

סעיפי חקירה מלאה של פונקציה:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
- ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- ו. נקודות פיתול.
- ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה.
- ח. שרמוט.

תחום הגדרה של פונקציה

- כל פולינום מוגדר לכל x .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

אסימפטוטות

חוקי האינסוף

$$1) \frac{1}{\infty} = 0 \quad , \quad \frac{1}{0^+} = +\infty \quad , \quad \frac{1}{0^-} = -\infty \quad \rightarrow \quad 2) \frac{1}{0} = \infty \quad 3) \infty \cdot \infty = \infty$$

$$4) \infty + \infty = \infty \quad 5) \frac{\infty}{\infty} = ? \quad 6) \infty - \infty = ?$$

אסימפטוטה אנכית: ל- $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $y = n$ אם מתקיים: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = n$

אסימפטוטה אנכית: ל- $f(x)$ יש אסימפטוטה אנכית $x = a$ אם מתקיים: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

נקודות פיתול

הגדרה א': נקודה בה הפונקציה עוברת מקעירות כלפי מטה לקעירות כלפי מעלה או להיפך

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \cup$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow \cap$$

הגדרה ב': נקודה בה הנגזרת השנייה מחליפה סימן

הגדרה ג': נקודה בה המשיקים לפונקציה עוברים מלהיות מתחת לפונקציה ללהיות מעליה או

להיפך

הערה: בנקודות פיתול המשיק לפונקציה חותך את הפונקציה

לפינך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר המבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	הסבר על תחום הגדרה של מנות
סרטון 2	תרגיל 2	הסבר על תחום הגדרה של שורשים
סרטון 3	תרגיל 3	נקודות קיצון בפונקציות מנה
סרטון 4		חוקי האינסוף
סרטון 5		יישום חוקי האינסוף בפונקציה $\frac{1}{x}$ והכרות עם אסימפטוטות
סרטון 6		הגדרת אסימפטוטות אופקיות ואנכיות
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8	תרגיל 5	
סרטון 9	תרגיל 6	
סרטון 10	תרגיל 7	
סרטון 11	תרגיל 8	
סרטון 12	תרגיל 9	
סרטון 13	תרגיל 10	נקודת אי הגדרה
סרטון 14	תרגיל 11	נקודת אי הגדרה
סרטון 15	תרגיל 12	אסימפטוטות בפונקציות שורש (לראשונה)
סרטון 16	תרגיל 13	
סרטון 17	תרגיל 14	
סרטון 18	תרגיל 15	
סרטון 19	תרגיל 16	אסימפטוטה אופקית מפוצלת בפונקצית מנה עם שורש
סרטון 20	תרגיל 17	אסימפטוטה אופקית מפוצלת בפונקצית מנה עם שורש
סרטון 21	תרגיל 18	מציאת פרמטרים בשאלות של אסימפטוטות
סרטון 22	תרגיל 19	מציאת פרמטרים בשאלות של אסימפטוטות
סרטון 23	תרגיל 20	חקירת פונקציית מנה (ללא פיתול) – חלק א'
סרטון 24	תרגיל 20	חקירת פונקציית מנה (ללא פיתול) – חלק ב'
סרטון 25	תרגיל 20	חקירת פונקציית מנה (ללא פיתול) – חלק ג'
סרטון 26	תרגיל 21	חקירת פונקציית שורש (ללא פיתול) – חלק א'
סרטון 27	תרגיל 21	חקירת פונקציית שורש (ללא פיתול) – חלק ב'
סרטון 28		הסבר על נקודות פיתול
סרטון 29	תרגיל 22	
סרטון 30	תרגיל 23	
סרטון 31	תרגיל 24	
סרטון 33	תרגיל 25	נקודת פיתול שבה גם הנגזרת הראשונה היא אפס
סרטון 34	תרגיל 26	מציאת פרמטרים באמצעות נקודת פיתול
סרטון 35	תרגיל 27	

המשך שאלה מסרמון קודם	תרגיל 27	סרמון 36
	תרגיל 28	סרמון 37
המשך שאלה מסרמון קודם	תרגיל 28	סרמון 38
המשך שאלה מסרמון קודם	תרגיל 28	סרמון 39

תרגילים:

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{ב. } f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \quad \text{ג. } f(x) = \frac{2x}{x-3}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$$

2. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ב. } f(x) = 2\sqrt{x-3} \quad \text{ג. } f(x) = 3x\sqrt{1-2x} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$$

$$\text{3. נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$$

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה? ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

$$\text{4. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$$

$$\text{5. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{5x^2 + 1}{x^2 - 9}$$

$$\text{6. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{1 + 3x^2}$$

$$\text{7. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2x - 15}$$

$$\text{8. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{6x^3 - 5x + 1}{1 + 2x^2}$$

$$\text{9. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$$

$$\text{10. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$$

11. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 4x}$

12. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4}$

13. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x}}$

14. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$

15. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

16. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{x^2+5}}$

17. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-16}}$

18. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

האסימפטוטה האופקית של הפונקציה ואחת האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה נפגשות בנקודה $(-1, 2)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

19. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16, 2)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

20. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2-10x+6}{3x^2-10x+3}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

21. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

22. מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$

23. מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקעירות של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x-2}{x^2}$

24. מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x-1}}$

25. מצא את נקודות הקיצון והפיתול של הפונקציה: $f(x) = x(x-2)^3$

26. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a}{x^2+b}$

הנקודה $(-1,1)$ היא נקודת פיתול של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

27. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטוט.

28. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x-\sqrt{x}}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטוט.

פתרונות:

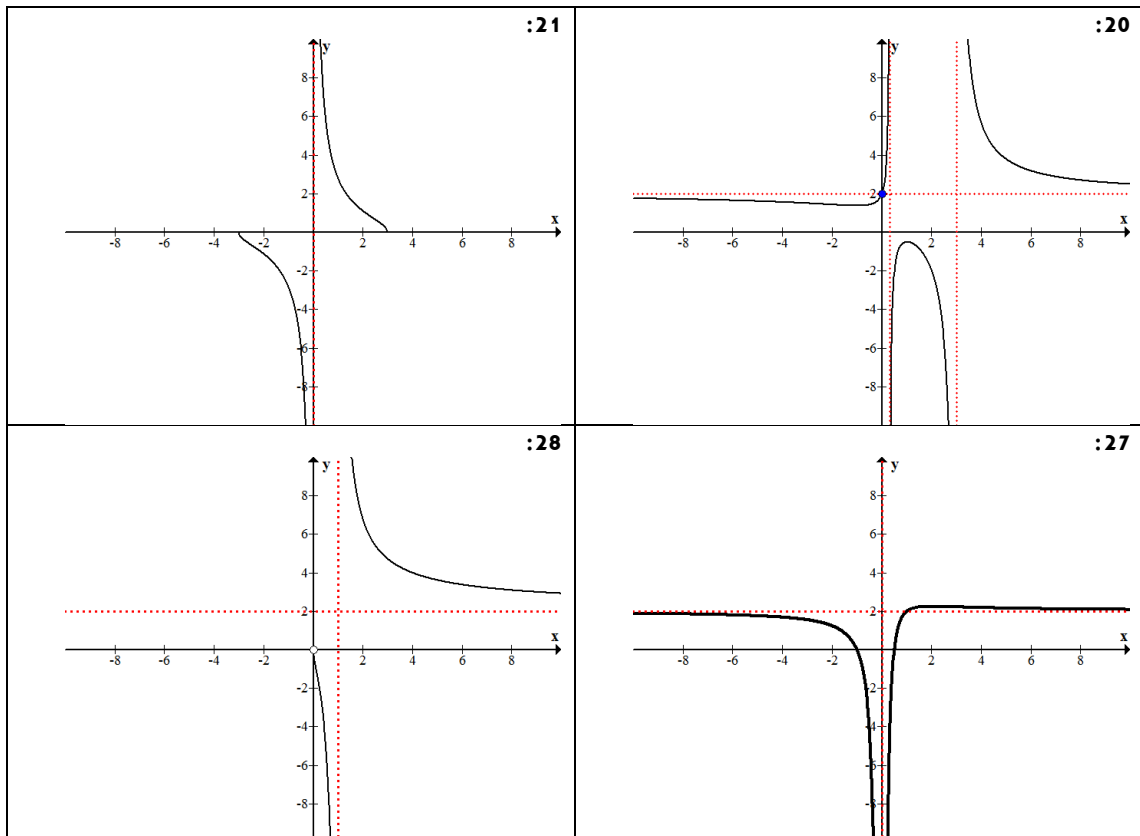
(הערה: הגרפים לשאלות בחקירות פונקציה מופיעים בסוף הפתרונות באופן מרוכז)

1. א. כל x ב. כל x ג. $x \neq 3$ ד. $x \neq \pm 1$ ה. $x \neq 0, 2, -2$ ו. $x \neq 4, -2$ ז. כל x
2. א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \leq \frac{1}{2}$ ד. $x > -4$ ה. $x \geq 2$ או $x \leq -5$ ו. $x > 3$ או $-3 < x < 0$
3. $x \leq 2$ וגם $x \neq -2, 1$ א. $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$ ב. תחומי עלייה:
4. $-3 < x < 3$ וגם $x \neq 1$ תחומי ירידה: $3 < x \neq 9$ או $x < -3$ א. אופקית: $y = 3$ אנכית: $x = 2$
5. אופקית: $y = 5$ אנכית: $x = \pm 3$ 6. אופקית: $y = \frac{2}{3}$ 7. אופקית: $y = 0$
8. אנכית: $x = 5, x = -3$ 9. אין 10. אופקית: $y = a$, אנכית: $x = b$ 11. אופקית: $y = 1$
12. אנכית: $x = 1$, נקודת אי הגדרה: $(2, 4)$ 13. אופקית: $y = \frac{1}{2}$, אנכית: $x = 2$ נקודת אי הגדרה: $(0, 0)$
14. אופקית: $y = 0$, אנכית: $x = 2$ 15. אנכית: $x = 4$ 16. אופקית: $y = -1$
17. אנכית: $x = 1$ אופקית: $y = 2$ נקודת אי הגדרה: $(0, 0)$
18. אופקית: $y = 3, y = -3$ 19. אנכית: $x = 4, x = -4$ 20. $y = 5, y = -5$ אנכית: $x = 4, x = -4$ 21. $b = -3, a = 2$
22. $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ וגם $x \neq \frac{1}{3}$ תחומי ירידה: $1 < x \neq 3$ או $x < -1$ ד. $(0, 2)$
23. אופקית: $y = 2$, אנכית: $x = 3, x = \frac{1}{3}$ 24. $x \neq 0$ וגם $-3 \leq x \leq 3$
25. $\max(-3, 0)$ קצה, $\min(3, 0)$ קצה ג. תחומי עלייה: אף x , תחומי ירידה: $-3 \leq x \leq 3, x \neq 0$
26. $(-3, 0), (3, 0)$ ה. אנכית: $x = 0$ 27. $(1, 7), (2, 16)$ קעירות כלפי מעלה: $x > 2$ או $x < 1$, קעירות כלפי מטה: $1 < x < 2$ 28. $(2, 1)$ קעירות כלפי מעלה: $x > 2$, קעירות כלפי מטה: $x < 1$
29. $0 \neq x < 2$ קיצון: $\min(2, 4)$ פיתול: $\left(4, \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$ 30. קיצון: $\min\left(\frac{1}{2}, -\frac{27}{16}\right)$
31. פיתול: $(1, -1), (2, 0)$ 32. $b = 3, a = 4$ 33. $x \neq 0$ ג. תחומי עלייה: $0 < x < 2$ תחומי ירידה: $x < 0$ או $x > 2$ ד. $\left(\frac{1}{2}, 0\right), (-1, 0)$ ה. אופקית: $y = 2$
34. אנכית: $x = 0$ ו. $\left(3, 2\frac{2}{9}\right)$ ז. קעירות כלפי מעלה: $x > 3$, קעירות כלפי מטה: $0 \neq x < 3$
35. א. $0 < x \neq 1$ ב. אין ג. יורדת בכל תחום הגדרתה. ד. אין. ה. אופקית: $y = 2$

אנכית: $x=1$ נקודת אי הגדרה: $(0,0)$ ו. $\left(\frac{1}{9}, -1\right)$ ו. קעירות כלפי מעלה: $x > 1$ או $0 < x < \frac{1}{9}$

קעירות כלפי מטה: $\frac{1}{9} < x < 1$

גרפים:



7.4 - חקירת פונקציה עם פרמטר

סיווג נקודות קיצון באמצעות " y :

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת קיצון אז:

אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.

אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגילים 1,2,3	סיווג נקודות קיצון לפי הנגזרת השנייה
סרטון 2	תרגיל 4	
סרטון 3	תרגיל 4	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 4	תרגיל 5	
סרטון 5	תרגיל 5	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 6	תרגיל 6	
סרטון 7	תרגיל 6	המשך שאלה מסרטון קודם

תרגילים:

1. מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$

2. מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x - 16$

3. מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3b^2x$

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט. ז. מצא את שלוש נקודות הפיתול של הפונקציה. ניתן להשאיר שורש בתשובה.

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1-x^2}{(x-b)^2} \quad (b > 1)$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x\sqrt{b^2 - x^2} \quad (b > 0)$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטוט.

פתרונות:

(הערה: הגרפים לשאלות בחקירות פונקציה מופיעים בסוף הפתרונות באופן מרוכז)

1. $\min(2, -16), \max(-2, 16)$ 2. $\min(3, -25)$ 3. $\min(b, -2b^3), \max(-b, 2b^3)$

4. א. כל x ב. $\max\left(a, \frac{1}{a}\right), \min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$ ג. תחומי עלייה: $-a < x < a$, תחומי ירידה:

$x > a$ או $x < a$ ד. $(0, 0)$ ה. אופקית: $y = 0$ ו. $(0, 0), \left(\sqrt{3}a, \frac{\sqrt{3}}{2a}\right), \left(-\sqrt{3}a, -\frac{\sqrt{3}}{2a}\right)$

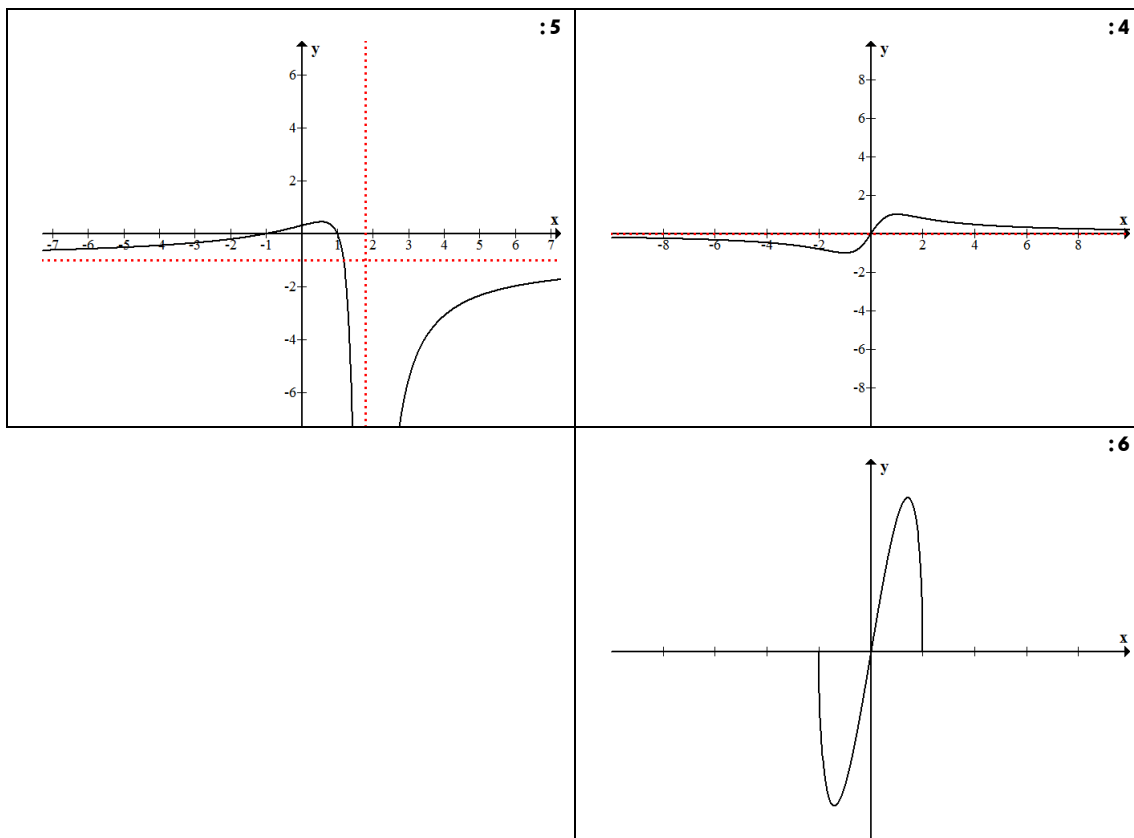
5. א. $x \neq b$ ב. $\max\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2 - 1}\right)$ ג. תחומי עלייה: $x > b$ או $x < \frac{1}{b}$, תחומי ירידה: $\frac{1}{b} < x < b$

ד. $(0, \frac{1}{b^2}), (-1, 0), (1, 0)$ ה. אופקית: $y = -1$ ז. אנכית: $x = b$ 6. א. $-b \leq x \leq b$

ב. $\max\left(\frac{b}{\sqrt{2}}, 2b^2\right)$, $\min\left(-\frac{b}{\sqrt{2}}, -2b^2\right)$, $\max(-b, 0)$ קצה, $\min(b, 0)$ קצה,

תחומי עלייה: $-\frac{b}{\sqrt{2}} < x < \frac{b}{\sqrt{2}}$ תחומי ירידה: $\frac{b}{\sqrt{2}} < x < b$ או $-b < x < -\frac{b}{\sqrt{2}}$. ד. $(0, 0)$, $(b, 0)$, $(-b, 0)$

גרפים:



7.5 - חשבון דיפרנציאלי – בעיות קיצון

שלבי עבודה:

- א. נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- ב. נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- ג. נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- ד. נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלק את ערך/ערכי ה- x .
- ה. נוודא שערך ה- x מסעיף ד' הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ו. ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	רקע והדגמת הרעיון העומד מאחורי בעיות קיצון
סרטון 2	תרגיל 1	שלבי עבודה בפתרון בעיות קיצון
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6	תרגיל 5	
סרטון 7	תרגיל 6	
סרטון 8	תרגיל 7	
סרטון 9	תרגיל 8	
סרטון 10	תרגיל 9	
סרטון 11		הכרת הגופים במרחב וחישוב שטח המעמפת/שטח הפנים/הנפח של כל גוף
סרטון 12	תרגיל 10	
סרטון 13	תרגיל 11	
סרטון 14	תרגיל 12	
סרטון 15	תרגיל 13	
סרטון 16	תרגיל 14	
סרטון 17	תרגיל 15	
סרטון 18	תרגיל 16	
סרטון 19	תרגיל 17	
סרטון 20	תרגיל 18	
סרטון 21	תרגיל 19	
סרטון 22	תרגיל 19	
סרטון 23	תרגיל 20	
סרטון 24	תרגיל 21	
סרטון 25		הסבר על בעיות קיצון שבהן נתונה התשובה
סרטון 26	תרגיל 22	
סרטון 27	תרגיל 23	
סרטון 28	תרגיל 23	
סרטון 29	תרגיל 24	

תרגילים:

1. מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.

2. נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני.

מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.

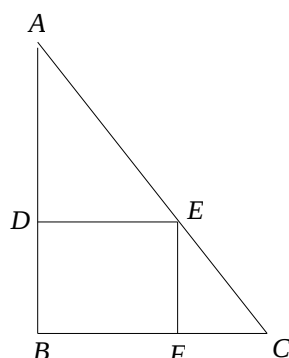
3. מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה

מינימלי.

4. מבין כל המשולשים שווים השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

5. א. מבין כל המשולשים שווים השוקיים שהיקפם a מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.

ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווים השוקיים בעלי אותו היקף המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

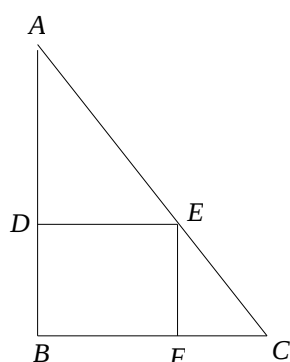


6. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת

על היתר AC כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן.

נתון: $AB = 20_{cm}$, $BC = 16_{cm}$. מצא את שטחו

של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

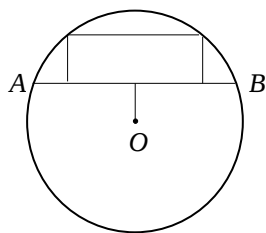


7. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת

על היתר AC כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן.

נתון: $AB = a$, $BC = b$. מצא את שטחו

של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

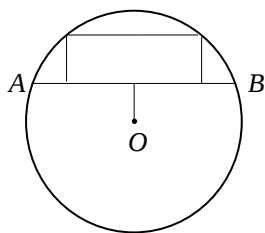


8. במעגל שמרכזו O ורדיוסו $10\sqrt{5}\text{ cm}$ העבירו מיתר AB

שמרחקו ממרכז המעגל הוא 4 cm .

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בערטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.



9. במעגל שמרכזו O ורדיוסו R העבירו מיתר AB

שמרחקו ממרכז המעגל הוא a .

במקטע שיוצר המיתר חסום מלבן כמתואר בערטוט.

מצא את היקפו של המלבן בעל ההיקף הגדול ביותר.

10. נתונה תיבה שבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ^2 .

מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

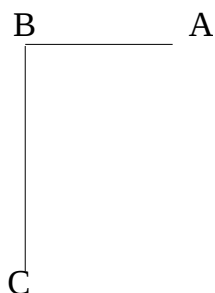
11. מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k מצא את נפחו של הגליל

בעל הנפח המקסימלי.

12. נתונה פירמידה מרובעת, משוכללת וישרה. אורך מקצוע צדדי בפירמידה הוא k ושטח

המעטפת שלה הוא S .

הוכח: $S < 2k^2$.



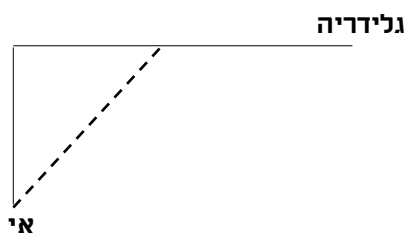
13. שני הולכי רגל יוצאים בו זמנית לדרכם, האחד מעיר A מערבה לעיר

B והשני מעיר B דרומה לעיר C. המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ .

מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש .

כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי? מצא

גם את המרחק המינימלי.



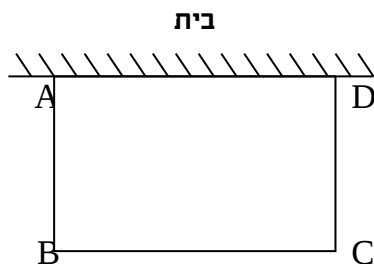
14. אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על

החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר

לאי, נמצאת גלילדריה. האדם שוחה במהירות של 8

קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק

מהגלילדריה עליו לשחות כדי להגיע לגלילדריה בזמן הקצר ביותר?



15. אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה

סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר.

מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר

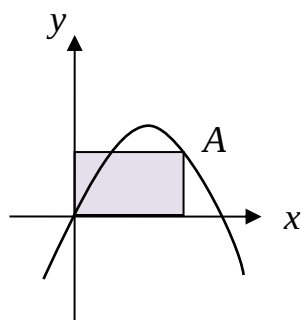
ומחיר מעקה בצדי המרפסת הוא 40 ₪ למטר.

מה צריכים להיות מימדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?

16. לבניית תיבה שנפחה 144 סמ"ק ואורך בסיסה גדול פי 2 מרוחב בסיסה דרושים שני

חומרים להם שני מחירים שונים: החומר לבסיס התחתון יקר פי 3 מהחומר לפאות הצדדיות

והבסיס העליון. מהן מידות התיבה הזולה ביותר שניתן לבנות?



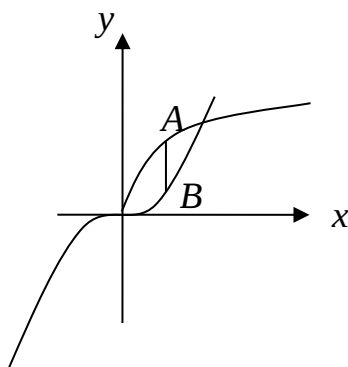
17. נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל

הפונקציה בריבוע הראשון הורידו אנכים לצירי

השעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בשרטוט.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי

ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



18. נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B,

שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB

מקביל לציר ה- y. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A

כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

19. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ והישר $y = 2x$. בין הישר והפונקציה ברביע הראשון

חסמו מלבן. מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

20. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^3}$. מצא שיעורי נקודה על הפונקציה ברביע הראשון, שסכום

הקטעים שהמשיק בה מקצה על הצירים הוא מינימלי.

21. נתונות הפונקציות $f(x) = 1 - x^2$ ו- $g(x) = bx^2$ ($b > 0$). הפונקציות נחתכות

בנקודות A ו-B. מצא את ערכו של b שעבורו הקטע AO מינימלי (O – ראשית הצירים).

22. מהירותו של רכב היא v קמ"ש ועליו לנסוע דרך של S ק"מ. לרכב יש הוצאות נסיעה של

$$\frac{v}{400} \text{ ש"ח לכל ק"מ נסיעה ו-} 48 + \frac{v^2}{200} \text{ ש"ח לכל שעת נסיעה. הראה שעל מנת שהוצאותיו יהיו}$$

מינימליות על הרכב לנסוע במהירות של 80 קמ"ש.

23. הוכח שמכל החרוטים הישרים שנפחם πk סמ"ק, החרוט בעל שטח המעמפת המינימלי

הוא זה שגובהו $\sqrt[3]{6k}$ ס"מ. (שטח מעמפת של חרוט הוא $\pi R\ell$, כאשר ℓ הוא הקו היוצר של החרוט).

24. נתונים שני מספרים חיוביים p ו-q שסכומם a. הראה שכאשר מתקיים $\frac{p}{q} = \frac{n}{m}$ ערך

הביטוי $p^n q^m$ (n ו-m טבעיים) מקסימלי.

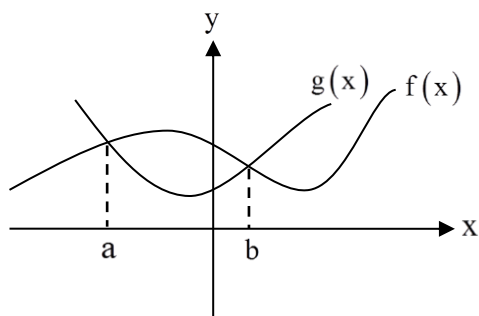
פתרונות:

1. 7, 7 2. 8, 8, 8 3. 1 4. 8 יח"א 5. א 6. $\frac{a}{3}$ 7. $\frac{ab}{4}$ יח"ש
8. 92_{cm} 9. $2\sqrt{5}R - 2a$ יחידות אורך 10. $4 \cdot 4 \cdot 4$ 11. $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח $V =$ 13. 4 שעות,
- המרחק: $\sqrt{80}$ ק"מ 14. $2\frac{1}{3}$ ק"מ 15. $4 \cdot 6$ 16. $3 \cdot 6 \cdot 8$ ס"מ 17. $A(4, 8)$ 18. $A(1, 2)$
19. $1 \cdot 2$ 20. $\left(\sqrt{3}, \frac{1}{3\sqrt{3}}\right)$ 21. $b = 1$

7.6 - חשבון אינטגרלי

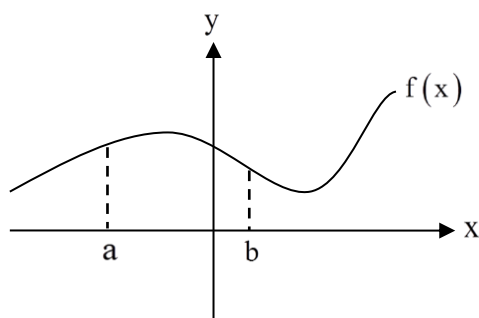
$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

חישוב שטחים

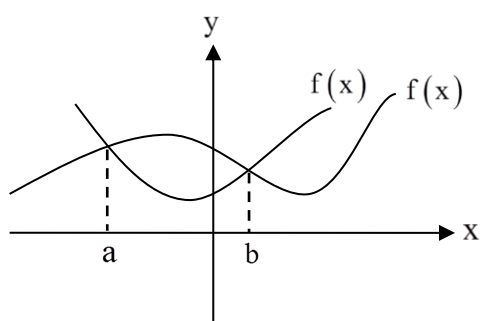


$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

חישוב נפח גוף סיבוב



$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx \quad \text{מתחת פונקציה:}$$



$$V = \pi \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] dx \quad \text{בין פונקציות:}$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		מהו אינטגרל, נוסחת האינטגרל
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6		חילוק ארוך (במספרים)
סרטון 7	תרגיל 5 א'-ב'	כיצד מבצעים חילוק פולינומים
סרטון 8	תרגיל 5 ג'-ה'	
סרטון 9	תרגיל 6	
סרטון 10		אינטגרלים עם זיהוי מבנים
סרטון 11	תרגיל 7	
סרטון 12	תרגיל 8	מציאת פונקציה קדומה- הסבר ודוגמא
סרטון 13	תרגיל 9	
סרטון 14	תרגיל 10	
סרטון 15	תרגיל 11	
סרטון 16	תרגיל 12	
סרטון 17	תרגיל 13	הסבר על חישוב שמחים כולל דוגמא
סרטון 18	תרגיל 14	
סרטון 19	תרגיל 15	
סרטון 20	תרגיל 16	
סרטון 21	תרגיל 17	
סרטון 22	תרגיל 18	
סרטון 23	תרגיל 19	
סרטון 24	תרגיל 20	
סרטון 25	תרגיל 21	
סרטון 26	תרגיל 22	הסבר על חישוב נפח גוף סיבוב עם פונקציה אחד כולל דוגמא
סרטון 27	תרגיל 23	הסבר על חישוב נפח גוף סיבוב בין שתי פונקציות כולל דוגמא
סרטון 28	תרגיל 24	בעיות קיצון עם אינטגרלים – הסבר ודוגמא
סרטון 29	תרגיל 25	
סרטון 30	תרגיל 26	

תרגילים

1. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int x^3 dx = \quad \text{ב. } \int 12x^5 dx = \quad \text{ג. } \int x^4 dx = \quad \text{ד. } \int 2x^3 dx = \quad \text{ה. } \int \frac{2}{3} x^5 dx =$$

$$\text{ו. } \int 7 dx = \quad \text{ז. } \int \left(\frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx = \quad \text{ח. } \int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx =$$

2. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int x^{-3} dx = \quad \text{ב. } \int \frac{1}{x^3} dx = \quad \text{ג. } \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx = \quad \text{ד. } \int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx =$$

3. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int x^{\frac{1}{2}} dx = \quad \text{ב. } \int \sqrt{x} dx = \quad \text{ג. } \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \quad \text{ד. } \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx =$$

4. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int (5x-1)^3 dx = \quad \text{ב. } \int 3(2-7x)^4 dx = \quad \text{ג. } \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx =$$

$$\text{ד. } \int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx = \quad \text{ה. } \int \sqrt{ax+b} dx =$$

5. מצא את תוצאת החילוק:

$$\text{א. } \frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} = \quad \text{ב. } \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} = \quad \text{ג. } \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} =$$

$$\text{ד. } \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} = \quad \text{ה. } \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} =$$

6. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$א. \int \frac{x^2 - 5x - 14}{x + 2} dx =$$

$$ב. \int \frac{x^3 + x^2 + 3x - 5}{x - 1} dx =$$

$$א. \int \frac{x^4 + x^3 - x^2 + 14x - 3}{x + 3} dx =$$

$$ב. \int \frac{x^3 - 4x^2 + 9}{x - 3} dx =$$

$$א. \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4x - 20}{x + 5} dx =$$

$$ב. \int \frac{2x^5 + x^4 - 4x^2 + 1}{2x + 1} dx =$$

7. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$א. \int -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx = \quad ב. \int \frac{x^2}{(x^3 + 6)^2} dx = \quad ג. \int \frac{x - 2}{(x^2 - 4x + 1)^2} dx =$$

$$א. \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \quad ב. \int \frac{6x - 3}{\sqrt{x - x^2}} dx = \quad ג. \int 8x(x^2 + 1)^3 dx =$$

$$א. \int (2 - x^2)(6x - x^3)^2 dx =$$

8. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 3x^2 - 7$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2, -1)$.

9. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5. מצא את הפונקציה.

10. נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x + 6$.

שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12 וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.

מצא את הפונקציה.

11. נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$. המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול

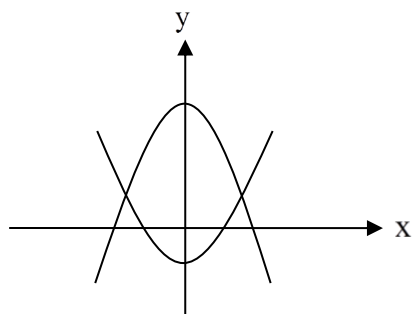
שלה הוא הישר $y = -4$. מצא את הפונקציה.

12. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} + 2$.

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $y = 5\frac{2}{3}$ הוא 3. מצא את הפונקציה.

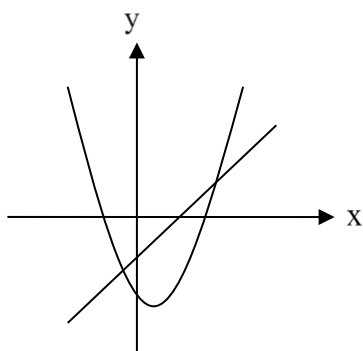
13. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 1, g(x) = 7 - x^2$$



14. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 4x - 12, g(x) = x - 6$$

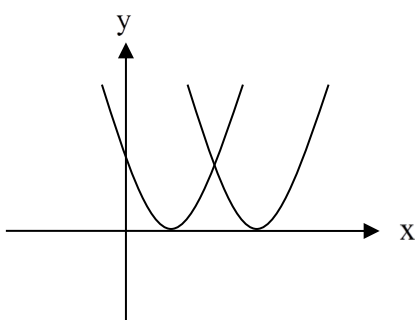


15. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות: $f(x) = x^3, g(x) = x$

16. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x$ וציר ה- x .

17. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 1, g(x) = x^2 - 6x + 9$

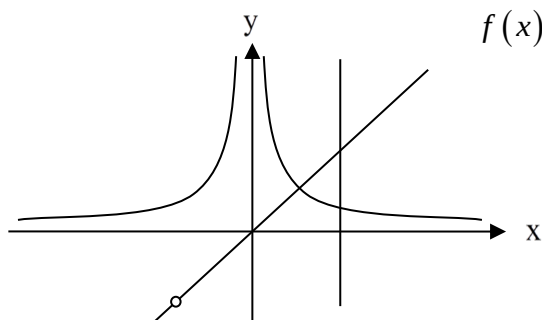
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- x .



18. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 2}$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 2$ וציר ה- x .



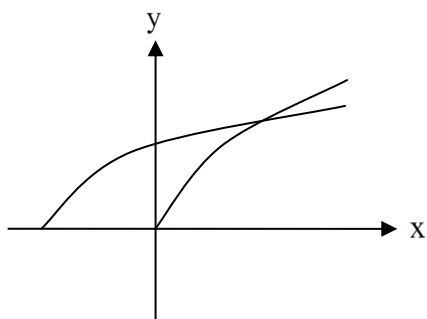
19. נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-6)\sqrt{x}$. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק לפונקציה בנקודת המינימום שלה וציר ה- y .

20. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \sqrt{x+b}$, $g(x) = \sqrt{2x}$ ($b > 0$)

גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- x

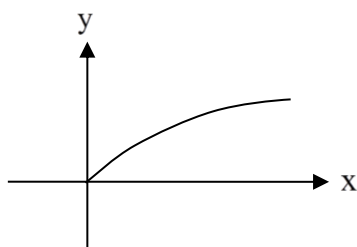
הוא $2\frac{2}{3}$ יחידות שטח. מצא את ערכו של הפרמטר b .



21. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ברביע הראשון.

לפונקציה העבירו משיק העובר בראשית הצירים. חשב את

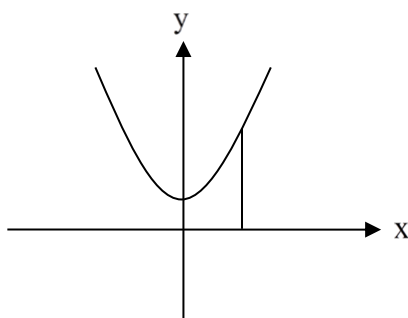
גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x = \sqrt{3}$.



22. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 + 1$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $x = 3$ והצירים מסתובב

סביב ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב.

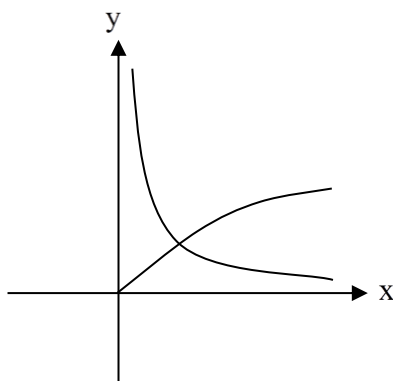


23. בשרטוט נתונות הפונקציות ברביע הראשון:

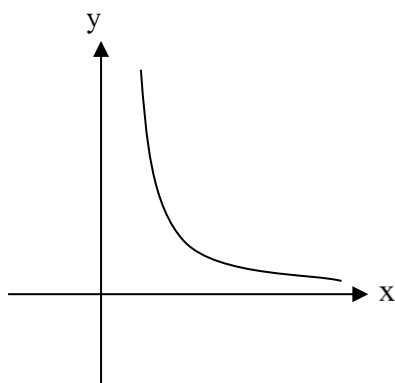
$$f(x) = \sqrt{x}, g(x) = \frac{1}{x}$$

מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר, כאשר השטח הכלוא

בין הפונקציות והישר $x = 2$ מסתובב סביב ציר ה- x .



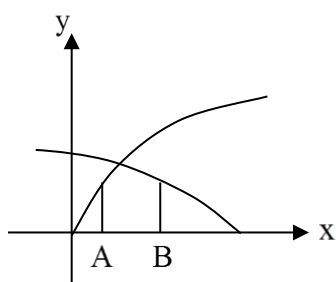
24. מצא את ערכו של a שעבורו ערך האינטגרל $\int_a^{2a+1} (2x-1)dx$ מינימלי.



25. בשרטוט נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{b-1}{\sqrt{x-1}}$ ($1 < b < 2$)

עבור איזה ערך של b השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישרים $x=b$ ו- $x=2$ וציר ה- x מקסימלי?



26. בשרטוט נתונות הפונקציות: $f(x) = \sqrt{2x}$, $g(x) = \sqrt{6-x}$

מהנקודות A ו- B , הנמצאות על ציר ה- x והמרחק ביניהן הוא 2,

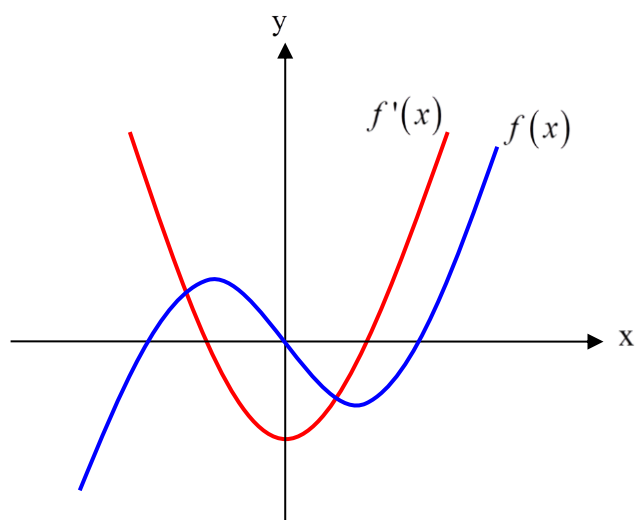
העלו אנכים לציר ה- x . השטח הכלוא בין האנכים, שתי הפונקציות

וציר ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .

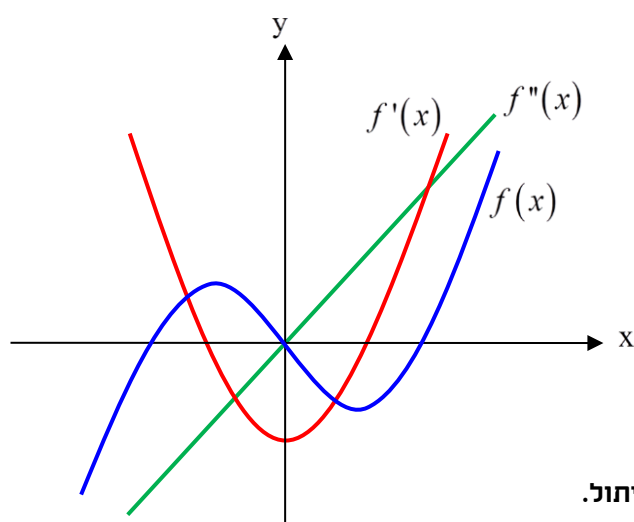
מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A על מנת שנפח גוף הסיבוב יהיה מקסימלי.

1. א. $\frac{x^4}{4} + c$ ב. $2x^6 + c$ ג. $\frac{x^5}{5} + c$ ד. $\frac{x^4}{2} + c$ ה. $\frac{x^6}{9} + c$ ו. $7x + c$
2. א. $-\frac{x^2}{2} + c$ ב. $\frac{x^5}{6} + 4x^4 - \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{1}{3}x + c$ ג. $\frac{x^4}{5} - \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{b} + bx + c$ ד. $-\frac{x^2}{2} + c$
3. א. $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + c$ ב. $-\frac{1}{2x^2} + c$ ג. $2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c$ ד. $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{a}{2x^2} + c$ ה. $2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c$
4. א. $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + c$ ב. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$ ג. $2\sqrt{x} + c$ ד. $8\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + c$ ה. $2\sqrt{x} + c$
5. א. $9\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{7}\sqrt[4]{x^7} + c$ ב. $\frac{(5x-1)^4}{20} + c$ ג. $\frac{3(2-7x)^5}{35} + c$ ד. $-\frac{3}{6x+5} + c$ ה. $-\frac{3}{6x+5} + c$
6. א. $\frac{\sqrt{6x-3}}{3} + c$ ב. $\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c$ ג. $x-7$ ד. $x^2 + 2x + 5$ ה. $x^2 + 2x + 5$
7. א. $x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ ב. $x^2 - x - 3$ ג. $x^2 - 4$ ד. $\frac{x^2}{2} - 7x + c$ ה. $\frac{x^2}{2} - 7x + c$
8. א. $\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 5x + c$ ב. $\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - x + c$ ג. $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x$ ד. $\frac{x^3}{3} - 4x$ ה. $\frac{x^3}{3} - 4x$
9. א. $\frac{x^5}{5} - x^2 + x + c$ ב. $\frac{1}{x^2-1} + c$ ג. $-\frac{1}{3(x^3+6)} + c$ ד. $-\frac{1}{2(x^2-4x+1)} + c$ ה. $-\frac{1}{2(x^2-4x+1)} + c$
10. א. $\sqrt{x^2+2} + c$ ב. $-6\sqrt{x-x^2} + c$ ג. $(x^2+1)^4 + c$ ד. $(2-x^2)(6x-x^3)^2$ ה. $(2-x^2)(6x-x^3)^2$
11. א. $f(x) = x^3 - 7x + 5$ ב. $f(x) = x^2 - 6x + 14$ ג. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ ד. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$ ה. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 10$
12. א. $f(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + x - 6$ ב. $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3$ ג. $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3$ ד. $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3$ ה. $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3} - \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + 2x - 3$
13. א. $S = \sum_{n=1}^{\infty} 21\frac{1}{3}$ ב. $S = \sum_{n=1}^{\infty} 57\frac{1}{6}$ ג. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ ד. $S = \sum_{n=1}^{\infty} 8$ ה. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}$
14. א. $S = \sum_{n=1}^{\infty} 1$ ב. $S = \sum_{n=1}^{\infty} 2.26$ ג. $b = 2$ ד. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$ ה. $V = \sum_{n=1}^{\infty} 69\frac{3}{5}\pi$
15. א. $V = \sum_{n=1}^{\infty} \pi$ ב. $a = -\frac{1}{2}$ ג. $b = 1\frac{4}{9}$ ד. $A(3,0)$ ה. $A(3,0)$

7.7 - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת



- כאשר $f(x)$ עולה, $f'(x)$ חיובית ולהיפך.
- כאשר $f(x)$ יורדת, $f'(x)$ שלילית ולהיפך.
- כאשר ל- $f(x)$ יש נקודת קיצון, $f'(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה- x) ולהיפך.



- כאשר $f'(x)$ עולה, $f''(x)$ חיובית ואז $f(x)$ קעורה כלפי מעלה.
- כאשר $f'(x)$ יורדת, $f''(x)$ שלילית ואז $f(x)$ קעורה כלפי מטה.
- כאשר ל- $f'(x)$ יש נקודת קיצון, $f''(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה- x) ואז ל- $f(x)$ יש נקודת פיתול.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

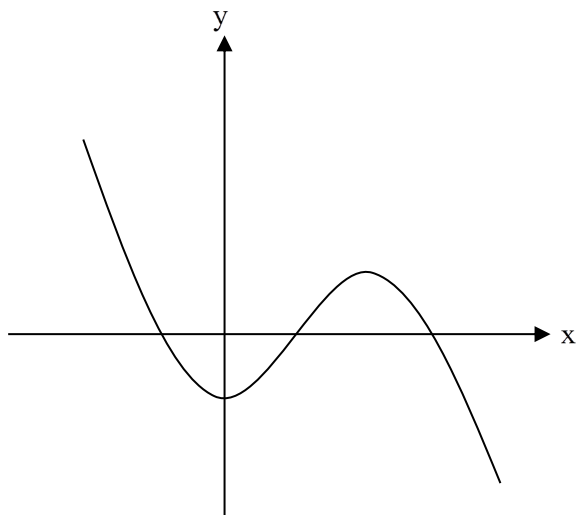
מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
1		הסבר על הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
2	תרגיל 1	
3	תרגיל 2	
4	תרגיל 3	
5	תרגיל 4	
6	תרגיל 5	
7		הסבר על הקשר בין גרף הנגזרת לגרף הנגזרת השנייה ולגרף הפונקציה
8	תרגיל 6	
9	תרגיל 7	
10	תרגיל 8	

תרגילים:

1. נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הנגזרת.

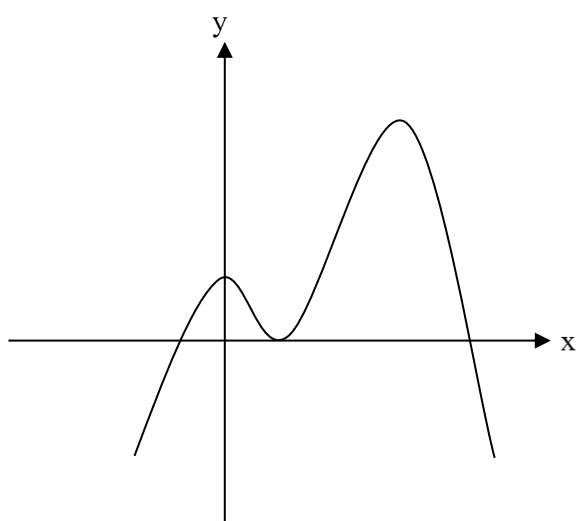
נמק את שיקוליך בשרטוט.



2. נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הנגזרת.

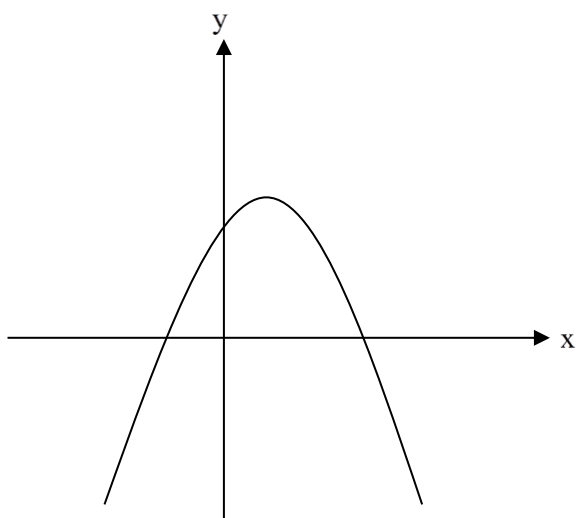
נמק את שיקוליך בשרטוט.



3. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע שהיא

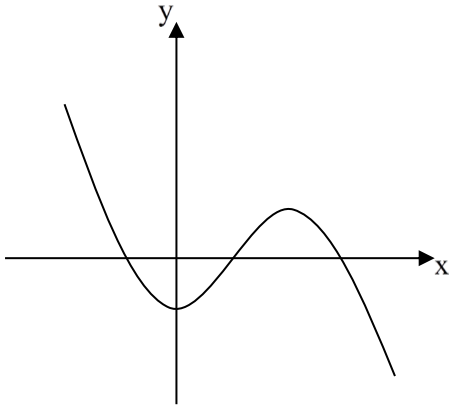
עוברת בראשית הצירים. נמק את שיקוליך בשרטוט.



4. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע שהיא

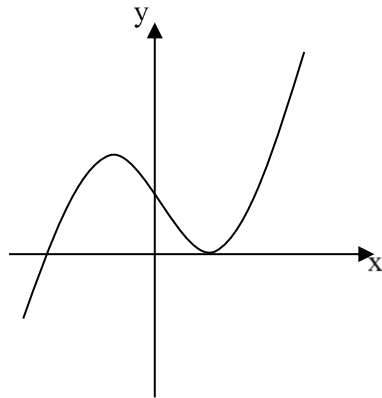
עוברת בראשית הצירים. נמק את שיקוליך בשרטוט.



5. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הפונקציה

אם נתון: $f(0) = 0$. נמק את שיקוליך בשרטוט.

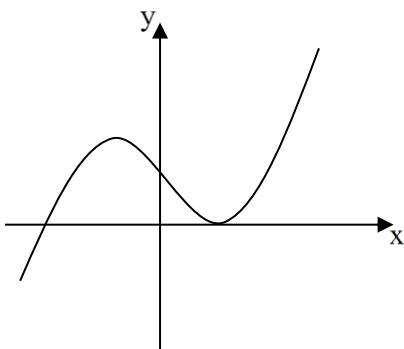


6. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הפונקציה ואת גרף

הנגזרת השנייה אם נתון: $f(0) = 0$.

נמק את שיקוליך בשרטוט.

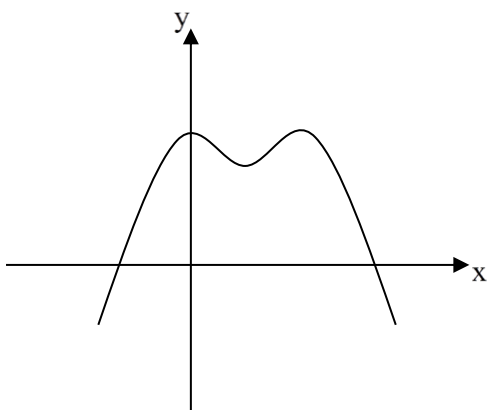


7. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הפונקציה ואת גרף

הנגזרת השנייה אם נתון: $f(0) = 0$.

נמק את שיקוליך בשרטוט.



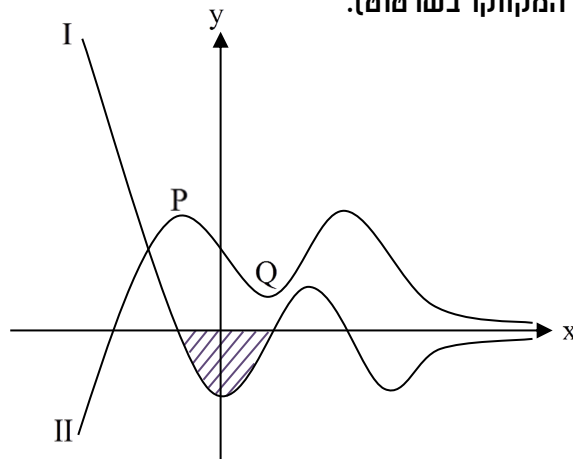
8. בשרטוט נתונים הגרפים של פונקציה ושל נגזרתה.

א. קבע איזה מהגרפים, I או II , שייך לפונקציה ואיזה לנגזרת. נמק.

ב. כמה נקודות פיתול יש לפונקציה? נמק וסמן אותן על השרטוט.

ג. נתון: $P(-2, 4)$, $Q(2, 1)$. מצא את גודלו של השטח הכלוא בין גרף I

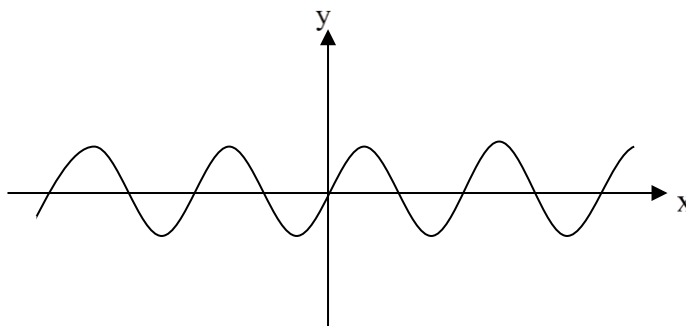
לציר ה- x (השטח המקווקו בשרטוט).



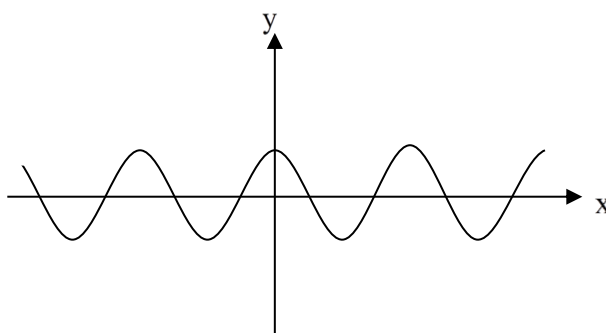
7.8 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות

הפונקציות הטריגונומטריות

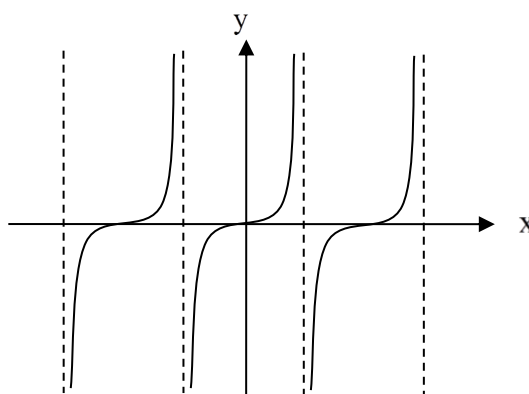
הפונקציה $f(x) = \sin x$:



הפונקציה $f(x) = \cos x$:



הפונקציה $f(x) = \tan x$:



פונקציה זוגית ופונקציה אי-זוגית

פונקציה זוגית מקיימת: $f(-x) = f(x)$. פונ' זוגית סימטרית סביב ציר ה- y .

פונקציה אי-זוגית מקיימת: $f(-x) = -f(x)$. פונ' אי-זוגית סימטרית סביב ראשית הצירים.

נגזרות הפונקציות הטריגונומטריות

$$y = \cos x \longrightarrow y' = -\sin x \quad y = \sin x \longrightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cot x \longrightarrow y' = \frac{1}{-\sin^2 x} \quad y = \tan x \longrightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

אינטגרלים טריגונומטריים

$$\int \cos x dx = \sin x + c \quad \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הקדמה, ישע מקדים
סרטון 2		הכרת הגרפים של הפונקציות הטריגונומטריות
סרטון 3		חוקי הגזירה של פונקציות טריגונומטריות
סרטון 4	תרגיל 1	
סרטון 5	תרגיל 2	
סרטון 6	תרגיל 3	
סרטון 7	תרגיל 4	
סרטון 8	תרגיל 5	
סרטון 9		חישוב שיפוע של פונקציה טריגונומטרית
סרטון 10	תרגיל 6	
סרטון 11	תרגיל 7	
סרטון 12	תרגיל 8	
סרטון 13	תרגיל 9	
סרטון 14	תרגיל 10	
סרטון 15	תרגיל 11	
סרטון 16	תרגיל 11	
סרטון 17	תרגיל 12	
סרטון 18	תרגיל 13	
סרטון 19	תרגיל 14	
סרטון 20	תרגיל 15	
סרטון 21	תרגיל 16	
סרטון 22		אסימפטוטות לפונקציות טריגונומטריות
סרטון 23	תרגיל 17	
סרטון 24	תרגיל 18	
סרטון 25	תרגיל 19	
סרטון 26	תרגיל 20	
סרטון 27	תרגיל 21	
סרטון 28	תרגיל 22	

	22 תרגיל	סרטון 29
הסבר על פונקציה זוגית ופונקציה אי זוגית		סרטון 30
	23 תרגיל	סרטון 31
	24 תרגיל	סרטון 32
	24 תרגיל	סרטון 33
	25 תרגיל	סרטון 34
	25 תרגיל	סרטון 35
אינטגרלים של פונקציות מריגונומטריות		סרטון 36
	26 תרגיל	סרטון 37
	27 תרגיל	סרטון 38
	28 תרגיל	סרטון 39
	29 תרגיל	סרטון 40
	30 תרגיל	סרטון 41
	31 תרגיל	סרטון 42
	32 תרגיל	סרטון 43
	33 תרגיל	סרטון 44
	34 תרגיל	סרטון 45
	35 תרגיל	סרטון 46
	36 תרגיל	סרטון 47
	37 תרגיל	סרטון 48

תרגילים:

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sin x + 3 \cos x + x \quad \text{ב. } f(x) = 2x \sin x + 4 \tan x \quad \text{ג. } f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sin 3x + 2 \cos 5x \quad \text{ב. } f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{aligned} \text{א. } f(x) &= \sin^3 x & \text{ב. } f(x) &= 2 \cos^4 x & \text{ג. } f(x) &= \sin^2 x \\ \text{ד. } f(x) &= \sin^3 2x & \text{ה. } f(x) &= \cos^2 2x & \text{ו. } f(x) &= \tan^2 4x \end{aligned}$$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{\sin 3x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}$$

5. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x \quad \text{ב. } f(x) = \sin^4 2x - \cos^4 2x \quad \text{ג. } f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$$

$$6. \text{ מצא את משוואת המשיק לפונקציה } f(x) = \cos x \text{ בנקודה } A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

$$7. \text{ מצא את משוואת המשיק לפונקציה } f(x) = \sin 2x \text{ בנקודה שבה } x = \frac{\pi}{2}.$$

$$8. \text{ מצא את משוואת המשיק לפונקציה } f(x) = \tan 3x \text{ בנקודה שבה } x = \frac{\pi}{9}.$$

$$9. \text{ מצא את משוואות המשיקים לפונקציה } f(x) = 4 \sin^2 x \text{ בנקודות החיתוך של הפונקציה}$$

$$\text{עם הישר } y = 1 \text{ בתחום } [0, \pi].$$

$$10. \text{ שיפוע המשיק לפונקציה } f(x) = \sqrt{\sin x + a} \text{ בנקודה שבה } y = 1 \text{ בתחום } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ הוא } \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{מצא את ערך הפרמטר } a.$$

11. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:

$$\text{א. } f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x} \quad [0, 2\pi] \quad \text{ב. } f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x} \quad [-\pi, \pi]$$

$$1. \quad f(x) = \tan x \quad [0, 2\pi]$$

12. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \sin x + \cos x \quad [0, 2\pi]$$

13. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x \quad [0, 2\pi]$$

14. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1} \quad [0, 2\pi]$$

15. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x \quad \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$$

16. לפונקציה $f(x) = a \sin x + b \sin^3 x$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$. מצא את

ערכי הפרמטרים a ו- b .

17. מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \frac{1}{\sin 3x} \quad [0, \pi]$$

18. מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} \quad [0, \pi]$$

19. מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \tan x \quad [-\pi, \pi]$$

20. מצא את נקודות הפיתול ותחומי הקעירות של הפונקציה הבאה בתחום הנתון:

$$f(x) = \sin^2 x - 2 \sin x \quad [0, 2\pi]$$

21. נתונה הפונקציה $f(x) = x + 2 \cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$. חקור את הפונקציה על פי

הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

22. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0, \pi]$. חקור את הפונקציה על פי

הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרטוט.

23. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$

- א. מצא בתחום $[0, \pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.

ב. הוכח שהפונקציה זוגית.

ג. שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

24. נתונה הפונקציה $f(x) = 4x - 3 \tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$. חקור את הפונקציה על פי

הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

25. נתונה הפונקציה $f(x) = \tan(x^2 - 4x)$ בתחום $[0, 4]$. חקור את הפונקציה על פי

הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. שרטוט.

26. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int \left(\sin x - 3\cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx = \quad \text{ב. } \int \left(\cos 3x - 2\sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx =$$

$$\text{ג. } \int \left(\sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx =$$

27. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int (2 \sin x \cos x) dx = \quad \text{ב. } \int (\sin 3x \cos 3x) dx = \quad \text{ג. } \int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx =$$

$$\text{ד. } \int (\sin^2 x) dx =$$

28. חשב את האינטגרלים הבאים:

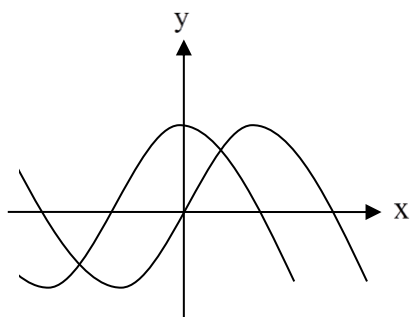
$$\text{א. } \int \left(\frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \right) dx = \quad \text{ב. } \int \left(\frac{\sin x}{\cos^2 x} \right) dx = \quad \text{ג. } \int (\cos x \sin^2 x) dx =$$

29. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \cos x + 4 \sin 2x$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{2}\right)$.

30. נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = -4 \sin 2x - \cos x$.

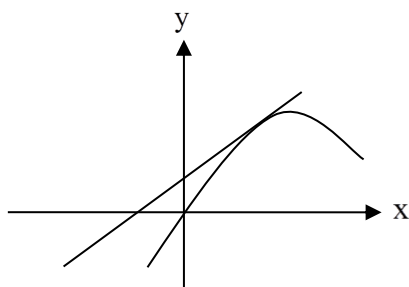
שיפוע הפונקציה בנקודה (π, π) הוא 3. מצא את הפונקציה.



31. נתונות הפונקציות: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$

חשב את גודל השטח הכלוא בין

הפונקציות וציר ה-y ברביע הראשון.



32. נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2 \sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום

הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x ברביעים

הראשון והשני.

33. נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cos x + b \sin x$. הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה

שבה $x = \frac{\pi}{4}$ והיא חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה

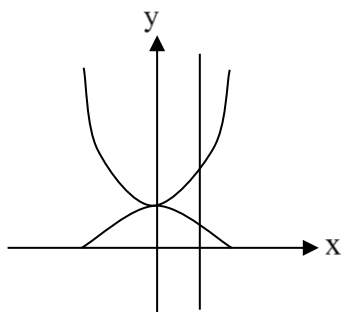
בתחום $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2} - 2$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

34. נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $g(x) = \sqrt{\cos x}$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר $x = \frac{\pi}{6}$

מסתובב סביב ציר ה- x .

חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

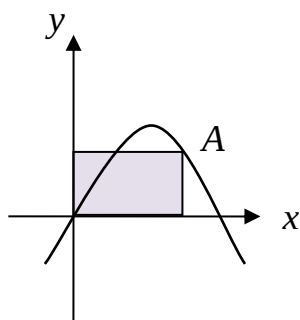


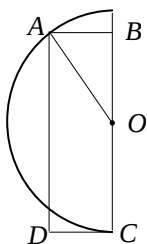
35. נתונה הפונקציה $f(x) = \sin 2x$. מנקודה A שעל הפונקציה

בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר

מלבן כמתואר בשרטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A

כדי שהיקף המלבן יהיה מקסימלי?





36. נתון חצי מעגל שמרכזו O ורדיוסו R ונתון מלבן $ABCD$.

שקודקוד A שלו מונח על היקף המעגל, הצלע BC שלו מונחת על קוטר המעגל והצלע CD שלו משיקה למעגל. מצא מה צריך להיות גודל הזווית $\angle AOB$ כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי.

37. נתונה הפונקציה: $f(x) = b \sin x - \sin x + \frac{1}{b-1} \cos x$ ($1 < b$)

הפונקציה חיובית בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. מצא עבור איזה ערך של b השטח הכלוא בין

הפונקציה,

הישר $x = \frac{\pi}{2}$ והצירים מינימלי.

פתרונות:

(הערה: הגרפים לשאלות בחקירות פונקציה מופיעים בסוף הפתרונות באופן מרוכז)

1. א. $\cos x - 3 \sin x + 1$ ב. $2 \sin x + 2x \cos x + \frac{4}{\cos^2 x}$ ג. $\frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$
2. א. $3 \cos 3x - 10 \sin 5x$ ב. $\frac{2}{1 + \sin 2x}$ ג. $3 \sin^2 x \cdot \cos x$ ד. $-8 \cos^3 x \sin x$
3. א. $\frac{3 \cos 3x}{2 \sqrt{\sin 3x}}$ ב. $\frac{8 \tan 4x}{\cos^2 4x}$ ג. $-2 \sin 4x$ ד. $6 \sin^2 2x \cos 2x$
4. א. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ ב. $-\cos 4x$ ג. $4 \sin 4x$ ד. $2 \sin 2x$
5. א. $\frac{\cos^2 2x + 1}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}$ ב. $y = 12x - \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$ ג. $y = -2x + \pi$ ד. $y = 2\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{3} + 1$
6. א. $0 \leq x \leq 2\pi$ ב. $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ ג. $-\pi \leq x \leq \pi$ ד. $x \neq \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$
7. א. $\max(0, 1)$ ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ ג. $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$ ד. $\min\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)$
8. א. $\max(2\pi, -\pi)$ ב. $\max\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ ג. $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$ ד. $\max\left(\frac{3\pi}{2}, 2\frac{2}{15}\right)$

$$x=0, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi \quad .18 \quad x=0, x=\frac{\pi}{3}, x=\frac{2\pi}{3}, x=\pi \quad .17 \quad b=-4, a=3 \quad .16$$

$$0 < x < 2\pi \quad .21 \quad \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{\pi}{6}, -\frac{1}{4}\right) \quad .20 \quad x=-\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2} \quad .19$$

$$\min(0,2), \max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right), \min\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right), \max(2\pi, 2\pi + 2) \quad \text{קצה ב.}$$

$$\text{ג. תחומי עלייה: } \frac{5\pi}{6} < x < 2\pi \quad \text{או} \quad 0 < x < \frac{\pi}{6} \quad \text{תחומי ירידה: } \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \quad \text{ד. } (0,2) \quad \text{ה. אין}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{ו. קעירות כלפי מעלה: } \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \quad \text{קעירות כלפי}$$

$$\min\left(\frac{\pi}{4}, 0\right) \quad \text{ב. } x \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{וגם } 0 < x < \pi \quad \text{א. } 0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{או} \quad \frac{3\pi}{2} < x < 2\pi \quad \text{מטה:}$$

$$\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right) \quad \text{ד. } 0 < x < \frac{\pi}{4} \quad \text{תחומי ירידה: } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad \text{וגם } x \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{ג. תחומי עלייה:}$$

$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), (0,0) \quad \text{חיתוך עם הצירים:} \quad \text{א. } x=0, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi \quad \text{ה. אנכית:} \quad .23$$

$$\min(\pi, -2) \quad \text{קצה, } \max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right), \min(0, \frac{1}{4}) \quad \text{קצה. } .24 \quad \text{א. } -\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \quad \text{וגם}$$

$$\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right), \max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right) \quad \text{קצה, } \min\left(\frac{2\pi}{3}, 13.57\right) \quad \text{ב. } x \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{ג. תחומי}$$

$$\text{עלייה: } -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}, \text{ תחומי ירידה: } \frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3} \quad \text{וגם } x \neq \frac{\pi}{2} \quad \text{ד. } (0,0) \quad \text{ה. אנכית: } x = \frac{\pi}{2}$$

$$(0,0) \quad \text{ו. קעירות כלפי מעלה: } \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \quad \text{או} \quad -\frac{\pi}{6} < x < 0, \text{ קעירות כלפי מטה: } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\max(0,0) \quad \text{קצה, } \min(2, -1.16) \quad \text{ב. } x \neq 0.44, x \neq 3.56 \quad \text{וגם } 0 \leq x \leq 4 \quad \text{א. } .25$$

$$\max(4,0) \quad \text{קצה} \quad .26 \quad -\cos x - 3\sin x + 4\tan x + 5x + c \quad \text{א.}$$

$$\frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{4\tan 3x}{3} + c \quad \text{ג. } \cos(\pi - x) + \tan x + x + c \quad \text{א. } -\frac{1}{2}\cos 2x + c \quad .27$$

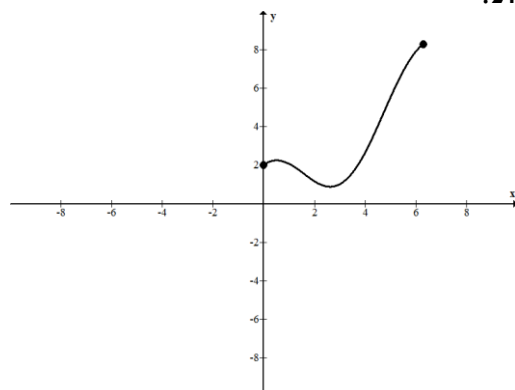
$$-\frac{\cos 6x}{12} + c \quad \text{ג. } -\frac{\sin 2x}{2} + c \quad \text{ד. } \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c \quad \text{א. } 2\sqrt{\sin x} + c \quad .28$$

$$\frac{1}{\cos x} + c \quad \text{ג. } \frac{1}{3}\sin^3 x + c \quad \text{א. } f(x) = \sin x - 2\cos 2x + 2 \quad .29$$

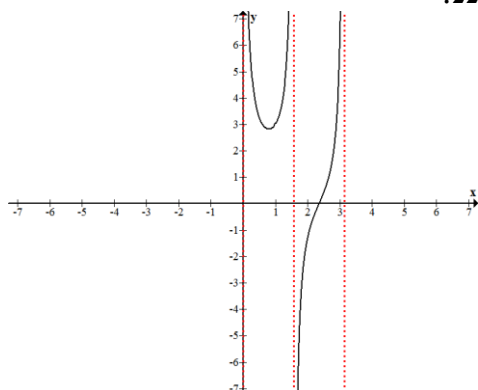
$$f(x) = \sin 2x + \cos x + x + 1 \quad .30 \quad S = \frac{\pi}{4}, 0.41 \quad .31 \quad S = \frac{\pi}{4}, \pi \quad .32 \quad b = -2, a = 2 \quad .33$$

$$V = \frac{\pi}{4}, 0.243 \quad .34 \quad A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad .35 \quad x = 60^\circ \quad .36 \quad b = 2 \quad .37$$

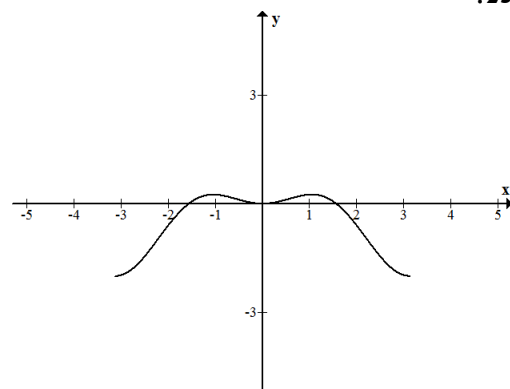
:21



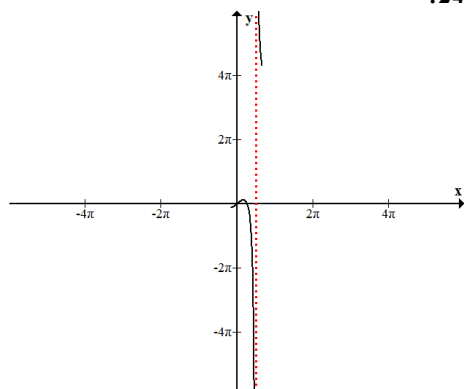
:22



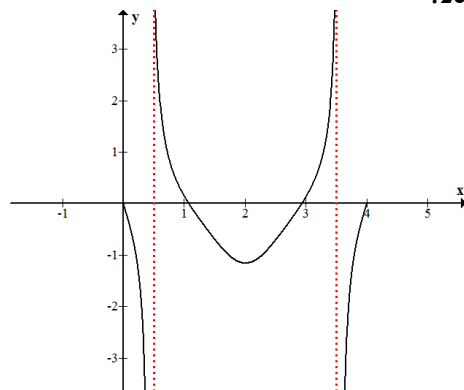
:23



:24



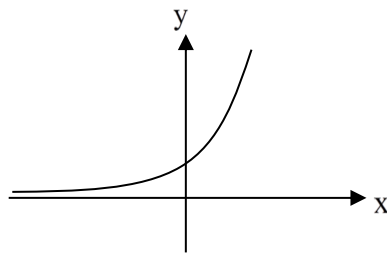
:26



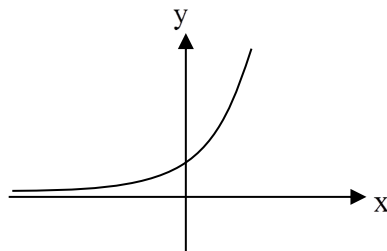
7.9 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות

הפונקציה המעריכית

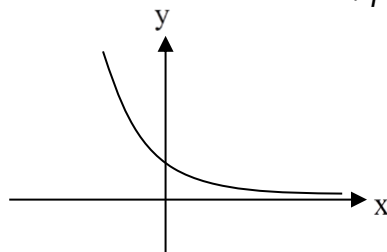
הפונקציה $f(x) = e^x$:



הפונקציה $f(x) = a^x$:



הפונקציה $f(x) = e^{-x}$:



נגזרת הפונקציה המעריכית

$$y = e^x \longrightarrow y' = e^x$$

$$y = a^x \longrightarrow y' = a^x \ln a$$

אינטגרלים

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, ידע מקדים, הכרת הפונקציה המעריכית, חוקי הגזירה של פונקציה מעריכית
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6		שיפוע של פונקציה מעריכית
סרטון 7	תרגיל 5	
סרטון 8	תרגיל 6	
סרטון 9	תרגיל 7	
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11	תרגיל 9	
סרטון 12	תרגיל 10	
סרטון 13	תרגיל 11	
סרטון 14	תרגיל 12	
סרטון 15	תרגיל 13	
סרטון 16	תרגיל 14	
סרטון 17		אסימפטומות של פונקציות מעריכיות
סרטון 18	תרגיל 15	
סרטון 19	תרגיל 16	
סרטון 20	תרגיל 17	
סרטון 21	תרגיל 18	
סרטון 22	תרגיל 19	
סרטון 23	תרגיל 20	
סרטון 24	תרגיל 21	
סרטון 25	תרגיל 22	
סרטון 26	תרגיל 23	
סרטון 27	תרגיל 24	
סרטון 28	תרגיל 25	
סרטון 29	תרגיל 26	
סרטון 30	תרגיל 27	
סרטון 31	תרגיל 27	
סרטון 32	תרגיל 28	
סרטון 33	תרגיל 29	
סרטון 34	תרגיל 30	
סרטון 35	תרגיל 30	
סרטון 36		אינטרגלים של פונקציות מעריכיות
סרטון 37	תרגיל 31	
סרטון 38	תרגיל 32	
סרטון 39	תרגיל 33	
סרטון 40	תרגיל 34	
סרטון 41	תרגיל 35	
סרטון 42	תרגיל 36	
סרטון 43	תרגיל 37	
סרטון 44	תרגיל 38	
סרטון 45	תרגיל 39	

תרגילים:

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 \quad \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex \quad \text{ג. } f(x) = e^{\sin x} \quad \text{ד. } f(x) = 2^{3x}$$

$$\text{ה. } f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x}$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x \cdot e^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x + 1}}$$

5. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $A(1, e)$.

6. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה $x = 0$.

7. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של

הפונקציה עם הישר $y = e$.

8. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ בנקודה $(1, 15)$ הוא $21 \ln 3$. מצא את

ערכי הפרמטרים a ו- b .

9. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x-1} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \quad \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x} - 4e^x + 3}$$

10. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 e^x$

11. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$

12. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{e^{\sqrt{x-2}}}$

13. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 9}{e^x}$

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.5$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

14. נתונה הפונקציה: $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$

לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

15. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + e^x$

16. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$

17. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x + 5}{e^x - 1}$

18. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^x - 5}$

19. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

20. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^{2x} - 5e^x + 6}$

21. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$

22. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^3 - 1}{e^x}$

23. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x-1}{e^{3x}-e}$

24. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = (x-3)e^x$

25. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

26. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+a}{be^x}$

לפונקציה יש נקודת פיתול בנקודה $\left(1, \frac{2}{e}\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודת

הפיתול השנייה של הפונקציה.

27. נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים

הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם ציר ה- y .
ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

28. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרטוט. ז. סמן על גבי השרטוט את ערכי ה- x של נקודות הפיתול.

29. נתונה הפונקציה $f(x) = 2e^{\frac{x}{x^2+1}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרטוט. ז. עבור אילו ערכי m יש למשוואה $f(x) = m$ בדיוק פתרון

אחד?

30. נתונה הפונקציה $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וכלפי מטה. ח. שרטוט.

31. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$א. \int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx = \quad ב. \int (3^x + 5^{2x}) dx = \quad ג. \int 6\sqrt{e^{4x-1}} dx =$$

$$ד. \int (e^x + e^{-x})^2 dx =$$

32. חשב את האינטגרלים הבאים:

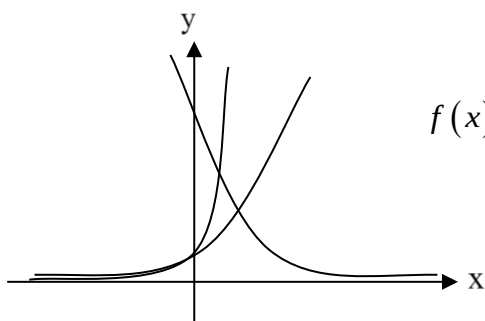
$$א. \int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1} dx = \quad ב. \int \frac{3e^{3x}-5e^{2x}+4e^x-2}{e^x-1} dx =$$

33. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$א. \int \left(\frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}} \right) dx = \quad ב. \int \left(\frac{3-e^x}{(e^x-3x)^2} \right) dx = \quad ג. \int (xe^{x^2}) dx =$$

$$34. \text{ נתונה נגזרת של פונקציה: } f'(x) = 6x^2 e^{x^3} - \frac{1}{x^2}$$

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $\left(-1, \frac{2}{e}\right)$.



35. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{3x}$, $h(x) = 16e^{-x}$

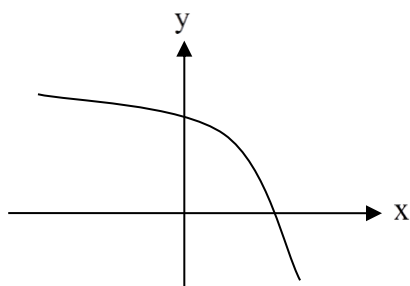
חשב את גודל השטח הכלוא בין שלוש הפונקציות.

$$36. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = 5 - e^x$$

העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$. חשב את גודל

השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .

ניתן להשאיר $e - 1$ בתשובה.



37. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{bx}$ ($0 < b$).

גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק לפונקציה העובר בראשית הצירים וציר ה- y

הוא $\frac{e-2}{4}$. מצא את ערכו של הפרמטר b .

38. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$.

השטח הכלוא בין הפונקציות והישר $x = \ln 2$ מסתובב סביב ציר ה- x .

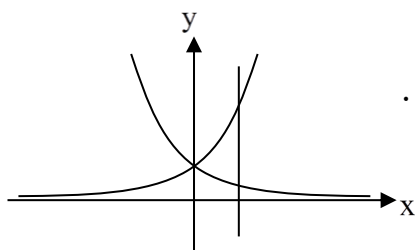
חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

39. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$, $g(x) = e^{-x}$.

מנקודה הנמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ ברביע הראשון הורידו אנך לשני הצירים.

המשך האנך לציר ה- y חותך את הפונקציה $f(x)$ ומנקודת החיתוך יורד אנך נוסף לציר

ה- x כך שנוצר מלבן. הוכח כי שטחו המקסימלי של מלבן כזה הוא $\frac{3}{e}$.



פתרונות:

(הערה: הגרפים לשאלות בחקירות פונקציה מופיעים בסוף הפתרונות של הפרק באופן מרוכז)

1. א. $3e^x + 2e^{2x} - e^2 + 2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$ ג. $\cos xe^{\sin x}$ ד. $3\ln 2 \cdot 2^{3x}$
- ה. $2x\ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$ ו. $(1+x)e^x$ ז. $2xe^{4x}(1+2x)$ ח. $2^x(1+x\ln 2 + \ln 2)$
9. א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ ג. $\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2}$
4. א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$ ג. $\frac{e^{3x}(5e^x+6)}{2\sqrt{(e^x+1)^3}}$ ד. $y = e^x$ ה. $y = 3x+1$
7. א. $y = (e-1)x + e$ ב. $y = (-e^2 + e)x + e^2$ ג. $b = -1, a = 2$ ד. כל x ה. $x \neq 0$ ו. $x \neq \ln 2$ ז. $x \neq \ln 5$ ח. $x \leq 0$ ט. $\ln 3 \leq x$ י. $0 \leq x \neq \frac{2}{5}$
10. א. $\max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right), \min(0, 0)$ ב. $\min(3, e^3)$ ג. $\max\left(3, \frac{1}{e}\right), \min(2, 0)$ ד. קצה
13. א. $b = -12, a = 4$ ב. $\max\left(3\frac{1}{2}, 0.483\right), \min\left(1\frac{1}{2}, 0\right)$ ג. $p = -27, q = 35$ ד. 14
15. אופקית: $y = 0$ ב. אופקית: $y = 0$ ג. אופקית: $y = 0$ ד. אופקית: $y = -5, y = 1$ ה. אנכית: $x = 0$
18. אופקית: $y = -\frac{1}{5}$ ב. אנכית: $x = \ln 5$ ג. אופקית: $y = -1, y = 1$ ד. אופקית: $y = 0$ ה. אופקית: $y = 0$
21. אנכית: $x = \ln 3$ ב. נקודת אי הגדרה: $(\ln 2, -1)$ ג. אופקית: $y = 0$ ד. אנכית: $x = 0$
22. אופקית: $y = 0$ ב. אופקית: $y = 0$ ג. אנכית: $x = \frac{1}{3}$ ד. אופקית: $y = 0$ ה. אנכית: $x = 0$
26. נקודת אי הגדרה: $(0, 0)$ ב. $a = 1, b = 1$
27. א. כל x ב. $\max(0, 3), \min(\ln 3, 1.59)$ ג. תחומי עלייה: $x > \ln 3$ או $x < 0$ ד. תחומי ירידה: $0 < x < \ln 3$ ה. אין. ו. $(\ln 2, 2.16)$ ז. קעירות כלפי מעלה: $x > \ln 2$ ח. קעירות כלפי מטה: $x < \ln 2$ ט. כל x י. $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$ יא. תחומי עלייה: $x < 3$
29. א. כל x ב. $\max(1, 2\sqrt{e})$ ג. $\min\left(-1, \frac{2}{\sqrt{e}}\right)$ ד. $(0, 0)$ ה. $y = 0$ ו. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ ז. תחומי ירידה: $x < -1$ או $x > 1$ ח. $(0, 2)$ ט. אופקית: $y = 2$ י. $x > \frac{1}{2}$ יא. תחומי עלייה: $\min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{4}\right)$ יב. $x \neq 0$ יג. $m = 2, m = 2\sqrt{e}, m = \frac{2}{\sqrt{e}}$ יד. 30
- תחומי ירידה: $0 \neq x < \frac{1}{2}$ ד. אין. ה. אנכית: $x = 0$ ו. נקודת אי הגדרה: $(0, 0)$ ז. אין. ח. קעורה

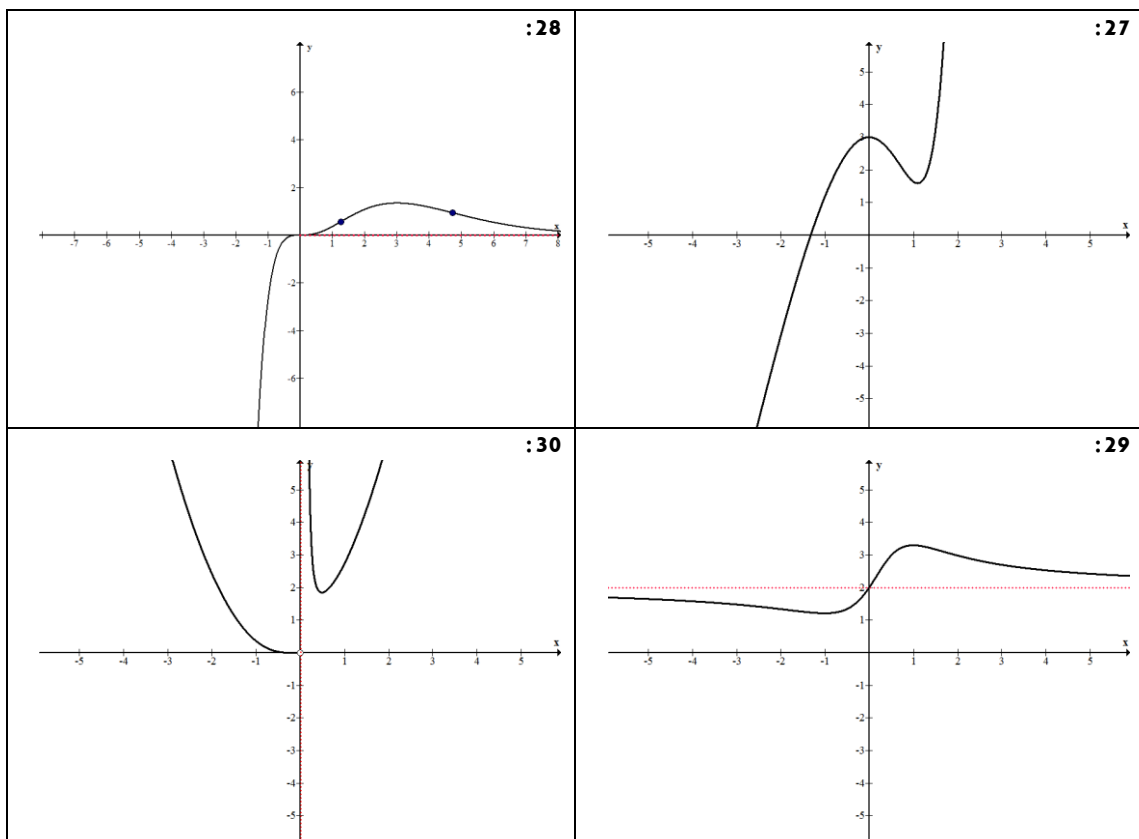
כלפי מעלה לכל $x \neq 0$.31 א. $5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c$ ב. $\frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c$ ג. $3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$

ד. $\frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c$.32 א. $e^x + x + c$ ב. $\frac{3e^{2x}}{2} - 2e^x + 2x + c$

.33 א. $2\sqrt{e^x + 3} + c$ ב. $\frac{1}{e^x - 3x}$ ג. $\frac{1}{2}e^{x^2} + c$ ד. $f(x) = 2e^{\frac{1}{x^3}} + \frac{1}{x} + c$.34

.35 $S = \text{ש"ח} 3\frac{1}{3}$.36 $S = \text{ש"ח} 0.192$.37 $b = 2$.38 $V = \text{מ"ח} 1\frac{1}{8}\pi$

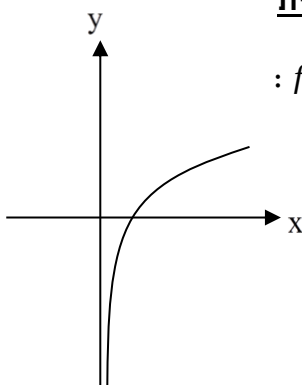
גרפים:



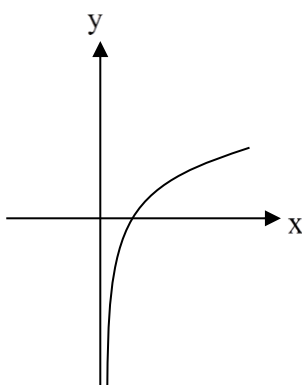
7.10 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות

הפונקציה הלוגריתמית

הפונקציה $f(x) = \ln x$:



הפונקציה $f(x) = \log_a x$:



נגזרת הפונקציה הלוגריתמית

$$y = \ln x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a x \quad \longrightarrow \quad y' = \frac{1}{x \ln a}$$

אינטגרלים

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, ידע מקדים, הכרת הפונקציה הלוגריתמית, חוקי הגזירה של פונקציה לוגריתמית
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5		שיפוע הפונקציה הלוגריתמית והמשיק לה
סרטון 6	תרגיל 4	
סרטון 7	תרגיל 5	
סרטון 8	תרגיל 6	
סרטון 9	תרגיל 7	
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11	תרגיל 9	
סרטון 12	תרגיל 10	
סרטון 13		אסימפטוטות לפונקציה לוגריתמית
סרטון 14	תרגיל 11	
סרטון 15	תרגיל 12	
סרטון 16	תרגיל 13	
סרטון 17	תרגיל 14	
סרטון 18	תרגיל 15	
סרטון 19	תרגיל 16	
סרטון 20	תרגיל 17	
סרטון 21	תרגיל 18	
סרטון 22	תרגיל 19	
סרטון 23	תרגיל 20	
סרטון 24	תרגיל 20	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 25	תרגיל 21	
סרטון 26		אינטגרלים לוגריתמיים
סרטון 27	תרגיל 22	
סרטון 28	תרגיל 23	
סרטון 29	תרגיל 24	
סרטון 30	תרגיל 25	
סרטון 31	תרגיל 26	
סרטון 32	תרגיל 27	
סרטון 33	תרגיל 28	
סרטון 34	תרגיל 29	
סרטון 35	תרגיל 30	
סרטון 36	תרגיל 31	

תרגילים:

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = 3\ln x + 4\ln(x+2) - \ln(5x-1) & \text{ב. } f(x) = \ln(x^2 - 3x) \\ \text{ג. } f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) & \text{ד. } f(x) = \ln(e^x + 1) \\ \text{ה. } f(x) = \ln(\cos x) & \text{ו. } f(x) = \log_2(x) + 5\log_3(2x-1) \end{array}$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = x \ln x & \text{ב. } f(x) = (3x+1)^2 \cdot \ln x \\ \text{ג. } f(x) = \frac{\ln x}{x} & \text{ד. } f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2} \\ \text{ה. } f(x) = \sqrt{\ln x + x} \end{array}$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = \ln^3 x & \text{ב. } f(x) = 3\ln^2 x \\ \text{ג. } f(x) = x^2 \ln^2 x & \text{ד. } f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2} \end{array}$$

4. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e, 1)$.

5. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

6. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א. } f(x) = \ln x & \text{ב. } f(x) = \ln(x^2) & \text{ג. } f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20) \\ \text{ד. } f(x) = \ln(e^x - 4) & \text{ה. } f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1} & \text{ו. } f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2\ln x - 3} \\ \text{ז. } f(x) = \sqrt{\ln x - 1} \end{array}$$

7. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$

8. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2\ln x - 1}}{x}$

9. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$

10. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln^2 x + b \ln x}{(\ln x + 1)^2}$. הנקודה $\left(\sqrt[3]{e}, -\frac{1}{8}\right)$ היא נקודת קיצון

של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

11. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(x-3)$

12. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{1}{\ln x - 1}$

13. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{2\ln x - 1}{\ln x + 1}$

14. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln^2 x - 4}$

15. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

16. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{\ln^2 x + 1}$

17. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה הבאה: $f(x) = x \ln x + 2$

18. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. מצא את נקודת הפיתול של הפונקציה.

19. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
- ה. אסימפטוטות (אם ישנן). ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרטוט.

20. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות (אם ישנן). ו. נקודות פיתול. ז. תחומי קעירות כלפי מעלה וקעירות כלפי מטה. ח. שרמט. ט. עבור אילו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות?

21. נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. אסימפטוטות. ו. שרמט.

22. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$א. \int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx = ב. \int \frac{x^2 + 3x - 4}{x} dx = ג. \int \frac{x+3}{x^2-9} dx =$$

23. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$א. \int \frac{x^2 + 3x + 5}{x+1} dx = ב. \int \frac{x^3 - x^2 + 5x - 6}{x-2} dx = ג. \int \frac{x^4 + 3}{x+1} dx =$$

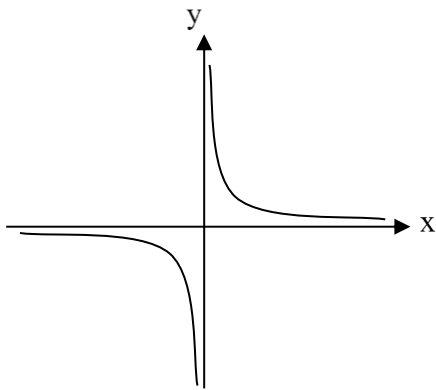
24. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$א. \int \frac{2x}{x^2-3} dx = ב. \int \frac{x-1}{x^2-2x} dx = ג. \int \frac{e^x}{e^x+5} dx = ד. \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx =$$

$$ה. \int \frac{\cos x}{\sin x} dx =$$

25. נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(1, -2)$ וששיפועה בנקודה זו הוא 3.



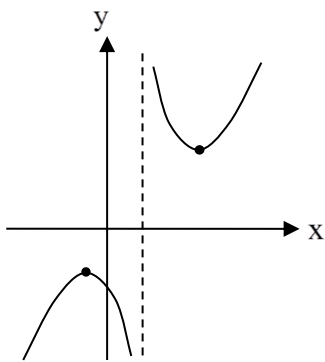
26. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x}$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישרים $x = -1$

ו- $x = -4$ וציר ה- x .

ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.



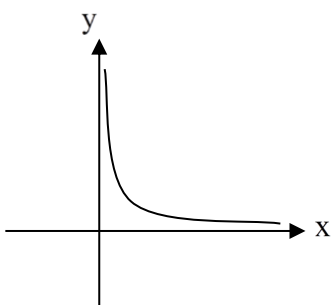
27. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$

ואנך לציר ה- x העובר בנקודת המינימום של הפונקציה.

ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.



28. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = 1$

ו- $x = 3$ וציר ה- x מסתובב סביב ציר

ה- x . מצא את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

ניתן להשאיר $\ln$ בתשובה.

29. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} + 1}}$

השטח הכלוא בין הפונקציה, הצירים והישר $x = \ln \sqrt{3}$ מסתובב סביב

ציר ה- x . חשב את נפח גוף הסיבוב שנוצר.

30. מצא על הפונקציה: $f(x) = \sqrt{2\ln x} + 1$ את הנקודה הקרובה ביותר לנקודה $(2.5, 1)$.

31. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

השטח הכלוא בין הפונקציה, הישרים $x = a$ ו- $x = a + 3$ ($0 < a$) וציר

ה- x מסתובב סביב ציר ה- x .

חשב את נפח גוף הסיבוב המינימלי שנוצר באופן זה.

פתרונות:

(הערה: הגרפים לשאלות בחקירות פונקציה מופיעים בסוף הפתרונות של הפרק באופן מרוכז)

$$א. f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \quad ב. f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \quad ג. f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$ד. f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad ה. f'(x) = -\tan x \quad ו. f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$$

$$2. א. f'(x) = \ln x + 1 \quad ב. f'(x) = (3x+1)(6 \ln x + \frac{3x+1}{x}) \quad ג. f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$ד. f'(x) = \frac{4}{x(\ln x + 2)^2} \quad ה. f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x + x}} \quad ו. f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x}$$

$$ב. f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \quad ג. f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1) \quad ד. f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \quad ה. y = \frac{1}{e} x$$

$$5. a = 2, b = -2 \quad 6. א. x > 0 \quad ב. x \neq 0 \quad ג. 10 < x \quad ד. x < -2 \quad 7. x > \ln 4$$

$$ה. 0 < x \neq e \quad ו. 0 < x \quad ז. x \neq e^3, \frac{1}{e} \quad ח. e < x \quad ט. \min(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e})$$

$$8. \min(\sqrt{e}, 0) \text{ קצה, } \max(e, \frac{1}{e}) \quad 9. \min(4, -1) \quad 10. a = 1, b = -1 \quad 11. x = 3$$

$$12. נקודת אי הגדרה $(0, 0)$, $y = 0$, $x = e$ \quad 13. נקודת אי הגדרה $(0, 2)$, $y = 2$, $x = \frac{1}{e}$$$

$$14. נקודת אי הגדרה $(e^2, \frac{1}{4})$, $y = 0$, $x = \frac{1}{e^2}$ \quad 15. $y = 0$, $x = 0$ \quad 16. נקודת אי$$

$$\text{הגדרה } (0, 0) \quad 17. \text{ נקודת אי הגדרה } (0, 2) \quad 18. (\sqrt{e^3}, \frac{3}{2\sqrt{e^3}})$$

19. א. $0 < x$. ב. $\max(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}), \min(1, 0)$. ג. עליה: $1 < x$ או $0 < x < \frac{1}{e^2}$.

ירידה: $1 < x < \frac{1}{e^2}$. ד. $(1, 0)$. ה. נקודת אי הגדרה $(0, 0)$. ו. $(\frac{1}{e}, \frac{2}{e})$.

ז. קעירות כלפי מעלה: $\frac{1}{e} < x$, קעירות כלפי מטה: $0 < x < \frac{1}{e}$. 20. א. $0 < x \neq e$.

ב. $\min(e^2, e^2)$. ג. עליה: $e^2 < x$, ירידה: $0 < x < e^2$ וגם $x \neq e$. ד. אין.

ה. נקודת אי הגדרה $(0, 0)$, $x = e$. ו. $(e^3, 0)$. ז. $\cup : e < x < e^3$, $\cap : e^3 < x$ או

$0 < x < e$. ט. $k > e^2$. 21. א. $0 < x$. ב. $\min(4, -1)$. ג. עליה: $4 < x$, ירידה: $0 < x < 4$.

ד. $(1, 0)$, $(16, 0)$. ה. $x = 0$. 22. א. $3 \ln |x| + 2 \ln |x+1| - \frac{4 \ln |3x-1|}{3} + c$.

ב. $\frac{x^2}{2} + 3x - 4 \ln |x| + c$. ג. $\ln |x-3| + c$. 23. א. $\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln |x+1| + c$.

ב. $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 7x + 8 \ln |x-2| + c$. ג. $\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + 4 \ln |x+1| + c$.

24. א. $\ln |x^2 - 3| + c$. ב. $\frac{1}{2} \ln |x^2 - 2x| + c$. ג. $\ln |e^x + 5| + c$. ד. $\ln |e^x + e^{-x}| + c$.

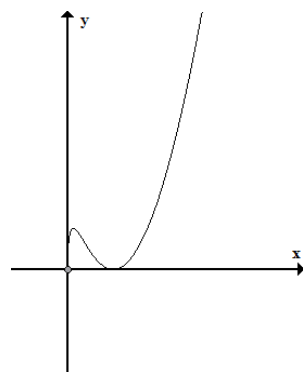
ה. $\ln |\sin x| + c$. 25. $f(x) = x^3 + \ln |x| - x - 2$. 26. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \ln 4$.

27. $S = \sum_{n=1}^{\infty} 4 \ln 2 - 2$. 28. $V = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \ln 3$. 29. $V = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \ln 2$. 30. $(2, \sqrt{2 \ln 2} + 1)$. 31.

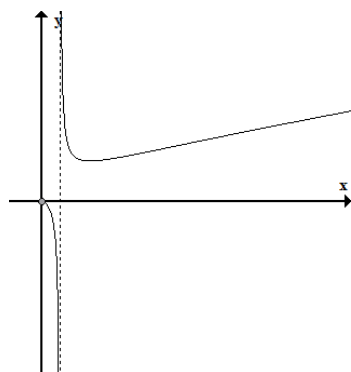
$V = \sum_{n=1}^{\infty} \pi (19 \frac{1}{2} + 4 \ln 4)$.

גרפים:

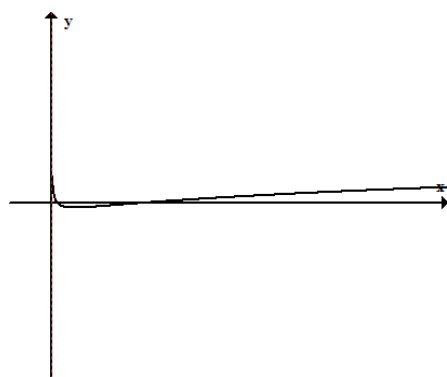
.19



.20



.21



פרק 8 - הסתברות קלאסית

ההסתברות להתרחשות מאורע A :

$$P(A) = \frac{\text{מספר האפשרויות הרצוי}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) : \text{המאורע המשלים}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) : \text{חיתוך ואיחוד מאורעות}$$

מאורעות זרים: מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) , P(A \cap B) = 0 : \text{עבור מאורעות זרים מתקיים}$$

מאורעות בלתי תלויים: מאורעות בלתי תלויים הם מאורעות שקיום האחד מהם לא משפיע

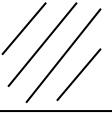
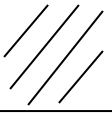
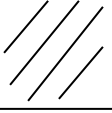
על ההסתברות לקיומו של השני.

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) : \text{עבור מאורעות בלתי תלויים מתקיים}$$

אם מתקיים: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ המאורעות תלויים.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} : \text{הסתברות מותנית}$$

טבלת הסתברויות

	$\bar{A}$	A	
$P(B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	B
$P(\bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$\bar{B}$
1	$P(\bar{A})$	$P(A)$	

$$P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} : \text{התפלגות בינומית}$$

לפניך מבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, מהו מאורע, הסתברות של מאורע
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3		המאורע המשלים
סרטון 4	תרגיל 2	
סרטון 5	תרגיל 3	
סרטון 6		חיתוך ואיחוד מאורעות
סרטון 7		מאורעות זרים
סרטון 8		מאורעות בלתי תלויים
סרטון 9	תרגיל 4	
סרטון 10	תרגיל 5	
סרטון 11	תרגיל 6	
סרטון 12	תרגיל 7	
סרטון 13	תרגיל 8	כולל הסבר על בניית עץ הסתברויות
סרטון 14	תרגיל 9	
סרטון 15	תרגיל 10	
סרטון 16	תרגיל 11	
סרטון 17	תרגיל 12	
סרטון 18		הסתברות מותנית
סרטון 19	תרגיל 13	
סרטון 20	תרגיל 14	
סרטון 21	תרגיל 15	
סרטון 22	תרגיל 16	
סרטון 23	תרגיל 17	
סרטון 24	תרגיל 17	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 25	תרגיל 18	
סרטון 26	תרגיל 19	
סרטון 27		מבלת הסתברויות
סרטון 28	תרגיל 20	
סרטון 29	תרגיל 21	
סרטון 30	תרגיל 22	
סרטון 31	תרגיל 23	
סרטון 32	תרגיל 24	
סרטון 33	תרגיל 25	
סרטון 34	תרגיל 26 א'	
סרטון 35	תרגיל 26 ב'	
סרטון 36		התפלגות בינומית א'
סרטון 37		התפלגות בינומית ב'
סרטון 38	תרגיל 27	
סרטון 39	תרגיל 28	
סרטון 40	תרגיל 29	
סרטון 41	תרגיל 30	
סרטון 42	תרגיל 31	
סרטון 43	תרגיל 32	
סרטון 44	תרגיל 33	
סרטון 45	תרגיל 34	
סרטון 46	תרגיל 35	
סרטון 47	תרגיל 36	
סרטון 48	תרגיל 37	
סרטון 49	תרגיל 38	

תרגילים:

1. בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים. מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?
2. בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים. מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?
3. מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?
4. עבור שני מאורעות, A ו- B נתון: $P(A) = 0.6$, $P(\bar{B}) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.4$. מצא את $P(A \cup B)$.
5. עבור שני מאורעות, A ו- B נתון: $P(\bar{A}) = 0.2$, $P(\bar{B}) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.95$. מצא את $P(A \cap B)$.
6. עבור שני מאורעות, A ו- B נתון: $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.65$. קבע האם המאורעות:
א. זרים.
ב. תלויים.
7. נתון כי שני מאורעות, A ו- B בלתי תלויים. בנוסף נתון: $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.4$. מצא את $P(A \cup B)$.
8. בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות שעשוי הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות שעשוי הכדורים באותו צבע?
ג. מה ההסתברות שעשוי הכדורים אינם באותו צבע?
9. בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.
אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות שעשוי הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות שעשוי הכדורים באותו צבע?
ג. מה ההסתברות שעשוי הכדורים אינם באותו צבע?

10. בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (ללא החזרה). מה

ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?

11. נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים

ושלושה לבנים. לואיזה ממילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.

מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

12. ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4

שחורות. יואב מוציא גולה מכיסו הימני. אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי. אחר כך מוציא גולה מכיסו השמאלי.

מה ההסתברות ששתי הגולות שהוציא באותו צבע?

13. בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים.

אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

14. בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים.

אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.

א. מה ההסתברות ששני הכדורים כחולים?

ב. מה ההסתברות ששני הכדורים באותו צבע?

ג. ידוע ששני הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות ששניהם כחולים?

15. בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (ללא החזרה).

ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים.

מה ההסתברות שכולם גברים?

16. נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים

ושלושה לבנים. לואיזה ממילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.

א. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?

ב. ידוע שללואיזה לא יצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהמלח המטבע יצא "עץ"?

17. במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2. ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם שיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪. מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?
18. בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים. הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (ללא החזרה) הוא $\frac{5}{14}$. כמה כדורים בכד?
19. ההסתברות של צלף לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא p והיא גדולה מההסתברות שלו להחמיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע בירייה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחמיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק בירייה אחת היא 0.38. א. מצא את p .
- ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?
20. 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים. נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים. א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי? ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן? ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת? ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?
21. 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט. 80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות. נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות. א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה? ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה? ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט? ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?
22. 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה. 75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה. א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות? ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך? ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?

23. בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. מבין בעלי רישיון הנהיגה 30% הם גברים.

60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה.

בחרו באקראי שתי נשים מהעיר. מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?

24. 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור

צבעים. אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים.

אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים.

מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

25. בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה

בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז

הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים.

בחרים באקראי חתול מהסניף. מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?

26. בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40%

מתלמידי מגמות אלה הם בנים. הבנים מהווים $\frac{2}{5}$ מתלמידי הפיזיקה, $\frac{5}{12}$ מתלמידי הכימיה

ו- $\frac{1}{3}$ מתלמידי המחשבים. $\frac{1}{4}$ מהבנים הם תלמידי פיזיקה.

א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה לבין מין התלמיד?

ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?

27. אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?

28. מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?

29. הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשו למבחן התיאוריה.

מה ההסתברות שבדיוק שישנה מהם יעברו?

30. בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו

לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים שהוציא:

א. בדיוק ארבעה יהיו כחולים? ד. הרוב יהיו כחולים?

ב. חמישה יהיו כחולים? ה. לפחות אחד יהיה כחול?

ג. לפחות ארבעה יהיו כחולים? ו. הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?

31. בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים. מה ההסתברות שכולם כחולים?
32. יערה מצליחה לקלוע לסל בשלושה מכל ארבעה ניסיונות. כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל. ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל. מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?
33. בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה. ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027. מה ההסתברות שרובם מעשנים?
34. בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיהן מהן מעשנות קטנה פי 4 מההסתברות ששתיהן מהן לא מעשנות. מה ההסתברות שכולן מעשנות?
35. בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה). הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי $3\frac{3}{8}$ מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.
36. בחדר x גברים ו- $3x$ נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר. ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6. א. מצא את גודלו של x . ב. חוזרים על התהליך 4 פעמים. מה הסיכוי שבשלוש מתוך 4 הפעמים ייצאו מהחדר שתי נשים?
37. במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש n תשובות מהן רק אחת נכונה. ישנו סיכוי של 50% שעשי יידע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן. אם שי לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש. ההסתברות שעשי יקבל במבחן 60 גדולה פי $1\frac{1}{3}$ מההסתברות שיקבל 80. מצא את ערכו של n .
38. על מנת להתקבל לקורס מיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש. 40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו. מאלה שלא התקבלו לקורס מיס לא התקבלו בגלל הריאיון בלבד. 3 חברים ניסו להתקבל לקורס מיס. ידוע שרובם התקבלו. מה ההסתברות שכולם התקבלו?

פתרונות:

1. $\frac{3}{10}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. $P(A \cup B) = 0.9$ 5. $P(A \cap B) = 0.35$ 6. א. לא זרים.
- ב. תלויים. 7. $P(A \cup B) = 0.85$ 8. א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{7}{15}$ 9. א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{19}{50}$
- ג. $\frac{31}{50}$ 10. $\frac{17}{42}$ 11. $\frac{8}{15}$ 12. $\frac{77}{144}$ 13. א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{1}{8}$ 14. א. $\frac{9}{100}$
- ב. $\frac{38}{100}$ ג. $\frac{9}{38}$ 15. $\frac{2}{17}$ 16. א. $\frac{8}{15}$ ב. $\frac{15}{16}$ 17. $\frac{1}{4}$ 18. 8 כדורים.
19. א. $p = 0.6$ ב. $\frac{21}{40}$ 20. א. 15% ב. 0.85 ג. 0.5 ד. כן. 21. א. 0.52
- ב. 0.2 ג. 0.35 ד. בלתי תלויים. 22. א. 0.1 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$ 23. $\frac{1}{225}$
24. 93.5% 25. $\frac{1}{3}$ 26. א. בלתי תלויים. ב. 12.5% 27. 0.264 28. 0.023
29. 0.2001 30. א. 0.259 ב. 0.078 ג. 0.337 ד. 0.683 ה. 0.98976
- ו. 0.023 31. 0.114 32. 0.214 33. 0.216 34. 0.0787 35. 4 לבנים, 6
- שחורים. 36. א. $x = 4$ ב. 0.299 37. $n = 5$ 38. $\frac{5}{90}$

פרק 9 – בעיות מילוליות
אחוזים: אחוז אחד הוא מאית השלם

בעיות תנועה: מהירות $\times$ זמן = דרך

הערה: אם לא צוין אחרת, המהירויות בכל שאלה קבועות.

בעיות הספק: הספק $\times$ זמן = עבודה

הערה: אם לא צוין אחרת, ההספקים בכל שאלה קבועים.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	תזכורת על אחוזים
סרטון 2	תרגיל 2	
סרטון 3	תרגיל 3	
סרטון 4	תרגיל 4	
סרטון 5	תרגיל 5	
סרטון 6	תרגיל 6	בעיות תנועה
סרטון 7	תרגיל 7	דרך א'
סרטון 8	תרגיל 7	דרך ב'
סרטון 9	תרגיל 8	
סרטון 10	תרגיל 9	
סרטון 11	תרגיל 10	
סרטון 12	תרגיל 11	
סרטון 13	תרגיל 12	
סרטון 14	תרגיל 13	
סרטון 15	תרגיל 14	
סרטון 16	תרגיל 15	
סרטון 17	תרגיל 16	
סרטון 18	תרגיל 17	
סרטון 19	תרגיל 18	
סרטון 20	תרגיל 19	
סרטון 21	תרגיל 20 א'	
סרטון 22	תרגיל 20 ב'	
סרטון 23	תרגיל 21	בעיות הספק
סרטון 24	תרגיל 22	
סרטון 25	תרגיל 23	
סרטון 26	תרגיל 24	
סרטון 27	תרגיל 25	
סרטון 28	תרגיל 26	
סרטון 29	תרגיל 27	
סרטון 30	תרגיל 28	
סרטון 31	תרגיל 29 א'	
סרטון 32	תרגיל 29 ב'	

תרגילים:

1. א. כמה הם 20% מ-300?
ב. כמה הם 120% מ-300?
ג. מהו המספר הגדול מ-300 ב-20%?
2. א. חולצה עלתה 240 ₪ והתייקרה ב-30%. מה מחירה כעת?
ב. נעליים עלו 450 ₪ והוזלו ב-40%. מה מחירם כעת?
3. מכונית נסעה במהירות 80 קמ"ש ואז הורידה את מהירותה ב-20%. מה מהירותה כעת?
4. אופנוע נסע במהירות x והעלה את מהירותו ב-30%. במא באמצעות x את מהירותו כעת.
5. צינור מילא בריכה בקצב של x ליטר בשעה. לאחר מכן ירד הספק המילוי שלו ב-20% ולבסוף עלה הספק המילוי שלו ב-30%. במא באמצעות x את הספק המילוי שלו כעת.
6. מכונית נסעה במהירות מסוימת במשך שעתיים. אחר כך העלתה את מהירותה ב-25% ונסעה עוד שעה וחצי. בסך הכול עברה המכונית 310 ק"מ.
מה הייתה מהירותה ההתחלתית של המכונית?
7. רוכב אופניים יצא בשעה 06:00 לרכיבה במהירות 24 קמ"ש. בשעה 07:00 יצא מאותו מקום רוכב אופנוע באותו כיוון ובמהירות של 40 קמ"ש.
באיזו שעה ובאיזה מרחק מנקודת היציאה ישיג רוכב האופנוע את רוכב האופניים?
8. המרחק בין ת"א לנצרת הוא 103 ק"מ. בשעה 08:00 יצאה מכונית מנצרת לת"א במהירות 90 קמ"ש. בשעה 08:20 יצאה משאית מת"א לנצרת במהירות 56 קמ"ש. באיזו שעה ייפגשו המכונית והמשאית?
9. רוכב אופנוע יצא מביתו מזרחה במהירות מסוימת ונסע במשך חצי שעה. לאחר מכן, פנה צפונה, הגדיל את מהירותו ב-20% ונסע כך שעה נוספת. לאחר שעה זו פנה חזרה לכיוון ביתו, העלה את מהירותו ל-65 קמ"ש ונסע (בקו ישר) עד שהגיע חזרה לביתו.
א. מצא את מהירותו של רוכב האופנוע ביציאה מביתו אם ידוע שעבר בסך הכול 150 ק"מ.
ב. מה הייתה מהירותו הממוצעת של רוכב האופנוע (בכל חלקי הדרך)?
10. משאית נסעה מדימונה לאילת, מרחק של 200 ק"מ. 50 דקות אחריה יצאה מכונית מדימונה לאילת במהירות הגבוהה ב-30 קמ"ש והגיעה לאילת 40 דקות לפני המשאית. מצא את מהירות המכונית.
11. המרחק בין ת"א לקריית שמונה הוא 180 ק"מ. שני רוכבי אופנוע יצאו בו זמנית, האחד מת"א לקריית שמונה והשני מקריית שמונה לת"א. כעבור 45 דקות הרוכבים עדיין לא נפגשו והמרחק ביניהם היה 52.5 ק"מ. רוכב האופנוע שיצא מת"א הגיע ליעדו 15 דקות לפני שהרוכב השני הגיע ליעדו. מצא את מהירויות רוכבי האופנוע.

12. רכבת נוסעת בקו ת"א – ב"ש במשך שעה ורבע. יום אחד, לאחר חצי שעת נסיעה, הייתה תקלה ברכבת והיא נאלצה לעצור ל-10 דקות עד שהתקלה תוקנה. על מנת לנסות ולהגיע ליעדה בזמן העלתה את מהירותה ב-10 קמ"ש בהמשך הדרך והגיעה ליעדה באיחור קל של 5 דקות בלבד. מצא את מהירות הרכבת.

13. אדם הולך ברגל מביתו למקום העבודה שלו במהירות מסוימת. יום אחד יצא מביתו מאוחר מאוד ולכן נאלץ להגביר את מהירות ההליכה שלו ב-3 קמ"ש. הוא הגיע לעבודה בזמן והדרך ארכה מחצית מהזמן שבדרך כלל היא אורכת. מצא את מהירות ההליכה של האדם (בשגרה).

14. שני הולכי רגל הולכים זה לקראת זה, האחד מנקודה A לנקודה B והשני מנקודה B לנקודה A. הם נפגשים כעבור חצי שעה וממשיכים ליעדם. הולך הרגל הראשון הגיע לנקודה B 25 דקות לפני שהולך הרגל השני הגיע לנקודה A. מצא את היחס בין מהירויות הולכי הרגל.

15. היישובים A ו-B נמצאים על גדת נהר בעל זרם קבוע. יום אחד, יצאה ספינה מיישוב A ליישוב B במהירות מסוימת. שעה לאחר מכן יצאה ספינה שנייה מיישוב B ליישוב A וכעבור שעתיים פגשה את הספינה הראשונה. הספינות המשיכו ליעדן וחזרו חזרה ליישוב המוצא באותו יום. למחרת, שוב יצאה הספינה מיישוב A ליישוב B אך במהירות כפולה מביום הקודם. הספינה מיישוב B יצאה גם היא במהירות כפולה לכיוון היישוב A אך הפעם רק חצי שעה אחרי שיצאה הספינה הראשונה. כעבור שעה עוד לא פגשה את הספינה הראשונה אך הייתה במרחק של שני ק"מ ממנה. מצא את עוצמת הזרם אם ידוע שכיוונו מיישוב A ליישוב B.

16. שלושה רוכבי אופנוע יצאו מירושלים לאילת ונסעו דרך עין גדי. המרחק בין עין גדי לאילת הוא 240 ק"מ. שלושת הרוכבים יצאו מירושלים בהפרשי זמן קבועים והגיעו לעין גדי באותו זמן. הרוכב שיצא ראשון הגיע לאילת שעה אחרי שהגיע לשם הרוכב שיצא שני. הרוכב שיצא שלישי הגיע לאילת ומיד פנה חזרה ופגש את הרוכב שיצא ראשון במרחק 80 ק"מ מאילת. מצא את מהירויות רוכבי האופנוע.

17. מכונית ואופנוע יצאו באותו זמן מנקודה A לנקודה B. כשהאופנוע היה באמצע הדרך הייתה המכונית במרחק 16 ק"מ מנקודה B. כשהאופנוע היה במרחק 6 ק"מ מנקודה B המכונית הייתה במרחק 12 ק"מ מנקודה B. א. מצא את המרחק בין הנקודה A לנקודה B. ב. פי כמה גדולה מהירות האופנוע ממהירות המכונית?

18. דן ורן עורכים מרוץ לאורך מסלול של 10 ק"מ. מהירותו של דן גדולה ב-5 קמ"ש ממהירותו של רן. שניהם יצאו למרוץ באותו זמן ודן הגיע לקו הסיום יותר מעשרים דקות לפני רן. מהו תחום המספרים בו נמצאת מהירותו של רן?

19. רכבת נוסעת בקו ת"א – ב"ש במשך שעה ורבע. יום אחד, לאחר חצי שעת נסיעה, הייתה תקלה ברכבת והיא נאלצה לעצור ל-10 דקות עד שהתקלה תוקנה. על מנת לנסות ולהגיע ליעדה בזמן העלתה את מהירותה ב-10 קמ"ש בהמשך הדרך והגיעה ליעדה באיחור קל שלא עלה על 5 דקות (שים לב – הרכבת הגיעה באיחור, אך איחור זה לא עלה על 5 דקות). מצא את תחום המספרים בו נמצאת מהירות הרכבת.
20. שלושה חברים הלכו מבית הספר לספורטק בהליכה מהירה. מהירותו של הראשון הייתה גדולה ב-8 קמ"ש ממהירותו של השני וב- m קמ"ש ממהירותו של השלישי, לכן, הגיע הראשון m שעות לפני השני ושעתיים לפני השלישי.
א. הבע באמצעות m את מהירותו וזמן הליכתו של החבר הראשון.
ב. לאילו ערכים של m יש לבעיה פתרון?
21. טבח הכין פנקייקים בקצב קבוע במשך שעתיים. אחר כך העלה את קצב עבודתו ב-25% והכין פנקייקים עוד שעה וחצי בקצב החדש. בסך הכול הכין הטבח 310 פנקייקים. כמה פנקייקים בשעה הכין הטבח בשעתיים הראשונות לעבודתו?
22. צינור ממלא בריכה בקצב קבוע. לאחר שעתיים נפתח צינור נוסף הממלא את הבריכה בקצב של 25% מהצינור הראשון. לאחר עוד שעה וחצי התמלאה הבריכה לאחר שנכנסו אליה בסה"כ 310 ליטר מים. כמה ליטרים לשעה מכניס הצינור הראשון לבריכה?
23. צינור א' ממלא בריכה בשלוש שעות. צינור ב' ממלא את אותה בריכה בשעתיים. שני הצינורות נפתחו יחדיו בשעה 10:00. באיזו שעה תהיה הבריכה מלאה?
24. קבוצת פועלים סללה כביש. את השליש הראשון של הכביש סללו בקצב של 10 מטר ביום. את השליש השני של הכביש סללו בקצב הגדול ב-15 מטר ביום מהקצב בו סללו את השליש השלישי של הכביש. זמן סלילת השליש הראשון היה שווה לזמן סלילת שאר הכביש.
מצא את קצב סלילת השליש האחרון של הכביש.
25. למיכל שני ברזים, ברז א' ממלא אותו וברז ב' מרוקן אותו. יום אחד כאשר במיכל היו 20% מנפח הקיבול שלו, פתחו בטעות את שני הברזים בו זמנית והמיכל התרוקן תוך 6 דקות. מצא בכמה זמן ממלא ברז א' לבדו את המיכל כשהוא ריק אם ידוע שזמן זה ארוך ב-5 דקות מהזמן הדרוש לברז ב' לרוקן את המיכל כשהוא מלא.
26. שתי קבוצות של חקלאים אספו מלונים משדה. תחילה, עבדה רק הקבוצה המהירה יותר ואספה מלונים משליש מהשדה. אחר כך, עבדה רק הקבוצה האיטית יותר ואספה מלונים מעור שישית מהשדה. לבסוף, הצטרפה הקבוצה המהירה לעבודה ויחד אספו מלונים במשך 9 ימים נוספים. מתחילת איסוף המלונים ועד סיומו עברו 29 ימים.
מצא בכמה ימים יכולה הייתה הקבוצה המהירה לאסוף את המלונים מכל השדה לו עבדה לבדה.
27. מורה שברשותו היו מבחני המתמטיקה של כל השכבה, 224 במספר, תכנן לבדוק אותם תוך מספר ימים מסוים. הוא התחיל בעבודתו ואחרי 6 ימי עבודה, קיבל לידיו עוד 7 מבחנים שנשכחו בבית הספר וקיבל הודעה כי עליו להחזיר את הבחינות 3 ימים לפני המועד שתכנן. הוא חישב וגילה שכדי לעמוד ביעד עליו לבדוק עוד 11 מבחנים בכל יום.
בכמה ימים תכנן המורה לסיים את בדיקת המבחנים?

28. למיכל שנפחו 300 ליטר יש שני ברוזים: ברוז אחד למילוי והשני להרקה. מילוי המיכל (כשהוא ריק) אורך 8 דקות יותר מריקון המיכל (כשהוא מלא). יום אחד, כשהמיכל היה מלא, פתחו בטעות את שני הברזים והמיכל התרוקן בפחות מחצי שעה. באיזה תחום מספרי נמצאת כמות המים הנוכסית למיכל בדקה מברז המילוי?

29. שני פועלים תכננו לבצע עבודה מסוימת כך שהראשון יעבוד 8 ימים ואחריו השני יעבוד 6 ימים. ואולם, 4 ימים אחרי תחילת העבודה חלה הפועל הראשון והפסיק לעבוד והפועל השני נאלץ לעבוד m ימים לבדו וגם אז הסתיימה רק 75% מהעבודה. א. הבע באמצעות m את הזמן שבו כל פועל היה מסיים את העבודה לו עבד לבדו. ב. לאילו ערכים של m יש לבעיה פתרון?

פתרונות:

1. א. 60. ב. 340. ג. 360. ד. 312. ה. 270. ו. 64 קמ"ש. ז. $1.3x$.
2. א. 60 קמ"ש. ב. 80 קמ"ש. ג. 8:30, 60 קמ"ש. ד. 8:50. ה. 9. ו. 50 קמ"ש. ז. 60 קמ"ש.
3. א. 80 קמ"ש. ב. 90 קמ"ש. ג. 80 קמ"ש. ד. 80 קמ"ש. ה. 3 קמ"ש. ו. $\frac{3}{2}$. ז. 4 קמ"ש.
4. א. 60 קמ"ש. ב. 80 קמ"ש. ג. 120 קמ"ש. ד. 24 קמ"ש. ה. $1\frac{1}{2}$. ו. 10 קמ"ש. ז. $0 < x < 10$ קמ"ש.
5. א. 80 קמ"ש. ב. $35 < x \leq 80$ קמ"ש. ג. $t = \frac{2m(8-m)}{m^2-16}$, $v = \frac{8m(m-2)}{m^2-16}$. ד. $4 < m < 8$. ה. 15 דקות.
6. א. 80 פנקייקים. ב. 80 ליטר בשעה. ג. 11:12. ד. 15 מטר ליום. ה. 25. ו. $\frac{16(m-3)}{2m-9}$.
7. א. 24 יום. ב. 14 יום. ג. 28 בין 15 ליטר ל-37.5 ליטר. ד. 29. ה. $4m-12$. ו. $m > 3$.