GOOL
בשביל התירגול
קורסים ברשת שבאמת עובדים!

בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תלמידים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכינות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכנית הלימודים של משרד החינוך. כל פרק פותח בסיכום ההגדרות, המשפטים והמתכונים הקשורים לנושא הפרק, לאחריו מופיעה טבלת הסרטונים באתר ולבסוף קובץ תרגילים. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

יוחאי טוויג

תוכן

פרק 1 – סדרות 4

1.1 - סדרה חשבונית 4

1.2 - סדרה הנדסית 8

1.3 - סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת 11

1.4 – סדרת נסיגה 13

1.5 – שאלות מסכמות 16

2 - טריגונומטריה במרחב 40

פרק 3– משוואות מעריכיות ולוגריתמיות 61

3.1 – חוקי חזקות ומשוואות מעריכיות 61

3.2 – משוואות לוגריתמיות 66

פרק 4 - בעיות גידול ודעיכה 72

פרק 5– חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 79

5.1 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות טריגונומטריות 79

5.2 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות מעריכיות 100

5.3 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פונקציות לוגריתמיות 109

5.4 – שאלות מסכמות – חשבון דיפרנציאלי 116

5.5 – שאלות מסכמות – בעיות קיצון 135

5.6 – שאלות מסמכות – חשבון אינטגרלי 138

4. סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 6n - 2$.

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_{n+1} - a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1.

5. סדרה שהאיבר הכללי בה הוא a_n מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = 3a_n - 4$.

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_n - 2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5 = 162$. חשב את a_1.

<u>פתרונות</u>:

1. א. $a_3 = 22$ **ב.** $a_{14} = 33$, $a_{12} = 5$ **ג.** $a_{32} = k - 51$, $a_{30} = k - 49$

2. ד. a_{62}, a_{63} **3.** $a_{k+2} = 4k + 74$ **4. א.** $d = 6$ **ב.** $b_1 = 4$

5. א. $q = 3$ **ב.** $a_1 = 0$

1.5 - שאלות מסכמות – סדרות:

סדרה חשבונית:

1. לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: x^2 , $x + 16$, $2x + 23$.

א. (i) **מצא את** x.

(ii) **מצא את הפרש הסדרה.**

ב. ידוע כי: $a_{12} = 0$. **מצא את** a_1.

ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.

מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

2. לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $2x^2 + 39$, $6x + 3$, $x^2 + 3$.

א. (i) **מצא את** x. **(הבחן בין שני מקרים).**

(ii) **מה יהיה הפרש הסדרה עבור הערך הקטן של** x **שמצאת בסעיף הקודם?**

ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ג. ידוע כי: $S_{22} = 0$. **מצא את** a_1.

3. בסדרה חשבונית $a_1 , a_2 , a_3 ... a_n$. **ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.**

א. הוכח: $a_5 = 0$.

ב. נתון: $a_{11} = 24 + a_3$. **מצא את:** a_1 **ואת** d.

מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n **המקיימת:** $b_n = 3 + 2a_n$.

ג. מצא את ערך האיבר השלילי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

4. נתונה הסדרה החשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 ..... a_n$ **שהפרשה הוא** d.

מגדירים סדרה חדשה b_n **לפי הכלל הבא:** $b_1 = ka_1 + p , b_2 = ka_2 + p , b_3 = ka_3 + p ...$ $k, p \neq 0$.

א. הוכח כי הסדרה b_n **היא חשבונית והבע באמצעות** k **ו-** d **את הפרשה.**

ב. ידוע כי סכום 5 האיברים הראשונים בסדרה b_n **הוא 0.**

הבע באמצעות k **ו-** d **את האיבר הראשון של סדרה זו.**

ג. בסדרה a_n **נתון כי:** $a_6 = 2a_1 + 3a_2$. **כמוכן נתון גם:** $b_{10} = 42$.

מצא את k.

5. בסדרה חשבונית שבה $2n$ **איברים סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים גדול פי 2 מסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.**

א. הבע את a_1 **באמצעות** d **ו-** n.

ידוע כי $a_1 = 4$ **וסכום שני האיברים האחרונים בסדרה הוא** -9.5.

ב. מצא את סכום האיברים בסדרה ואת הפרשה.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר כדי שסכומם יהיה אפס.

6. בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים גדול ב-80 מסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח: $a_{n+1} - a_1 = 80$.

נתון גם כי סכום n האיברים האחרונים בסדרה גדול ב-1600 מסכום n האיברים הראשונים בסדרה.

ב. מצא את מספר האיברים בסדרה.

7. בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול ב-45 מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

א. הוכח: $a_{n+1} - a_1 = 45$.

נתון גם כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה גדול ב-675 מסכום n האיברים האחרונים בסדרה.

ב. מצא את מספר האיברים בסדרה.

8. בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5 , ה-7 וה- 16 הוא אפס.

כמוכן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.

ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל את הסכום 210.

9. בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5 וה-7 הוא 34.

כמוכן ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-6 וה-10 הוא 14.

א. מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

ב. מצא את האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל את הסכום 189.

10. נתונות שתי הסדרות: $a_1 , a_2 , a_3 .....a_n$ ו- $b_1 , b_2 , b_3 .....b_n$. הפרש הסדרה הראשונה a_n הוא d_1 והפרש הסדרה השנייה b_n הוא d_2. לשתי הסדרות מספר זהה וזוגי של איברים (לכל אחת).

לוקחים את האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים של הסדרה a_n ואת האיברים העומדים במקומות הזוגיים של הסדרה b_n ומחברים אותם לסכום S.

א. הוכח כי: $S = n(a_n + b_{n+1})$.

ב. נתון כי $S = 2700$. מספר האיברים בכל סדרה הוא 60 והאיבר העומד במקום ה-30 בסדרה a_n שווה לאיבר העומד במקום ה-19 בסדרה b_n. הוכח: $b_{25} = 45$.

ג. נתון כי סכום ההפרשים של שתי הסדרות הוא 5 והאיבר הראשון של הסדרה b_n הוא 69.

הוכח כי אחת מהסדרות עולה והשנייה יורדת.

11. נתונים שני טורים חשבוניים: $138 , 144 , 150 , ..$; $96 , 93 , 90 , ...$. לשני הטורים אותו מספר איברים.

ידוע כי סכום האיברים האחרונים של כל טור (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

א. מצא את מספר האיברים שבכל טור.

מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני.

ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480.

ב. מצא את n.

12. בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים הממוצע של שני האיברים האמצעיים הוא 103.

א. חשב את סכום האיבר הראשון והאחרון בסדרה.

ידוע כי סכום כל האיברים בסדרה הוא 5150.

ב. מצא את מספר האיברים בסדרה.

ג. הוכח כי ההפרש בין סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים לבין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה גדול פי 25 מהפרש הסדרה.

13. בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים סכום n האיברים הראשונים גדול פי 4 מסכום n האיברים האחרונים.

א. נתון: $a_1 \quad 54.5d$.

מצא את מספר האיברים בסדרה.

ב. הוכח: סכום שני האיברים האמצעיים של הסדרה שווה ל- $50d$.

ג. סכום האיבר הראשון והאיבר האחרון בסדרה הוא 300.

מצא את d.

14. בסדרה חשבונית סכום 18 האיברים הראשונים גדול פי 16 מהאיבר העומד במקום ה-9.

ידוע כי: $a_{26} \quad 50$.

א. מצא את a_1 ואת d.

ב. מצא בסדרה את האיבר שערכו שווה למיקומו הסידורי.

15. בסדרה חשבונית סכום שלושת האיברים הראשונים גדול פי 4 מהאיבר העומד במקום ה-19.

א. הוכח: $a_{70} \quad 0$.

נתון כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-4 , ה-5 וה-6 הוא 195.

ב. מצא את a_1 ואת d.

ג. מצא בסדרה איבר שערכו שווה למיקומו הסידורי.

ד. מצא כמה איברים יש לחבר החל מהאיבר השלישי כך שסכומם יהיה אפס.

16. נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה הוא d_2.

ידוע כי: $d_1 \quad 2d_2$. סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n.

א. מצא את הפרש הסדרה $d_1 - a_n$.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50}.

מצא את a_1 ואת b_1.

17. בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

(i) $a_1 \quad 4d$.

(ii) $S_9 \quad 0$.

האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.

ב. מצא את a_1 ואת d.

ג. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

18. בסדרה חשבונית נתון כי האיברים ה-4 וה-8 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח כי: $a_6 \quad 0$.

סכום האיברים בסדרה עד ל-a_6 הוא 45- .

ב. מצא את a_1 ואת d.

ג. חשב כמה איברים יש לחבר החל מהאיבר השלישי כדי לקבל את הסכום 27.

19. נתונה הסדרה החשבונית: $a_1 , a_2 , a_3 \ldots\ldots a_n$ שהפרשה הוא d. בונים סדרה חדשה b_n לפי הכלל הבא:

מחברים כל שלושה איברים סמוכים בסדרה a_n ויוצרים איבר בסדרה b_n כך שהמיקום הסידורי של האיבר הראשון בסדרה a_n שווה למיקום הסידורי של האיבר שבסדרה b_n

כך: $b_1 \; a_1 \; a_2 \; a_3 \; , \; b_2 \; a_2 \; a_3 \; a_4 \; , \ldots\ldots , \; b_n \; a_n \; a_{n+1} \; a_{n+2}$.

א. הוכח כי הפרש הסדרה b_n הוא $3d$.

ב. הוכח כי מתקיים: $3 \quad \frac{b_n}{a_{n-1}}$.

ההפרש בין האיבר b_3 לאיבר b_1 הוא 18 וסכום האיברים b_1 ו-b_2 הוא 39.

ג. מצא את האיבר הראשון של הסדרה b_n.

20. נתונות שתי סדרות a_n ו- b_n שהפרשיהן הם בהתאמה d_1 ו-d_2. ידוע כי: $a_1 \quad b_1 \; , \; d_1 \quad d_2$.

א. הוכח: $S_{n(a)} \quad S_{n(b)}$ (סכום n איברים בכל סדרה הם מספרים נגדיים).

ב. בסדרה היורדת a_n נתון כי: $a_{21} \quad 0$. הבע באמצעות d_2 את סכום כל האיברים השליליים בסדרה b_n.

21. בסדרה החשבונית a_n שבה $a_1 \quad 37$ סכום 10 האיברים הראשונים הוא 55-.

א. מצא את הפרש הסדרה.

מגדירים סדרה חדשה b_n. ידוע כי האיבר העומד במקום ה-8 בשתי הסדרות שווה.

ב. מצא את האיבר b_8.

ידוע כי סכום כל האיברים בסדרה b_n הוא 135 וכי סכום ההפרשים של שתי הסדרות הוא 4.

ג. מצא את מספר האיברים בסדרה b_n.

22. בסדרה חשבונית שבה הפרש הסדרה שונה מאפס, נתון כי האיבר הראשון שווה להפרש הסדרה.
האיבר האחרון בסדרה קטן פי 13 מסכום כל האיברים שלפניו.

א. כמה איברים יש בסדרה זו?

סכום כל איברי הסדרה החל מהאיבר השני הוא 754.

ב. מצא את האיבר האמצעי בסדרה.

ג. הוכח כי כל איבר בסדרה זו גדול פי 2 ממקומו הסידורי בסדרה.

23. נתונה סדרה חשבונית שהפרשה הוא 5.

נסמן את סכום כל איברי הסדרה החל מהאיבר השני ב-S_1 ואת סכום איברי הסדרה (החל מהאיבר הראשון) עד לאיבר האחד לפני האחרון ב-S_2. נתון: $S_1 \quad S_2 \quad 315$.

א. מצא את מספר האיברים בסדרה.

ידוע כי בסדרה זו סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים גדול פי 2 מסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

ב. מצא את a_1.

24. נתונה סדרה חשבונית שהפרשה הוא 6-.

נסמן את סכום כל איברי הסדרה החל מהאיבר השני ב- S_1 ואת סכום איברי הסדרה (החל מהאיבר הראשון) עד לאיבר האחד לפני האחרון ב- S_2. נתון: $S_1 \quad S_2 \quad 324$.

א. מצא את מספר האיברים בסדרה.

ידוע כי בסדרה זו ההפרש בין כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 3.

ב. מצא את a_1.

25. בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים סכום שני האיברים האחרונים הוא 271- וסכום שני האיברים שלפניהם הוא 259-.

א. מצא את הפרש הסדרה.

סכום כל איברי הסדרה החל מהאיבר השני הוא 2950- וסכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 1500-.

ב. מצא את מספר האיברים בסדרה.

26. בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים סכום שני האיברים האחרונים הוא 156 וסכום שני האיברים שלפניהם הוא 148.

א. מצא את הפרש הסדרה.

סכום כל איברי הסדרה החל מהאיבר השני הוא 1599 וסכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 820.

ב. מצא את מספר האיברים בסדרה.

27. לפניך שתי הסדרות הבאות: $a_n : 40 , 36 , 32 , .$.
$b_n : 2 , 0 , \quad 2 , ...$

לשתי הסדרות אותו מספר איברים וידוע כי סכום כל האיברים של שתי הסדרות זהה.

א. מצא כמה איברים יש בכל סדרה.

ב. מגדירים סדרה חדשה c_n לפי הכלל הבא: $c_1 \quad a_1 \quad b_1 , \; c_2 \quad a_2 \quad b_2 , ..., \; c_n \quad a_n \quad b_n$.

כתוב את הנוסחה לאיבר כפונקציה של מקום בסדרה זו.

ג. מצא את סכום כל האיברים בסדרה זו.

28. בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $d \quad n \quad 66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3. הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.

ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187. מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו הסידורי בסדרה.

29. נתונה סדרה חשבונית שבה $2n$. ידוע כי סכום כל איברי הסדרה קטן ב-500 מפעמיים סכום n האיברים האחרונים. הפרש הסדרה הוא 5.

א. מצא כמה איברים יש בסדרה.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה אם ידוע כי סכום שני האיברים האמצעיים הוא 101.

30. נתונה סדרה חשבונית שבה $2n$. ידוע כי סכום כל איברי הסדרה גדול ב-75 מפעמיים סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה. הפרש הסדרה הוא 3-.

א. מצא כמה איברים יש בסדרה.

ב. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום שני האיברים האמצעיים הוא 127-.

31. נתונה סדרה חשבונית שבה $2n$. ידוע כי סכום כל איברי הסדרה גדול ב-400 מפעמיים סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-הזוגיים בסדרה.

א. הוכח: $400 \quad dn$.

ב. האיבר האחרון בסדרה הוא 796. סכום שני האיברים האמצעיים הוא 802.

מצא כמה איברים יש בסדרה.

32. בסדרה חשבונית שבה $2n \quad 1$ איברים האיבר האמצעי הוא 108 והאיבר במקום ה-$17 \quad n$ הוא אפס.

א. מצא את הפרש הסדרה.

ב. הבע באמצעות n את היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה ובין סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

ג. נתון כי היחס שמצאת בסעיף הקודם הוא: $\frac{34}{33}$.

מצא את האיבר הראשון בסדרה זו.

33. בסדרה חשבונית שבה $2n \quad 1$ איברים האיבר האמצעי הוא 26 והאיבר במקום ה-$14 \quad n$ הוא אפס.

א. מצא את הפרש הסדרה.

ב. הבע באמצעות n את היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה ובין סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

ג. נתון כי היחס שמצאת בסעיף הקודם הוא: $\frac{23}{22}$.

מצא את האיבר הראשון בסדרה זו.

34. בסדרה חשבונית שבה $2n \quad 1$ איברים האיבר האמצעי הוא 28- והאיבר במקום ה-$3 \quad n$ הוא אפס.

א. מצא את הפרש הסדרה.

ב. הבע באמצעות n את היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה ובין האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

ג. נתון כי היחס שמצאת בסעיף הקודם הוא: $\frac{9}{8}$.

מצא את האיבר הראשון בסדרה זו.

35. בסדרה חשבונית עולה סכום 30 האיברים הראשונים שווה לסכום 79 האיברים הראשונים.

א. מצא את מיקומו הסידורי של האיבר החיובי הראשון בסדרה.

ב. ידוע כי איבר זה הוא 3. מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

36. בסדרה חשבונית יורדת סכום 25 האיברים הראשונים שווה לסכום 36 האיברים הראשונים.

א. מצא את מיקומו הסידורי של האיבר השלילי הראשון בסדרה.

ב. ידוע כי איבר זה הוא 5-.

מצא את האיבר הראשון ואת הפרש הסדרה.

<u>לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.</u>

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, ידע מקדים, הכרת הפונקציה הלוגריתמית, חוקי הגזירה של פונקציה לוגריתמית
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5		שיפוע הפונקציה הלוגריתמית והמשיק לה
סרטון 6	תרגיל 4	
סרטון 7	תרגיל 5	
סרטון 8	תרגיל 6	
	תרגיל 7	
סרטון 9	תרגיל 9	
סרטון 10	תרגיל 10	
סרטון 11	תרגיל 11	
סרטון 12	תרגיל 12	
סרטון 13	תרגיל 13	
סרטון 14	תרגיל 13	המשך שאלה מסרטון קודם
סרטון 15	תרגיל 14	
סרטון 16		אינטגרלים לוגריתמיים
סרטון 17	תרגיל 15	
סרטון 18	תרגיל 16	
סרטון 19	תרגיל 17	
סרטון 20	תרגיל 18	
סרטון 21	תרגיל 19	
סרטון 22	תרגיל 20	

תרגילים

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 3\ln x - 4\ln(x+2) - \ln(5x-1)$ **ב.** $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ **ד.** $f(x) = \ln(e^x - 1)$

ה. $f(x) = \log_2 x - 5\log_3(2x-1)$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x\ln x$ **ב.** $f(x) = (3x-1)^2 \ln x$ **ג.** $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ **ד.** $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$

ה. $f(x) = \sqrt{\ln x - x}$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln^3 x$ **ב.** $f(x) = 3\ln^2 x$ **ג.** $f(x) = x^2 \ln^2 x$ **ד.** $f(x) = \frac{\ln^2 x - 1}{(\ln x + 1)^2}$

4. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ **בנקודה** $A(e, 1)$.

5. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x - a}{\ln x - b}$ **בנקודה** $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ **הוא** $\frac{e}{3}$.

מצא את ערכי הפרמטרים a **ו-** b.

6. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln x$ **ב.** $f(x) = \ln(x^2)$ **ג.** $f(x) = \log_3(x^2 - 8x + 20)$

ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$ **ה.** $f(x) = \frac{x-1}{\ln x + 1}$ **ו.** $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x + 2\ln x - 3}$

ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

7. **מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:** $f(x) = 2\ln x - x^2$

8. **מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:** $f(x) = x^2 \ln x$

9. **מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:** $f(x) = \frac{\sqrt{2\ln x - 1}}{x}$

10. **מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה:** $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$

11. **נתונה הפונקציה:** $f(x) = \frac{a\ln x + b}{x}$. **הנקודה** $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$ **היא נקודת קיצון של הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים** a **ו-**b.

12. **נתונה הפונקציה** $f(x) = 2x\ln^2 x$. **חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:**

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטוט.

13. **נתונה הפונקציה** $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. **חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:**

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטוט. ו. עבור אילו ערכי k **הישר** $y = k$ **חותך את הפונקציה בשתי נקודות?**

14. **נתונה הפונקציה** $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. **חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:**

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטוט.

15. **חשב את האינטגרלים הבאים:**

א. $\int \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x-1} - \frac{4}{3x-1}\right)dx$ **ב.** $\int \frac{x^2 - 3x - 4}{x}dx$ **ג.** $\int \frac{x-3}{x^2-9}dx$

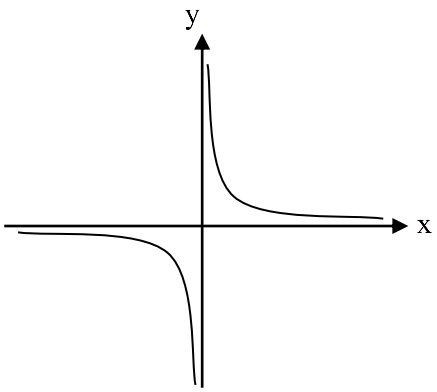
16. **נתונה נגזרת של פונקציה:** $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(5,28)$.

17. **נתונה נגזרת שנייה של פונקציה:** $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2,1)$ **וששיפועה בנקודה זו הוא 3.**

18. **נתונה הפונקציה:** $f(x) = \frac{1}{x}$



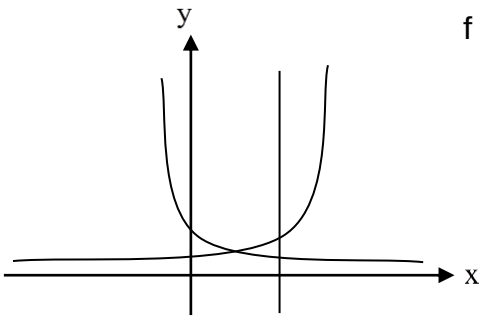
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישרים $x = 1$

ו- $x = 4$ **וציר ה-**x.

ניתן להשאיר $\ln$ **בתשובה.**

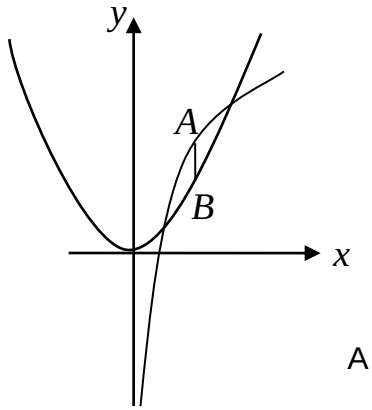
19. **נתונות הפונקציות:** $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $g(x) = \frac{4}{8-x}$



חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 4$ **והצירים.**

20. **נתונות הפונקציות** $f(x) = 9\ln x$ **ו-** $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.



את הנקודה A **שעל** $f(x)$ **חיברו עם הנקודה** B,

שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ **כך שהקטע** AB

מקביל לציר ה-y. **מה צריכים להיות שיעורי הנקודה** A

כדי שאורך הקטע AB **יהיה מקסימלי?**

<u>פתרונות</u>:

(הערה: הגרפים לשאלות בחקירות פונקציה מופיעים בסוף הפתרונות של הפרק באופן מרוכז)

א. $f'(x)=\frac{3}{x}-\frac{4}{x-2}-\frac{5}{5x-1}$ **ב.** $f'(x)=\frac{2x-3}{x^2-3x}$ **ג.** $f'(x)=\frac{2}{(x-1)(x-1)}$.

ד. $f'(x)=\frac{e^x}{e^x-1}$ **ה.** $f'(x)=\frac{1}{x\ln 2}-\frac{10}{(2x-1)\ln 3}$.

א. $f'(x)=\ln x-1$. **ב.** $f'(x)=(3x-1)(6\ln x-\frac{3x-1}{x})$. **ג.** $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

ד. $f'(x)=\frac{4}{x(\ln x-2)^2}$. **ה.** $f'(x)=\frac{1-x}{2x\sqrt{\ln x-x}}$. **3. א.** $f'(x)=\frac{3\ln^2 x}{x}$.

ב. $f'(x)=\frac{6\ln x}{x}$. **ג.** $f'(x)=2x\ln x(\ln x-1)$. **ד.** $f'(x)=\frac{2(\ln x-1)}{x(\ln x-1)^3}$. **4.** $y=\frac{1}{e}x$.

5. $a=2,b=-2$. **6. א.** $x\neq 0$! **ב.** $x\neq 0$. **ג.** $x=10$ **או** $x=-2$. **ד.** $x\neq \ln 4$!

ה. $0<x<e$ **ו.** $0<x<1$ **וגם** $x=e^{-3}$. **ז.** $x=e$. **7.** $\max(1,-1)$. **8.** $\min(\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{1}{2e})$.

9. $\min(\sqrt{e},0)$ **קצה,** $\max(e,\frac{1}{e})$. **10.** $\min(-4,-1)$. **11.** $a=-1,b=-1$.

12. א. $0<x<\frac{1}{e^2}$ **או** $x>1$, **ב.** $\max(\frac{1}{e^2},\frac{8}{e^2}),\min(1,0)$. **ג. עליה:** $x<0$,

ירידה: $0<x<\frac{1}{e^2}$. **13. א.** $0<x<e$. **ד.** $(1,0)$. **ה.** $k\neq e^2$!

14. א. $x<0$. **ב.** $\min(-4,-1)$. **ג. עליה:** $x>4$, **ירידה:** $0<x<4$.

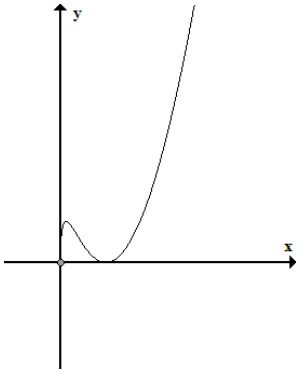
15. א. $c-3\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{4\ln|3x-1|}{3}$. **ב.** $(1,0),(16,0)$.

16. א. $\ln|x-4|+c$. **ב.** $\frac{x^2}{2}-3x-4\ln|x|+c$. **ג.** $\ln|x-3|+c$.

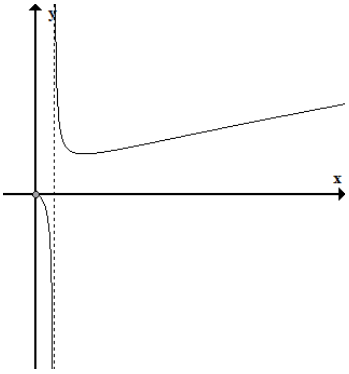
17. $f(x)=x^3-\ln|x|-x+2$. **18.** $S=4\ln 4$ **יח"ש**. **19.** 1.2. **20.** $x=-9,3$.

<u>גרפים</u>:

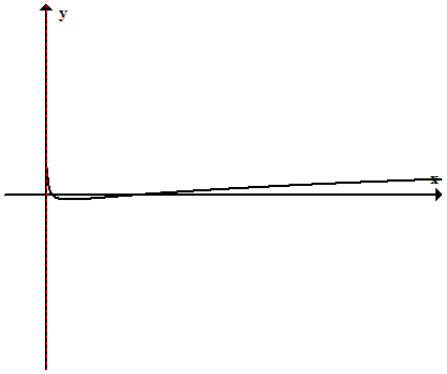
.12



.13



.14



5.4 - שאלות מסכמות – חשבון דיפרנציאלי:

שאלות העוסקות בפונקציות מעריכיות:

חקור את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים:
א. מציאת תחום הגדרה.
ב. מציאת נקודות קיצון.
ג. מציאת תחומי עלייה וירידה וקביעת סוג הקיצון.
ד. מציאת חיתוכים עם הצירים.
ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים (במידה ויש)
ו. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

1. $y = e^{4x-1}$ **2.** $y = xe^{x}$ **3.** $y = x\,2e^{x}$ **4.** $y = x^2 - 5x - 5e^{x}$ **5.** $y = \frac{e^{x}}{x-2}$

6. $y = \frac{x^2}{e^{x-1}}$ **7.** $y = \frac{(x-4)^2}{e^{x}}$ **8.** $y = \frac{e^{x}}{e^{x}-1}$ **9.** $y = x^2e^{x^2}$ **10.** $y = \frac{x-e^{x}}{x}$

11. $y = \frac{1}{e^{x}-e^{-x}}$ **12.** $y = \frac{e^{-x}}{x^2-15}$ **ללא חיתוך עם ציר ה-x.**

13. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x^3-3x^2-9x}$.
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

14. נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x^2 - 4e^{6x}$.
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

15. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2-1}$.
א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

16. נתונה הפונקציה: $f(x)\ \frac{e^{x^2\ 24}}{x^2\ \ 24}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

17. לפונקציה: $f(x)\ \frac{ae^x}{x\ \ b}$ **יש נקודת קיצון:** $4,5e^4$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a **ו-**b.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y .

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

18. לפונקציה: $f(x)\ \frac{x^2\ \ 6x\ \ 7}{e^{ax\ 1}}$ **יש קיצון בנקודה שבה:** $x\ \ 1$.

א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

19. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)\ \frac{1}{e^{3x^2\ \ 6x\ \ k}}$ **בנקודה שבה:** $1\ \ x$ **הוא:** $\frac{12}{e^{10}}$.

א. מצא את ערך הפרמטר k **וכתוב את הפונקציה.**

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $e^2\ \ \frac{1}{e^{3x^2\ \ 6x\ \ 1}}\ \ 0$.

20. לגרף הפונקציה: $f(x)\ \ ax^2\ \ e^{bx^2}$ **יש נקודת קיצון:** $2,\frac{4}{e}$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a **ו-**b **וכתוב את הפונקציה.**

ב. מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. מעבירים ישר: $y\ \ k$. **באיזה תחום ערכים צריך להימצא** k **כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?**

21. הישר $x \sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של גרף הפונקציה: $f(x) \frac{e^{2x}}{x^2 m}$.

א. מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

22. נתונה הפונקציה: $f(x) x^3 e^{2x}$.

א. מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x) 0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
ב. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. בכמה נקודות חותך הישר $y 0.01$ את גרף הפונקציה?

23. נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) 6x e^x$ ו- $g(x) ae^x e^{2x} b$.

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור x וכי שתיהן נפגשות על ציר ה- y.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b.
ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.
ג. לאחת משתי הפונקציות יש אסימפטוטה אופקית. מצא את הפונקציה ואת האסימפטוטה. הראה חישוב מתאים.

24. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) e^{2x} 6e^x 8$.

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

25. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) e^{2x} ae^x b$.

גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע כי כאשר $x \ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f''(x) 8 f'(x)$.

א. מצא את a.
משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y 16x 7 16\ln 2$.
ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
ג. מצא את b.
ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x.

26. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) e^{2x} ae^x b$.

גוזרים את הפונקציה פעמיים וידוע כי כאשר $x \ln\frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f''(x) 12 f'(x)$.

א. מצא את a.
משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y 22x 28 22\ln 2$.
ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
ג. מצא את b.
ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן מצא את הנקודות.

27. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4^x - 4^{1-x}$. **הישר** $y = 5$ **חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות A ו-B.**

א. הוכח כי אחת מהנקודות נמצאת על ציר ה-y.

ב. הוכח כי שיעור ה-x של נקודת הקיצון של הפונקציה שווה לממוצע של שיעורי ה-x של הנקודות A ו-B.

ג. כתוב את משוואת המשיק בנקודת הקיצון של הפונקציה.

28. נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^{2x} - 2\cdot 3^{1-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-x.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

29. נתונה הפונקציה: $f(x) = x\cdot a^x$. **לפונקציה יש נקודת קיצון שבה:** $x = \frac{1}{\ln 2}$.

א. מצא את a.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x = 2$ **היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה** $f(x)$ **עם גרף הפונקציה:** $g(x) = x^2 - 2^x + kx\cdot 2^x$.

ג. מצא את k.

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

30. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4^x - 4^{1-x} + k$.

א. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. ידוע כי שיעור ה-y של הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה הוא 4. מצא את k.

ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם גרף הפונקציה** $g(x) = 2\cdot 4^x$.

ד. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ **בנקודת החיתוך שלו עם גרף הפונקציה** $f(x)$.

***התרגילים הבאים כוללים פונקציות המכילות נקודות פיתול:**

31. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x^3}$.

א. מצא את הנקודה המקיימת: $f'(x) = 0$ **וקבע האם מדובר בנקודת קיצון. נמק.**

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

32. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3\cdot e^{kx}$.

ידוע כי יש לגרף הפונקציה נקודת קיצון שבה $x = 1$.

א. מצא את k **וכתוב את הפונקציה.**

ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

33. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{4x^2-1}{e^{2x}}$.

א. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון? אם כן מצא אותן.
ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

34. נתונה הפונקציה: $f(x)=x^3\cdot e^{kx^2}$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא אפס.
א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.
ב. האם הנקודה שבה $x=0$ היא נקודת קיצון? נמק את תשובתך.
ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

<u>תשובות – חקירת פונקציה מעריכית:</u>

1. א. כל x. **ב. אין קיצון. ג. עולה בכל ת.ה. ד.** $0,e^4$.

2. א. כל x. **ב.** $Min\ 1,e^1$ **ג. עולה:** $x\ !\ 1$ **יורדת:** $x\ 1$. **ד.** $0,0$.

3. א. כל x. **ב.** $Min\ 3,\ e^3$ **ג. עולה:** $x\ !\ 3$ **יורדת:** $x\ 3$ **ד.** $2,0\ ,\ 0,2$.

4. א. כל x. **ב.** $Min\ 3,\ e^3\ ,\ Max\ 0,5$ **ג. עולה:** $3\ x\ 0\ ,\ x$ **יורדת:** $0\ x\ 3$.

ד. $1.38,0\ ,\ 3.61,0\ ,\ 0,5$.

5. א. $x\ z\ 2$. **ב.** $Min\ 1,e^1$ **ג. עולה:** $x\ !\ 1$ **יורדת:** $1\ x\ 2\ ,\ x\ z\ 2$. **ד.** $0,\frac{1}{2}$. **ה.** $x\ 2$.

6. א. כל x. **ב.** $Max\ 2,4e^3,\ Min\ 0,0$ **ג. עולה:** $0\ x\ 2$ **יורדת:** $0\ x\ 2\ ,\ x$ **ד.** $0,0$.

7. א. כל x. **ב.** $Max\ 6,4e^6,\ Min\ 4,0$ **ג. עולה:** $4\ x\ 6$ **יורדת:** $x\ 4\ ,\ x\ 6$

ד. $4,0\ ,\ 0,16$.

8. א. $x\ z0$. **ב. אין קיצון. ג. יורדת בכל ת.ה. ד. אין חיתוכים עם הצירים כלל. ה.** $x\ 0\ ,\ x\ 0:y\ !\ 1$ $x\ 0:y\ 0$.

9. א. כל x. **ב.** $Min\ 0,0$ **ג. עולה:** $x\ !\ 0$ **יורדת:** $x\ 0$ **ד.** $0,0$.

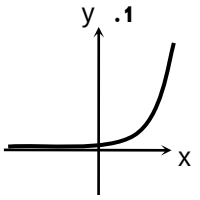
10. א. $x\ z0$ **ב.** $Max\ 1,1\ e$ **ג. עולה:** $x\ 0\ ,\ xz\ 1$ **יורדת:** $x\ !\ 1$ **ד. אין חיתוכים. ה.** $y\ 0:x\ 1$.

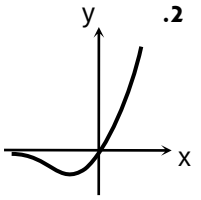
11. א. כל x. **ב.** $Max\ 0,0.5$ **ג. עולה:** $x\ 0$ **יורדת:** $x\ !\ 0$ **ד.** $0,\frac{1}{2}$ **ה.** $y\ 0$.

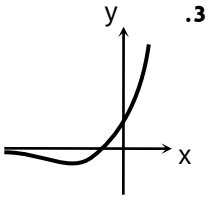
12. א. $x\ z\ \sqrt{15}$ **ב.** $Max\ 3,\frac{1}{6e^3}\S\cdot\cdot@,\ Min\ 5,\frac{e^5}{10}\S\cdot\cdot©$ **ג. עולה:** $3\ x\ 5\ ,\ x\ z\ \sqrt{15}$

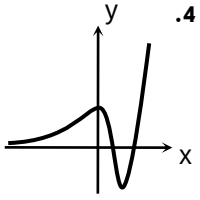
יורדת: $x\ !\ 3,\ x\ 5$ **ד.** $x\ z\sqrt{15}\ ,\ 0,\frac{1}{15}\S\cdot\cdot©$ **ה.** $x\ \sqrt{15}$.

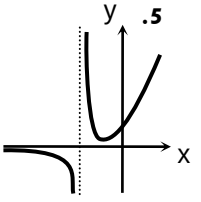
סרטוטי סקיצה – תרגילים 1-12:

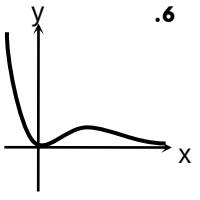
1. 

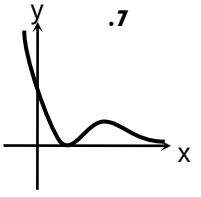
2. 

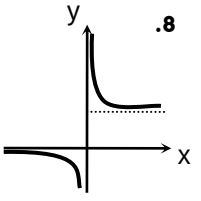
3. 

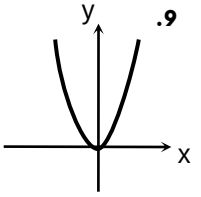
4. 

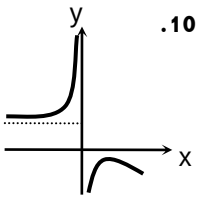
5. 

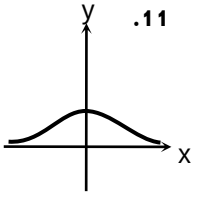
6. 

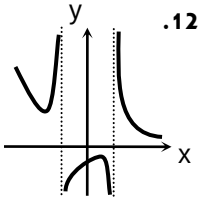
7. 

8. 

9. 

10. 

11. 

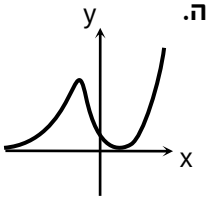
12. 

13. א. כל x.

ב. $\text{Max}\ 1, e^{5}$, $\text{Min}\ 3, e^{27}$.

ג. עולה: $x\ !\ 3, x\ !\ 1$ **יורדת:** $1\ x\ 3$.

ד. $0,1$.

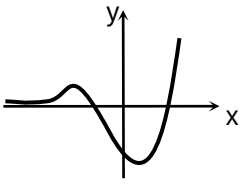
ה. 

14. א. כל x.

ב. $\text{Min}\ 1, e^{6}$, $\text{Max}\ \frac{4}{3}, \frac{4}{3e^{8}}$.

ג. עולה: $x\ !\ 1, x\ !\ \frac{4}{3}$ **יורדת:** $1\ x\ \frac{4}{3}$.

ד. $0, 4$, $0, \frac{8}{\sqrt{3}}$, $0, \frac{2}{\sqrt{3}}$.

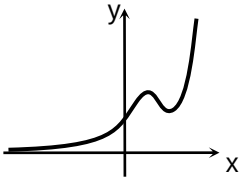
ה. 

15. א. כל x.

ב. $\text{Min}\ \frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}$, $\text{Max}\ \frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}$.

ג. עולה: $\frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{6}$, $x\ \frac{1}{6}$ **יורדת:** $\frac{1}{2}\ x\ \frac{1}{6}$.

ד. $0,1$.

ה. 

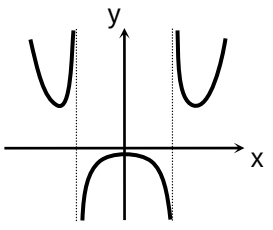
16. א. $x\ z\ \sqrt{24}$

ב. $\text{Min}\ 5, e$, $\text{Min}\ 5, e$, $\text{Max}\ 0, \frac{1}{24e^{24}}$.

ג. עולה: $x\ !\ 5, x\ !\ 0$, $5\ x\ \sqrt{24}\ x\ z$

יורדת: $5, x$, $0\ x\ 5$, $\sqrt{24}\ x\ z\ x$.

ד. $0, \frac{1}{24e^{24}}$.

ה. 

ו.

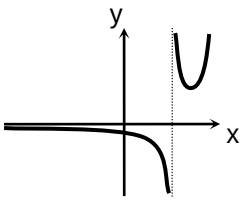
17. א. $a\ 5, b\ 3$.

ב. $x\ z3$.

ג. עולה: $4 ! x$ **יורדת:** $4\ z\ x\ 3, xz\ x\ 3$.

ד. $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

ה.



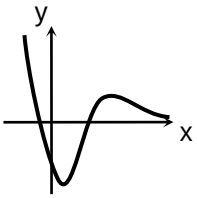
18. א. $a\ \frac{1}{3}$.

ב. כן: $\left(\frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}, 11\right)$.

ג. עולה: $11\ x\ 1$ **יורדת:** $11\ x, 1\ x$.

ד. $\left(0, \frac{1}{e}\right), (0, 7), (0, 1)$.

ה.

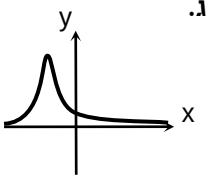


19. א. $k\ 1$, $f(x)\ \frac{1}{e^{3x^2\ 6x\ 1}}$

ב. $\left(1, e^2\right)$

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$
נמצא בתחום $0\ f(x)\ e^2$.

ג.

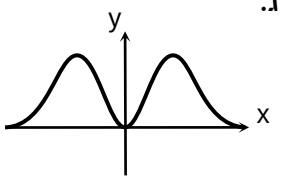


20. א. $a\ 1$, $f(x)\ x^2 e^{\frac{1}{4}x^2}$

ב. $\left(0,0\right)$ Min, $\left(2, \frac{4}{e}\right)$ Max.

ד. $k\ \frac{4}{e}\ 0$.

ג.

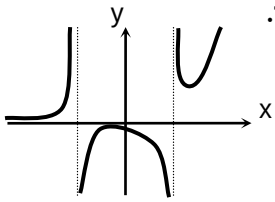


21. א. $m\ 6$, $f(x)\ \frac{e^{2x}}{x^2\ 6}$.

ב. $\left(2, \frac{1}{2e^4}\right)$ Max, $\left(3, \frac{e^6}{3}\right)$ Min.

ג. $\left(0, \frac{1}{6}\right)$.

ד.

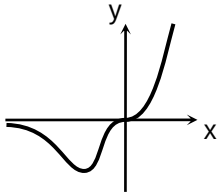


22. א. $x\ 0, 1.5$. **נקודת הקיצון היא:** $\left(1.5, \frac{3}{8}e^3\right)$ Min.

ב. $y\ 0$.

ד. שתי נקודות.

ג.



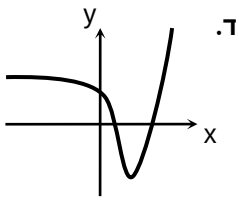
23. א. $12 \quad b \quad 12 \quad a$. **ב. עולות:** $x \ln 6 \ ! \ x$ **יורדות:** $x \ln 6$. **ג. הפונקציה** $g(x)$ **שואפת לישר** $y \quad 12$ **במינוס אינסוף.**

24. א. $\text{Min} \ln 3, 1$.

ב. עולה: $x \ln 3 \ ! \ x$ **יורדת:** $x \ln 3$.

ג. $0,3 \quad , \quad \ln 4,0 \quad , \quad \ln 2,0$.

ד.



25. א. $4 \quad a$ **ב.** $x \ln 2$ **ג.** $5 \quad b$ **ד.** $0,0$. **26. א.** $7 \quad a$ **ב.** $x \ln 2$ **ג.** $10 \quad b$ **ד. לא.** **27. ג.** $4 \quad y$.

28. א. $7 \ln 81 \quad y \quad x$ **ג.** $\text{Min} \ \frac{1}{3}, \sqrt[3]{9}$. **29. א.** $2 \quad a$ **ב. עולה:** $\frac{1}{\ln 2} \ ! \ x$ **יורדת:** $\frac{1}{\ln 2} \quad x$ **ג.** $1 \quad k$

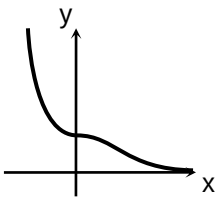
ד. $0,0$.

30. א. $4^{1-x} \ln 4 \quad 4^x \ln 4$ **ב.** $4 \quad k$ **ג.** $0,1$ **ד.** $1 \quad 4 \ln 4 \quad x \quad y$.

31. א. $0,1$ **- נקודת פיתול.**

ב. יורדת: $x \ z0 \ x$.

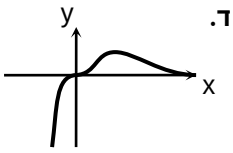
ג.



32. א. $k \quad 3 \qquad f(x) \quad x^3 e^{3x}$, **ד.**

ב. ב. לא.

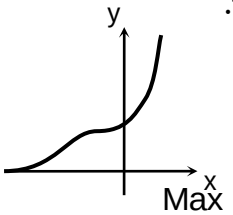
ג. עולה: $x \quad 0 \ , x z \ 1$ **יורדת:** $x \ ! \ 1$.



33. א. לא. **ד.**

ב. עולה: $x \ z \ 0.5$.

ג. $0,1$.



34. א. $k \quad 1.5$, $y \quad x^3 e^{1.5x^2}$ **ב.** $0,0$ **פיתול. ג.** $\text{Min} \ 1, e^{1.5}$, $\text{Max} \ 1, e^{1.5}$

ד. עולה: $1 \quad x \quad 1 \ , \ x z 0$ **יורדת:** $1 \ ! \ x \quad 1 \ , x$.

שאלות העוסקות בפונקציה לוגריתמית:

1. נתונה הפונקציה הבאה: $y \quad x \ln x \quad 4$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

2. נתונה הפונקציה הבאה: $y \quad \ln x \quad \frac{1}{x}$.

א. (1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
(2) האם יש לגרף הפונקציה אסימפטוטות המקבילות לצירים? אם כן מצא אותן.
ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.
ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

3. נתונה הפונקציה הבאה: $y \quad \ln \frac{2x \quad 1}{x \quad 1}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
ד. הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4. נתונה הפונקציה הבאה: $y \quad \ln x \quad \sqrt{3 \quad 2x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה ?
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הגדרתה.
ג. מצא את האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.

5. נתונה הפונקציה הבאה: $y \quad \ln x^2 \quad 4x \quad 4$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
ב. האם יש לגרף הפונקציה אסימפטוטות? אם כן מצא אותן.
ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

6. נתונה הפונקציה הבאה: $y \quad \ln \quad x^2 \quad 4x \quad 3$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ב. מצא את האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה.
ג. הראה כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- x .
ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

7. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) \quad \ln x^2$.

א. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

(1) מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

(2) האם יש לפונקציה נקודות קיצון? נמק והראה חישוב מתאים.

(3) האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית? אם כן מהי?

(4) כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

(5) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .

(6) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ב. נתונה הפונקציה: $g(x) \quad \ln x^2$ **. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.**

8. נתונה הפונקציה: $f(x) \quad \ln x^2 \quad a\ln x^2$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x **בנקודה שבה:** $x \quad e^2$.

א. מצא את a .

ב. מצא האם גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x **בנקודות נוספות.**

ג. הראה כי הפונקציה מקבלת ערך מינימלי שהוא 1-.

9. נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) \quad \frac{x}{\ln x}$ **ו-** $g(x) \quad \frac{\ln x}{x}$.

א. קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים.

נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.

(1) לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.

(2) לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x **זהה.**

(3) לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.

(4) לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.

ב. בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x **שלהן זהה.**

הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y **של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.**

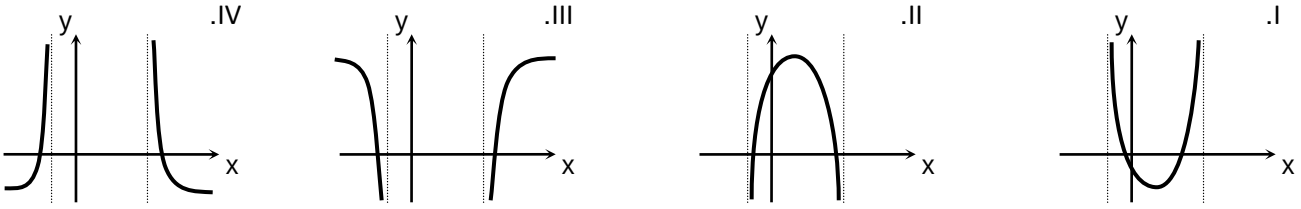
10. נתונה הפונקציה הבאה: $y \quad \ln x^2 \quad 6x \quad 7$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y **?**

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



11. א. פתור את המשוואה הבאה: $\ln x \cdot e^{\ln x \cdot \sqrt{e}} = \ln 2^{0.5}$.

נתונה הפונקציה: $f(x) = \ln x \cdot e^{\ln x \cdot \sqrt{e}}$.

ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = e$.

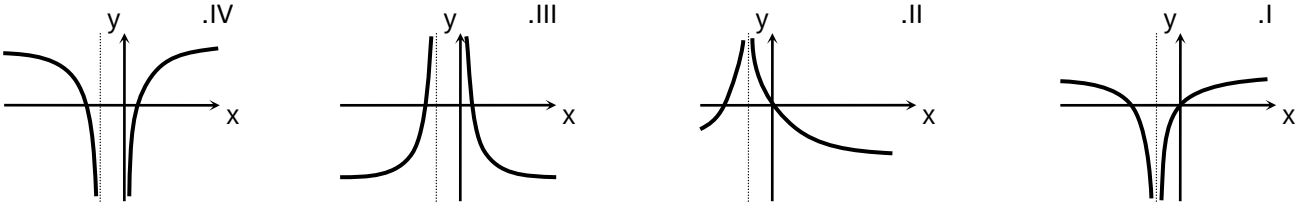
12. נתונה הפונקציה: $y = \ln x^2 - 2x + 1$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה-y ?

ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. לפניך 4 גרפים: I , II , III , ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השליליות של הפונקציה.

13. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln^2 x - a$ **פרמטר.**

א. הבע באמצעות a **את: (1) תחום ההגדרה של הפונקציה.**

(2) האסימפטוטה האנכית של גרף הפונקציה.

ב. באיזה תחום צריך להימצא a **עבורו האסימפטוטה של הפונקציה תהיה מימין לציר ה-y ?**

ג. (1) הראה כי עבור התחום שמצאת בסעיף הקודם יש לגרף הפונקציה נקודת קיצון עם שיעור x **חיובי.**

(2) הוכח כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה-x **וקבע את סוגה.**

ד. מצא את a **אם ידוע כי הפונקציה עולה בתחום:** $x > 4!$.

14. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \dfrac{x - a}{\ln x - a}$ **פרמטר חיובי.**

א. הבע באמצעות a **את:**

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודת הקיצון של הפונקציה.

(3) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

(4) האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.

ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה בתחום: $x \geq e^2$. **מצא את** a.

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ד. נתון הישר: $y = k$. **מצא את תחום הערכים של** k **עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.**

15. נתונה הפונקציה הבאה: $y \quad x \quad k \ln x \quad k \quad 1$ **פרמטר.** k , k

א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y' \quad \ln x \quad k$.

ב. הבע באמצעות k **את:**

(1) נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

(2) נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. ידוע כי נקודת הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה-y **. מצא את** k .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. העזר בסקיצה של גרף הפונקציה והוכח כי אי-השוויון הבא: $x \quad 1 \quad \ln x \quad 1 \quad 1 \quad t \quad 1$

מתקיים עבור כל x .

16. נתונה הפונקציה: $f(x) \quad x \ln x^{2}$.

א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. (1) הוכח כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) \quad \ln x^{2} \quad 2\ln x$.

(2) הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה-x .

ג. האם יש לגרף הפונקציה אסימפטוטות? נמק.

ד. נתון הישר: $y \quad 4x$ **. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הישר.**

17. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) \quad \ln\frac{x}{x \quad a}$, $a \quad 0$.

א. הבע באמצעות a **את:**

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

ג. נגזרת הפונקציה מקיימת: $f'(1) \quad \frac{1}{2}$ **. מצא את** a .

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

18. נתונה הפונקציה: $f(x) \quad \ln^{2} x \quad a$, $a \neq 0$.

א. הראה כי הנגזרת השנייה של הפונקציה היא: $f''(x) \quad \frac{2 \quad 2\ln x \quad a}{x \quad a^{2}}$.

ב. הבע באמצעות a **את שיעורי הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.**

ג. מצא את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה העובר דרך הנקודה המאפסת את הנגזרת השנייה.

ד. הבע באמצעות a **את משוואת המשיק הנ"ל.**

ה. המשיק חותך את ציר ה-y **בנקודה שבה** $y \quad \frac{2}{e} \quad 1$ **. מצא את** a .

19. נתונה הפונקציה: $f(x)=\sqrt{\ln x}$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)=\ln x$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ד. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ **והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה** $g(x)$.

ידוע כי לשתי הנקודות A ו-B אותו שיעור x, $x_A \quad x_B$.

מצא את שיעור ה-x **של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.**

20. נתונה הפונקציה הבאה: $y=k\ln x-x^3$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=3$ **הוא -26.**

א. מצא את k **וכתוב את הפונקציה.**

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ד. היעזר בסעיף הקודם והוכח את הטענות הבאות:

(1) גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה-x.

(2) גרף הפונקציה שלילי בכל תחום הגדרתו.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

21. א. פתור את המשוואה הבאה: $\ln^2 x-2\ln x=0$.

ב. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה: $f(x)=x\ln x^3$ **היא:** $f'(x)=\ln x^3+3\ln x^2$.

ג. הוכח כי הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f''(x)=\frac{3\ln^2 x+6\ln x}{x}$.

ד. הראה כי אחת מהנקודות המקיימות $f''(x)=0$ **נמצאת על ציר ה-**x.

22. נתונה הפונקציה: $f(x)=\ln^3 x-3\ln x$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם הפונקציה:** $g(x)=\ln x$.

23. לפניך הפונקציה הבאה: $f(x)=\ln 1-\ln x$.

א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

24. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = x\ln^3 x - 2\ln^2 x$.

א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$.

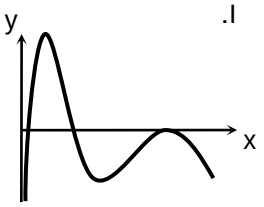
ב. מצא את התחום בו הפונקציה עולה.

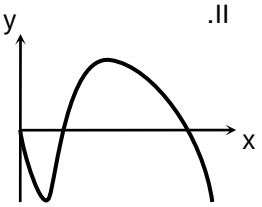
ג. (i) **כמה נקודות חיתוך עם ציר ה-**x **יש לגרף הפונקציה? נמק והראה חישוב מתאים.**

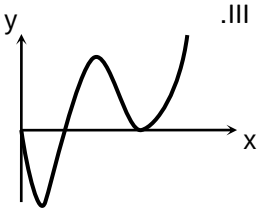
(ii) **מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.**

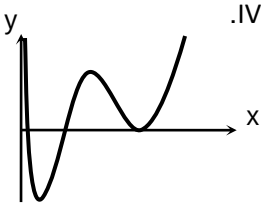
ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ **ונמק את בחירתך.**

שים לב: תשובה ללא נימוק לא תחשב.

I.


II.


III.


IV.


25. א. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{\ln 10 - x^2} = \ln^2 10 - x^2$.

(רמז: סמן $t = \ln 10 - x^2$ **ופתור עבור** t**).**

לפניך הפונקציות הבאות: $g(x) = \sqrt{\ln 10 - x^2}$, $f(x) = \ln^2 10 - x^2$.

ב. קבע אלו מהמשפטים הבאים נכונים לגבי הפונקציות ואלו לא. נמק כל הסבר בחישוב מתאים.

(i) **לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.**

(ii) **לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון אחת הנמצאת על ציר ה-**y.

(iii) **הגרפים של הפונקציות נחתכים ב-2 נקודות בלבד.**

(iv) **הפונקציות חותכות את ציר ה-**x **באותן הנקודות.**

ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$ **על סמך מה שקבעת בסעיף ב'.**

26. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 2\ln x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראה כי אין לפונקציה נקודות קיצון כלל.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר: $y = k$. **האם קיימים ערכי** k **עבורם הישר יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד?**

אם כן – מצא אותם.

27. נתונה הפונקציה: $y = \log_2(3x - 1)$.

א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

ג. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

28. נתונה הפונקציה הבאה: $y = x^2 \log_{0.5} x^2$.

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

29. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \log_3 (x^2 + ax + 9)$.

ידוע כי יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה אנכית: $x = 3$.

א. מצא את a.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. הישר $y = 6$ **חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות. מצא את נקודות אלו.**

30. נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} \frac{x+1}{x-2}$, $g(x) = 1 + \log_{\frac{1}{3}} \frac{x-2}{x}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של כל פונקציה.

ב. הראה כי הגרפים של הפונקציות לא נחתכים באף נקודה.

ג. מצא את משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ **בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-**y.

31. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \log_4 (x+2) + \log_{16} (x^2 - 4)$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. הראה כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.

ג. מעבירים ישר $y = 1$ **החותך את גרף הפונקציה.**

מצא תא שיעור ה-x **של נקודת החיתוך.**

32. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{1}{\log_4 x} - \frac{1}{\log_2 (x-2)}$.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 4$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

ד. חשב את שטח המשולש הכלוא בין המשיק והצירים.

33. נתונה הפונקציה הבאה: $y = x \log_a x$.

נגזרת הפונקציה מקיימת: $f'(3) = \frac{3}{\ln 10}$.

א. מצא את a.

ב. כתוב את משוואת המשיק בנקודה הנ"ל.

ג. חשב את שטח המשולש הנוצר בין המשיק והצירים.

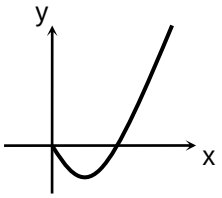
תשובות סופיות:

1. א. $x \neq 0$.

ב. $Min\ e^3,\ e^3$.

ג. $e^4, 0$.

ד.



2. א. $x \neq 0$. **ב.** $Min\ 1,1$. **ג. עולה:** $x \neq 1$ **יורדת:** $0 < x < 1$.

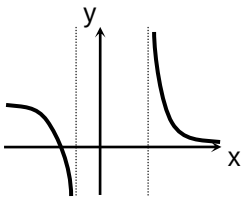
3. א. $x \neq 1, \frac{1}{2}$ x .

ב. $1, \frac{1}{2}$ x .

ג. $2,0$.

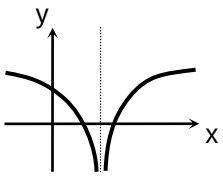
ד. מתקבל: 0 $y' = \frac{3}{2x(x-1)}$.

ה.



4. א. $0 < x < 1.5$ **ב.** $1,1$ **ג.** $x > 0$.

ה.



5. א. $x \in z2$.

ב. $x = 2$.

ג. עולה: $x \neq 2$ **יורדת:** $x = 2$.

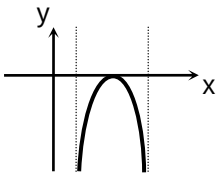
ד. $3,0$, $1,0$, $0,\ln 4$.

6. א. $1 < x < 3$.

ב. $x = 1,3$.

ג. $2,0$.

ד.



7. א. (1) $x \in z0$.

(2) לא. הנגזרת היא: $y' = \frac{2x}{x^2}$ **והרי ש-**$x \in z0$.

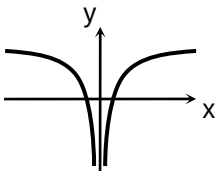
(3) $x = 0$.

(4) עולה: $x \neq 0$ **יורדת:** $x = 0$.

(5) $1,0$, $1,0$.

ב. $4, e^2, 1,0$.

א. (6)



8. א. $a = 1$. **ב.** $1,0$. **ג. לגרף הפונקציה נקודת מינימום יחידה והיא:** $e, 1$.

לכן ערך הפונקציה המינימלי הוא 1-.

9. א. (1) לא נכון. תחום ההגדה של $f(x)$ **הוא:** $x < 0, x > 1$ **ותחום ההגדרה של** $g(x)$ **הוא:** $x \neq 0$.

(2) לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x = e$ **אך עבור** $f(x)$ **מדובר במינימום ועבור** $g(x)$ **מדובר במקסימום.**

(3) לא נכון. עבור $f(x)$ **: עולה:** $x \in e$ **יורדת:** $x \notin e$. **ועבור** $g(x)$ **: עולה:** $0 < x < e$ **יורדת:** $x > e$.

(4) נכון.

ב. לגבי כל נקודה נאמר כי היא שיעור ה-y **שלה הוא:** $\frac{x}{\ln x}$ **ו-**$\frac{\ln x}{x}$. **נכפול:** 1. **נקפול:** $\frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x}$.

10. א. $x \in 7, x \neq 1$ **ב.** $x \neq 7, 1$ **ג. עולה:** $x \in 7$ **יורדת:** $x \neq 1$.

ד. III. <u>הסבר</u>: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום. באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

11. א. $x \neq e$. **ב. מתקבל:** $\frac{e}{x \cdot e} > 0$. **ג.** $y' > 0$. $y = \frac{1}{2e} x \cdot \ln 2$.

12. א. $x \neq 1$ **ב.** $x \neq 1$ **ג. עולה:** $x \neq 1$ **יורדת:** $x = 1$

ד. I. <u>הסבר:</u> באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים. באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת.

13. א. (1) $x \neq a$ **(2)** $x = a$ **ב.** $a > 0$. **ג. (1) מתקבל:** $0 \neq (1-1)!$ $x \neq 1$ a. **(2)** $\text{Min}\{1-a, 0\}$

ד. $a = 3$.

14. א. (1) $x \neq a, x \neq 1$ $a > 0$. $x \neq a$.

(2) e a, e.

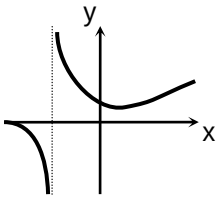
(3) $\left(0, \frac{a}{\ln a}\right)$.

(4) $x > 1$ $a > 1$.

ב. $a > 2$.

ד. $ke > 0$.

ג.

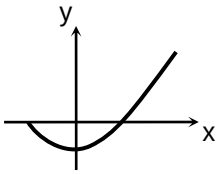


15. ב. (1) $k > 1$, k.

(2) $\ln k > 1$ $0,k$, $k,0$, e $k,0$. $k,0$

ג. $k > 1$.

ד.



16. א. $x \neq 0$. **ב.** $0,1$. **ג. לא. גרף הפונקציה שואף ל-0 בגבול שלו. ד.**

$\left(\frac{1}{e^2}, \frac{4}{e^2}\right)$, $(e^2, 4e^2)$.

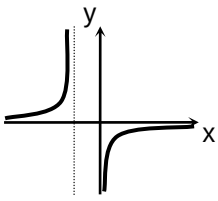
17. א. (1) $x > a$, $x \neq 0$

(2) $x < 0$, a.

ב. מתקבלת הנגזרת: $\frac{a}{x \cdot x - a} < 0$. y'.

ג. $a > 1$.

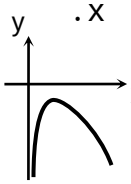
ד.



18. ב. $1,e$ a . **ג.** m $\frac{2}{e}$. **ד.** 1 $\frac{2a}{e}$ x $\frac{2}{e}$ y . **ה.** 1 a .

19. א. $t1$ x . **ב. מתקבל:** 0 $f'(x)$ $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$. **ג.** $1,e$, $0,1$. **ד.** $\sqrt[4]{e}$ x .

20. א. 3 k , $3\ln x$ x^3 y . **ה.**



ב. 0 x !

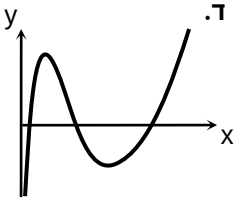
ג. 1 Max $1,$.

ד. (1) + (2) הערך המקסימלי של הפונקציה הוא 1- ולכן גרף הפונקציה לא נוגע בציר ה-x וכולו שלילי.

21. א. $1,\frac{1}{e^2}$ x $1,$ **ד.** $1,0$.

22. א. 0 x !

ד.

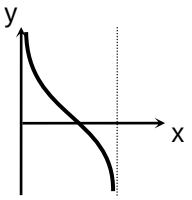


ב. $0,$ $e^{\sqrt{3}}$, $0,$ $e^{\sqrt{3}}$, $1,0$.

ג. $2,$ Max e^1 , Min $e,$ 2 .

ה. 2 , e^2 , $2,$ e^2 , $1,0$.

23. א. e x 0 . **(שימו לב כי תנאי ת.ה. הם:** 0 x $\ln x$ 1 **וגם** 0 x !**).** **ד.**



ב. 0 $\frac{1}{x\ 1\ \ln x}$ $\frac{\frac{1}{x}}{1\ \ln x}$ $f'(x)$ **- ולכן הפונקציה יורדת בת.ה.**

ג. $1,0$.

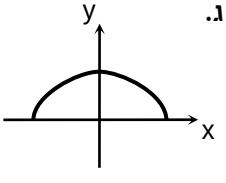
24. ב. e^1 x e^4 , $1!$ x .

ג. (i) **2 נקודות והן:** $0,$ e^2 , $1,0$. **הנקודה שבה:** 0 x **לא קיימת עקב ת.ה.**

(ii) e^2 xz , 1 x .

ד. III **– בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה. שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.**

25. א. $r2.7$ $x_{3,4}$, $r3$ $x_{1,2}$. **ג.**



ב. (i) **לא. עבור:** $f(x)$ **ת.ה. הוא:** 3.16 x 3.16 .

עבור: $g(x)$ **ת.ה. הוא:** 3 dx 3 .

(ii) **כן. עבור** $f(x)$ **הנקודה:** Max $0,5.3$.

עבור: $g(x)$ **הנקודה:** Max $0,1.5$.

(iii) **לא. מסעיף א' ניתן לראות כי הגרפים חותכים זה את זה ב-4 נקודות שונות.**

(iv) **כן.** $3,0$, $3,0$.

26. א. $x \in (0,1)$, $x \neq e^{-2}$.

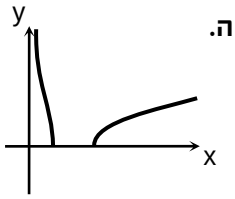
ב. ניתן לראות כי: $x \neq e^{-2}$ o $f'(x) \quad \frac{\frac{2\ln x}{x} \quad \frac{2}{x}}{2\sqrt{\ln^2 x \quad 2\ln x}} \quad \frac{2\ln x \quad 2}{2x\sqrt{\ln^2 x \quad 2\ln x}} \quad \frac{\ln x \quad 1}{x\sqrt{\ln^2 x \quad 2\ln x}}$

הפתרון נפסל עקב ת.ה. ולכן אין נקודות קיצון כלל.

ג. $(0,0)$, $(e^{-2},0)$, $(1,0)$.

ד. עולה: $x \in e^{-2}$. **יורדת:** $0 \quad x \quad 1$.

ה.

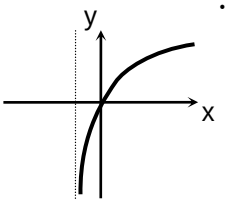


ו. לא. הגרף תמיד יחתך בשתי נקודות כאשר $k \quad 0$ **ובאף נקודה כאשר:** $k \quad 0$.

27. א. $x \in \left(\frac{1}{3}, \infty\right)$.

ב. מתקבל: $0 \quad \frac{3}{3x \quad 1 \ln 2}$ y' .

ד.



28. א. $x \in 0$. **ב.** $Max\ 0.606, 0.53$; $Max\ 0.606, 0.5$.

ג. עולה: 0.60 $x \quad 0.606$, $0 \quad x$ **יורדת:** $0.60 \quad x$, $0 \quad x \quad 0.606$.

29. א. $a \quad 6$. **ב.** $(2,0)$, $(4,0)$. **ג.** $(30,6)$, $(24,6)$.

30. א. עבור $f(x): x \quad 2$, $x \quad 1$. **עבור** $g(x): x \quad 2$, $x \quad 0$. **ב. הנקודה המתקבלת (1.5) אינה בתחום.**

ג. $y \quad \frac{\ln 2}{\ln 3} \quad \frac{1}{\ln 3} x$.

31. א. $x \neq 2$. **ב. מתקבל:** $0 \quad \frac{2}{x^2 \quad 4\ln 4}$ y' . **ג.** 2.266 $x \quad 2\frac{4}{15}$.

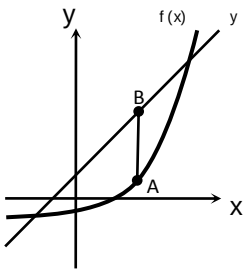
32. א. $x \neq 2$, $x \neq 3$. **ב.** $\frac{5 \quad \ln 16}{\ln 4} \quad \frac{5}{4\ln 4} x$. **ג.** $\left(0, \frac{5 \quad \ln 16}{\ln 4}\right)$, $\left(\frac{4 \quad 5 \quad \ln 16}{5}, 0\right)$.

ד. $S \quad \frac{2 \quad 5 \quad \ln 16^2}{5\ln 4}$.

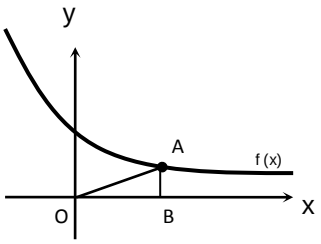
33. א. $a \quad 2$. **ב.** $\frac{9}{\ln 10} \quad \frac{3}{\ln 10} x$. **ג.** $S \quad \frac{27}{\ln 100}$.

5.5 - שאלת מסכמות בעיות קיצון:

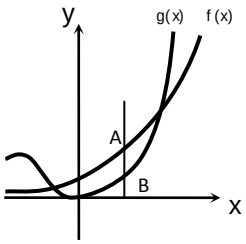
שאלות העוסקות בפונקציה מעריכית:



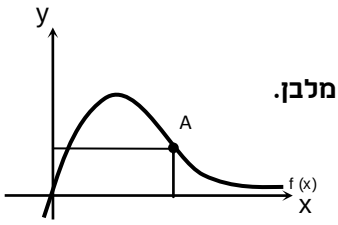
1. באיור שלפניך נתונות הפונקציה: $f(x) = e^{x-1}$ והישר: $y = ex - 3$.
מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ונקודה B על גרף הישר y כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.
מבין כל הקטעים המתקבלים באופן זה מצא את אורך הקטע AB המקסימלי.



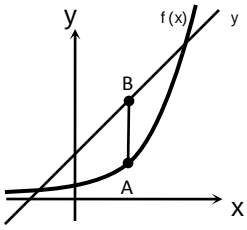
2. לפניך גרף הפונקציה: $f(x) = e^{3-x}$.
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה וממנה מעבירים אנכים לצירים כך שנוצר המשולש ABO.
א. מצא את שיעורי הנקודה A עבורם שטח המשולש יהיה מקסימלי.
ב. מה הוא שטח המשולש במקרה זה?



3. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 8e^{x}$ ו-$g(x) = x^2 e^{x}$.
הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.
א. מצא את נקודות החיתוך בין הגרפים.
ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורם אורך הקטע AB הוא מקסימלי.
ג. מה הוא האורך המקסימלי?

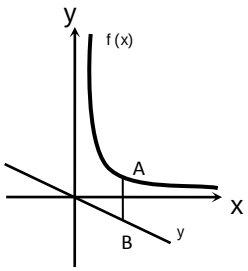


4. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4xe^{x}$.
מסמנים נקודה A על גרף פונקציה וממנה מעבירים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן.
א. מצא את שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן הוא מקסימלי.
ב. מה הוא שטח המלבן במקרה זה?



5. נתונה הפונקציה: $f(x) = ke^{2x}$ והישר: $y = 2ex - 3$.
ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0.5$ מקביל לישר הנתון.
א. מצא את k וכתוב את הפונקציה.
ישר המקביל לציר ה-y חותך את גרף הפונקציה בנקודה A ואת הישר בנקודה B.
ב. הוכח כי הקטע AB הוא בעל אורך מקסימלי כאשר הנקודה A היא נקודת ההשקה.

6. א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)\ \frac{1}{x}$ המקביל לישר: $y\ ex$ בתחום: $x\ !\ 0$.



מעבירים קטע המקביל לציר ה-y וחותך את גרף הפונקציה ואת הישר בנקודות A ו-B בהתאמה.

ב. הוכח כי הקטע המינימלי המתקבל באופן זה הוא כאשר A היא נקודת ההשקה של המשיק שמצאת בסעיף הקודם.

7. נתונה הפונקציה: $f(x)\ \ 2e^{2x}\ \ 8x^{2}\ \ 7$.

א. מצא באיזו נקודה יש להעביר משיק לגרף הפונקציה ששיפועו יהיה מינימלי.

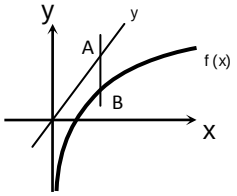
ב. כתוב את משוואת המשיק.

8. א. מצא נקודה על גרף הפונקציה: $f(x)\ \ 5xe^{x}$ שבה שיפוע המשיק הוא מינימלי.

ב. כתוב את משוואת המשיק ומצא את נקודות החיתוך שלו עם הצירים.

<u>שאלות העוסקות בפונקציה לוגריתמית:</u>

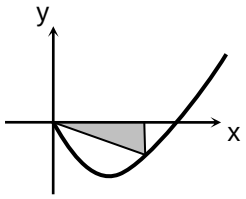
9. נתונה הפונקציה: $f(x)\ \ln x$. הנקודה A נמצאת על הישר $y\ \frac{1}{2}x$



והנקודה B נמצאת על הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

מצא את שיעורי הנקודה A עבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

10. לפניך גרף הפונקציה: $f(x)\ \ x\ln x\ \ 2x$.

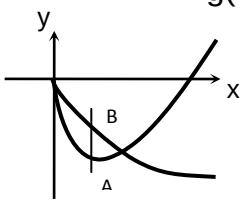


הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה בתחום: $0\ \ x\ \ e^{2}$.

מהנקודה A מעלים אנך לציר ה-x כך שנוצר המשולש המתואר באיור.

מצא את שיעורי הנקודה A עבורם שטח המשולש יהיה מקסימלי.

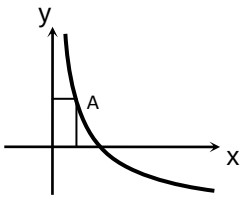
11. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)\ \ x\ln x\ \ 4x$ ו-$g(x)\ \ x\ln x$.



הנקודות A ו-B נמצאות בהתאמה על הגרפים של הפונקציות $f(x)$ ו-$g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

מצא את אורך הקטע AB המקסימלי בתחום: $0\ \ x\ \ e^{2}$.

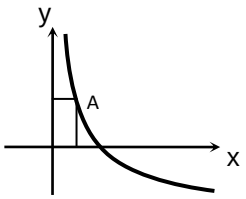
12. נתונה הפונקציה: $y\ \ \ln x\ \ \frac{6}{x}$ בתחום: $x\ !\ 0$.



מהנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן.

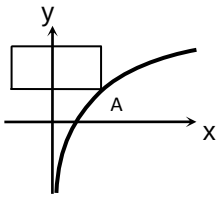
מצא את שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן המתקבל הוא מקסימלי.

13. נתונה הפונקציה: $y \quad \ln x \quad \frac{6}{x}$ **בתחום:** $x \; ! \; 0$.



מהנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן.
מצא את שיעורי הנקודה A עבורם היקף המלבן המתקבל הוא מינימלי.

14. לפניך גרף הפונקציה: $y \quad 4\ln x$ **בתחום:** $x \; ! \; 0$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה.
מהנקודה $C \quad 2,4$ **מעבירים ישרים המקבילים לצירים כך שנוצר מלבן.**
א. מצא את שיעורי הנקודה A עבורם היקף המלבן יהיה מקסימלי.
ב. חשב את היקף המקסימלי של המלבן.

15. א. מצא על גרף הפונקציה: $f(x) \quad \frac{x}{\ln x \quad 1}$ **נקודה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה הוא מקסימלי.**
ב. מהו השיפוע המקסימלי?
ג. כתוב את משוואת המשיק המתקבל במקרה זה.

16. א. מצא על גרף הפונקציה: $f(x) \quad \ln x^{\,2} \quad 8\ln x$ **נקודה שבה שיפוע המשיק העובר דרכה הוא מקסימלי.**
ב. מהו השיפוע המקסימלי?
ג. כתוב את משוואת המשיק המתקבל במקרה זה.

<u>תשובות סופיות:</u>

1. $AB_{Max} \quad e \quad 4$

2. א. $A \quad 1,e^2$ **ב.** $S \quad e^2$

3. א. $\sqrt{8},\frac{4}{e^{\sqrt{8}}}$, $\sqrt{8},4e^{\sqrt{8}}$ **ב.** $A \quad 2,8e^2$ **ג.** $AB_{Max} \quad 4e^2$

4. א. $A \quad 2,\frac{8}{e^2}$ **ב.** $S \quad \frac{16}{e^2}$ **5. א.** $k \quad 1$ **6. א.** $f(x) \quad e^{2x}$, $y \quad ex \quad 2\sqrt{e}$

7. א. $\ln\sqrt{2},10.03$ **ב.** $y \quad 2.45x \quad 9.18$ **8. א.** $2,\frac{10}{e^2}$ **ב.** $y \quad \frac{5}{e^2}x \quad \frac{20}{e^2}$ **החיתוכים:** $4,0$, $0,\frac{20}{e^2}$.

9. $A \quad 2,1$ **10.** $A \quad e^{1.5},\ 0.5e^{1.5}$ **11.** $AB_{Max} \quad 2e$ **12.** $A \quad e^{\,1},6e \quad 1$ **13.** $A \quad 3,2 \quad \ln 3$.

14. א. $A \quad 4,4\ln 4$ **ב.** $P \quad 10 \quad 4\ln 4$ **15. א.** $e,\frac{1}{2}e$ **ב.** $m \quad \frac{1}{4}$ **ג.** $y \quad \frac{1}{4}x \quad \frac{1}{4}e$.

16. א. $e^5,\ 15$ **ב.** $m \quad \frac{2}{e^5}$ **ג.** $y \quad \frac{2}{e^5}x \quad 17$.

5.6 - שאלות מסכמות - חשבון אינטגרלי:

שאלות העוסקות בפונקציות טריגונומטריות:

מציאת פונקציה קדומה בלבד:

1. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \sin 2x$.
מעבירים לפונקציה משיק באחת מנקודות המקסימום שלה שמשוואתו: $y = 1$.
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. הראה כי המשיק הנ"ל משיק לכל נקודות המקסימום של הפונקציה. נמק את תשובתך.

2. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = k\cos 2x - \sin x$.
ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה באחת מנקודות החיתוך שלה עם ציר ה-x היא: $y = 1.5x - \frac{\pi}{4}$.
א. מצא את ערך הפרמטר k.
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-x בתחום: $0 \le x \le 2\pi$.

3. א. הוכח את הזהות הבאה: $\sin 4x = 4\sin x\cos x - 8\sin^3 x\cos x$.
ב. הנגזרת של הפונקציה: $f(x)$ היא: $f'(x) = 4\sin x\cos x - 8\sin^3 x\cos x$.
הוכח כי אם גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים אז משוואתו היא: $f(x) = \frac{\cos 4x}{4}$.
ג. מצא את שיעור ה-y של נקודת המקסימום של הפונקציה (שים לב כי לכל נקודות המקסימום שיעור y זהה).

4. א. הוכח את הזהות הבאה: $\cos^2 2x = 2\sin^2 x - 1$.
ב. הנגזרת של הפונקציה: $f(x)$ היא: $f'(x) = \cos^2 2x - 2\sin^2 x - 3\sin x$.
מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי היא עוברת בנקודה: $\left(\frac{\pi}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$.
ג. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום: $0 \le x \le \pi$ שבה שיעור ה-x זהה לשיעור ה-y.

5. א. הוכח את הזהות הבאה: $\cos x = \sin x\cos x - \sin x\cos x$.
ב. הנגזרת של הפונקציה: $f(x)$ היא: $f'(x) = k\cos x - \sin x\cos x - \sin x\cos x$.
מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה שבה: $x = \pi$ שמשוואתו היא: $y = 2x - \pi$.
(1) מצא את ערך הפרמטר k.
(2) מצא את הפונקציה $f(x)$.
ג. הוכח כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y מקביל למשיק הנתון.

6. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = a\sin x - b\cos x$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$ **ומשוואתו היא:** $y = 2x + 1$ **ומשיק נוסף בנקודה שבה** $x = 0.5\pi$ **ומשוואתו:** $y = x + 2 - 0.5\pi$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a **ו-**b.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x **בתחום:** $0 \le x \le 2\pi$.

7. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = a\sin 2x - b\cos x$.

מעבירים משיקים לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 0$ **ומשוואתו:** $y = 2x + 1$ **ובנקודה שבה** $x = 0.5\pi$ **ומשוואתו:** $y = 3x$.

א. מצא את ערכי הפרמטרים a **ו-**b.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא בכמה נקודות חותך המשיק $y = 3x$ **את גרף הפונקציה בתחום:** $0 \le x \le 2\pi$.

8. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = \sin 2x - \cos x$.

ידוע כי הפונקציה $f(x)$ **חותכת את ציר ה-**x **באותן הנקודות שבהן חותכת הפונקציה** $g(x) = \sin^2 x - 2\sin x - 3$ **את ציר ה-**x.

א. מצא נקודה שבה הפונקציה $g(x)$ **חותכת את ציר ה-**x.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. הוכח כי הגרפים משיקים זה לזה אך ורק על ציר ה-x.

9. הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f''(x) = \sin 2x$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה x **היא:** $y = 2x + 1 - 0.5\pi$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה: $g(x) = 1.5x - 1 - \cos x$ **עם גרף הפונקציה** $f(x)$ **בתחום:** $0 \le x \le 2\pi$.

10. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = \cos x - \sin x$.

א. ידוע כי הפונקציה המקורית עוברת בראשית הצירים.

הוכח כי הנגזרת $f'(x)$ **והפונקציה המקורית** $f(x)$ **מקיימות את המשוואה:** $f'(x) - f(x) = 2\sin x$.

ב. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ **באופן הבא:** $g(x) = f'(x) - f(x)$.

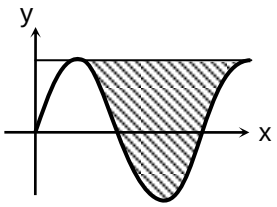
(1) מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה-y **של הפונקציה** $g(x)$.

(2) מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה ביותר לציר ה-y **של הפונקציה** $f(x)$.

(3) כתוב את משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות שמצאת בסעיפים (1) ו-(2).

חישובי שטחים (ללא מציאת פונקציה קדומה):

11. באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y = \sin x$.

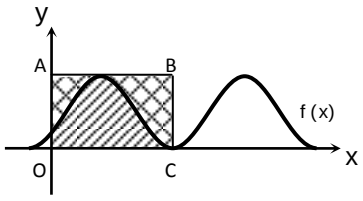


א. (1) מצא את נקודת המקסימום של הפונקציה בתחום: $0 < x < 2\pi$.

(2) כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום.

ב. חשב את השטח כלוא בין גרף הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף הקודם.

12. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin 2x - 1}{2}$ **בתחום:** $0 \le x \le 2\pi$.



מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים

אנך לציר ה-x מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x - C

כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x יסומן ב-S_1 (המקווקו).

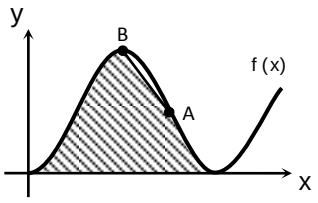
השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה-y יסומן ב-S_2 (שביהלום).

א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

13. א. הוכח את הזהות: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$.

ב. באיור שלפניך נתון הגרף הפונקציה: $f(x) = 2\sin^2 x$.



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ושיעוריה: $A = (0.75, S_1)$.

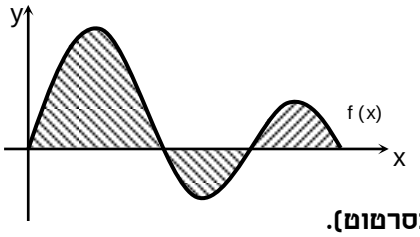
מחברים את הנקודה A עם נקודת המקסימום של הפונקציה –B.

(1) כתוב את משוואת הישר AB.

(2) חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-x.

14. א. חשב את האינטגרל המסוים הבא: $\int_0^{1\frac{1}{3}\pi} (3\sin x - \sin 2x)\,dx$.

נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin x - \sin 2x$ **בתחום:** $0 \le x \le 1\frac{1}{3}\pi$.



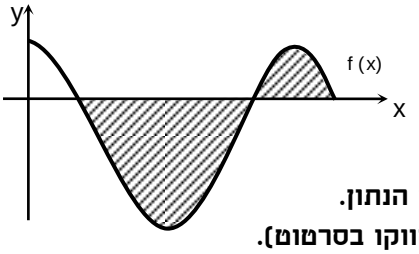
ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בתחום הנתון.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x (המקווקו בסרטוט).

ד. הסבר מדוע התוצאות של סעיף א' ו-ג' שונות.

15. א. חשב את האינטגרל המסוים הבא: $\int_{\frac{\pi}{6}}^{1.5\pi} (3\cos 2x - \sin x)\,dx$.

נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos 2x - \sin x$ **בתחום:** $0 \le x \le 1.5\pi$.

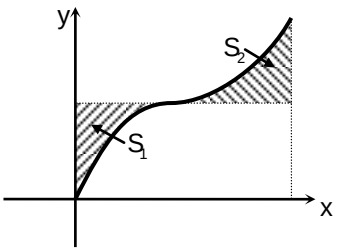


ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בתחום הנתון.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x בלבד (המקווקו בסרטוט).

ד. הסבר מדוע התוצאות של סעיף א' ו-ג' שונות.

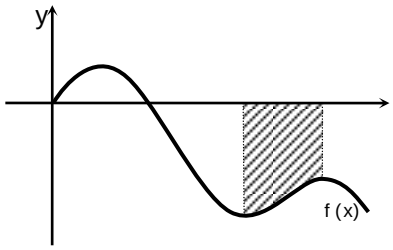
16. באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y = x - \sin x$ בתחום: $0 \le x \le 2\pi$.



א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון בתחום הנתון? אם כן מהן? הוכח.

ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה-x בנקודה שבה: $x = 2\pi$.
מעבירים ישר המקביל לציר ה-x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראה כי השטחים S_1 ו-S_2 המסומנים בסרטוט שווים.

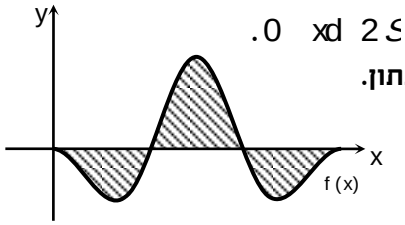
17. באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x - \sin x}{2}$ בתחום: $0 \le x \le 3\pi$.



א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
מעלים אנכים לציר ה-x משתי נקודות הקיצון האחרונות בתחום הנתון.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, אנכים אלו וציר ה-x.

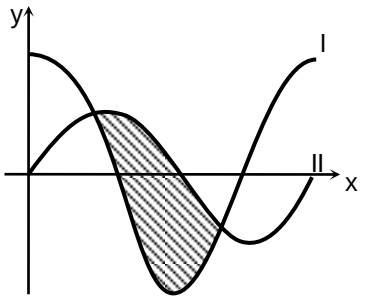
18. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \cos x - \cos 2x$ בתחום: $0 \le x \le 2\pi$.



א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בתחום הנתון.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x בתחום הנתון.

19. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
$f(x) = 2\cos x$ ו-$g(x) = \sin x$ בתחום: $0 \le x \le 2\pi$.

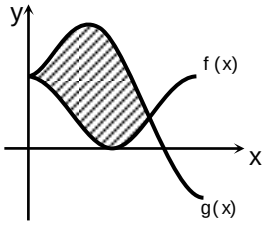


א. מצא איזה גרף מבין הגרפים I ו-II שייך לכל פונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרפים בתחום הנתון.

ג. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים (המקווקו).

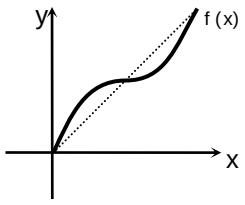
20. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה הבאות:
$f(x) = \cos^2 x - \cos x$ ו-$g(x) = \sin^2 x$ בתחום: $0 \le x \le \pi$.



א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

21. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2x + \sin 2x$ בתחום: $0 \le x \le \pi$.



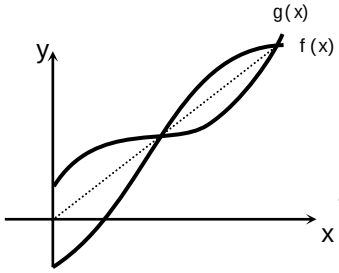
א. מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון המקיימת: $f'(x) = 0$.

ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה שמצאת עם ראשית הצירים.

ג. האם הישר שאת משוואתו כתבת בסעיף הקודם חותך את גרף הפונקציה
בנקודות נוספות בתחום הנתון? אם כן מצא אותן.

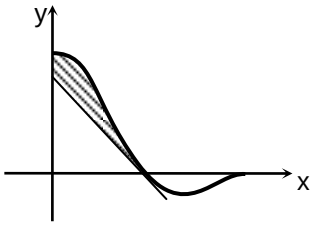
ד. חשב את השטח הכלוא בין הישר והפונקציה.

22. באיור שלפניך מתוארות הפונקציות: $f(x) = x\cos x$, $g(x) = x\cos x$.



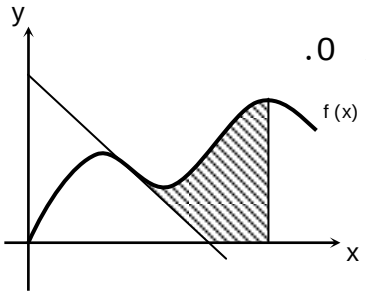
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $0 \le x \le 2\pi$.
מעבירים ישר דרך נקודות החיתוך של הגרפים שמצאת בסעיף הקודם.
ב. (1) כתוב את משוואת הישר הנ"ל.
(2) הראה כי השטחים הכלוא בין הישר וגרף הפונקציה $f(x)$ שווה לשטח הכלוא בין הישר וגרף הפונקציה $g(x)$ ומצא את שטח זה.

23. א. הוכח את הזהות הבאה: $\cos^2 x = \frac{\cos 2x + 1}{2}$.



נתונה הפונקציה: $y = \cos^2 x - \cos x$ **בתחום:** $0 \le x \le 2\pi$.
ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בתחום הנ"ל.
ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה-x שאינה קיצון.
ד. חשב את השטח הכלוא בין המשיק שאת משוואתו מצאת בסעיף הקודם, גרף הפונקציה וציר ה-y.

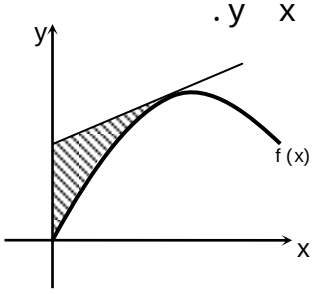
24. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$ **בתחום:** $0 \le x \le 3\pi$.



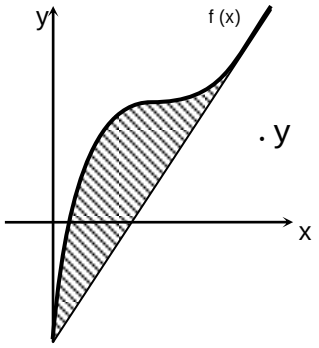
מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$ ומורידים אנך לציר ה-x דרך נקודת הקיצון האחרונה בתחום הנתון כך שנוצר שטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק, האנך וציר ה-x.
א. מצא את משוואת המשיק.
ב. מצא את נקודת הקיצון האחרונה בתחום הנתון.
ג. חשב את השטח המבוקש (היעזר באיור הסמוך).

<u>**מציאת פונקציה קדומה וחישובי שטחים:**</u>

25. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = k\cos x - 1$.
מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 0.5\pi$ **ומשוואתו היא:** $y = 2x$.
א. מצא את ערך הפרמטר k.
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.



באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה והמשיק בתחום: $0 \le x \le \pi$.
ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-y.



26. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = k\sin x - 2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2\pi$ **ומשוואתו היא:** $y = 2x - 2$.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

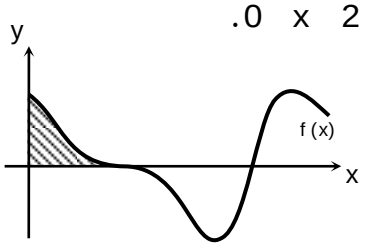
באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה והמשיק בתחום: $0 \le x \le 2\pi$.

ג. הראה כי המשיק וגרף הפונקציה נפגשים על ציר ה-y.

ד. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-y.

27. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = \cos 2x - \sin x$.

א. מצא את שיעורי ה-x **של הנקודות המקיימות:** $f'(x) = 0$ **בתחום:** $0 \le x \le 2\pi$.



ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$ **אשר אינה נקודת קיצון נ**

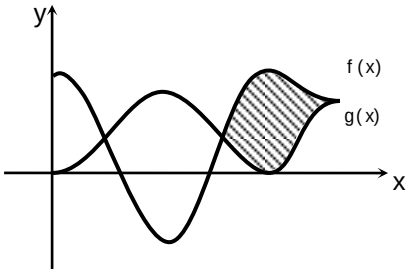
מצאת על ציר ה-x.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלפניך מתואר בגרף הפונקציה בתחום הנתון.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

28. נתונות הנגזרות הבאות: $f'(x) = k\sin 2x \cdot \cos$, $g'(x) = \sin 2x$.



ידוע כי לפונקציות $f(x)$ **ו-**$g(x)$ **יש משיק משותף בנקודה**

שבה: $x = 1.5\pi$.

א. מצא את ערך הפרמטר k.

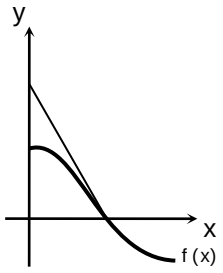
ב. מצא את הפונקציות אם ידוע כי משוואת המשיק

המשותף היא: $y = 1$.

באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שתי הפונקציות בתחום: $0 \le x \le 1.5\pi$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות בתחום הנ"ל.

ד. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים ושתי נקודות החיתוך האחרונות בתחום.



29. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = a\sin ax$.

א. הבע באמצעות a **את הפונקציה** $f(x)$ **אם ידוע כי היא חותכת את ציר ה-**y

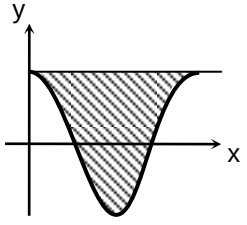
בנקודה שבה $y = 1$.

ב. מעבירים משיק מנקודת החיתוך הראשונה של הפונקציה בתחום: $x \ge 0$.

הוכח כי היחס בין השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה-y

לבין השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x **הוא גודל קבוע שאינו תלוי**

ב-a **ומצא את גודל זה.**



30. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = 4\sin 4x$.

מעבירים את המשיק $y = 1$ **לגרף הפונקציה המשיק לה בנקודת החיתוך**

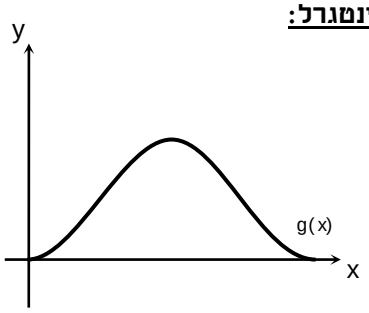
עם ציר ה-y. **חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והמשיק**

בתחום: $0 \le x \le 0.5\pi$ **(ראה איור).**

תרגילים שבהם יש לגזור תחילה ביטוי ולאחר מכן להיעזר בו בעת חישוב האינטגרל:

31. א. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

לפניך גרף הפונקציה: $g(x)=\sin^3 x\cdot\cos^2 x$.



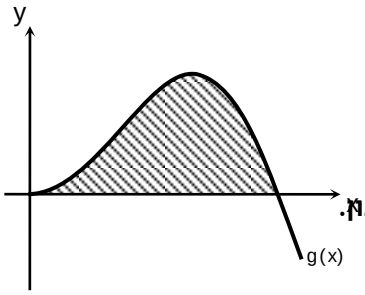
ב. הראה כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה שבה: $x=\frac{\pi}{2}$

ועובר בראשית הצירים.

ג. היעזר בסעיף א' וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x.

32. א. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\sin x-x\cos x$.

לפניך גרף הפונקציה: $g(x)=x\sin x$ **בתחום:** $0\le x\le 1.5\pi$.

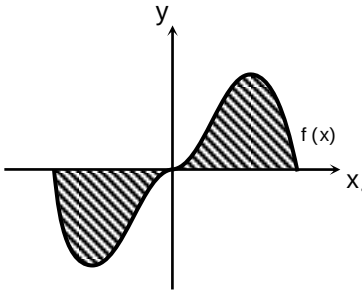


ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בתחום הנתון.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה וציר ה-x בתחום הנתון.

33. א. נתונה הפונקציה: $y=x^2\cos x+2x\sin x-2\cos x$.

הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y'=x^2\sin x$.



באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=x^2\sin x$ **בתחום:** $0\le x\le\pi$.

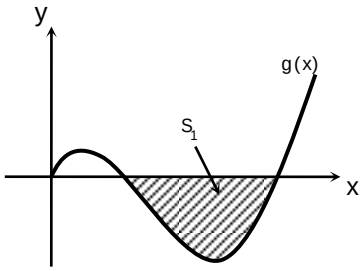
ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x בתחום הנתון.

34. א. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=x\sin x+\cos x$.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $g(x)=x\cos x$

בתחום: $0\le x\le 2\pi$.

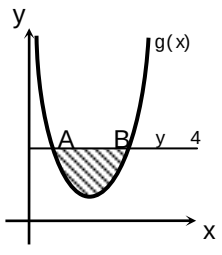


ב. מצא את כל נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x בתחום הנתון.

ג. חשב את השטח הכלוא בין ציר ה-x וגרף הפונקציה המסומן ב- S_1.

35. א. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $g(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ **בתחום:** $0<x<\pi$.



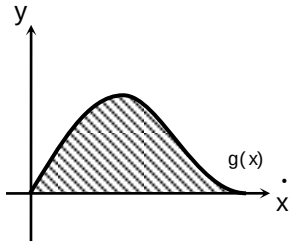
מעבירים ישר: $y=4$ **החותך את גרף הפונקציה בנקודות A ו-B שבתחום.**

ב. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ג. היעזר בסעיף א' וחשב את השטח הכלוא בין הישר והפונקציה

36. א. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=\frac{1}{3}\cos^3 x$.

באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $g(x)=\sin x\cos^2 x$ **בתחום:** $0\le x\le 0.5\pi$.



ב. הראה כי לגרף הפונקציה יש נקודת מינימום בתחום הנתון אשר משיקה לציר ה-x.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה-x בתחום הנתון.

תשובות סופיות:

1. א. $y=\sin^2 x$ **ב. ע"י השוואת הנגזרת לאפס מתקבל:** $x=0.5\pi$ **וקל לראות כי כל פתרון שני הוא נקודת מקסימום, (דהיינו, כאשר** $k=1,3,5,\ldots$**) או:** $x=0.5\pi+k\pi$ **. הזוויות המתאימות הן:** $\ldots,-90^\circ,90^\circ,270^\circ,450^\circ,\ldots$ **. ערכי הביטוי** $\sin^2 x$ **עבור זוויות אלו תמיד 1 שכן:** $\sin^2(90^\circ+k\cdot 180^\circ)=1$ **ולכן ערכי ה-y של כל נקודות המקסימום הוא 1.**

2. א. $k=2$ **ב.** $f(x)=\sin 2x\cos x$ **ג.** $\left(\frac{\pi}{6},0\right),\left(\frac{5\pi}{6},0\right),\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$.

3. א. $\sin 2x=2\sin x\cos x=2\sin x\cos x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)=2\sin x\cos^3 x+2\sin^3 x\cos x$ **ג.** $y=\frac{1}{4}$.

4. א. $\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$ **ב.** $f(x)=x-3\cos x+1$ **ג.** $0.608,-0.608$.

5. א. $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot\sin x$ **ב. (1)** $k\cdot 1$ **(2)** $f(x)=\frac{\sin 2x}{2}+x$.

6. א. $a=1,b=2$ **ב.** $f(x)=2\sin x\cos x$ **ג.** $(0,0),(1.852,1.852)$.

7. א. $a=2,b=1$ **ב.** $f(x)=\cos 2x-\sin x+3x$ **ג.** $\left(\frac{7\pi}{6},11\right),\left(\frac{11\pi}{6},17.27\right)$.

8. א. $(0,0)$ **או:** $(0,1.5\pi)$ **ב.** $f(x)=\sin^2 x-\sin x$ **או:** $f(x)=\sin^2 x+\sin x$.

9. א. $f(x)=\frac{\sin 2x}{4}+1.5x$ **ב.** $S=2.25\pi$, $S=1.5\pi$, $S=0.75\pi+1$.

10. ב. (1) $(2\pi,0.5)$ **(2)** $(\sqrt{2}\pi,0.75)$ **(3)** $y=0.745x+3.17$ **11. א. (1)** $(1\pi,0.5)$ **(2)** $y=1$ **ב.** $S=\pi$.

12. א. $y=1$ **ב.** $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi-2}{3\pi+2}\approx 1.538$

13. א. הזהות מתקבלת מ-$\cos 2x=1-2\sin^2 x$ **ב. (1)** $y=4-\frac{4}{\pi}x$ **(2)** $S=\frac{9\pi}{8}-\frac{1}{2}\approx 3.03$.

14. א. 2.25 **ב.** $(0,0),(\pi,0),\left(\frac{2\pi}{3},0\right),\left(\frac{4\pi}{3},0\right)$ **ג.** 2.75

ד. השטח המבוקש חלקו מעל לציר ה-x וחלקו מתחת. האינטגרל מחשב שטח הכלוא מתחת לציר ה-x כשטח שלילי ולכן בחישוב של סעיף א' האינטגרל חיסר את חלק זה. פירוט נוסף: ערכי השטחים

הם: $S_3 = 0.2$, $S_2 = 0.25$, $S_1 = 2.25$. **מאחר ו-** S_2 **נמצא מתחת לציר הרי שהוא שלילי.**

האינטגרל שחושב בסעיף א' ביצע: $S_1 + S_2 + S_3 = 2.25 - 0.25 - 0.25 = 2.2$ **בעוד שחישוב השטח שבוצע בסעיף ג' התייחס לשטח** S_2 **כאל גודל חיובי ולכן השטח הכללי הוא:** $S_1 + S_2 + S_3 = 2.25 + 0.25 + 0.25 = 2.7$.

15. א. $1.29 \sim 1.5\frac{\sqrt{3}}{2}$ **ב.** $(0,0),(1.5,0)$ **ג.** $3.89 \sim 4.5\frac{\sqrt{3}}{2}$, $(0,0),\left(\frac{5}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\left(\frac{1}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ד. בסעיף א' האינטגרל חיסר את השטח השני מהראשון עקב היותו שלילי בעוד שבסעיף ג' נדרש למצוא את השטח הכולל ולכן בוצע חיבור שטחים. פירוט נוסף: השטחים המתקבלים

הם: $S_1 = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$, $S_2 = 1.5\frac{\sqrt{3}}{2}$. **האינטגרל שחושב בסעיף א' ביצע חיסור שטחים ולכן התקבלה**

התוצאה: $1.29 = 1.5\frac{\sqrt{3}}{2}$ $S_1 - S_2 = 3\frac{\sqrt{3}}{2} - 1.5\frac{\sqrt{3}}{2}$. **השטח הכולל שחושב בסעיף ג' ביצע חיבור שטחים ולכן השטח הכולל הוא:** $3.89 = 4.5\frac{\sqrt{3}}{2}$ $S_1 + S_2 = 3\frac{\sqrt{3}}{2} + 1.5\frac{\sqrt{3}}{2}$.

16. א. אין נקודות קיצון, הנקודה: S, היא נקודת פיתול. **ב. השטח המתקבל הוא:** $2.93 \sim 2 - 0.5\pi$ S.

17. א. $(2.7,0)$, $(3.484,0)$, $\left(\frac{1}{3},0.34\right)$, $\left(\frac{2}{3},0\right)$ **ב.** $6.57 \sim \frac{2}{3}\pi^2$ S.

18. א. $(0,0)$, $(2\pi,0)$, $\left(\frac{4}{3}\pi,0\right)$, $\left(\frac{2}{3}\pi,0\right)$ **ב.** $5.196 \sim 3\sqrt{3}$ S.

19. א. $I: f(x) = 2\cos x$, $II: g(x) = \sin x$ **ב.** $(0.8,1.352)$, $(1.352,0.89)$, $(0.352,0.89)$ **ג.** 4.472 S.

20. א. $\left(\frac{1}{4}\pi,1\right)$, $\left(\frac{2}{3}\pi,1\right)$, $(0,1)$ **ב.** $1.29 \sim 1.5\frac{\sqrt{3}}{2}$ S. **21. א.** $(2\pi,0)$ **ב.** $y = 2x$ **ג.** $4\pi - 2$ **ד.** 4 S.

22. א. $(1.5\pi,1.5)$, $(0.5\pi,0.5)$ **ב.** S **(1)** $y = x$ S **(2)** 2 S.

23. א. **ניתן להוכיח לפי הזהות:** $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ **ע"י בידוד** $\cos^2 x$. **ב.** $(0,0)$, $(\pi,0)$, $(0.5,0)$

ג. $y = x - 0.5\pi$ **ד.** 0.55.

24. א. $y = 0.5x$ S **ב.** $\left(\frac{2}{3}\pi,5.05\right)$ **ג.** $12.11 \sim 2\frac{2}{3}\pi + \frac{1}{2}$ S.

25. א. $k = 2$ **ב.** $x = \pi$ **ג.** $3.233 \sim \frac{\pi^2}{8} + 2$ S.

26. א. $k = 2$ **ב.** $x = 2\pi$. **ד.** $f(x) = 2\cos x - 2x$ $S = 4\pi$ S.

27. א. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi$ **ב.** $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \cos x$ **ג.** $\frac{1}{2}$ S.

28. א. $k = 1$ **ב.** $\sin x = \cos^2 x$, $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = \sin^2 x$ **ג.** $(1.5\pi,1)$, $\left(\frac{1}{6}\pi,\frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{5}{6}\pi,\frac{1}{4}\right)$

ד. $1.29 \sim 1.5\frac{\sqrt{3}}{2}$ S.

29. א. $f(x)=\cos ax$ **ב. היחס הוא:** 0.233 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\frac{\pi^3}{8a}}{\frac{1}{a}}=\frac{\pi^3}{8}$.

30. $S=\frac{\pi}{2}$.

31. א. $f'(x)=\sin^3 x\cos^2 x$. **ג.** $S=\frac{2}{15}$.

32. א. $f'(x)=x\sin x$ **ב.** $0,0$, $0,\pi$ **ג.** $S=\pi$.

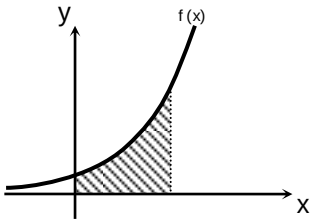
33. $S=2\pi^2\sim 4\cdot 11.74$.

34. א. $f'(x)=x\cos x$ **ב.** $0,0$, $0.5,0$, $1.5,-1.5$ **ג.** $S_1=2\pi$.

35. א. $f'(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ **ב.** $A\left(\frac{\pi}{6},4\right)$, $B\left(\frac{5\pi}{6},4\right)$ **ג.** $S=2\sqrt{3}+\frac{8}{3}\pi\approx 4.91$.

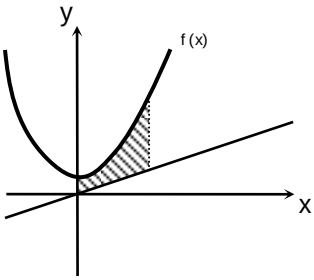
36. א. $f'(x)=\sin x\cos^2 x$. **ב.** $Min\ 0.5\pi,0$ **ג.** $S=\frac{1}{3}$.

שאלות העוסקות בפונקציה מעריכית:



1. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x-1}$.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר $x = 2$ והצירים.



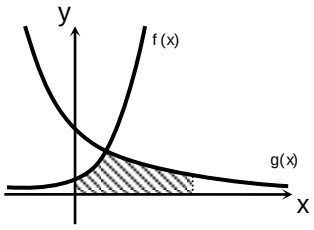
2. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^x - e^{ax}}{4}$.

ידוע כי הפונקציה עוברת דרך הנקודה: $\left(1, \frac{e^3 - 1}{4e^2}\right)$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y = 0.1x$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר ציר ה-y והאנך: $x = 2$.

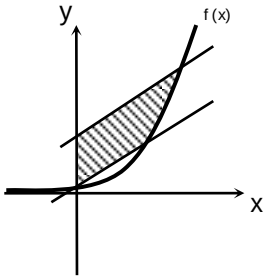


3. באיור שלפניך נתונים הגרפים את הפונקציות: $f(x) = e^x$ **ו-** $g(x) = ke^{x-2}$.

ידוע כי הגרפים חותכים זה את זה בנקודה שבה $x = \ln 3$.

א. מצא את k.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפונקציות, הצירים והישר: $x = \ln 4$.



4. באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה: $f(x) = e^x$.

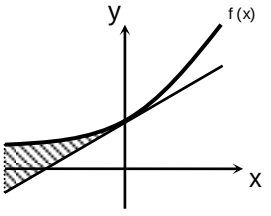
מעבירים ישר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y ודרך הנקודה שבה $x = 1$.

א. מצא את משוואת הישר.

מעבירים ישר נוסף המקביל לישר שמצאת קודם וחותך את ציר ה-y בנקודה שבה $y = 3$.

ב. מצא את משוואת הישר השני.

ג. חשב את השטח הכלוא בין שני הישרים, ציר ה-y וגרף הפונקציה אם ידוע כי הישר השני חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1.8$.

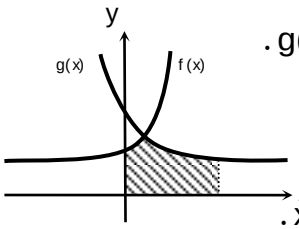


5. א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = e^x$ **בנקודת החיתוך שלו עם ציר ה-y.**

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה $f(x)$ והמשיק.

חשב את השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר: $x = 3$.

6. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = e^{ax-1} + 2$ ו- $g(x) = e^{1-ax} - 2$.

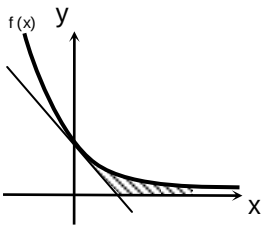


ידוע כי הפונקציות נחתכות בנקודה שבה $x = \frac{1}{3}$.

א. מצא את a וכתוב את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-x והישר $x = 2$.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - 1$.

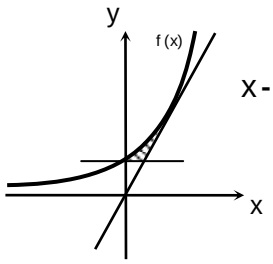


א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה-x.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-x והישר: $x = 3$.

8. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = e^{x-2}$.

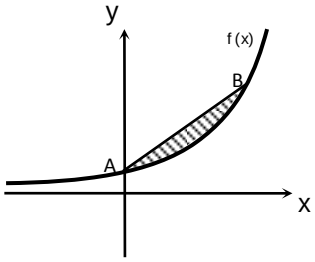


מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ ומעבירים ישר המקביל לציר ה-x ויוצא מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y.

א. כתוב את משוואת המשיק והראה כי הוא עובר דרך ראשית הצירים.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

9. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x} - x - 1$.



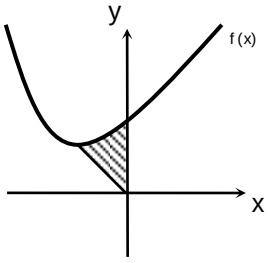
הנקודה A היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-y

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה ובה $x_B = 1$.

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו-B.

ב. חשב את השטח הכלוא בין הישר AB וגרף הפונקציה.

10. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x-2} + 2x - 1$.



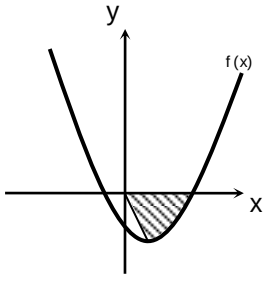
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה והנקודה B נמצאת בראשית הצירים.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודות A ו-B.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר AB וציר ה-y.

11. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x-1} + 2ex - 2$.



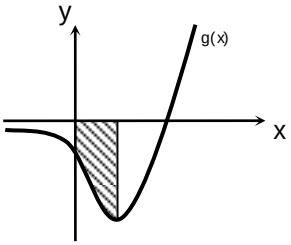
הנקודה A היא נקודת המינימום של הפונקציה.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים.

ב. כתוב את משוואת הישר המחבר את הנקודה A עם הראשית.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה-x אם ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה-x בנקודה שבה $x = 1.7$.



12. נתונה הפונקציה: $f(x) = a \cdot x \cdot e^{x}$.

א. הוכח כי: $f'(x) = x \cdot a \cdot (1 + e^{x})$.

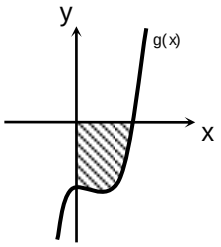
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ **בנקודה שבה** $x = 3$ **הוא אפס.**

ב. מצא את a.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $g(x) = x \cdot (3 + e^{x})$.

ג. מעלים אנך לציר ה-x **מנקודת הקיצון של הפונקציה.**

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$, **הצירים והאנך.**



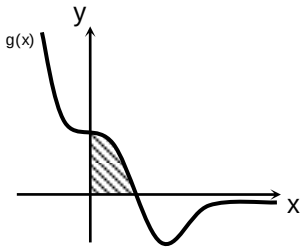
13. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{x^2 + 2x + k}$.

ידוע שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 3$ **הוא** $4e^{3}$.

א. כתוב את נגזרת הפונקציה $f(x)$.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $g(x) = 2 \cdot x \cdot (1 + e^{x^2 + 2x})$.

ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה $g(x)$ **והצירים.**

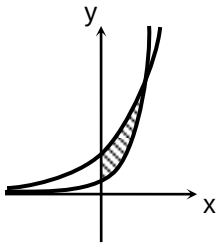


14. נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot e^{9x^3}$.

א. הוכח: $f'(x) = (1 + 27x^3) \cdot e^{9x^3}$.

באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $g(x) = (1 + 27x^3) \cdot e^{9x^3}$.

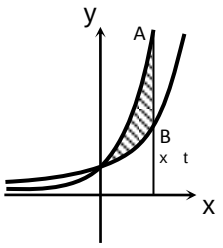
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.



15. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 9^{x}$ **ו-**$g(x) = 9 \cdot 3^{x}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים וציר ה-y.



16. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 2^{x}$ **ו-**$g(x) = 4^{x}$.

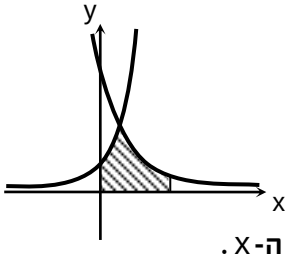
ישר $x = t$ **חותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות** A **ו-**B **כמתואר באיור.**

ידוע כי אורך הקטע AB **הוא 240.**

א. מצא את t.

ב. הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים על ציר ה-y.

ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות והישר שמצאת.



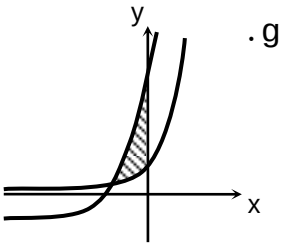
17. נתונות הפונקציות: $f(x) = 2^{x}$ **ו-**$g(x) = 4^{k - x}$.

ידוע כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 4$.

א. מצא את k.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, הישר $x = 8$ **וציר ה-**x.

18. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=3^{x-2}$ ו-$g(x)=3^{x+5}-26$.

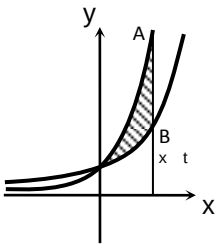


א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה-y.

ג. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה-y.

19. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=3^x$ ו-$g(x)=9^x$.



ישר $x=t$ $(t>0)$ חותך את הגרפים של הפונקציות בנקודות A ו-B כמתואר באיור.

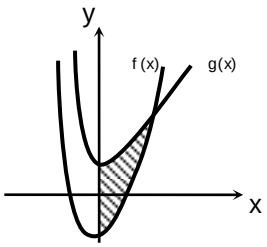
ידוע כי אורך הקטע AB הוא 702.

א. מצא את t.

ב. הוכח כי הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים על ציר ה-y.

ג. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות והישר שמצאת.

20. באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=e^{2x}+x^2+k$ ו-$g(x)=2e^x+x^2$.



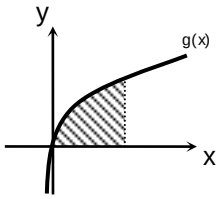
ידוע כי המרחק בין שתי נקודות החיתוך של הגרפים עם ציר ה-y הוא 4.

א. מצא את k.

ב. מצא את נקודת החיתוך שבין שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה-y.

21. א. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x)=(x+1)e^x$.



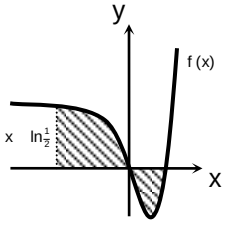
נתונה הפונקציה: $g(x)=xe^x+k$.

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 1.

ב. מצא את k וכתוב את הפונקציה.

ג. היעזר בסעיף א' וחשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והישר $x=2$.

22. א. חשב את האינטגרל: $\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 4}(3e^{2x}-5e^x+4)\,dx$.

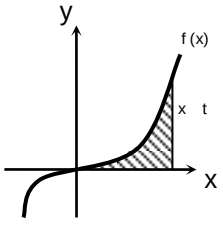


באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=e^{2x}-5e^x+4$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והישר $x=\ln 0.5$.

ג. הסבר מדוע התוצאות שקיבלת בסעיפים א' וב' שונות.

23. נתונה הפונקציה: $f(x)=e^x-e^{-x}$.

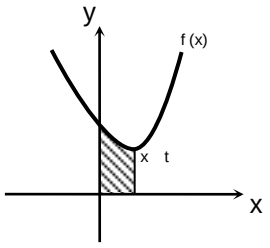


א. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

מעבירים ישר $x=t$ $(t>0)$ המאונך לציר ה-x וחותך את גרף הפונקציה כמתואר באיור.

ידוע כי השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והאנך הוא: $S=1\frac{1}{3}$.

ב. מצא את t.



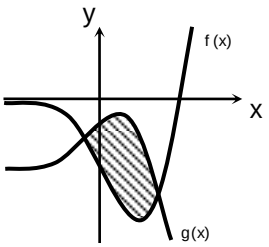
24. נתונה הפונקציה: $f(x)=e^{2x}-16e^{-2x}$.

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

מעבירים ישר $x=t$ $(t>0)$ כמתואר באיור.

ידוע כי השטח הכלוא בין ישר זה, גרף הפונקציה והצירים הוא: $S=7.5$.

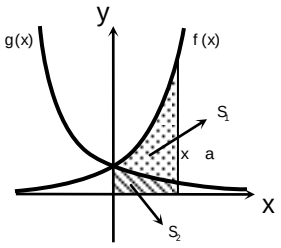
ב. הוכח כי ישר זה יוצא מנקודת הקיצון שמצאת בסעיף א'.



25. באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=2e^{2x}-7e^{x}$ ו-$g(x)=3e^{x}-e^{2x}-3$.

א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים.

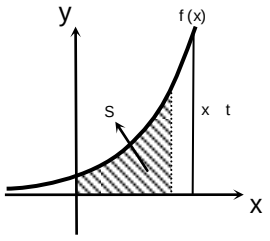


26. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x)=e^{2x}$ ו-$g(x)=e^{2x}$.

מעבירים אנך לציר ה-x את הישר $x=a$ $(a>0)$ כמתואר באיור.

אנך זה יוצר את השטחים S_1 ו-S_2.

ידוע כי השטח S_1 גדול פי 3 מהשטח S_2. מצא את a.



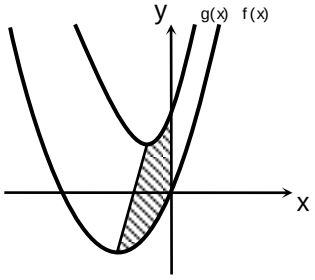
27. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=e^{ax}$, $a>0$.

ידוע כי השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הצירים והישר $x=2$ הוא: $S=\frac{3}{a}$.

א. מצא את a.

מעבירים אנך נוסף לציר ה-x והוא $x=t$ $(t<2)$.

ב. מצא את הערך של t עבורו השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והישרים $x=2$ ו-$x=t$ שווה לשטח הקודם.



28. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

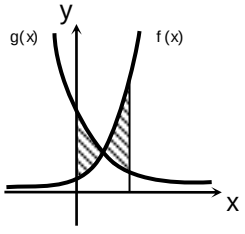
$f(x)=4e^{2x}-e^{x}$ ו-$g(x)=x^{2}-2x$.

א. מצא את נקודות הקיצון של כל פונקציה וקבע את סוגן.

מעבירים ישר המחבר את נקודות הקיצון של שני הגרפים כמתואר באיור.

ב. כתוב את משוואת הישר הנ"ל (עגל תוצאות למספרים שלמים).

ג. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה-y והישר הנ"ל.

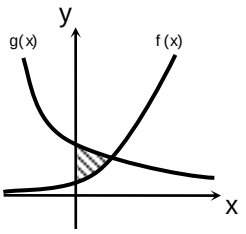


29. באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=4^{x}$ ו-$g(x)=2^{4-x}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-y והישר $x=2$.

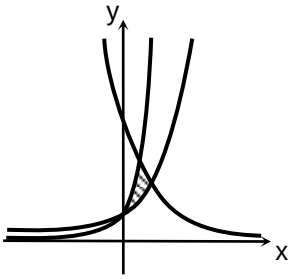
30. א. פתור את המשוואה הבאה: $3^x \sim \frac{243}{9^x}$ .9



באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f\ x \quad 3^{x\ 2}$ **ו-** $g\ x \quad 3^{5\ 2x}$.

ב. הוכח כי השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y **שווה ל-** $\frac{90}{\ln 3}$.

31. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שלוש פונקציות:



I. $f\ x \quad 2^x$. II. $g\ x \quad 4^x$. III. $h\ x \quad 2^{4\ 2x}$.

א. סרטט את הסקיצה במחברת הבחינה שלך וקבע איזה גרף מתאר כל פונקציה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A , B **ו-**C **(נקודות החיתוך שבין הגרפים).**

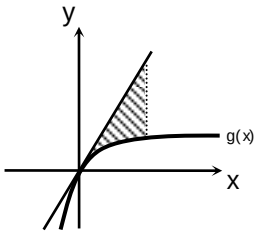
ג. חשב את השטח המסומן באיור.

32. באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $26 \quad 5^{x\ 1} \quad 5^{1\ x}$ **ו-** $f\ x \quad x^2 \quad 1$, $g\ x$.

א. הראה כי הגרפים של שתי הפונקציות חותכים את ציר ה-x **באותן הנקודות.**

ב. חשב את השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות.

33. נתונות הפונקציות: $f\ x \quad 3^x \quad 1$ **ו-** $g\ x \quad 1 \quad 3^{\ x}$.

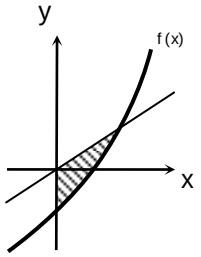


א. הראה כי שתי הפונקציות משיקות זו לזו בראשית הצירים וכתוב את משוואת המשיק המשותף.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $g\ x$ **וגרף המשיק.**

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים והישר: $x \quad 3$.

34. הנגזרת של פונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) \quad e^x \quad 2$.



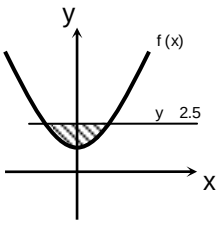
הפונקציה חותכת את ציר ה-y **בנקודה שבה:** $y \quad 2$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

מעבירים את הישר: $y \quad 2x$.

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, הישר וציר ה-y .

35. הנגזרת של פונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) \quad 2e^{2x} \quad 2e^{2x}$.



א. מצא את שיעור ה-x **של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.**

ידוע כי שיעור ה-y **של נקודת הקיצון הוא:** $y \quad 2$.

ב. מצא את הפונקציה.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר: $y \quad 2.5$.

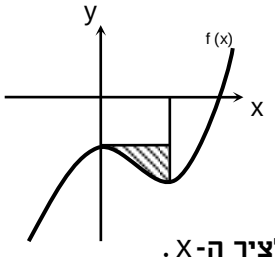
36. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) \quad e^x \quad 6x$.

ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $1,e \quad 4$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה-y .

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הצירים והישר $x \quad 2$.



37. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = 2e^{2x} - 6e^{x} - 4$.

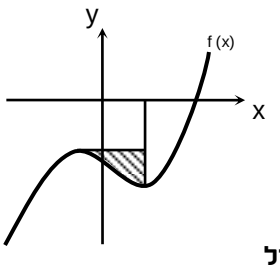
ידוע כי שיעור ה-y **של נקודת המקסימום הוא:** $y = -4$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את נקודת הקיצון השנייה של הפונקציה וקבע את סוגה.

מעבירים מנקודת המקסימום את הישר: $y = -4$ **ומנקודת הקיצון השנייה אנך לציר ה-**x.

ג. חשב את השטח הכלוא בין שני הישרים וגרף הפונקציה.



38. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = 4e^{2x} - 9e^{x} - 2$.

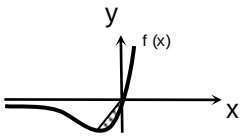
ידוע כי שיעור ה-y **של נקודת המינימום הוא:** $y = -10 - 4\ln 4$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את נקודת הקיצון השנייה של הפונקציה וקבע את סוגה.

מעבירים מנקודת המינימום אנך לציר ה-x **ומנקודת הקיצון השנייה ישר המקביל לציר ה-**y.

ג. חשב את השטח הכלוא בין שני הישרים וגרף הפונקציה.



39. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = 2^{2x-1}\ln 2 - 2^{x}\ln 2$.

א. מצא את שיעור ה-x **של נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.**

ידוע כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

מעבירים ישר דרך נקודת הקיצון של הפונקציה וראשית הצירים.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וישר זה.

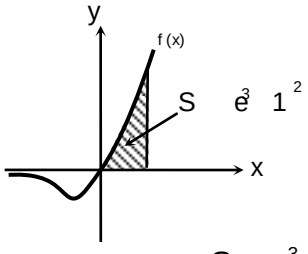
40. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) = 3^{x}\ln 3 - 3^{-x}\ln 3$.

ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-y **בנקודה שבה** $y = 2$.

א. מצא את הפונקציה.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר $y = 2.5$.

<u>תרגילי אתגר - אינטגרל של פונקציה מעריכית:</u>



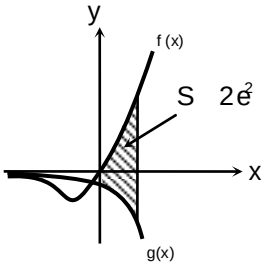
1. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 2e^{2x} - 2e^{x}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

מהנקודה על גרף הפונקציה שבה $x = a$, $a > 0$ **מורידים אנך לציר ה-**x **כך שנוצר השטח** S **שבין גרף הפונקציה, האנך וציר ה-**x. **ידוע כי:** $S = (e^3 - 1)^2$.

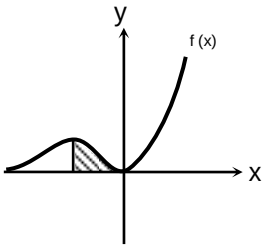
ב. מצא את a.

(רמז: התבונן בביטוי שקיבלת עבור השטח והיעזר בנוסחה: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$**).**



2. א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = e^x + x - 1$.

ב. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = xe^x$, $g(x) = -e^x$.
מעבירים ישר $x = a$, $a > 0$ **החותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח המתואר הכלוא בין הגרפים של שניהם, ציר ה-**y **והישר.**
ידוע כי שטח זה שווה ל- $2e^2$. **מצא את** a.

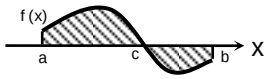


3. א. גזור את הפונקציה הבאה: $y = e^x + x^2 - 2x + 2$.

באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 e^x$.
ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
ג. כולאים של השטח שבין גרף הפונקציה וציר ה-x **בתחום שבין שתי נקודות הקיצון שמצאת. היעזר בסעיף א' וחשב את שטח זה.**

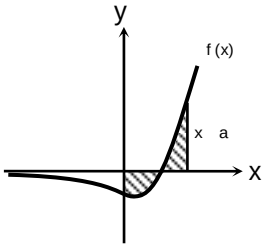
4. א. לפניך הטענה הבאה:
נתונה פונקציה $f(x)$ **אשר בתחום:** $a \le x \le b$ **נמצאת בחלקה מעל לציר ה-**x **ובחלקה מתחתיו.**
נניח כי הפונקציה חותכת את ציר ה-x **בנקודה:** $c, 0$ **כאשר:** $a < c < b$. **הסבר מדוע יש לחלק את חישוב השטח הכולל**
שבין גרף הפונקציה וציר ה-x **לשני חלקים:** $S = \int_a^c f(x)\,dx + \left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$
במקום לחשבו בצורה ישירה: $\int_a^b f(x)\,dx$.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 4e^{4x} - 6e^{2x}$.



ב. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

מהנקודה על גרף הפונקציה שבה $x = a$, $a < \ln\sqrt{1.5}$ **מורידים אנך לציר ה-**x **כך שנוצרים שני השטחים המתוארים באיור. ידוע כי השטחים שווים.**



ג. היעזר בטענה שנימקת בסעיף א' ומצא את a.
(הדרכה: חשוב מה צריך להיות ערך האינטגרל $\int_0^a f(x)\,dx$ **לפי הנתון וחבר משוואה למציאת** a. **התבונן בביטוי שקיבלת עבור השטח והיעזר בפירוק:** $t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2)$**).**

שאלות העוסקות בפונקציה לוגריתמית:

1. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x) \quad 8x \quad \frac{k}{x}$.

ידוע כי יש לפונקציה נקודת מינימום $(1,1)$.

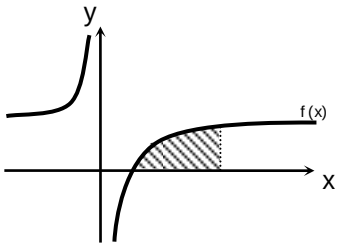
א. מצא את k **ואת הפונקציה** $f(x)$.

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה-x **? נמק את תשובתך.**

2. נתונה הפונקציה: $f(x) \quad \frac{3x \quad a}{x}$.

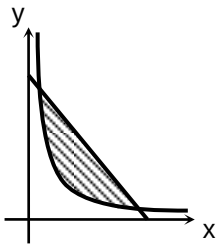


ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x \quad 1$ **הוא 6.**

א. מצא את a .

ב. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x .

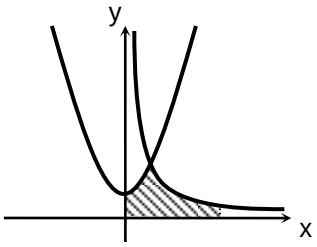
ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-x **והישר** $x \quad e$.



3. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) \quad \frac{10}{x}$ **ו-**$g(x) \quad x \quad 7$.

א. מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

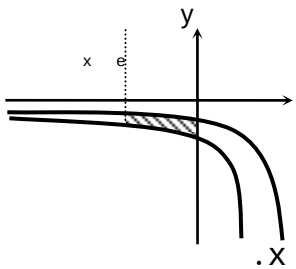


4. באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) \quad \frac{a}{x}$ **ו-**$g(x) \quad x^2 \quad 2$.

ידוע כי הגרפים נחתכים בנקודה שבה $x \quad 2$.

א. מצא את a .

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, הצירים והישר $x \quad e^2$.

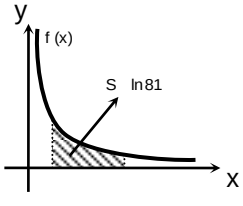


5. באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) \quad \frac{a}{x \quad 1}$ **ו-**$g(x) \quad \frac{a \quad 1}{x \quad 2}$ **בתחום:** $x \quad 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x \quad 3$.

א. מצא את a **וכתוב את שתי הפונקציות.**

ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-y **והישר** x . e

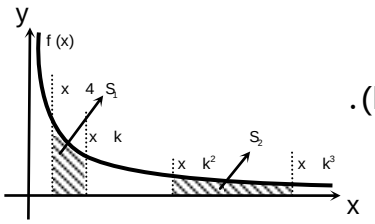


6. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) \quad \frac{4}{x}$.

ידוע כי השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-x
והישרים: $x \quad 4$ **ו-**$x \quad 4 \quad t$ **הוא** $\ln 81$.

מצא את t .

7. **באיור שלפניך נתונה הפונקציה:** $f(x)=\frac{2}{x}$ **בתחום:** $x>0$.



מעבירים את הישרים: $x=k^3$, $x=k^2$, $x=k$, $x=4$ **כמתואר** $(k>4)$.

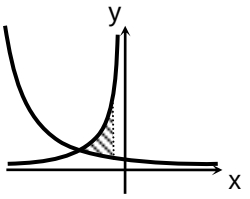
א. הבע באמצעות k **את השטחים:** S_1 **ו-**S_2.

ב. הראה כי ההפרש: S_2-S_1 **אינו תלוי ב-**k **וחשב את ערכו.**

ג. נתון כי השטח S_2 **גדול פי 3 מהשטח** S_1.

מצא את k.

8. **נתונות הפונקציות:** $f(x)=\frac{4}{x}$ **ו-**$g(x)=\frac{k}{2x-5}$.



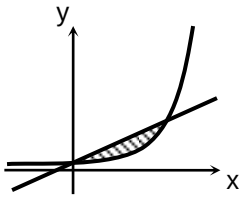
גרף הפונקציה $g(x)$ **חותך את ציר ה-**y **בנקודה שבה** $y=0.4$.

א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x=1$.

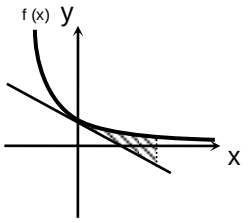
9. **באיור שלפניך נתונה הפונקציה:** $f(x)=\frac{3}{4e-x}$ **והישר:** $x=\frac{3}{4e}$ $g(x)=\frac{3}{4e^2}$.



א. מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות.

10. **נתונה הפונקציה:** $f(x)=\frac{1}{ax-5}$.



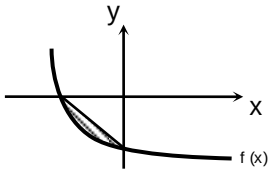
שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-y **הוא** -0.12.

א. מצאת את a **וכתוב את הפונקציה.**

ב. כתוב את משוואת המשיק.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר $x=2$.

11. **גרף הפונקציה:** m $f(x)=\frac{2}{x-5}$ **חותך את ציר ה-**x **בנקודה שבה** $x=4$.

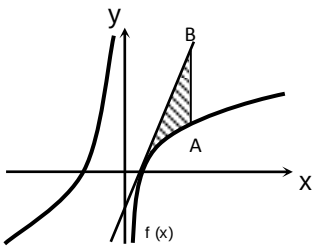


א. מצא את m.

ב. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר שמצאת בסעיף הקודם.

12. **נתונה הפונקציה:** $f(x)=ax-\frac{b}{x}+7$.



ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה-x **היא:** $y=18x-9$.

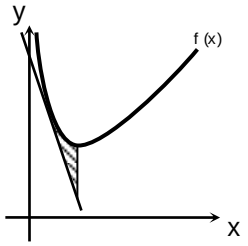
א. מצא את a **ו-**b **וכתוב את הפונקציה.**

מעבירים ישר המקביל לציר ה-y **שחותך את גרף הפונקציה בנקודה** A **ואת משוואת המשיק בנקודה** B **כמתואר באיור. אורך הקטע** AB **הוא 18.**

ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

13. נתונה הפונקציה: $f(x)=5x-\frac{4}{x}$ **בתחום:** $x\neq 0$.

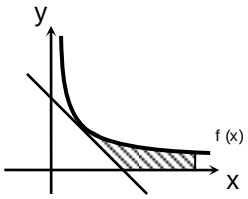


א. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$.
מעבירים ישר המקביל לציר ה-y מנקודת המינימום של הפונקציה.
הישר חותך את משוואת המשיק בנקודה A.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק והישר.

14. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ **היא:** $f'(x)=\frac{4}{x^2}$.



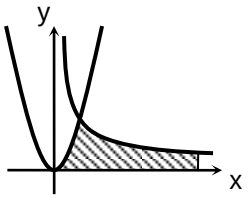
משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x=2$ **היא:** $y=x+4$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ **והמשיק בתחום:** $x\neq 0$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה-x והישר: $x=e^2$.

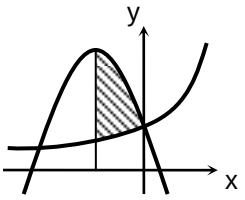
15. באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x)=3x^2$ **ו-**$g(x)=\frac{3}{x}$.



א. מצא את נקודת החיתוך של שתי הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה-x והישר: $x=e^3$.

16. באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{6}{6-x}$ **בתחום:** $x\neq 0$.

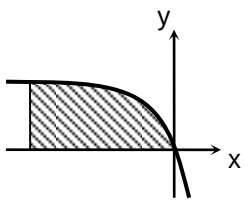


מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ **עם ציר ה-y מעבירים**
את הפרבולה: $g(x)=x^2-4x+1$.

א. מצא את נקודת הקדקוד של הפרבולה.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים ואנך היוצא מנקודת הקדקוד של הפרבולה.

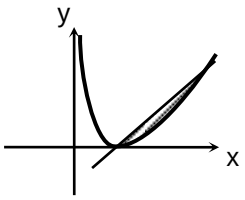
17. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{8}{x-2}+k$ **בתחום:** $x\neq 0$.



ידוע כי גרף הפונקציה חותך את הישר: $y=x-2$ **בנקודה שבה:** $x=6$.

א. מצא את k.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה-x והישר: $x=6$.



18. נתונה הפונקציה: $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x}$.

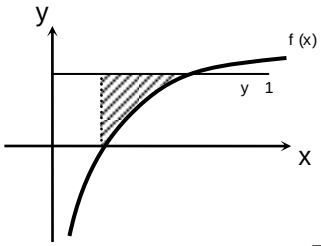
א. מצא את נקודת המינימום של הפונקציה.

מעבירים ישר דרך נקודת המינימום של הפונקציה והנקודה שבה $x=4$.

ב. מצא את משוואת הישר.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הישר וגרף הפונקציה (העזר באיור הסמוך).

<u>תרגילי אתגר - אינטגרל של פונקציה לוגריתמית:</u>



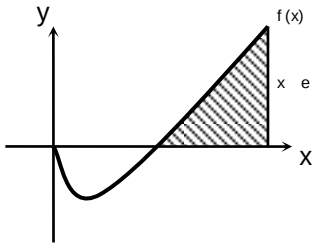
1. א. גזור את הפונקציה הבאה: $y=x\ln x-2x$.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=\ln x$.

מעבירים ישר $y=1$ **החותך את גרף הפונקציה בנקודה A.**

מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x מעלים אנך לישר.

ב. היעזר בסעיף א' וחשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך והישר.

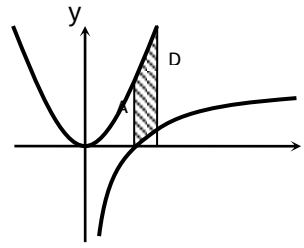


2. א. הוכח כי הנגזרת של הפונקציה: $y=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)$ **היא:** $y'=x\ln x$.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x)=x\ln x$.

מעלים את הישר $x=e$ **המאונך לציר ה-x החותך את גרף הפונקציה.**

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, האנך וציר ה-x.



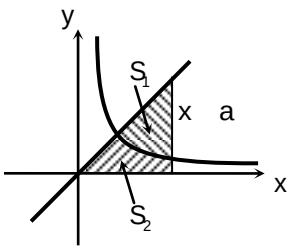
3. א. גזור את הפונקציה הבאה: $y=x\ln x-\frac{x^3}{3}$.

האיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x)=\ln x$ **ו-**$g(x)=x^2$.

מעבירים את הישרים $x=1$ **ו-**$x=2$ **המקבילים לציר ה-y.**

ישרים אלו חותכים את הגרפים של הפונקציות בנקודות A ,B,C,D בהתאמה.

ב. חשב את השטח ABCD.



4. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x)=\frac{2}{3x-1}$ **והישר:** $y=x$.

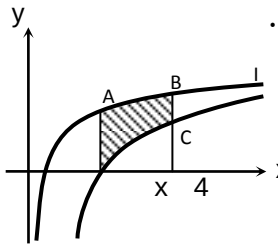
א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.

מעבירים אנך לציר ה-x $x=a$ **הנמצאת מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם. האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים** S_1 **ו-**S_2 **המתוארים האיור.**

ב. מצא את הערך של a עבורו השטחים שווים זה לזה.

5. א. הראה כי הנגזרת של הפונקציה: $y = 2\ln(x+2) - x\ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ **היא:** $y' = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$.

באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \ln x$ **ו-** $g(x) = \ln(x+2)$.

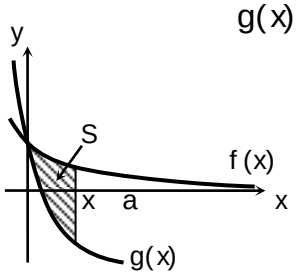


ב. קבע איזה מבין הגרפים I , II מתאר את $f(x)$ **ואיזה את** $g(x)$**. נמק.**

ג. מצא את נקודת החיתוך של כל גרף עם ציר ה-x.

ד. מנקודת החיתוך הגדולה יותר שמצאת בסעיף הקודם מעלים אנך לציר ה-x **החותך את הגרפים בנקודות** B **ו-**C**. העזר בסעיף א' וחשב את השטח** ABC **- הכלוא בין שני הגרפים.**

6. באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \ln(e^x - 1)$ **ו-** $g(x) = \ln(e^{2x} - e^{3x})$



בתחום: $x > 0$.

א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה-y.

מעבירים ישר $x = a$, $a > 1$ **המאונך לציר ה-**x **אשר חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח** S **(ראה איור).**

ב. מצא את ערכו של a **עבורו מתקיים:** $S = 4$.

<u>תשובות סופיות:</u>

פונקציה מעריכית:

1. $S = \frac{e^3 - 1}{2}$ **2. א.** $a = 2$ **ב.** $f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{4}$, $S \approx 1.52$ **3. א.** $k = 3$ **ב.** $S = 2\frac{3}{4}$.

4. א. $y = e - 1 - x$ **ב.** $y = e - 1 - 3x$ **ג.** $S \approx 3$ **5. א.** $y = x - 1$ **ב.** $S = 2.45$.

6. א. $a = 1$, $f(x) = e^{3x-1} + 2$, $g(x) = e^{1-3x} + 2$ **ב.** $S \approx 4.54$ **7. א.** $y = 2x - 2$ **ב.** $(1,0)$ **ג.** $S \approx 2.5$.

8. א. $y = e^3 x$ **ב.** $y = e - 1 - x$ **9. א.** $S = \frac{e^3 - 2e^2 + e}{2} \approx 1.3$ **ב.** $S = 1 - \frac{e}{2} \approx 2.36$.

10. א. $A(\ln 4 - 2,5 - \ln 2)$ **ב.** $y \approx 2.76x$ **ג.** $y = \frac{5 - \ln 4}{\ln 2 - 2}x$ $S = 3.423$.

11. א. $A(e - 2, 1)$ **ב.** $y = e - 2 - x$ **ג.** $S = 2$ **12. ב.** $a = 2$ **ג.** $S \approx 4.744$.

13. א. $f'(x) = (2x - 1)e^{x^2 - 2x}$ **ב.** $S = \frac{e - 1}{e}$ **14. ב.** $S = \frac{1}{3\sqrt[3]{e}}$ **15. א.** $2,81$ **ב.** $S = \frac{32}{\ln 3}$

16. א. $t = 4$ **ג.** $S = \frac{225}{\ln 4}$ **17. א.** $k = 6$ **ב.** $S = \frac{1247}{32\ln 2}$

18. א. $2,1$ **ב.** $0,243$, $0,9$ **ג.** $S = 52\frac{4 - \ln 3}{\ln 3}$ **19. א.** $t = 3$ **ג.** $S = \frac{338}{\ln 3}$.

20. א. $k \quad 3$ ב. $k \quad \ln 3,7.2$ ג. $S \quad \ln 27$ 21. א. $f'(x) \quad xe^{x} \quad x,\ k \quad 1$ ב. $g(x) \quad xe^{x} \quad 3 \quad \frac{3}{e^{2}}$ ג. $S \quad 3$.

22. א. $1.3 \sim 9\frac{5}{8} \quad 4\ln 8$ ב. $S \sim 2.6$ ג. בסעיף א' חושב ערך האינטגרל בלבד. בסעיף ב' ניתן לראות כי חלקו שלילי ולכן יש לפצל אותו כדי לקבל ערך מקסימלי.

23. ב. $3 \quad \ln t$ 24. א. $\ln 2,8$.

25. א. $\left(\ln\frac{1}{3},\ 2\frac{1}{9}\right),\ (\ln 3,\ 3)$ ב. $6.7 \sim 2\ln 27$ 26. $S \quad 13\frac{1}{3} \quad 2\ln 2$ $a \quad \ln 2$.

27. א. $a \quad \ln 2$ ב. $t \quad \frac{\ln 7}{\ln 2}$ 28. א. $\left(\ln\frac{1}{2},\ 3\right),\ (\text{Min}\ 1,\ 1)$ ב. $y \quad 13x \quad 12$ ג. $S \sim 4.71$.

29. א. $\left(1\frac{1}{3},\ 6.35\right)$ ב. $S \quad 11.25$ 30. א. $x \quad 1$ 31. ב. $C \quad 0,1$, $B \quad 1\frac{1}{3},2.5$, $A \quad 1,4$ ג. $S \quad 1.03$.

32. ב. $S \quad 20.84$ 33. א. $y \quad x\ln 3$ ב. $S \quad 2.82$ 34. א. $f(x) \quad e^{x} \quad 2x \quad 3$ ב. $S \quad 2 \quad \ln 27$.

35. א. $\text{Min}\ x \quad 0$ ב. $f(x) \quad e^{2x} \quad e^{2x}$ ג. $S \quad 2.5\ln 2 \quad 1.5$.

36. א. $f(x) \quad e^{x} \quad 3x^{2} \quad 1$ ב. $0,2$ ג. $S \quad e^{2} \quad 9$.

37. א. $x \quad 1$ ב. $f(x) \quad e^{2x} \quad 6e^{x} \quad 4$ ג. $\text{Min}\ \ln 2, \ln 16 \quad 7$. $S \sim 0.073$.

38. א. $x \quad 2$ ב. $f(x) \quad 2e^{2x} \quad 9e^{x} \quad 2$ ג. $\text{Max}\ \ln\frac{1}{4},\ \ln 16 \quad 2\frac{1}{8}$. $S \sim 3.07$.

39. א. $x \quad 1$ ב. $f(x) \quad 4^{x} \quad 2^{x}$ ג. $S \quad \frac{1 \quad \ln 2}{\ln 256} \sim 0.055$ 40. א. $f(x) \quad 3^{x} \quad 3^{-x}$ ב. $S \quad 0.431$.

תרגילי אתגר:

1. א. $0,0$ ב. $a \quad 3$. 2. א. $y' \quad xe^{x}$ ב. $a \quad 2$.

3. א. $y' \quad x^{2}e^{x}$ ב. $\text{Min}\ 0,0$. $\text{Max}\ 2,4e^{2}$ ג. $S \quad 2 \quad 10e^{2}$.

4. א. אינטגרציה משמעה סכימת השטח הנוצר בין שתי פונקציות – אצלנו הן: $f(x)$ ו-$0 \quad y$ (ציר ה-x). כאשר סוכמים במקשה אחת את השטח הנ"ל פעולת האינטגרציה תחסר את $0 \quad y$ מ-$f(x)$ לאורך כל התחום (a,b) ולמעשה תיצור "שטח שלילי" בתוכה בתחום (b,c) (שהרי אז הפונקציות מתחלפות):

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \int_a^b g(x)\,dx \quad \int_b^c f(x)\,dx$$

. לכן יש להפריד ולחשב כל שטח בנפרד ולחבר את ערכם המוחלט. ב. $0,\ln\sqrt{1.5}$ ג. $a \quad \ln\sqrt{2}$.

פונקציה לוגריתמית:

1. א. $3 \quad$ **ב.** $k \quad 8, f(x) \quad 4x^2 \quad 8\ln x$ **ג. עולה:** $x \; ! \; 0$ **יורדת:** $0 \quad x \quad 1, \; x \; ! \; 1$

ד. לא. הנקודה הנמוכה ביותר בתחום הגדרתה נמצאת מעל לציר ה-x ולכן גם כל גרף הפונקציה.

2. א. $6 \quad a$ **ב.** $2,0$ **ג.** $12 \quad 3e \quad \ln 64$

3. א. $5,2 \; , \; 2,5$ **ב.** $5 \quad \ln 2 \quad \ln 5$ **4. א.** $12 \quad a$ **ב.** $12 \quad 2\ln 2 \quad 10 \quad 10.5 \quad \ln 2 \quad \ln 5$

5. א. $g(x) \quad \frac{1}{x \quad 2}, \; f(x) \quad \frac{2}{x \quad 1}, \; a \quad 2$ **ב.** $S \quad 1.76$

6. $8 \quad t$ **7. א.** $S_1 \quad 2\ln k \quad \ln 16, \; S_2 \quad 2\ln k$ **ב.** $S_2 \quad S_1 \quad \ln 16$ **ג.** $8 \quad k$

8. א. $g(x) \quad \frac{2}{2x \quad 5}$ **ב.** $2,2$ **ג.** $\ln 5\frac{1}{3}$

9. א. $\left(\frac{3}{e}, 3e\right)$ **ב.** $\left(0, \frac{3}{4e}\right) \cup (e, \infty)$ **ג.** $S \quad 5\frac{5}{8} \quad \ln 81$

10. א. $f(x) \quad \frac{1}{3x \quad 5}, \; a \quad 3$ **ב.** $y \quad 0.12x \quad 0.2$ **ג.** $S \quad 0.1$

11. א. $m \quad 2$ **ב.** $y \quad \frac{2}{5}x \quad 1\frac{3}{5}$ **ג.** $S \quad 4.8 \quad \ln 25 \; | \; 1.5$

12. א. $b \quad 4, \; a \quad 2, \; f(x) \quad 7 \quad 2x \quad \frac{4}{x}$ **ב.** $x \quad 2$ **ג.** $S \quad 6 \quad \ln 256 \; | \; 11.5$

13. א. $y \quad 3x \quad 13$ **ב.** $2,7$ **ג.** $S \quad \ln 16 \quad 2 \; | \; 0.77$

14. א. $f(x) \quad \frac{4}{x}$ **ב.** $10 \quad 4\ln 2$

15. א. $1,3$ **ב.** $S \quad 10$ **16. א.** $2,5$ **ב.** $S \quad 7\frac{1}{3} \quad 6 \quad \ln 8 \quad \ln 6 \; | \; 9.05$

17. א. $k \quad 4$ **ב.** $S \quad 24 \quad 16\ln 2$

18. א. $2,0$ **ב.** $y \quad \frac{1}{2}x \quad 1$ **ג.** $S \quad 3 \quad \ln 16$

תרגילי אתגר:

1. א. $y' \quad 1 \quad \ln x$ **ב.** $S \quad e \quad 2$

2. ב. $S \quad \frac{e^2 \quad 1}{4}$

3. א. $y' \quad x^2 \quad \ln x$ **ב.** $S \quad 3\frac{1}{3} \quad \ln 4 \; | \; 1.94$

4. א. $1,1$ **ב.** $a \quad \sqrt{2}$

5. ב. $g(x) \quad II, \; f(x) \quad I$ **ג.** $3,0 \; , \; 1,0$ **ד.** $S \quad 3\ln\frac{4}{3} \quad 0.863$

6. ב. $a \quad 2$