

מתמטיקה 4 יחידות

GOOL

בשביל התירגול

קורסים ברשת שבאמת עובדים!



בואו לגלות את
סודות ההצלחה בלימודים

תלמידים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהגשה לבחינות הבגרות במתמטיקה הן בבתי הספר התיכוניים, הן בבתי הספר הפרטיים והן במכילות האוניברסיטאיות.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני מקצוע חשוב זה.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכנית הלימודים של משרד החינוך. כל פרק פותח בסיכום ההגדרות, המשפטים והמתכונים הקשורים לנושא הפרק, לאחריו מופיעה טבלת הסרטונים באתר ולבסוף קובץ תרגילים. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם התלמידים ויוביל אתכם להצלחה.

יוחאי טוויג



תוכן

פרק 1 אלגברה - טרינום	5
פרק 2 אלגברה - אי שוויוניים	7
פרק 3 - גיאומטריה	9
3.1 - רקע קווים וזוויות	9
3.2 - משולש כללי, משולש שווה שוקיים, משולש ישר זווית	11
3.3 - חפיפת משולשים	13
3.4 - זווית חיצונית למשולש ומשולש ישר זווית	15
3.5 - קמע אמצעים במשולש ומפגש תיכונים במשולש	18
3.6 - מרובעים	20
3.7 - המעגל	26
3.8 - פרופורציה ודמיון	32
3.9 - שאלות מסכמות	38
פרק 4 - טריגונומטריה	71
4.1 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית	71
4.2 - זהויות טריגונומטריות	75
4.3 - טריגונומטריה - משוואות	79
4.4 - טריגונומטריה במישור	85
4.5 - שאלות מסכמות	90
פרק 5 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי	101
5.1 - נגזרות ומשיקים	101
5.2 - חקירת פולינום	108
5.3 - חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש	112
5.4 - חקירת פונקציה עם פרמטר	120
5.5 - חשבון דיפרנציאלי - בעיות קיצון	122
5.6 - חשבון אינטגרלי	126
5.7 - הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת	131
5.8 - שאלות מסכמות - חשבון דיפרנציאלי	134
5.9 - שאלות מסכמות - בעיות קיצון	148
5.10 - שאלות מסכמות - חשבון אינטגרלי	164
פרק 6 - גיאומטריה אנליטית	178
6.1 - נקודה וישר	178
6.2 - המעגל	181
6.3 - שאלות מסכמות	183

202.....	פרק 7 - הסתברות קלאסית
209.....	7.2 - שאלות מסכמות -
216.....	פרק 8 - בעיות מילוליות
216.....	8.1 - בעיות תנועה
223.....	8.2 - בעיות קנייה ומכירה
229.....	8.3 - בעיות גיאומטריות - הנדסת המישור
231.....	8.4 - בעיות גיאומטריות - הנדסת המרחב
235.....	נספח - משפטים בגיאומטריה

פרק 1 אלגברה – מרינום:

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף תרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 1	תרגיל 1	כולל הסבר כיצד עושים מרינום
סרמון 2	תרגיל 2	
סרמון 3	תרגיל 3	
סרמון 4	תרגיל 4	
סרמון 5	תרגיל 5	
סרמון 6	תרגיל 6	כולל הסבר כיצד עושים מרינום מקוצר
סרמון 7	תרגיל 7	
סרמון 8	תרגיל 8	
סרמון 9	תרגיל 1	כולל הסבר כיצד ניתן להסתדר בכל התרגילים גם ללא מרינום
סרמון 10	תרגיל 4	פתרון ללא מרינום
סרמון 11	תרגיל 6	פתרון ללא מרינום

תרגילים:

1. $4x^2 + 8x + 3 =$

2. $2x^2 + 7x - 15 =$

3. $3x^2 - 11x + 6 =$

4. $6x^2 + 5x + 1 =$

5. $2x^2 + x - 6 =$

6. $x^2 + 5x + 4 =$

7. $x^2 - 8x + 15 =$

8. $x^2 - 33x + 62 =$

פתרונות:

1. $(2x + 1)(x + 2)$ 2. $(2x - 1)(x + 3)$ 3. $(3x - 1)(x - 2)$

4. $(3x + 1)(2x + 1)$ 5. $(x + 2)(2x - 3)$ 6. $(x + 1)(x + 4)$ 7. $(x - 3)(x - 5)$

8. $(x - 2)(x - 31)$

פרק 2 אלגברה - אי שוויוניים

מותר

1. לחבר/לחסר כל מספר/ביטוי
2. לכפול/לחלק בכל מספר/ביטוי חיובי
3. לכפול/לחלק בכל מספר/ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי השוויון
4. להעלות בחזקה אי זוגית
5. להעלות בחזקה זוגית אם שני אנפי אי השוויון אינם שליליים

אסור

1. לכפול/לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו
2. להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 1		מהו אי שוויון, סימון אי שוויון על ציר
סרמון 2		חיתוך ואיחוד אי שוויון (מעלה ראשונה)
סרמון 3	תרגיל 1	חיתוך ואיחוד אי שוויון (מעלה ראשונה) – המשך
סרמון 4		מותר ואסור באי שוויוניים
סרמון 5	תרגיל 2	
סרמון 6	תרגיל 3	אי שוויוניים ממעלות גבוהות – הסבר על שיטת הנחש
סרמון 7	תרגיל 4	
סרמון 8	תרגיל 5	
סרמון 9	תרגיל 6	דוגמא לאי שוויון ללא מכנה
סרמון 10	תרגיל 7	הסבר על נחש עם נקודת השקה
סרמון 11	תרגיל 8	דוגמא לנחש עם נקודת השקה
סרמון 12	תרגיל 9	אי שוויון שמכיל ביטוי שלא מתפרק
סרמון 13	תרגילים 10, 11, 12	דוגמאות לאי שוויון שמכיל ביטוי שלא מתפרק
סרמון 14	תרגיל 13	אי שוויון לא מסודר (לראשונה)
סרמון 15	תרגיל 14	אי שוויון לא מסודר
סרמון 16	תרגיל 15	מערכת אי שוויוניים לא מסודרים
סרמון 17	תרגיל 16	מערכת אי שוויוניים לא מסודרים
סרמון 18	תרגיל 17	אי שוויון כפול
סרמון 19	תרגיל 18	הסבר ודוגמא – פונקציה מעל פונקציה

תרגילים:

$$1. x \leq -\frac{3}{4} \cap \{-2 < x \leq 5 \cup 0 < x < 8\}$$

$$2. x(x+5) - 3x + 15 \leq 2x - 1 - x(4-x)$$

$$3. \frac{(x-4)(x+2)}{x-1} < 0$$

$$4. \frac{(x-5)(3x+1)}{(2-x)(x+7)} < 0$$

$$5. \frac{(2x-3)(x-12)}{(x+1)(4-x)} \geq 0$$

$$6. x(x+3)(2x-5) < 0$$

$$7. \frac{(x-6)^2(x+1)}{x-2} > 0$$

$$8. \frac{5-2x}{(x-8)^2} \leq 0$$

$$9. \frac{x-3}{x^2+2} > 0$$

$$10. \frac{x^2-4x}{x^2+2x-3} > 0$$

$$11. \frac{x^2-6x+9}{x^3-x} > 0$$

$$12. \frac{x-7}{x^2+x+3} > 0$$

$$13. \frac{x}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} < \frac{1}{x-2}$$

$$14. \frac{2x^2}{x^2-6x+8} \geq \frac{x}{x-4} - \frac{x}{x-2}$$

$$15. x^2 > 3x+10 \cap 6 < 5x-x^2$$

$$16. \frac{3}{x-1} - \frac{2}{x} > 0 \cup \frac{1}{x-3} < \frac{1}{1-x}$$

$$17. 1 < \frac{x-1}{x-4} \leq 2$$

$$18. \text{ עבור אילו ערכי } x \text{ נמצאת הפונקציה } f(x) = \frac{x}{x-3} \text{ מעל הפונקציה } g(x) = \frac{x+1}{x+3} ?$$

פתרונות:

$$\begin{aligned} 1. & -2 < x \leq -\frac{3}{4} \quad 2. x \leq -4 \quad 3. 1 < x < 4 \cap x < -2 \quad 4. 5 < x \cap -\frac{1}{3} < x < 2 \cap x < -7 \\ 5. & 4 < x \leq 12 \cap -1 < x \leq 1.5 \quad 6. 0 < x < 2.5 \cap x < -3 \quad 7. 6 < x \cap 2 < x < 6 \cap x < -1 \\ 8. & 8 < x \cap 2.5 \leq x < 8 \quad 9. 3 < x \quad 10. x > 4 \cap 0 < x < 1 \cap x < -3 \quad 11. 3 < x \cap 1 < x < 3 \\ & -1 < x < 0 \quad 12. 7 < x \quad 13. 2 < x < 4 \cap x < -2 \quad 14. 4 < x \cap 1 \leq x < 2 \cap x \leq 0 \\ 15. & \text{אף } x \quad 16. x \neq 1 \quad 17. x \geq 7 \quad 18. 3 < x \cap -3 < x < -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

פרק 3 – גיאומטריה

3.1 – רקע קווים וזוויות

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף תרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		קצת היסטוריה + מושגי יסוד
סרטון 2		ממושגי יסוד להגדרות
סרטון 3		מאקסיומות למשפטים + העשרה על גיאומטריות לא אוקלידיות
סרטון 4		זווית – הגדרה וסימון
סרטון 5	תרגיל 1	תרגיל בנושא זוויות
סרטון 6		הגדרות – זווית חדה/ישרה/קהה/שמוחה
סרטון 7		חוצה זווית וזווית צמודות
סרטון 8		הוכחת המשפט: שתי זוויות צמודות שוות הן בהכרח ישרות
סרטון 9		זווית קודקודיות – הגדרה והוכחת המשפט (...שוות זו לזו)
סרטון 10	תרגיל 2	תרגיל בנושא זוויות
סרטון 11		ישרים מקבילים והזוויות ביניהם + משפט על הזוויות העונות
סרטון 12		משפט הפוך – הוכחת מקבילות לפי זוויות
סרטון 13	תרגיל 3	תרגיל בנושא קוים מקבילים

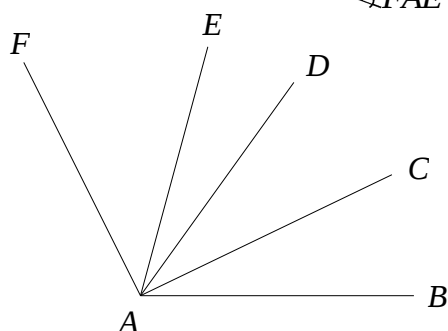
תרגילים:

1. נתון: $\angle FAE = 2 \cdot \angle EAD$, $\angle CAB = \angle DAC$

$$\angle EAB = 80^\circ, \angle FAD = 60^\circ$$

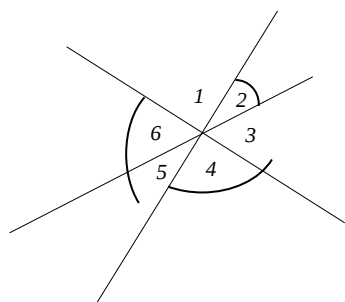
חשב את הזוויות הבאות:

$$\angle FAB, \angle EAC, \angle CAB$$



2. חשב את סכום הזוויות הבאות (נמק):

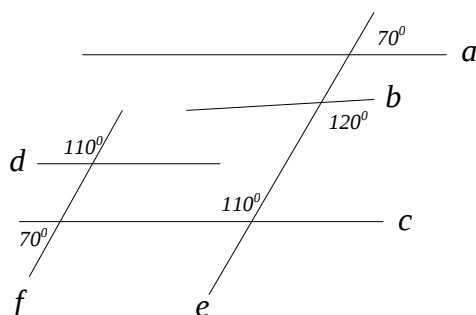
$$\angle 2 + \angle 4 + \angle 6$$



3. מצא את זוגות

הישרים המקבילים

בשרטוט הבא (נמק):



פתרונות:

1. $\angle CAB = 30^\circ$, $\angle EAC = 50^\circ$, $\angle FAB = 120^\circ$ 2. 180° 3.

$$d \parallel c, a \parallel c, e \parallel f$$

3.2 –משולש כללי, משולש שווה שוקיים, משולש ישר זווית

משפטים כלליים במשולשים:

משפט: סכום הזוויות במשולש הוא 180°

משפט: סכום שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית

משפט: במשולש מול הזווית הגדולה נמצאת הצלע הגדולה ולהפך

במשולש מול הזווית הקטנה נמצאת הצלע הקטנה ולהפך

במשולש מול זווית שוות נמצאות צלעות שוות ולהפך

משולש שווה שוקיים:

משפט: במשולש שווה שוקיים זווית הבסיס שוות זו לזו

משפט הפוך: משולש שבו שתי זוויות שוות הוא משולש שווה שוקיים

משפט: במשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש, הגובה לבסיס והתיכון לבסיס מתלכדים

משפט הפוך: משולש שבו חוצה זווית הוא גם גובה או חוצה זווית הוא גם תיכון או גובה הוא גם תיכון

הוא משולש שווה שוקיים

משולש שווה צלעות:

הגדרה: משולש שבו כל הצלעות שוות הוא משולש שווה צלעות.

משפט: במשולש שווה צלעות כל הזוויות שוות 60° .

משפט הפוך: משולש שבו כל הזוויות שוות הוא משולש שווה צלעות.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 14		הגדרות – משולש חד/ישר/קהה זווית, משולש שווה שוקיים/שווה צלעות/שונה צלעות.
סרטון 15		קווים במשולש – חוצה זווית, תיכון, גובה, אנך אמצעי
סרטון 16		משפטים במשולש: סכום זוויות, מול הזווית הגדולה/קטנה נמצאת... ולהיפך
סרטון 17		משפטים במש"ש (משולש שווה שוקיים): זווית הבסיס, חוצה זווית/תיכון גובה
סרטון 18		משולש שווה צלעות – הגדרה ושוויון הזוויות (משפט ומשפט הפוך)
סרטון 19	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 20	תרגיל 4	רישום מדויק על ההוכחה + כיצד רושמים הוכחה בגיאומטריה
סרטון 21	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 22	תרגיל 5	רישום מדויק על ההוכחה

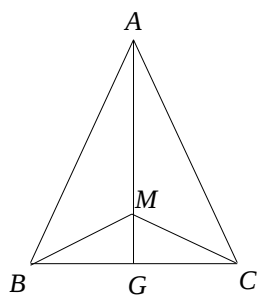
תרגילים:

4. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש שווה

שוקיים ($AB = AC$). AG חוצה את זווית $\angle A$.

M היא נקודה כלשהי על AG .

הוכח: $BM = CM$.



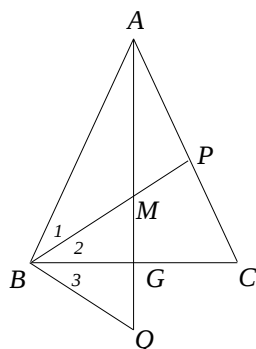
5. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש שווה

שוקיים ($AB = AC$). AG ו- BP חוצים את

הזווית $\angle A$ ו- $\angle ABC$ בהתאמה. הנקודה Q

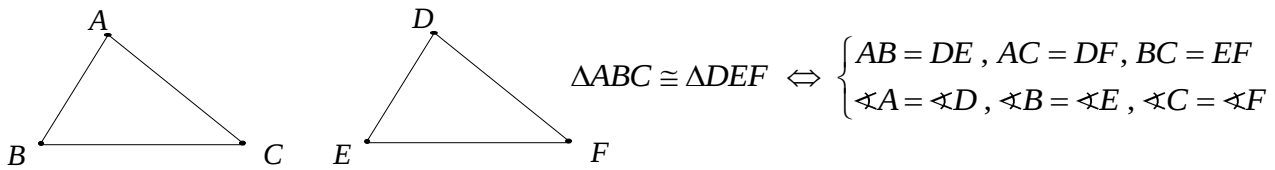
נמצאת על המשך AG . נתון: $GM = GQ$.

הוכח: $\angle B_1 = \angle B_3$.



3.3 – חפיפת משולשים

הגדרה: משולשים חופפים הם משולשים ששווים זה לזה בכל צלעותיהם ובכל זוויותיהם בהתאמה.



משפטי החפיפה:

1. משפט חפיפה צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
2. משפט חפיפה זווית-צלע-זווית (ז.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי זוויות והצלע שביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.
3. משפט חפיפה צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ): אם בין שני משולשים שוות שלוש צלעות בהתאמה אז המשולשים חופפים.
4. משפט חפיפה צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שוות שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן בהתאמה אז המשולשים חופפים.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 23		מהי חפיפה, סימונים
סרטון 24		ארבעת משפטי החפיפה
סרטון 25	תרגיל 6	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 26	תרגיל 6	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 27	תרגיל 7	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 28	תרגיל 7	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 29	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 30	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה

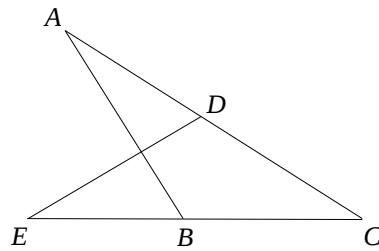
תרגילים:

6. בצויר נתון: $AC = EC$, $DC = BC$.

הוכח:

א. $\triangle CDE \cong \triangle CBA$

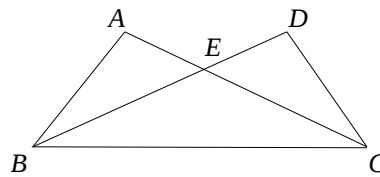
ב. $\angle ADE = \angle ABE$



7. בצויר נתון: $\angle ABC = \angle DCB$,

$\angle DBC = \angle ACB$

הוכח: $AB = DC$

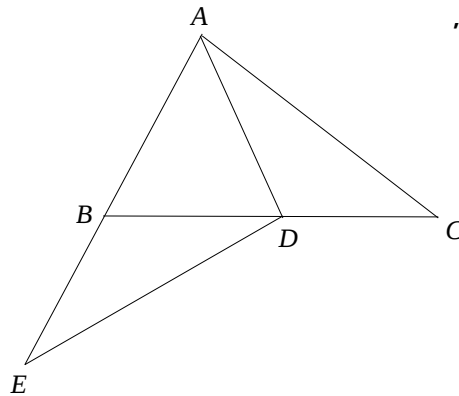


8. בצויר נתון: $AB = BE = AD$,

$AC = DE$

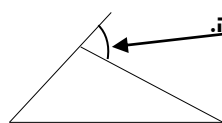
הוכח: הנקודה D היא

אמצע הצלע BC.



3.4 – זווית חיצונית למשולש ומשולש ישר זווית

זווית חיצונית למשולש:



הגדרה: זווית חיצונית למשולש היא זווית הכלואה בין צלע במשולש להמשך צלע הסמוכה לה.
משפט: זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.

משולש ישר זווית:

משפט 1: סכום הזוויות החדות במשולש ישר זווית הוא 90° .

משפט 2: במשולש שזוויותיו 90° , 60° , 30° , הניצב שמול הזווית של ה- 30° שווה למחצית היתר.

משפט הפוך (ל-2): אם במשולש ישר זווית אחד הניצבים שווה למחצית היתר, אז הזווית שמול ניצב זה

היא בת 30° .

משפט 3: במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.

משפט הפוך (ל-3): אם במשולש תיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה, אז המשולש ישר זווית

(כאשר הזווית ממנה יוצא התיכון היא הזווית הישרה).

משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.

$$\text{כלומר: } (\text{יתר})^2 = [\text{ניצב}]^2 + [\text{ניצב}]^2.$$

משפט הפוך (למשפט פיתגורס): אם במשולש סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית, אז המשולש ישר זווית.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה:

מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 31		זווית חיצונית - הגדרה ומשפט
סרטון 32	תרגיל 9	הוכחת המשפט
סרטון 33	תרגיל 10	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 34	תרגיל 10	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 35		משולש שזוויותיו 90° , 60° , 30°
סרטון 36	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 37	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 38		משפט התיכון ליתר והמשפט ההפוך לו
סרטון 39	תרגיל 12	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 40	תרגיל 12	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 41	תרגיל 13	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 42	תרגיל 13	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 43		משפט פיתגורס והמשפט ההפוך לו
סרטון 44	תרגיל 14א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 45	תרגיל 14א	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 46	תרגיל 14ב	רישום מדויק של ההוכחה

תרגילים:

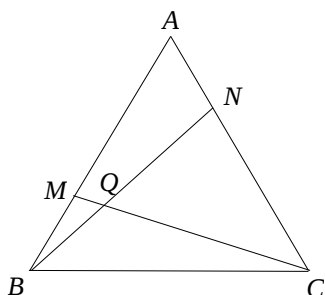
9. הוכח את המשפט: "זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה".

10. משולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש

שווה צלעות.

נתון: $AN = MB$.

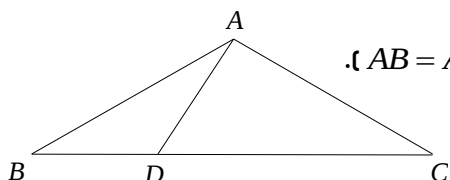
הוכח: $\angle NQC = 60^\circ$.



11. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$).

נתון: $\angle ABD = 30^\circ$, $\angle DAC = 90^\circ$, $BC = 18\text{ cm}$.

חשב את אורכו של הקטע BD .

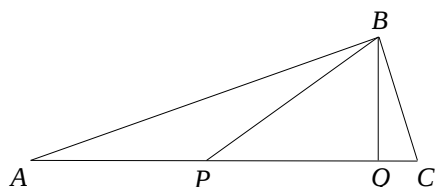


12. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle ABC = 90^\circ$).

BQ הוא הגובה ליתר AC ו- BP הוא התיכון ליתר AC .

נתון: $BQ = \frac{1}{2} BP$.

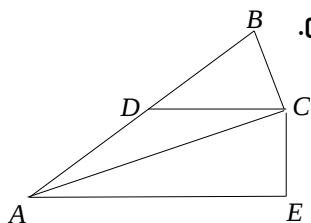
חשב את גודלה של הזווית $\angle C$.

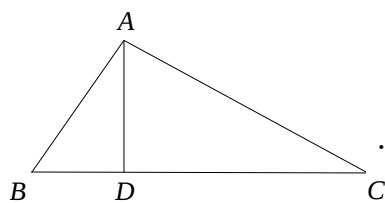


13. המשולש $\triangle BDC$ שבציור הוא משולש שווה שוקיים ($BD = DC$).

AC חוצה את הזווית $\angle BAE$. נתון: $DC \parallel AE$.

חשב את גודלה של הזווית $\angle ACB$.





14. AD הוא גובה במשולש $\triangle ABC$.

נתון: $BC = 25_{cm}$, $AC = 20_{cm}$, $AB = 15_{cm}$.

א. מצא את אורכו של AD ואת שטח המשולש $\triangle ABC$.

ב. האם המשולש $\triangle ABC$ ישר זווית? נמק.

פתרונות:

11. $BD = 6_{cm}$ 12. $\angle C = 75^\circ$ 13. $\angle ACB = 90^\circ$ 14. א. $AD = 12_{cm}$,
 ב. $S_{\triangle ABC} = 150_{cm^2}$ ב. כן.

3.5-קטע אמצעים במשולש ומפגש תיכונים במשולש

קטע אמצעים במשולש:

הגדרה: קטע המחבר אמצעי שתי צלעות במשולש נקרא קטע אמצעים במשולש.
משפט: קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
משפט הפוך 1: קטע היוצא מאמצע צלע במשולש ומקביל לצלע השלישית חוצה את הצלע השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במשולש).
משפט הפוך 2: קטע המחבר שתי צלעות במשולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים במשולש.

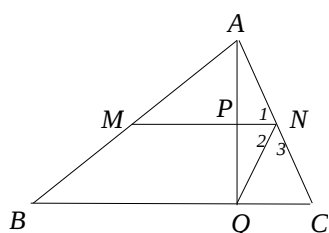
מפגש התיכונים במשולש:

משפט: שלושת התיכונים במשולש נפגשים בנקודה אחת המחלקת כל תיכון ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע.
הערה: נקודת מפגש התיכונים במשולש נקראת גם מרכז הכובד של המשולש.
הערה: אם נקודה מחלקת תיכון (אחד) במשולש ביחס של 2:1 כך שהחלק הקצר קרוב לצלע, נקודה זו היא מפגש התיכונים במשולש.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 47		ק"א במשולש – הגדרה ומשפט
סרטון 48		ק"א במשולש – משפטים הפוכים
סרטון 49	תרגיל 15	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 50	תרגיל 15	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 51	תרגיל 16 א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 52	תרגיל 16 א	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 53	תרגיל 16 ב	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 54	תרגיל 16 ב	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 55		מפגש תיכונים במשולש – הסבר ומשפט
סרטון 56	תרגיל 17	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 57	תרגיל 17	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 58	תרגיל 17	רישום מדויק של ההוכחה – המשך התרגיל

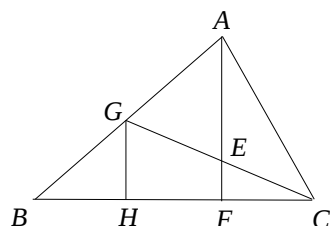
תרגילים:



15. הקטע MN הוא קטע אמצעים במשולש $\triangle ABC$.

AQ הוא גובה לצלע BC .

הוכח: $\angle N_1 = \angle N_2$.



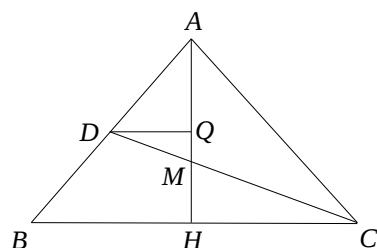
16. AF הוא גובה לצלע BC ו- CG הוא תיכון לצלע AB במשולש $\triangle ABC$. הקטע GH מאונך לצלע BC .

א. הוכח: $BH = HF$.

נתון בנוסף כי הגובה AF חוצה את

התיכון GC ושגודלו של AF הוא 12 ס"מ.

ב. חשב את אורך הקטע EF .



17. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש שווה עוקיים ($AB = AC$)

שבו AH הוא הגובה לבסיס BC . CD התיכון לשוק AB ,

יוצר זווית של 30° עם הבסיס BC .

נתון: $DQ \parallel BC$, $BC = 12\sqrt{3} \text{ cm}$.

חשב את אורך הקטע MQ .

פתרונות:

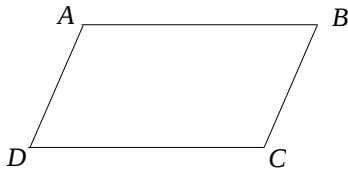
16. ב. $EF = 3 \text{ cm}$. 17. $MQ = 3 \text{ cm}$.

3.6 - מרובעים

מרובע הוא מצולע בעל 4 צלעות.

משפט: סכום הזוויות במרובע הוא 360° .

מקבילית:



הגדרה: מקבילית היא מרובע שבו שני זוגות של צלעות נגדיות מקבילות.

תכונות המקבילית:

משפט 1: במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.

משפט 2: במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות.

משפט 3: במקבילית סכום כל שתי זוויות סמוכות הוא 180° .

משפט 4: במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.

היקף מקבילית = סכום הצלעות, שטח מקבילית = צלע $\cdot$ גובה לצלע

כדי להוכיח כי מרובע הוא מקבילית נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות מקבילות הוא מקבילית.

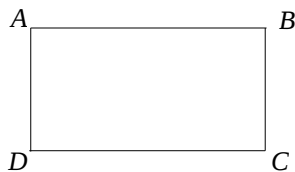
משפט 2: מרובע שבו כל זוג צלעות נגדיות שוות הוא מקבילית.

משפט 3: מרובע שבו זוג צלעות שוות ומקבילות הוא מקבילית.

משפט 4: מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.

משפט 5: מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.

מלבן:



הגדרה: מלבן הוא מרובע שכל זוויותיו ישרות.

מסקנה: מלבן הוא סוג של מקבילית.

תכונות המלבן (בנוסף לתכונות המקבילית):

משפט 1: ארבע זוויות המלבן שוות והן זוויות ישרות.

משפט 2: האלכסונים במלבן שווים זה לזה.

היקף מלבן = סכום הצלעות, שטח מלבן = צלע $\cdot$ גובה לצלע

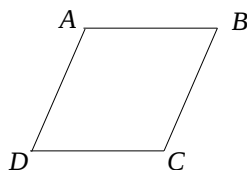
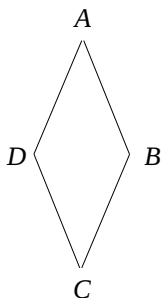
כדי להוכיח כי מרובע הוא מלבן נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מרובע שבו שלוש זוויות ישרות הוא מלבן.

משפט 2: מקבילית שבה זווית ישרה היא מלבן.

משפט 3: מקבילית שבה האלכסונים שווים היא מלבן.

מעוין:



הגדרה: מעוין הוא מרובע שכל צלעותיו שוות.

מסקנה: מעוין הוא סוג של מקבילית.

תכונות המעוין (בנוסף לתכונות המקבילית):

משפט 1: במעוין כל הצלעות שוות.

משפט 2: במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.

משפט 3: במעוין האלכסונים הם חוצי זוויות.

היקף מעוין = צלע $\cdot 4$, שטח מעוין = צלע $\cdot$ גובה לצלע $= \frac{(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון})}{2}$

כדי להוכיח כי מרובע הוא מעוין נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מרובע שבו כל הצלעות שוות הוא מעוין.

משפט 2: מקבילית שבה שתי צלעות סמוכות שוות היא מעוין.

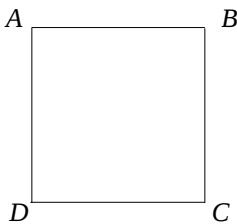
משפט 3: מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.

משפט 4: מקבילית שבה אלכסון חוצה זווית היא מעוין. (מספיק אחד)

ריבוע:

הגדרה: ריבוע הוא מרובע שכל צלעותיו שוות וכל זוויותיו שוות.

מסקנה: ריבוע הוא סוג של מקבילית, סוג של מלבן וסוג של מעוין.



מכאן, שבנוסף לתכונות שבהגדרת הריבוע מתקיים כי אלכסוני הריבוע חוצים

זה את זה, שווים זה לזה, מאונכים זה לזה וחוצים את זוויות הריבוע.

היקף ריבוע = צלע $\cdot 4$, שטח ריבוע = צלע² $= \frac{(\text{אלכסון})^2}{2}$

כדי להוכיח כי מרובע הוא ריבוע נשתמש באחת הדרכים הבאות:

משפט 1: מלבן שבו האלכסונים מאונכים הוא ריבוע.

משפט 2: מלבן שבו אלכסון חוצה זווית הוא ריבוע.

משפט 3: מלבן שבו שתי צלעות סמוכות שוות הוא ריבוע.

משפט 4: מעוין שבו האלכסונים שווים הוא ריבוע.

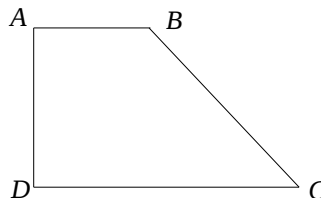
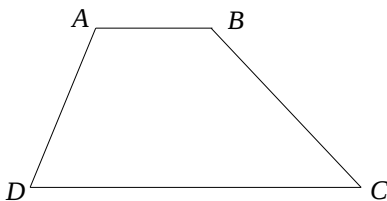
משפט 5: מעוין שבו זווית ישרה הוא ריבוע.

טרפז:

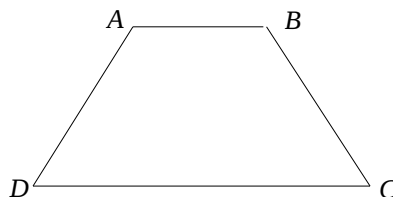
הגדרה: טרפז הוא מרובע שבו זוג אחד בלבד של צלעות נגדיות מקבילות.

היקף טרפז = סכום הצלעות , שטח טרפז $= \frac{(\text{גובה} \cdot \text{סכום הבסיסים})}{2}$

טרפז ישר זווית:



טרפז שווה שוקיים:



משפטים הנוגעים למרפז שווה שוקיים:

משפט 1: במרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.

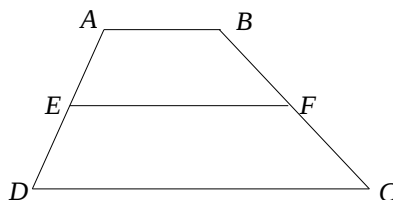
משפט הפוך (ל-1): מרפז שבו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא מרפז שווה שוקיים.

משפט 2: במרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.

משפט הפוך (ל-2): מרפז שבו האלכסונים שווים זה לזה הוא מרפז שווה שוקיים.

קטע אמצעים במרפז:

הגדרה: קטע אמצעים במרפז הוא קטע המחבר את אמצעי השוקיים במרפז.



משפט: קטע אמצעים במרפז מקביל לבסיסים ועווה למחצית סכומם.

משפט הפוך: קטע היוצא מאמצע שוק אחת במרפז ומקביל לבסיסים, חוצה

את השוק השנייה (כלומר הוא קטע אמצעים במרפז).

דלתון:

הגדרה: דלתון הוא מרובע שבו שני זוגות של צלעות סמוכות שוות.

מסקנה: דלתון הוא מרובע שניתן לפרק לשני משולשים שווי שוקיים בעלי בסיס משותף.

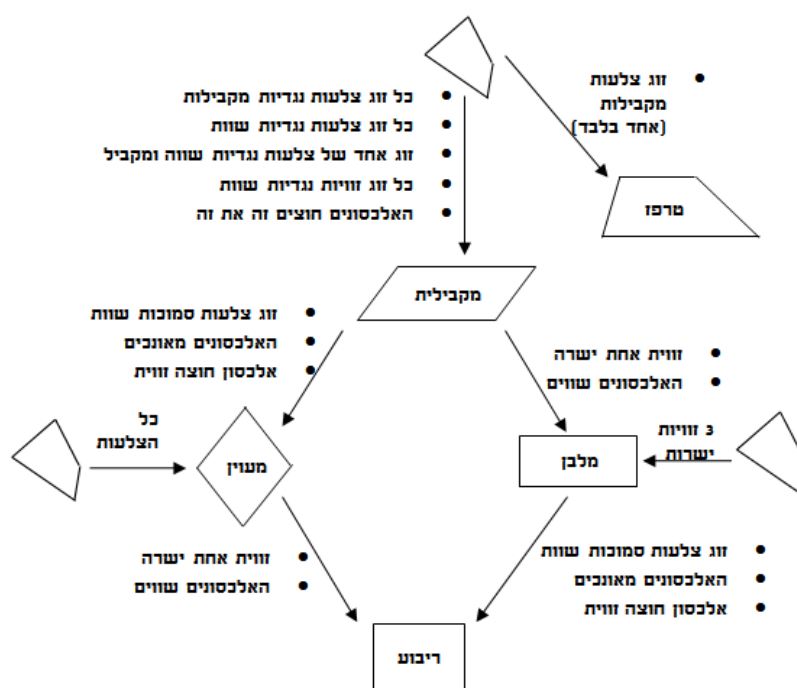
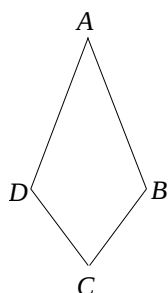
תכונות האלכסונים בדלתון:

משפט: האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון המשני ומאונך לו.

הערה: האלכסון הראשי אינו בהכרח גדול מהאלכסון המשני.

היקף דלתון = סכום הצלעות , שטח דלתון = $(\text{אלכסון} \cdot \text{אלכסון}) / 2$

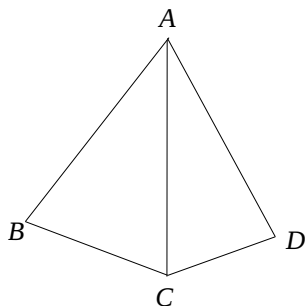
משפחת המרובעים:



לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל מדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הגדרת מרובע, סכום הזוויות במרובע
סרטון 2	תרגיל 1	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 3	תרגיל 1	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 4		הגדרה + תכונות המקבילית + חישוב היקף ושטח מקבילית
סרטון 5	תרגיל 2	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 6	תרגיל 2	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 7		כיצד מוכיחים שמרובע הוא מקבילית
סרטון 8	תרגיל 3	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 9	תרגיל 3	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 10		הגדרה + תכונות המלבן + חישוב היקף ושטח מלבן
סרטון 11	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 12	תרגיל 4	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 13		כיצד מוכיחים שמרובע הוא מלבן
סרטון 14	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 15	תרגיל 5	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 16	תרגיל 5	המשך רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 17		הגדרה + תכונות המעוין + חישוב היקף ושטח מעוין
סרטון 18	תרגיל 6	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 19	תרגיל 6	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 20		כיצד מוכיחים שמרובע הוא מעוין
סרטון 21	תרגיל 7	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 22	תרגיל 7	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 23		הגדרה + תכונות הריבוע + חישוב היקף ושטח ריבוע
סרטון 24	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 25	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 26		כיצד מוכיחים שמרובע הוא ריבוע
סרטון 27	תרגיל 9	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 28	תרגיל 9	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 29	תרגיל 9	המשך רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 30		הגדרת הטרפז ותכונותיו, כיצד מוכיחים שמרובע הוא טרפז, חישוב היקף ושטח טרפז
סרטון 31	תרגיל 10	שאלת חישוב שטח טרפז (ללא רישום הוכחה מסודרת)
סרטון 32		טרפז ישר זווית וטרפז שווה עוקיים – מעשמים ומשפמים הפוכים
סרטון 33	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 34	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 35		הגדרת קטע אמצעים בטרפז, משפט ומשפט הפוך
סרטון 36	תרגיל 12	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 37	תרגיל 12	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 38	תרגיל 12	המשך רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 39		הגדרת הדלתון, תכונות, משפט לגבי האלכסונים, כיצד מוכיחים שמרובע הוא דלתון
סרטון 40	תרגיל 13	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 41	תרגיל 13	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 42		משפחת המרובעים: שרטוט מסכם שמכיל בצורה נוחה את כל הידע שנלמד בפרק המרובעים. מומלץ מאוד!

תרגילים:

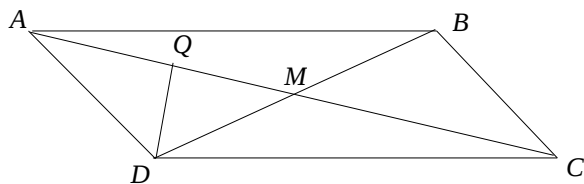


1. המשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle ACD$ שבציור הם

משולשים שווי שוקיים ($AB = AC = AD$).

נתון: $\angle BAD = 80^\circ$.

חשב את גודלה של הזווית $\angle BCD$.



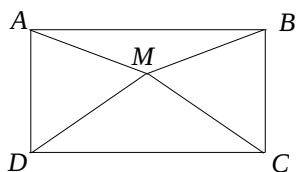
2. נתונה מקבילית $ABCD$ שאלכסוניה נפגשים בנקודה M .

נתון: $AC = 20_{cm}$, $BC = \frac{1}{2} DB$, $DQ \perp AC$.

חשב את אורך הקטע AQ .

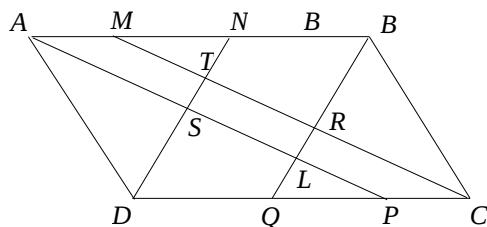
3. את הצלע AB במקבילית $ABCD$ האריכו כאורכה עד לנקודה T .

הוכח: $BTCD$ מקבילית.



4. נתון מלבן $ABCD$ שבו $DM = MC$.

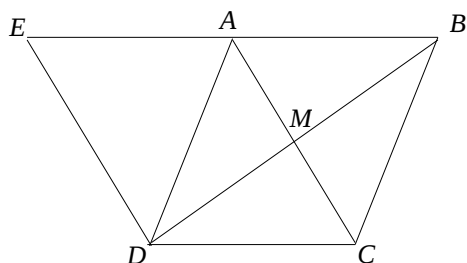
הוכח: $\angle MAB = \angle MBA$.



5. נתונה מקבילית $ABCD$ ובה AP , BQ , CM ו- DN הם חוצי

הזוויות $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ו- $\angle D$ בהתאמה.

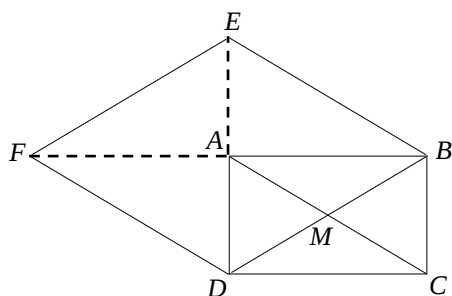
הוכח: $TRLS$ מלבן.



6. נתון מעוין $ABCD$ שאלכסוניו נפגשים בנקודה M . האריכו את

הצלע AB עד לנקודה E כך שמתקיים $ED \perp DB$.

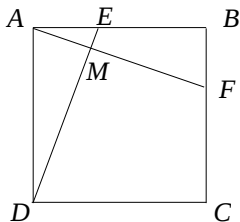
הוכח: $AD = AE$.



7. נתון מלבן $ABCD$ שאלכסוניו נפגשים בנקודה M . האריכו

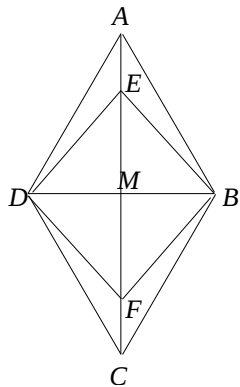
את הצלע AB כאורכה עד לנקודה F ואת הצלע AD כאורכה עד

לנקודה E כמתואר בשרטוט. הוכח: המרובע $EBDF$ הוא מעוין.



8. בריבוע $ABCD$ נתון כי $AE = BF$.

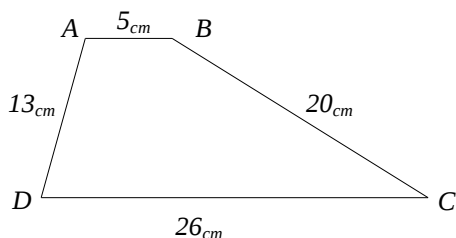
הוכח: $DE \perp AF$.



9. נתון מעוין $ABCD$ שאלכסוניו נפגשים בנקודה M . נתון: $AE = FC$,

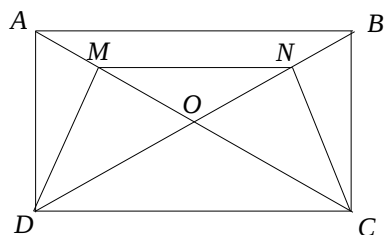
$$\angle EBA = 15^\circ, MB = \frac{1}{2} AB$$

הוכח: המרובע $EBFD$ הוא ריבוע.



10. נתון מרפז $ABCD$ שאורכי צלעותיו נתונים בשרטוט.

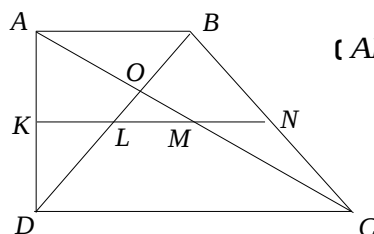
חשב את שטח המרפז (פתור כתרגיל חישוב).



11. נתון מלבן $ABCD$ שאלכסוניו נפגשים בנקודה O .

נתון: $MN \parallel DC$.

הוכח: $DMNC$ מרפז שווה שוקיים.

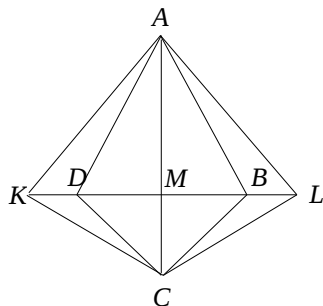


12. KN הוא קטע אמצעים במרפז ישר זווית $ABCD$ ($AD \perp AB, AB \parallel DC$)

שאלכסוניו נפגשים בנקודה O .

נתון: $AD = 12_{cm}$, $DC = 2AB$, $\angle ADB = 45^\circ$.

חשב את אורך הקטע LM .



13. בדלתון $ABCD$ האריכו את האלכסון המשני משני צדיו כמתואר בשרטוט

כך שמתקיים: $KD = BL$. הוכח: המרובע $ALCK$ הוא דלתון.

פתרונות:

1. $\angle BCD = 140^\circ$ 2. $AQ = 5_{cm}$ 10. $S = 186_{cm^2}$ 12. $LM = 6_{cm}$

3.7 – המעגל

הגדרות:

מעגל – המקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה קבוע.

הנקודה הקבועה נקראת מרכז המעגל.

רדיוס – קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה על המעגל.

מיתר – קטע המחבר שתי נקודות שעל המעגל.

קוטר – מיתר העובר במרכז המעגל.

$$2\pi R = \text{היקף מעגל}$$

$$\pi R^2 = \text{שטח מעגל}$$

קשת – חלק מהיקף המעגל

גזרה – חלק משטח המעגל

זווית מרכזית – זווית שקדקודה במרכז המעגל ושוקיה רדיוסים

זווית היקפית – זווית שקדקודה על היקף המעגל ושוקיה מיתרים

משפטים:

משפט 1: מיתרים שווים נשענים על קשתות שוות ולהיפך.

משפט 2: על מיתרים שווים נשענות זוויות מרכזיות שוות ולהיפך.

משפט 3: מיתרים שווים נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.

משפט הפוך ל-3: מיתרים הנמצאים במרחק שווה ממרכז המעגל שווים.

משפט 4: אנך למיתר ממרכז המעגל חוצה את המיתר.

משפט הפוך ל-4 (1): רדיוס החוצה מיתר מאונך לו.

משפט הפוך ל-4 (2): קטע היוצא מאמצע מיתר ומאונך לו, עובר במרכז המעגל.

משפט 5: שתי זוויות היקפיות הנשענות על אותה קשת/קשתות שוות, שוות ביניהן.

משפט הפוך ל-5: זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות.

משפט 6: זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה קשת.

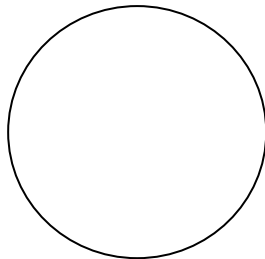
משפט 7: זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה.

משפט הפוך ל-7: מיתר עליו נשענת זווית היקפית ישרה הוא קוטר.

משפט 8: משיק מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.

משפט הפוך ל-8: קטע המאונך לרדיוס בקצהו משיק למעגל.

משפט 9: שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.



משפט 10 : קטע המחבר את מרכז המעגל עם נקודה שממנה יוצאים שני משיקים חוצה את הזווית בין המשיקים.

משפט 11 : הזווית הכלואה בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר מצדו השני.

משפט 12 : קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.

משפט 13 : קטע המרכזים (או המשכו) של שני מעגלים משיקים עובר בנקודת ההשקה.

משפט 14 : מרכז מעגל החוסם משולש הוא מפגש האנכים האמצעיים במשולש.

משפט 15 : מרכז מעגל החסום במשולש הוא מפגש חוצי הזווית במשולש.

משפט 16 : במרובע החסום במעגל, סכום כל שתי זוויות נגדיות הוא 180° .

משפט הפוך ל-16 : אם במרובע סכום זוג זוויות נגדיות הוא 180° , המרובע בר חסימה במעגל.

משפט 17 : במרובע החוסם מעגל סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני.

משפט הפוך ל-17 : אם במרובע סכום זוג צלעות נגדיות שווה לסכום הזוג השני אז ניתן לחסום בתוכו מעגל.

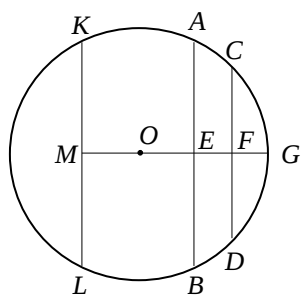
משפט 18 : כל מצולע משוכלל ניתן לחסום במעגל וניתן לחסום בתוכו מעגל.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הגדרת מעגל, רדיוס, מיתר, קוטר
סרטון 2		הגדרת ונוסחאות היקף ושטח מעגל, הגדרת קשת, גזרה, זווית מרכזית וזווית היקפית
סרטון 3		הסבר על מדידת קשתות במעלות
סרטון 4		משפטים 1,2,3 וההפוך ל-3 בסיכום
סרטון 5		משפט 4 ושני המשפטים ההפוכים ל-4 בסיכום
סרטון 6	תרגיל 1א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 7	תרגיל 1א	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 8	תרגיל 1ב	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 9	תרגיל 1ב	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 10		משפט 5 וההפוך ל-5 בסיכום
סרטון 11	תרגיל 2	תרגיל חישוב
סרטון 12		משפט 6 בסיכום
סרטון 13	תרגיל 3	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 14	תרגיל 3	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 15		משפט 7 וההפוך ל-7 בסיכום
סרטון 16	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 17	תרגיל 4	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 18		מהו משיק למעגל + משפט 8 וההפוך ל-8 בסיכום
סרטון 19		משפט 9 בסיכום
סרטון 20	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 21	תרגיל 5	רישום מדויק של ההוכחה

סרמון 22		משפט 10 בסיכום
סרמון 23	תרגיל 6א	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 24	תרגיל 6ב	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 25	תרגיל 6א	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 26	תרגיל 6ב	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 27		משפט 11 בסיכום
סרמון 28	תרגיל 7	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 29	תרגיל 7	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 30		הסבר על שני מעגלים + משפטים 12 ו-13 בסיכום
סרמון 31	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 32	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 33		משולש חסום + משפט 14 בסיכום, משולש חוסם + משפט 15 בסיכום
סרמון 34	תרגיל 9	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 35	תרגיל 9	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 36	תרגיל 10	מרובע חסום + משפט 16 וההפוך ל-16 בסיכום + פתרון תרגיל 10
סרמון 37	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרמון 38	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה
סרמון 39	תרגיל 12	מרובע חוסם + משפט 17 וההפוך ל-17 בסיכום + פתרון תרגיל 12
סרמון 40		מצולע משוכלל + משפט 18 בסיכום

תרגילים:



1. AB , CD ו- KL הם מיתרים במעגל שמרכזו O , והם חותכים את הקטע

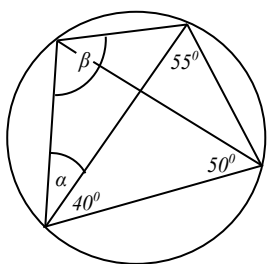
MG , העובר במרכז המעגל, בנקודות E , F ו- M בהתאמה.

נתון: $KL \parallel CD$, $CF = FD$.

א. הוכח: $KM = ML$.

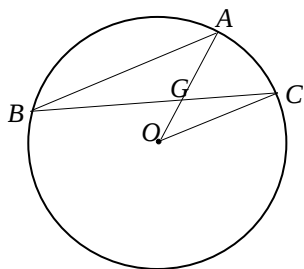
ב. נתון בנוסף כי $AB \perp MG$, $ML = EB$.

הוכח: $MO = OE$.



2. חשב את גודל הזוויות α ו- β

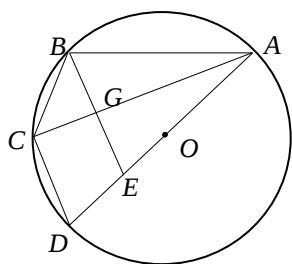
במעגל הנתון.



3. AB ו- BC הם מיתרים במעגל שמרכזו O .

נתון: $BA \parallel OC$, $\angle AGC = 60^\circ$.

חשב את גודלה של הזווית $\angle AOC$.

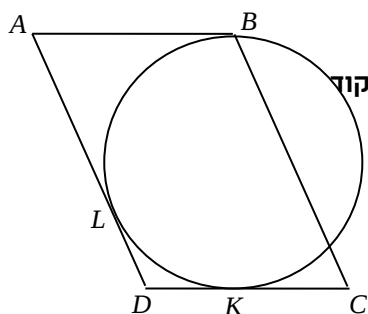


4. AB , AC , AD ו- CD הם מיתרים במעגל שמרכזו O (המיתר

AD עובר ב- O). הקטע BE חותך את המיתר AC בנקודה G .

נתון: $BE \parallel CD$, $BG = GE$.

הוכח: $BC = CD$.

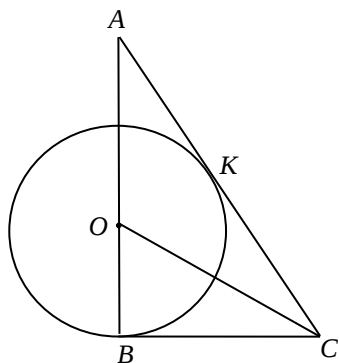


5. הצלעות AB , AD ו- DC של המקבילית $ABCD$ משיקות למעגל בנקודות

L ו- K בהתאמה (ראה שרטוט).

נתון: $BC = 14_{cm}$, $KC = 6_{cm}$.

חשב את היקף המקבילית.



6. הצלעות AC ו- BC של המשולש $\triangle ABC$ משיקות

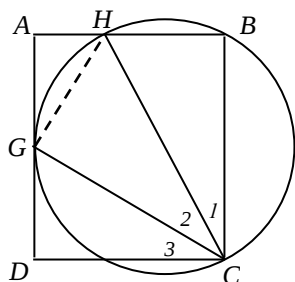
למעגל שמרכזו O , בנקודות K ו- B בהתאמה.

הצלע AB עוברת בנקודה O .

נתון: $AK = KC$, $AB = 15_{cm}$.

א. חשב את גודלה של זווית $\angle A$.

ב. חשב את אורכו של רדיוס המעגל.



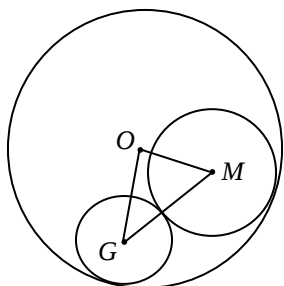
7. הקודקודים B ו- C של המלבן $ABCD$ מונחים

על מעגל. הצלע AD משיקה למעגל בנקודה G

והצלע AB חותכת את המעגל בנקודה H .

הוכח: $\angle C_2 = \angle C_3$.

הדרכה: סמן $\angle AGH = \alpha$.



8. המעגלים שמרכזיהם M ו- G משיקים מבחוץ

זה לזה ומשיקים מבפנים למעגל שמרכזו O .

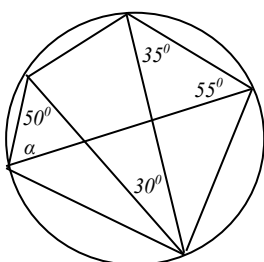
נתון כי רדיוס המעגל שמרכזו O הוא 8_{cm} .

חשב את היקף המשולש $\triangle OMG$.

9. AD הוא התיכון לצלע BC במשולש $\triangle ABC$.

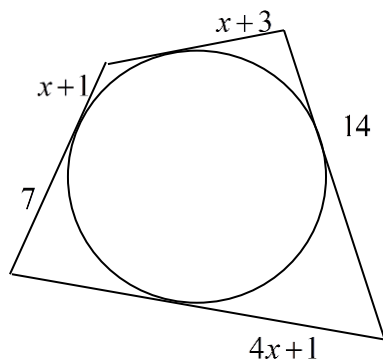
א. הוכח: אם מרכז המעגל החסום במשולש $\triangle ABC$ נמצא על AD אז המשולש $\triangle ABC$ הוא שווה שוקיים.

ב. בהמשך לסעיף א', האם מרכז המעגל החסום את משולש $\triangle ABC$ נמצא על AD ?



10. חשב את גודלה של הזווית α בערמוט הבא:

11. במרפז ישר זווית $ABCD$ שבו השוק AD מאונכת לבסיסים AB ו- DC הנקודות K ו- L נמצאות על הצלעות AD ו- DC בהתאמה כך שהקטעים BK ו- CL הם חוצי הזוויות $\angle B$ ו- $\angle C$ בהתאמה. חוצי הזוויות נפגשים בנקודה M . הוכח: את המרובע $DKML$ ניתן לחסום במעגל.



12. חשב את גודלו של x בשרטוט הבא:

פתרונות:

2. $\alpha = 35^\circ, \beta = 95^\circ$ 3. $\angle AOC = 40^\circ$ 5. $P = 48_{cm}$ 6. א. $\angle A = 30^\circ$
 ב. $R = 5_{cm}$ 8. $P = 16_{cm}$ 10. $\alpha = 70^\circ$ 12. $x = 2$

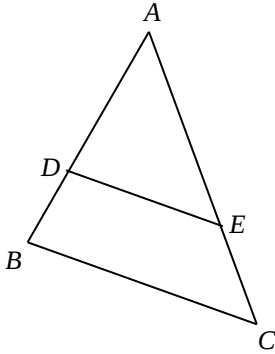
3.8 - פרופורציה ודמיון

פרופורציה:

משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים פרופורציוניים.

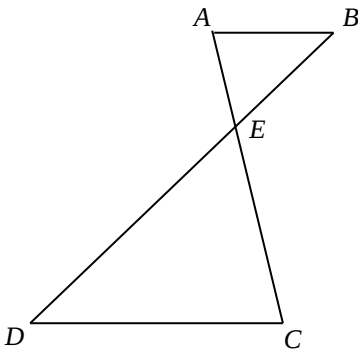
משפט הפוך למשפט תאלס: אם שני ישרים החותכים שוקי זווית מקצים עליהן קטעים

פרופורציוניים הישרים מקבילים.



$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{משפט תאלס + ההפוך:}$$

$$DE \parallel BC \Leftrightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{משפט תאלס המורחב + ההפוך:}$$



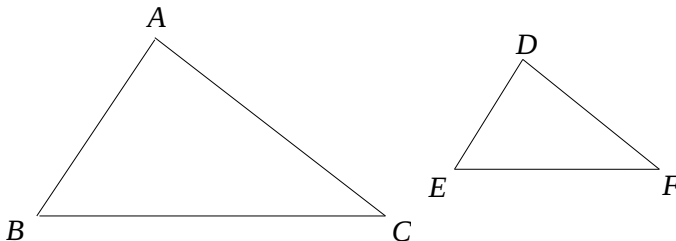
$$AB \parallel DC \Leftrightarrow \frac{BE}{ED} = \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{DC} \quad \text{משפט תאלס "שעון חול" + ההפוך:}$$

משפט חוצה הזווית: חוצה זווית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית ביחס הזהה ליחס בין הצלעות שביניהן הוא כלוא ולהפך.

דמיון משולשים:

הגדרה: משולשים דומים הם משולשים שעווים זה לזה בכל זוויותיהם ושצלעותיהם שומרות

בהתאמה על אותו יחס.



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF$$



$$\sphericalangle A = \sphericalangle D, \sphericalangle B = \sphericalangle E, \sphericalangle C = \sphericalangle F$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

משפטי הדמיון:

¹. משפט דמיון זווית-זווית (ז.ז.): אם בין שני משולשים שוות שתי זווית אז המשולשים דומים.

2. משפט דמיון צלע-זווית-צלע (צ.ז.צ): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזווית שביניהן שווה אז המשולשים דומים.
3. משפט דמיון צלע-צלע-צלע (צ.צ.צ): אם בין שני משולשים שלוש הצלעות שומרות על אותו יחס אז המשולשים דומים.
4. משפט דמיון צלע-צלע-והזווית הגדולה (צ.צ.ז): אם בין שני משולשים שתי צלעות שומרות על אותו יחס והזווית שמול הצלע הגדולה מביניהן שווה אז המשולשים דומים.

יחס בין גדלים במשולשים דומים:

משפט 1: בין שני משולשים דומים היחס בין הגבהים/תיכונים/חוצי זווית/היקפים/רדיוס המעגל החוסם/רדיוס המעגל החסום הוא כיחס הדמיון.

משפט 2: היחס בין שטחי משולשים דומים הוא ריבוע יחס הדמיון.

פרופורציות במשולש ישר זווית:

משפט 1: במשולש ישר זווית, הגובה ליתר בריבוע שווה למכפלת היטלי הניצבים על היתר.

משפט 2: במשולש ישר זווית, ניצב בריבוע שווה למכפלת היתר והיטל הניצב על היתר.

משפט 3 (הפוך למשפט 1): אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת היטלי

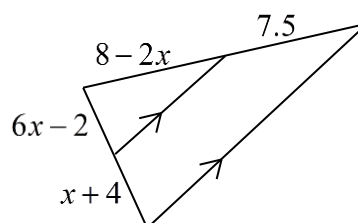
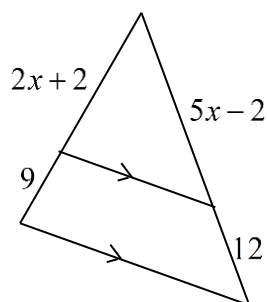
הצלעות האחרות על צלע זאת, המשולש ישר זווית.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

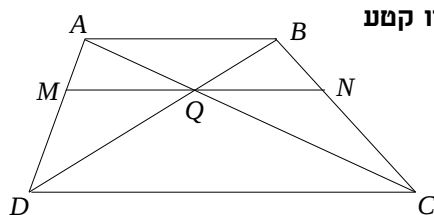
מס' סידורי	מס' תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע, מהי פרופורציה, משפט תאלס וההפוך לתאלס
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3		הרחבה ראשונה למשפט תאלס + משפט הפוך
סרטון 4		הרחבה שנייה למשפט תאלס (תאלס "שעון חול") + משפט הפוך
סרטון 5	תרגיל 2	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 6	תרגיל 2	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 7	תרגיל 3 א'	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 8	תרגיל 3 א'	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 9	תרגיל 3 ב'	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 10	תרגיל 3 ב'	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 11		משפט חוצה הזווית והמשפט ההפוך לו
סרטון 12	תרגיל 4	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 13	תרגיל 4	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 14		דמיון משולשים – מהו דמיון, סימונים בדמיון
סרטון 15		דמיון משולשים – ארבעת משפטי הדמיון
סרטון 16	תרגיל 5	הרעיון להוכחה ורישום מדויק של ההוכחה
סרטון 17		סוגי דמיון נפוצים, הקשר בין משפט תאלס לדמיון משולשים
סרטון 18	תרגיל 6	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 19	תרגיל 6	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 20	תרגיל 7 א'	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 21	תרגיל 7 א'	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 22		היחס בין גדלים במשולשים דומים, כולל יחס שטחי משולשים דומים
סרטון 23	תרגיל 7 ב'	הרעיון להוכחה ורישום מדויק של ההוכחה
סרטון 24	תרגיל 8	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 25	תרגיל 8	רישום מדויק של ההוכחה
סרטון 26		פרופורציה במשולש ישר זווית – רקע והסבר כללי
סרטון 27		פרופורציה במשולש ישר זווית – שלושת המשפטים
סרטון 28	תרגיל 9	תרגיל חישוב. לא נדרשת הוכחה
סרטון 29	תרגיל 10	תרגיל חישוב. לא נדרשת הוכחה
סרטון 30	תרגיל 11	הרעיון להוכחה ללא רישום מדויק
סרטון 31	תרגיל 11	רישום מדויק של ההוכחה

תרגילים:

1. מצא את ערכו של x בשרטומים הבאים:



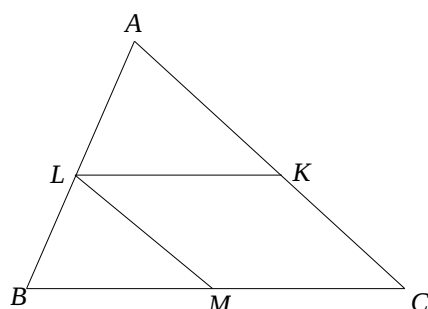
2. במרופו $ABCD$ האלכסונים נפגשים בנקודה Q . בנקודה Q העבירו קטע



המקביל לבסיסי המרופו וחותר את שוקי המרופו בנקודות M ו- N

כמתואר בשרטוט. נתון: $QB = 3_{cm}$, $DQ = 9_{cm}$, $DC = 18_{cm}$.

חשב את גודל הקטע MQ .

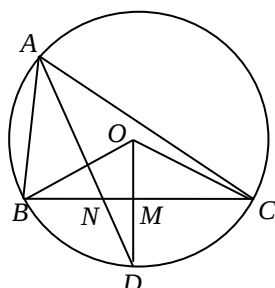


3. בשרטוט נתון: $\frac{AK}{KC} = \frac{MC}{BM} = \frac{AL}{LB}$

א. הוכח: המרובע $KLMC$ הוא מקבילית.

ב. נתון: $BC = 10_{cm}$, $AL = 1.5BL$.

חשב את אורך הקטע LK .

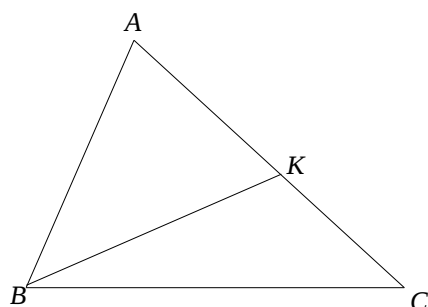


4. הנקודות A , B , C ו- D מונחות על היקפו של מעגל שמרכזו O .

הרדיוס OD חוצה את הזווית $\angle BOC$.

נתון: $BC = 10_{cm}$, $AC = 12_{cm}$, $AB = 8_{cm}$.

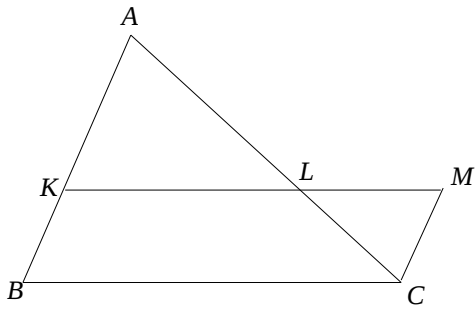
חשב את אורכו של הקטע MN .



5. במשולש $\triangle ABC$ העבירו את הקטע BK כך

ש- $\angle AKB = \angle ABC$.

הוכח: $\triangle AKB \sim \triangle ABC$.

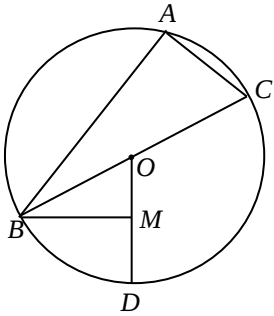


6. נתונה מקבילית $BKMC$. המשיכו את הצלע

BK עד לנקודה A . הקטע AC חותך את

הצלע KM בנקודה L .

הוכח: $LC \cdot BC = LM \cdot AC$.

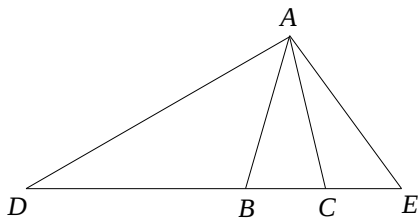


7. המשולש $\triangle ABC$ חסום במעגל שמרכזו O . הצלע BC

היא קוטר המעגל. הקטע BM מאונך לרדיוס OD . נתון: $AC = 2OM$.

א. הוכח: $AB = 2BD$.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\triangle BOM}}{S_{\triangle BAC}}$.



8. $\triangle ABC$ הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$) שבו השוק גדולה

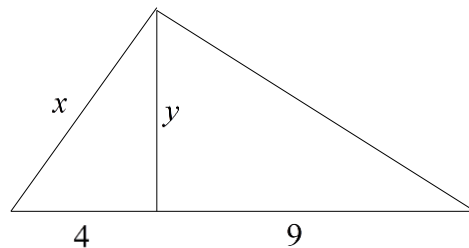
פי 2 מהבסיס. המשיכו את הבסיס משני צדיו עד לנקודות D

ו- E כך שמתקיים $BC = CE$ ו- $\angle D = \angle CAE$.

נתון: $S_{\triangle ABC} = m$.

בטא באמצעות m את שטח המשולש $\triangle ADE$.

9. מצא את ערכם של x ו- y בשרטוט הבא:



10. במשולש ישר זווית שאורכי ניצביו m ו- n נתון כי אורך הגובה ליתר הוא h .

הראה שמתקיים: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$ (אין צורך ברישום מסודר של הוכחה).

11. הוכח את המשפט: אם במשולש גובה לצלע אחת בריבוע שווה למכפלת היטלי הצלעות האחרות על

צלע זאת, המשולש ישר זווית.

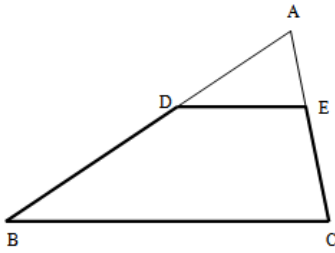
פתרונות:

1. א. $x=1$ ב. $x=2$ 2. $MQ=4.5_{cm}$ 3. ב. $LK=6_{cm}$ 4. $MN=1_{cm}$

7. $\frac{S_{\triangle BOM}}{S_{\triangle BAC}} = \frac{1}{4}$ 8. $S_{\triangle ADE} = 6m$ 9. $y=6, x=\sqrt{52}$ 10. א. $y=2, x=3$
ב. $x=5, y=3$

3.9 – תרגילים מסכמים:

תרגילים עם משפט תלס:



1. המרובע BDEC הוא מרפז ($BC \parallel DE$).

המשכי השוקיים BD ו-CE נפגשים בנקודה A.
נתון: $\angle ADE = 30^\circ$, $AB = 18$, $BC = 3 \cdot DE$.

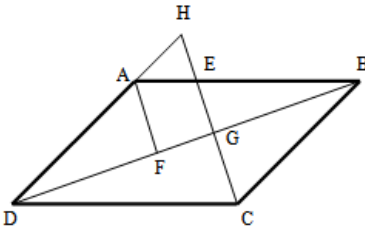
שטח המרפז הוא: $S_{BDEC} = 60$.

א. מצא את אורך הבסיס הגדול BC של המרפז.

$$\text{ידוע כי: } \frac{AE}{BD} = \frac{AD}{AB}$$

ב. חשב את היקף המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



2. המרובע ABCD הוא מקבילית.

ממשיכים את הצלע AD מהכיוון של A עד לנקודה H כך

שהקטע CH מאונך לאלכסון המקבילית BD.

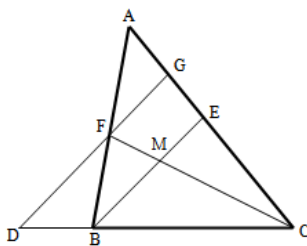
הקטע HC חותך את צלע המקבילית AB בנקודה E ואת

האלכסון BD בנקודה G כמתואר באיור.

מהנקודה A מורידים אנך לאלכסון BD הנוגע בו בנקודה F.

א. הוכח כי המשולשים AFD ו-BGC חופפים.

$$\text{ב. ידוע כי: } \frac{GE}{GC} = \frac{2}{3} \quad \text{הוכח: } \frac{FG}{BD} = \frac{1}{5}$$



3. BE ו-CF הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.

הנקודה F מעבירים קטע GD כך שמתקיים: $AC = DC$ ו- $GD \parallel BE$.

$$\text{א. הוכח: } \frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$$

ב. נתון כי: $ME = 4$. חשב את אורך הקטע DG.

4. מהקדקוד C של המשולש ABC מעבירים את הקטע CE כך שהמשולש ACE

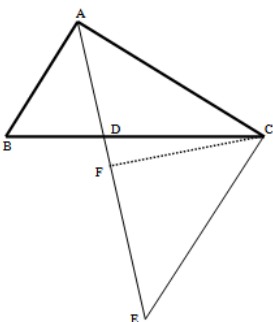
הוא ישר זווית ושווה שוקיים בעל אורך ניצב של 10 ס"מ.

היתר AE חותך את המשולש ABC בנקודה D ו-CF הוא התיכון ליתר.

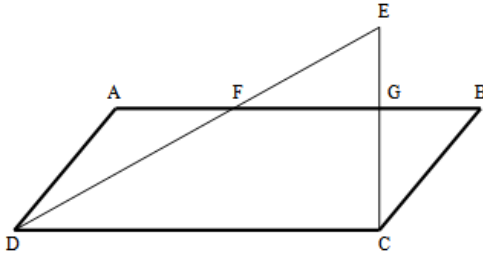
נתון כי: $\angle BAD = 45^\circ$, $AB = a$.

$$\text{א. הבע באמצעות } a \text{ את יחס הקטעים הבה: } \frac{DF}{CD}$$

ב. עבור איזה ערך של a יחס הקטעים הנ"ל יהיה 0.6.



5. המרובע ABCD הוא מקבילית. מהקדקוד C מעלים גובה החותך את הצלע AB בנקודה G ומהנקודה E שמחוץ למקבילית מעבירים את הקטע DE החותך את הצלע AB בנקודה F. אורך הצלע AD של המקבילית הוא 15 ס"מ.

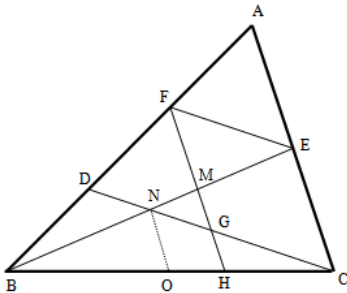


נתון: $\frac{BG}{GC} = \frac{3}{4}$, $\frac{BG}{AF} = \frac{2}{3}$, $\frac{EF}{DE} = \frac{2}{5}$

א. מסמנים את אורך הקטע FG ב- $2x$.
הבע באמצעות x את האורכים הבאים:
(i) DC. (ii) BG. (iii) GC.

ב. חשב את שטח המקבילית.

6. מקצים על הצלע AB של המשולש ABC את הנקודות F ו-D כך שמתקיים: $AF = DF = BD$. B הוא תיכון לצלע AC החותך את הקטע CD בנקודה N.



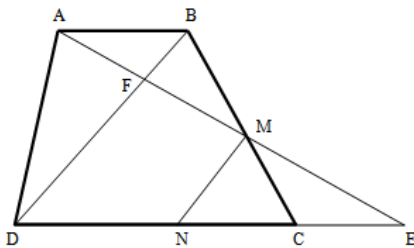
M היא נקודת פגישת התיכונים במשולש.
הקטע FH עובר דרך הנקודה M וחותך את הקטע CD בנקודה G.
א. הוכח: $EF \parallel CD$.

ב. הוכח: $2 \cdot MN = ME$.

ג. הנקודה O נמצאת על הצלע BC כך שמתקיים: $NO \parallel AC$.

הוכח: $MG = GH$.

7. המרובע ABCD הוא מרפז. ממשיכים את הבסיס DC עד לנקודה E וממנה מעבירים את הקטע AE החותך את השוק BC בנקודה M. האלכסון BD חותך את הקטע AE בנקודה F ומאונך לו. N היא נקודה על הבסיס DC כך ש-C נמצע הקטע NE. נתון: $BD \parallel MN$.



א. הוכח כי המשולש ABM הוא שווה שוקיים.

ב. הוכח: $\frac{AM}{BM} = 2 \cdot \frac{FE}{DE}$

ג. נתון כי: $\frac{BM}{DE} = \frac{2}{5}$. הוכח כי: $\frac{CE}{DE} = \frac{3}{10}$

8. המרפז ABCD הוא שווה שוקיים.

חוסמים מעגל בתוך המרפז אשר משיק לו בנקודות E, F ו-G כמתואר באיור.

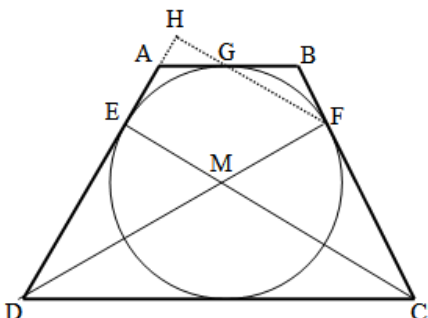
הקטעים DF ו-CE חוצים את זוויות המרפז ונחתכים בנקודה M.

א. הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום.

ב. חשב את זוויות המרפז.

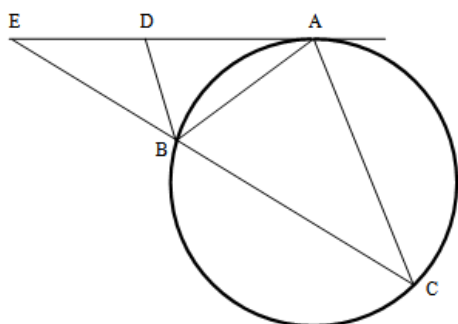
ממשיכים את GF ואת AD כך שהם נפגשים בנקודה H.

ג. חשב את היחס $\frac{EM}{FH}$



תרגילים עם דמיון משולשים ללא יחסי שטחים:

9. הקטע AE משיק למעגל. מנקודת ההשקה מעבירים מיתרים AB ו-AC כך שנוצר



המשולש ABC. ידוע כי: $AC = BC$.

המשך המיתר BC נפגש עם המשיק בנקודה E.

המיתר AB חוצה את זווית CBD.

א. הוכח כי הקטע BD מקביל למיתר AC.

ב. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ וכתוב את יחס הדמיון.

ג. הוכח: $\frac{DE}{BE} = \frac{BD}{AB}$.

10. הקטע AB הוא משיק למעגל בנקודה A. מהנקודה B מעבירים ישר חותך למעגל

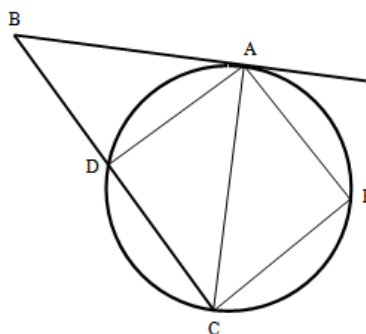
החותך אותו בנקודות C ו-D. E היא נקודה על המעגל כך ש- $\angle AEC = 90^\circ$.

נתון כי המיתר AC חוצה את זווית BCE.

א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle EAC$.

ב. נסמן ב-R את רדיוס המעגל. הוכח: $R = \frac{\sqrt{BC \cdot CE}}{2}$.

ג. איזה מרובע יהיה המרובע ADCE אם יתקיים: $2CE = BC$. נמק.



11. הנקודה D נמצאת על המשך הצלע AB של המשולש ABC.

מהקדקוד C מותחים קטע CE החותך את המשולש בנקודה F כך שהקטעים

CD ו-DE מאונכים. F היא אמצע הקטע BD.

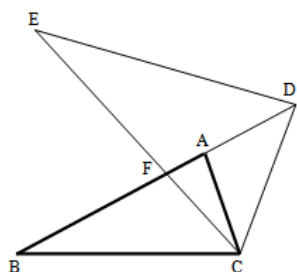
ידוע כי: $\angle BDE = 60^\circ$, $\angle E = \angle B$, $2 \cdot \angle ACD = \angle BAC$.

א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

נתון גם: $CE = 19.5$ ס"מ, $CD = 6\sqrt{3}$ ס"מ.

ב. חשב את אורך הקטע AC (העבר גובה לצלע CD מהקדקוד A במשולש ACD).

ג. הוכח כי אורך הקטע AF קטן מ-3 (בחישוביך עגל עד לשתי ספרות אחרי הנקודה).



12. המעגלים שמרכזם בנקודות M ו-N משיקים זה לזה מבפנים בנקודה A כך

שהיקף המעגל הפנימי עובר בנקודה M. דרך הנקודה A מעבירים משיק.

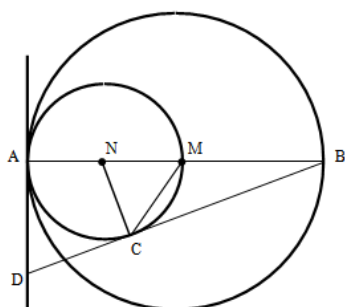
AB הוא קוטר במעגלים ו-C היא נקודה הנמצאת על היקף המעגל

הפנימי כך שהמיתר BD משיק למעגל הפנימי בנקודה זו.

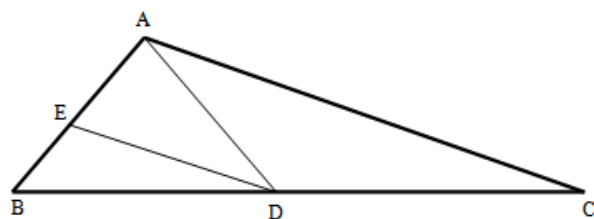
א. הוכח: $\triangle ABD \sim \triangle CBN$ וחשב את יחס הדמיון.

ב. נתון כי: $AD = \sqrt{8}$. חשב את רדיוס המעגל הגדול.

ג. הוכח: $2CD = BD$.



13. במשולש ABC הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות BC ו-AB בהתאמה.



נתון כי: $\angle ADC = \angle BED$, $DE \parallel AC$.

א. הוכח כי המשולשים ADC ו-BED דומים.

ב. הוכח: $AD \cdot BD = AB \cdot DE$.

ידוע כי הנקודה D מחלקת את הצלע BC

באופן הבא: $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$ וכי: $AD \cdot BD = 16$.

ג. חשב את המכפלה: $AB \cdot AC$.

14. נחונים שני מעגלים בעלי רדיוס זהה M ו-N.

מעבירים שני משיקים למעגלים AB ו-CD הנחתכים בנקודה K.

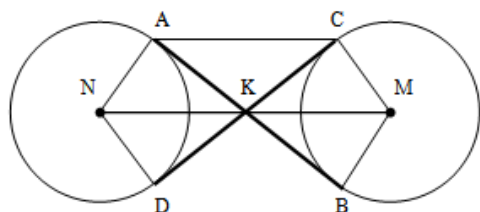
מעבירים את הרדיוסים AN ו-DN במעגל השמאלי ו-BM ו-CM במעגל הימני.

א. הוכח: $KN = KM$.

ב. הוכח כי המרובע ACMN הוא מרפז שווה שוקיים.

ג. רדיוס המעגלים הוא R וידוע כי המשולש BKC הוא

שווה צלעות. הבע באמצעות R את היקף המרפז ACMN.



15. המרובע ABCD הוא מלבן. הקטע DF חותך את הצלע BC בנקודה E כך

שהקטע CE גדול פי 2 מהקטע BE. נמצאת על המשך הצלע AB של המלבן.

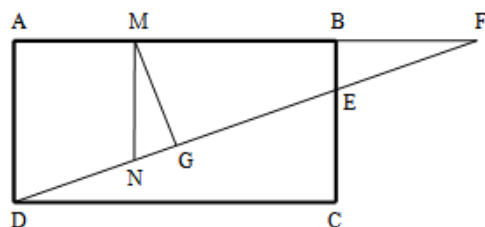
מעבירים את הקטע MN המקביל לצלעות AD ו-BC של המלבן ואת הקטע MG

המאונך לקטע DF. נתון: $\frac{AM}{BM} = \frac{3}{5}$.

א. פי כמה גדול הקטע MN מהקטע BE?

ב. הוכח כי המשולשים MGN ו-FAD דומים.

ג. נתון כי: $\frac{GN}{DF} = \frac{3}{40}$. הוכח: $\frac{DF}{BE} = \sqrt{90}$.



16. על הצלעות של המשולש ABC הקצו את הנקודות D ו-E כך שהמרובע AEDB הוא בר חסימה.

הנקודה D מחלקת את הצלע BC כך שהקטע BD גדול פי 3 מהקטע DC.

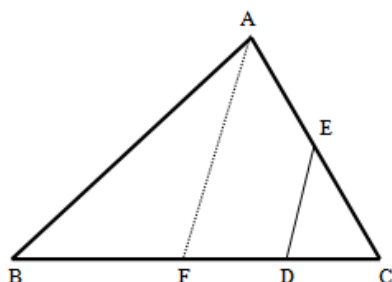
א. הוכח: $\triangle ABC \sim \triangle DEC$.

נתון גם כי: $AC \cdot CE = 36$.

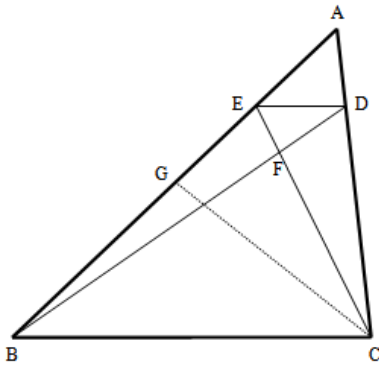
ב. חשב את אורך הקטע DC.

מעבירים מהנקודה A את הקטע AF המקביל לקטע DE.

ג. נתון כי: $AC = 9$. חשב את היחס: $\frac{DF}{BC}$.



17. מעבירים את הקטעים BD ו-CE במשולש ABC כך ש: $DE \parallel BC$.



הקטעים BD ו-CE נחתכים בנקודה F שבתוך המשולש.

אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ וידוע כי: $\frac{DF}{BD} = \frac{1}{5}$.

א. הוכח: $AC \cdot EF = AD \cdot FC$.

מעבירים את התיכון CG לצלע AB במשולש.

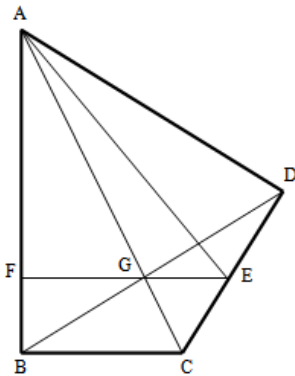
ידוע כי CF חוצה את זווית ACG וגם: $\angle BFE = \angle AGC$.

ב. הוכח כי המשולשים CGE ו-CFD דומים.

ג. נתון גם: $DF \cdot CE = 24$. מצא את אורך הצלע AB.

18. במרובע ABCD הזוויות B ו-D הן ישרות. מעבירים את האלכסונים AC ו-BD ואת הקטע AE.

האלכסונים נחתכים בנקודה G. דרך הנקודות G ו-E מעבירים את הישר EF המקביל



לצלע BC של המרובע. נתון: $\angle AED = \angle CGE$.

א. הוכח: $\triangle ADE \sim \triangle ABC$.

ב. הוכח: $\frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF}$.

נתון כי הנקודה E היא אמצע DC

וכן: $AG = 13$, $AF = FG + 7$, $AD = DE + 7.7$, $BF = 4.8$.

ג. חשב את היחס: $\frac{GE}{FG}$.

19. BD הוא אלכסון במרובע הבר-חסימה ABCD. הנקודות E ו-F הן בהתאמה אמצעי הצלעות

AD ו-AB במרובע. מעבירים את הקטעים BE ו-CF כך ש: $BE \parallel CD$.

נתון כי הזוויות $\angle A$ ו- $\angle BFE$ משלימות ל- 180° .

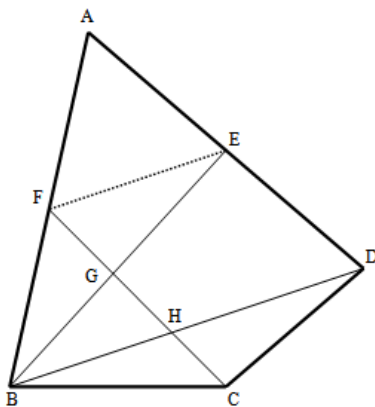
א. הוכח: $\triangle ABCD \sim \triangle BFE$.

נתון כי: $BE = 7.5$ וכי: $GE \cdot HD = 17 \frac{1}{15}$.

ב. חשב את אורך הקטע FE.

נתון כי: $EG = 3.2$.

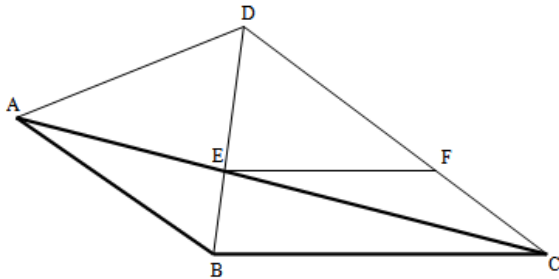
ג. חשב את היחס: $\frac{CH}{GH}$.



תרגילים עם דמיון משולשים כולל יחסי שטחים:

20. על הצלע AB של המשולש ABC בונים משולש שווה צלעות ABD.

הצלע AC חותכת את הצלע BD בנקודה E אשר ממנה מעבירים ישר EF המקביל לצלע BC. נתון כי: $\angle DBC = 80^\circ$, $\angle DCB = 40^\circ$.



א. הוכח כי המשולשים ABE ו-CDE דומים.

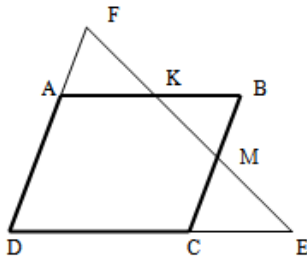
ב. הוכח: $FC \cdot CE = AE \cdot DF$.

ג. נתון כי: $BC = 1.5 \cdot EF$.

(i) הוכח: $\frac{AE}{CE} = \frac{1}{2}$

(ii) חשב את יחס השטחים הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{CDE}}$.

21. המרובע ABCD הוא מקבילית. הנקודות E ו-F נמצאות על המשכי הצלעות DC ו-AD בהתאמה.



מנקודות אלו מעבירים את הקטע EF שחוצה את

הצלע BC בנקודה M ואת הצלע AB בנקודה K.

נתון כי: $CE = ME$.

א. הוכח כי שלושת המשולשים CME, BMK ו-AFK חופפים.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{KBM}}{S_{AKMCD}}$.

22. המרובע DCBE הוא מקבילית.

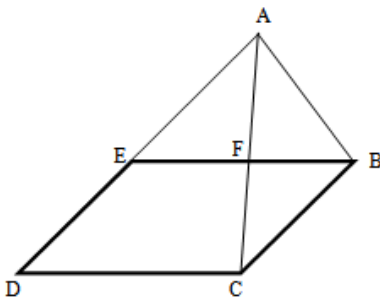
מהנקודה A שנמצאת על המשך הצלע DE של המקבילית מורידים את הקטעים AB ו-AC כך שהמשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = BC$).

הקטע AC חותך את הצלע BE בנקודה F כך ש: $BF = CF$.

א. הוכח כי AC הוא חוצה זווית A.

נתון כי: $\frac{AB}{AE} = 1.2$.

ב. פי כמה גדול שטח המקבילית משטח המשולש AEF?



ג. חשב את היחס: $\frac{S_{BFC}}{S_{AFB}}$.

23. AB הוא קוטר במעגל. מהנקודה A מעבירים מיתר AC.

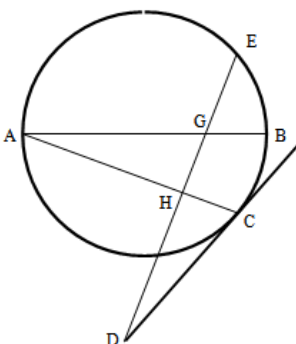
הנקודה D נמצאות מחוץ למעגל וממנה מעבירים

משיק CD וישר חותך DE. ידוע כי הישר DE חותך את

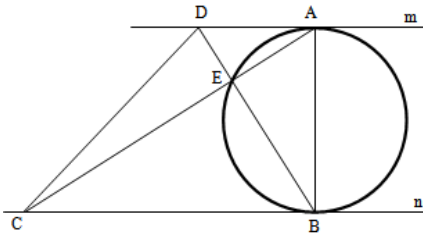
הקוטר AB בנקודה G ומאונך למיתר AC בנקודה H.

א. הוכח: $\angle ACD = \angle BGE$.

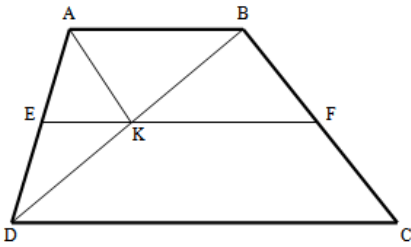
ב. נתון כי: $\frac{S_{AHG}}{S_{GHCB}} = \frac{4}{5}$ חשב את היחס: $\frac{AH}{AC}$.



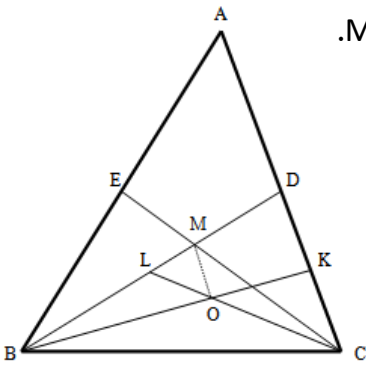
24. בין המשיקים המקבילים m ו- n מעבירים מעגל כך ש- AB הוא הקוטר היוצא משתי נקודות ההשקה שלהם. הנקודות D ו- C נמצאות על המשכי המשיקים כך שהמרובע $ABCD$ הוא מרופו. אלכסוני המרופו נפגשים בנקודה E שנמצאת על היקף המעגל. ידוע כי: $S_{ABC} = 3 \cdot S_{DAB}$. שטח המשולש ADE יסומן ב- S . בטא באמצעות S את שטח המרופו $ABCD$.



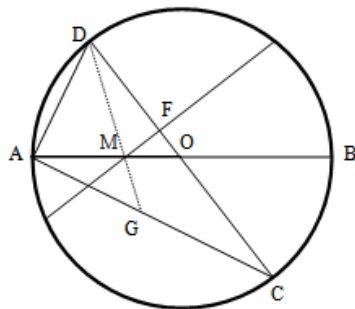
25. המרובע $ACBD$ הוא מרופו. מעבירים את קטע האמצעים EF החותך את אלכסון המרופו BD בנקודה K . ידוע כי הקטע AK מקביל לשוק BC של המרופו. א. הוכח כי המרובע $ABFK$ הוא מקבילית. ב. נסמן: $S_{BKF} = S$. הבע באמצעות S את שטח המרופו.



26. במשולש ABC מעבירים את התיכונים BD ו- CE אשר נפגשים בנקודה M . במשולש BDC מעבירים את התיכונים CL ו- BK הנפגשים בנקודה O . א. הוכח כי: $3LM = BL$. ב. הוכח כי: $AC \parallel MO$. נתון: $S_{BLC} = 27$. ג. חשב את שטח המשולש MOL .



27. AB ו- CD הם קטרים במעגל שמרכזו O . מעבירים מיתר החותך את AB בנקודה M כך שמתקיים: $2AM = BM$ ואת CD בנקודה F כך שמתקיים: $FM \perp CD$. ידוע כי זווית BMF היא 30° . מעבירים את המיתרים AC ו- AD כך שנוצר המשולש ACD . א. הוכח: $\angle CAB = \angle BMF$. ב. (i) הוכח כי המשולשים ADC ו- FOM דומים. (ii) פי כמה קטן הקטע FO מרדיוס המעגל?

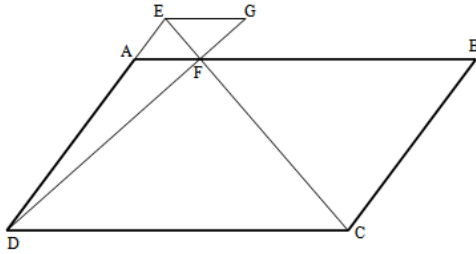


מעבירים מהקדקוד D של המשולש ACD קטע העובר

דרך הנקודה M וחותר את המיתר AC בנקודה G .

ג. חשב פי כמה גדול שטח המשולש DGC משטח המשולש MOF .

28. המרובע ABCD הוא מקבילית. הקטע CE חותך את הצלע AB בנקודה F כך ש- $4AF = BF$. ממשיכים את הצלע AD עד לנקודה E וממנה מעבירים מקביל GE לצלע AB. הנקודות F, G, D-1 נמצאות על ישר אחד.



א. הוכח: $\frac{AF}{GE} = \frac{4}{5}$.

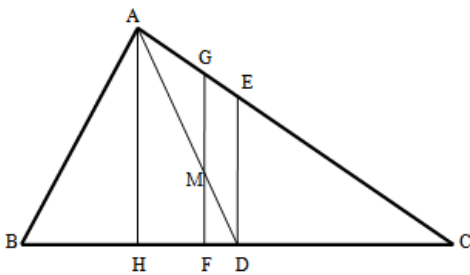
ב. הוכח: הקטע CF חוצה את שטח המקבילית לשני שטחים

שהיחס בניהם הוא: $\frac{S_{BFC}}{S_{AFCD}} = \frac{2}{3}$.

ג. הוכח: הקטע DF חוצה את שטח המרפז AFCD לשני

שטחים שהיחס בניהם הוא: $\frac{S_{AFD}}{S_{FCD}} = \frac{1}{5}$.

29. AD הוא תיכון לצלע BC במשולש ABC. מהנקודה D מעלים אנך אמצעי החותך את הצלע AC בנקודה E. מנקודת פגישת התיכונים M מעבירים ישר FG המקביל לאנך האמצעי DE. הקטע AH הוא גובה לצלע BC.



נתון: $GC = 2AE$.

א. הוכח: $\frac{GF}{AH} - \frac{DE}{AH} = \frac{GE}{AC}$.

ב. נסמן: $S_{MDF} = S$. נתון כי: $\frac{S_{AMG}}{S_{AHFM}} = \frac{3}{10}$.

הבע באמצעות S את שטח המשולש CDE.

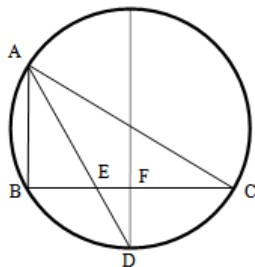
תרגילים הכוללים שימוש במשפט חוצה זווית:

30. במעגל שרדיוסו הוא 10 ס"מ המיתרים AB ו-BC מאונכים זה לזה.

הנקודה D היא אמצע הקשת BC. הקטע AD חותך את המיתר BC בנקודה E.

אורך המיתר AB הוא 12 ס"מ.

א. חשב את אורך הקטע BE.



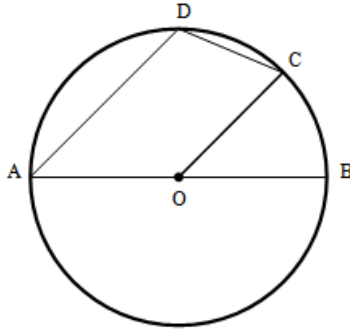
מהנקודה D מעבירים מיתר החותך את המיתר BC

בנקודה F ומקביל למיתר AB.

ב. הוכח כי מיתר זה עובר דרך מרכז המעגל.

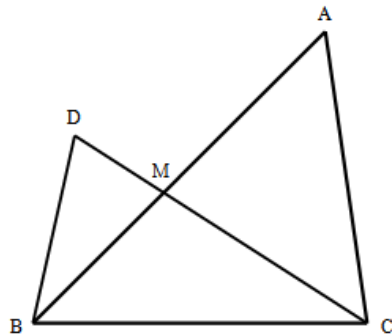
ג. חשב את אורך הקטע FE.

31. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. C היא נקודה על היקף המעגל כך שזווית BOC היא 45° . מהנקודה D מעבירים את המיתרים AD ו-CD כך שמתקיים: $AD \parallel CO$.



- א. הוכח: $2 \cdot \angle OCD = \angle AOC$.
 העבר את האלכסון AC במרובע AOCD ואת הרדיוס DO.
 האלכסון AC ו-DO נפגשים בנקודה E.
 ב. הוכח כי AC חוצה את זווית A.
 ג. סמן את רדיוס המעגל ב-R.
 הבע באמצעות R את הקטע OE.

32. על הצלע BC של המשולש ABC בונים משולש נוסף BDC. הצלעות DC ו-AB נחתכות בנקודה M. הצלע AB חוצה את זווית B.

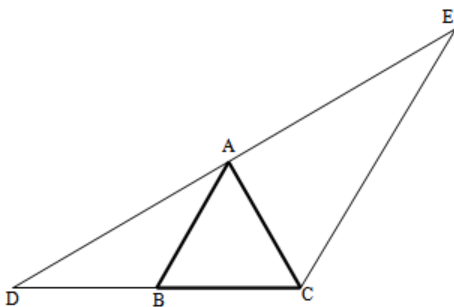


- ידוע כי: $2 \cdot \angle ACD = \angle B$.
 א. הוכח: $\triangle ACM \sim \triangle DBM$.
 ב. הוכח: $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{CM}$.
 נתון כי: $\frac{AM}{CM} = \frac{8}{5}$ וכי אורך הצלע BD הוא 6 ס"מ.

סכום הצלעות AC ו-BC הוא 19.5 ס"מ.

- ג. חשב את היחס: $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}}$.

33. המשולש ABC הוא שווה צלעות. הקטע DE עובר דרך הקדקוד A כך שנוצרים שני משולשים ABD ו-ACE. ידוע כי AC חוצה את זווית DCE במשולש DCE.

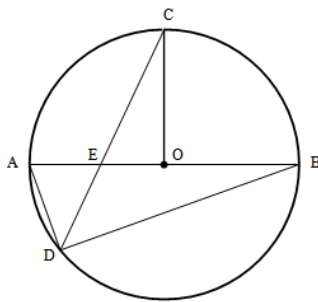


- א. הוכח: $AB \parallel CE$.
 ב. הוכח: $BC \cdot DE = DC \cdot AE$.
 ג. נתון: $AE = 6$, $DC = 8$ וכי: $AC \perp DE$.
 (i) חשב את שטח המשולש DCE.
 (ii) חשב את שטח המשולש ABD.

34. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. מהנקודה C שעל היקף המעגל מעבירים את הרדיוס CO ואת המיתר CD שחותך את הקוטר בנקודה E. מהנקודה D מעבירים

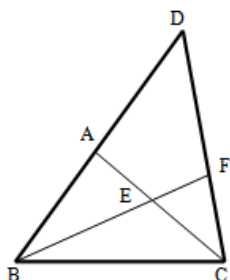
את המיתרים BD ו-AD. ידוע כי המיתר CD מקיים: $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$.

נתון: $AD = DE$.



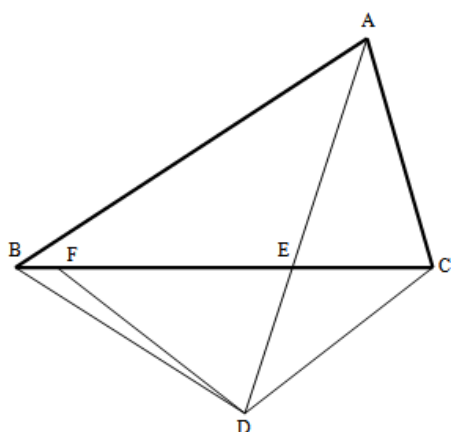
- א. הוכח כי הרדיוס CO מאונך לקוטר AB.
 ב. הוכח: $\triangle COE \sim \triangle BDA$.
 ג. הוכח: $AE \cdot BE = OE \cdot AB$.
 ד. נתון כי אורך המיתר BD הוא 16.2 ואורך הקטע CE הוא 10.
 (i) חשב את רדיוס המעגל.
 (ii) חשב את היחס: $\frac{S_{COE}}{S_{BDA}}$.

35. מהקדקוד C של המשולש BCD העבירו את הקטע AC כך שהמשולש ACD הוא שווה שוקיים. הנקודה F נמצאת על הצלע CD כך שמתקיים: $\angle ACD = 3 \cdot \angle BEC$, $\angle D = \angle CBF$.



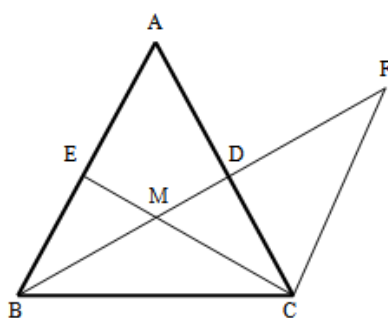
- א. הוכח כי הקטע BF חוצה את זווית B.
 ב. הוכח כי: $\triangle AEB \sim \triangle FEC$.
 ג. הוכח כי: $\frac{BE}{BC} = \frac{AE}{FC}$.

36. נתון משולש ABC. הקטע AE חוצה את זווית A של המשולש.



- ממשיכים את AE עד לנקודה D כך שנוצר המשולש BDC.
 F היא נקודה על הצלע BC המקיימת: $DF = FE = DC$.
 הצלע AB מקבילה לצלע DC.
 א. הוכח כי: $AC = EF$.
 ב. הוכח: $\frac{AB}{BE} = \frac{FE}{CE}$.

- ג. המשיך את הקטע DF עד לנקודה H שעל הצלע AB.
 ידוע כי המרובע ACDH הוא בר חסימה.
 חשב את זווית המשולש DEF.

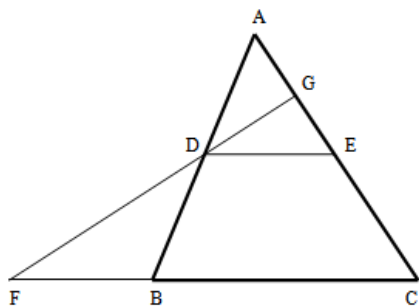


37. CE ו-BD הם תיכונים במשולש ABC הנפגשים בנקודה M.
 ממשיכים את התיכון BD עד לנקודה F כך שנוצר המשולש CDF.
 ידוע כי: $\frac{4ME}{MB} = \frac{CF}{DF}$ וכי: $\angle ABD = \angle DCF$.

- א. הוכח כי CD הוא חוצה זווית ECF במשולש MCF.
 ב. הוכח: $\triangle BME \sim \triangle CMD$.
 ג. הוכח כי המשולש ABC הוא שווה שוקיים.

38. DE הוא קטע אמצעים במשולש ABC.

- מהנקודה D מעבירים את הקטע FG כך ש-DG חוצה את זווית ADE.
 ידוע כי הזוויות A ו-F שוות.



א. הוכח כי המשולש BFD הוא שווה שוקיים.

(ii) הוכח כי: $\triangle FBD \sim \triangle AGD$.

ב. הוכח: $\frac{BC}{2BD} = \frac{GE}{AG}$.

נתון כי: $FC = 28$, $AG = GE + 3$, $FD \cdot GD = 144$.

ג. חשב את אורכי הקטעים: DF , AG .

39. באיור שלפניך נתונים שני מעגלים זהים שאחת מנקודות החיתוך שלהם היא B.

FE ו-BD הם מיתרים במעגל הימני הנחתכים בנקודה C שעל היקף המעגל השמאלי.

הקוטר AC במעגל השמאלי חוצה את זווית $\angle BAD$ ונתון כי: $\angle ACE = \angle BDE$.

מחברים את הנקודות D ו-F וממשיכים את הקוטר AC עד לנקודה G שעל המיתר DF.

מעבירים את המיתר AD דרך הנקודה E.

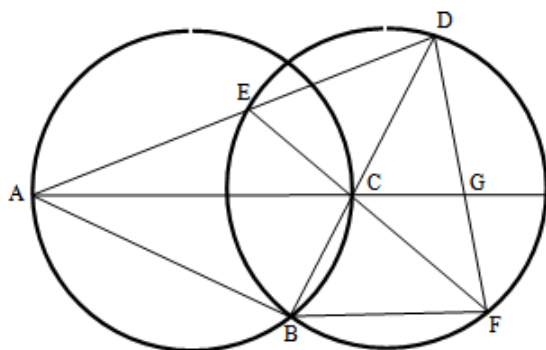
א. הוכח: $AC \parallel BF$.

ב. הוכח: $\frac{BF}{GC} - \frac{BC}{CD} = 1$.

ג. (i) הוכח: $\frac{DG}{GF} = \frac{AD}{AB}$.

(ii) נתון: $AB = 20$, $AD = 29$.

חשב את יחס: $\frac{GC}{BF}$.



40. הישרים AB ו-AC חותכים את המעגל בנקודות D ו-E בהתאמה

כך שהמיתרים BD ו-BC מאונכים זה לזה. הקטע CG חוצה את הקשת

הקטנה BGD וחותר את המיתר BD בנקודה F.

נתון: $\frac{AD}{AE} = \frac{13}{12}$. נסמן: $AB = t$.

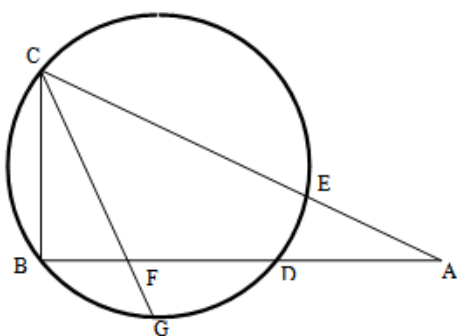
א. הבע באמצעות t את אורך המיתר BC.

ב. נתון כי רדיוס המעגל הוא 5 ס"מ וכי: $\frac{BF}{DF} = \frac{3}{5}$.

חשב את אורך הקטע AB.

ג. הוכח כי אם מתקיים: $2 \cdot \angle BCG = \angle BAC$,

אז: $BDE = BC$.



תשובות סופיות:

תרגיל מספר 1:

א. יש להיעזר בתלס מורחב באופן הבא: $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} = \frac{x}{3x} = \frac{1}{3}$

מאחר ונתון: $AB=18$ ניתן להגיע ל- $AD=6$, $BD=12$. יש להוריד גובה במרפז מהנקודה D כך שיוצור משולש זהב שבו היתר הוא BD ואורך הגובה יהיה 6 לפי המשפט. נרכיב את משוואת

השטח הבאה: $x=5 \rightarrow 3 \cdot 4x = 60 = \frac{6 \cdot (x+3x)}{2} = S_{BDEC}$ ולכן אורך הבסיס הגדול יהיה 15.

ב. מהנתון של היחס ניתן למצוא את AE (שהוא 4) ולכן: $AC=12$.

ההיקף הוא: $P_{ABC} = AB + AC + BC = 18 + 15 + 12 = 45$

ג. המשולשים ADE ו-ABC דומים. יחס שטחם הוא 9:1 נסמן: $S_{ADE} = S$ ולכן: $S_{ABC} = 9S$ וגם: $S_{BDEC} = 8S$.

שטח המרפז ידוע ולכן נחבר משוואה: $8S = 60$ ונקבל: $S = 7.5$.

שטח המשולש ABC הוא: 67.5.

תרגיל מספר 2:

א. נתון כי: $AF=GC$. בנוסף ידוע כי: $AD=BC$ והזווית שממול שתי הצלעות המתאימות היא ישרה. המשולשים חופפים לפי צ.צ.ו.

ב. נסמן צלעות לפי היחס: $\frac{GE}{GC} = \frac{2}{3}$ כך: $GC=3x$, $GE=2x$ ולכן גם: $AF=3x$.

ממשפט תלס מורחב במשולש ABF נקבל: $\frac{BG}{BF} = \frac{GE}{AF} = \frac{2}{3}$. נוכל לפשט: $\frac{BG}{BF} = \frac{BG}{BG+GF} = \frac{2}{3}$

ולכתוב: $3BG = 2(BG + GF)$ או: $BG = 2GF$. נסמן: $GF = y$, $BG = 2y$. מהחפיפה נקבל כי

גם: $BG = DF = 2y$ ולכן: $BD = 5y$. נקבל את היחס: $\frac{FG}{BD} = \frac{y}{5y} = \frac{1}{5}$.

תרגיל מספר 3:

א. M פגישת תיכונים ולכן: $2FM = CM$. נסמן: $BC = 2x$ ונתבונן במ.תלס במשולש DFC: $\frac{CM}{FM} = \frac{BC}{BD}$

נקבל כי: $BD = 2BC$ או במילים אחרות נאמר: $3BD = DC$. E אמצע AC ולכן: $AE = CE$. FG הוא

קטע אמצעים במשולש ABE (מקביל ל-BE ויוצא מאמצע AB) ולכן: $AG=GE$

וממילא נקבל: $4AG = AC$. מאחר ו- $AC = DC$ נשווה ונקבל: $4AG = 3BD$ או: $\frac{AG}{BD} = \frac{3}{4}$.

ב. לפי מ.תלס במשולש FGC נקבל: $GF = 6$. ומאחר והוא קטע אמצעים במשולש ABE אז: $BE = 12$.

לפי מ.תלס במשולש DCG נקבל: $DG = 18$.

תרגיל מספר 4:

א. ע"י חישוב זוויות נקבל שהישרים AB ו-CE מקבילים ולכן לפי תלס שעון חול נקבל: $\frac{AB}{CE} = \frac{AD}{DE}$

ידוע כי $AB = a$ וע"י מ.פיתגורס ניתן למצוא את: $AF = FE = 5\sqrt{2}$. נמצא מהיחסים את DF

ונקבל: $DF = \frac{5\sqrt{2}(10-a)}{a+10}$. ע"י מ.פיתגורס במשולש ישר הזווית CDF ניתן למצוא את המבוקש ולקבל:

$$\frac{DF}{CD} = \frac{10-a}{\sqrt{2a^2+200}} \quad DC = \frac{10\sqrt{a^2+100}}{a+10} \quad \text{היחס המבוקש יהיה:}$$

ב. השוואת היחס ל-0.6 תיתן משוואה אי-רציונלית שפתרונה הוא: $a_{1,2} = 70, 1\frac{3}{7}$. הפתרון 70 נפסל

מאחר ועבורו מתקבל DF שלילי. לכן ערך ה- a שמקיים את תנאי זה הוא $a = 1\frac{3}{7}$.

תרגיל מספר 5:

א. (i) + (ii) + (iii) ידוע כי: $FG \parallel DC$ ולכן לפי תלס מורחב במשולש DEC: $\frac{EF}{DE} = \frac{FG}{DC} = \frac{2}{5}$.

נסמן: $DC = AB = 5x$, $FG = 2x$, נתון כי: $\frac{BG}{AF} = \frac{2}{3}$. לפי חישוב נקבל כי: $AF + BG = 3x$.

נבטא: $BG = \frac{2}{3}AF$ ונציב: $AF + \frac{2}{3}AF = 3x$ נקבל: $AF = 1.8x$, $BG = 1.2x$.

נבטא מהיחס השלישי את GC: $\frac{BG}{GC} = \frac{3}{4} \rightarrow GC = \frac{4}{3}BG = \frac{4}{3} \cdot 1.2x = 1.6x$.

קיבלנו כי: (i) $DC = 5x$, (ii) $BG = 1.2x$, (iii) $GC = 1.6x$.

ב. נתון כי: $AD = BC = 15$. נבצע משפט פיתגורס במשולש BGC ונמצא את x : $(1.6x)^2 + (1.2x)^2 = 15^2$.

נקבל: $x = 7.5$. לכן אורך הבסיס הוא: $DC = 5x = 5 \cdot 7.5 = 37.5$ וגובה המקבילית הוא:

$GC = 1.6x = 1.6 \cdot 7.5 = 12$. שטח המקבילית יהיה: $S_{ABCD} = 12 \cdot 37.5 = 450$.

תרגיל מספר 6:

א. מהנתונים נקבל כי: $AE = CE$ ו- $AF = DF$. הקטע FE הוא קטע אמצעים במשולש ACD ולכן מקביל ל-CD.

ב. מהנתונים נקבל: $BD = DF$ והוכחנו כי: $EF \parallel CD$ לכן DN קטע אמצעים במשולש BEF.

מכאן: $BN = EN$. נסמן: $BE = 6x$ ונקבל: $BN = EN = 3x$. M נקודת פגישת תיכונים ולכן:

$ME = 2x$, $BM = 4x$. ע"י חיסור קטעים נקבל: $MN = x$ ולכן: $2 \cdot MN = ME$.

ג. לפי מ.תלס שעון חול נקבל: $\frac{MN}{ME} = \frac{NG}{FE} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$. נסמן: $NG = y$, $FE = 2y$.

לפי הסימון נקבל גם: $GC = 2y$, $DN = y$, $CD = 4y$. הקטעים FE ו-GC שווים ומקבילים ולכן המרובע

FGCE מקבילית. מכאן: $FH \parallel AC$. לפי תלס במשולש NCO נקבל: $\frac{GC}{CN} = \frac{GH}{NO} = \frac{2y}{3y} = \frac{2}{3}$. הקטע NO

הוא קטע אמצעים במשולש BCE ולכן: $2NO = CE$. נסמן: $GH = 2z$ ונקבל: $CE = 6z$, $NO = 3z$.

מאחר והמרובע FECG מקבילית נקבל כי גם: $FG = 6z$ ולפי יחסי הצלעות נקבל כי: $MG = 2z$.

(ו- $FM = 4z$). קיבלנו לפי הסימון כי: $MG = GH$.

תרגיל מספר 7:

א. זווית DFM ישרה ונתון כי: $BD \parallel MN$. לכן גם זווית NME ישרה. MC הוא תיכון ליתר במשולש

ישר זווית ולכן: $MC = CN = CE$. המשולש MCE הוא שווה שוקיים ולפי השלמת זוויות נקבל כי גם

המשולש ABM יהיה שווה שוקיים.

ב. הישרים AB ו-CE מקבילים, מתלס שעון חול נקבל כי: $\frac{BM}{CM} = \frac{AM}{EM}$ או: $\frac{EM}{CM} = \frac{AM}{BM}$.

נתון כי: $BD \parallel MN$ ולכן מתלס מורחב במשולש DFE נקבל: $\frac{EM}{FE} = \frac{NE}{DE}$. ראינו כי: $NE = 2CM$.

נציב ונקבל: $\frac{EM}{FE} = \frac{2CM}{DE}$ או: $\frac{EM}{CM} = 2 \cdot \frac{FE}{DE}$ נחליף יחסים ונקבל: $\frac{AM}{BM} = 2 \cdot \frac{FE}{DE}$.

ג. נשנה את היחס של הסעיף הקודם: $\frac{AM}{FE} = 2 \cdot \frac{BM}{DE}$ ונציב: $\frac{AM}{FE} = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$.

נסמן: $AF = x$, $ME = y$ ונבטא את y באמצעות x . BF גובה לבסיס במש"ש ABM ולכן: $AF = FM = x$.

לפי הנתון: $\frac{AM}{FE} = \frac{2x}{x+y} = \frac{4}{5}$ ונקבל: $y = 1.5x$. נעזר שנית בתלס המורחב: $\frac{NE}{DE} = \frac{EM}{FE} = \frac{y}{x+y} = \frac{1.5x}{2.5x} = \frac{3}{5}$.

כבר ראינו מקודם כי: $NE = 2CE$ ולכן: $\frac{NE}{DE} = \frac{2CE}{DE} = \frac{3}{5}$ ונקבל את הדרוש: $\frac{CE}{DE} = \frac{3}{10}$.

תרגיל מספר 8:

א. הקטע CE חוצה את הזווית שבין שני המשיקים BC ו-DC ולכן עובר דרך מרכז המעגל. כנ"ל לגבי

הקטע DF. חיתוכם, אם כן, יהיה מרכז המעגל ולכן הנקודה M היא מרכז המעגל.

ב. הקטע ME הוא רדיוס ולכן זווית DEC היא ישרה. נקבל ע"י חישוב זוויות שכל המשולשים בתרגיל

זה הם משולשי $90^\circ - 60^\circ - 30^\circ$ או משולשים שווים שוקיים עם זוויות $30^\circ - 120^\circ - 30^\circ$.

לכן זוויות המרפז הן: 60° ו- 120° .

ג. כעת: $ME = MF = R$. נבצע מספר חישובים ונבטא את שלושת הגדלים באמצעות R .

שני משיקים למעגל שווים ולכן: $DE = DH = CH = HF = x$. הקטעים DM ו-CM שווים ונוכל לבטאם

עם R ו- x באמצעות מ.פיתגורס למשל במשולש MED (אפשר גם באמצעות משולשים אחרים).

נקבל את הביטוי הבא: $DM = \sqrt{x^2 + R^2}$. הקטעים EF ו-DC מקבילים, נעזר בתלס שעון חול כדי למצוא

קשר בין x ל- R . תחילה נבטא באמצעות R את אורך הקטע EF ע"י העברת גובה במש"ש EMF - MO

שאורכו הוא $0.5R$ (במשולשים MOF ו-MOE הניצב שמול ה- 30° שווה למחצית היתר).

נקבל ע"י מ.פיתגורס כי: $FO = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ ולכן הקטע EF הוא: $EF = 2FO = 2 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

כעת נכתוב את יחסי תלס נקבל: $\frac{EF}{DC} = \frac{MF}{DM}$ או: $\frac{R\sqrt{3}}{2x} = \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}}$ ולכן: $2x = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + R^2}$.

או: $4x^2 = 3x^2 + 3R^2$ ולכן: $x = R\sqrt{3}$. כעת אורכי שניים מהקטעים הם: $DC = 2R\sqrt{3}$, $EF = R\sqrt{3}$.

נסמן: $y = AE = AG = BG = BF$. הקטע GF הוא R (ניתן להוכיח בקלות ע"י מעוין או מש"צ) נעביר גובה

במש"ש BGF - BK שאורכו: $0.5y$ וע"י מ.פיתגורס נבטא את y באמצעות R : $(0.5y)^2 + (0.5R)^2 = y^2$.

ונקבל: $y = \frac{R\sqrt{3}}{3}$ ולכן: $AB = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$ או גם נאמר כי: $\frac{1}{AB} = \frac{3}{2R\sqrt{3}}$.

כעת ניתן לראות כי: $\frac{1}{DC} + \frac{1}{EF} = \frac{1}{2R\sqrt{3}} + \frac{1}{R\sqrt{3}} = \frac{2+1}{2R\sqrt{3}} = \frac{3}{2R\sqrt{3}} = \frac{1}{AB}$ והוכחה הסענה.

תרגיל מספר 9:

א. המשולש ABC הוא שווה שוקיים (מיתרים שווים על קשתות שוות). נסמן: $\angle BAC = \angle ABC = \alpha$.

AB חוצה את זווית CBD ולכן: $\angle ABD = \angle ABC = \alpha$. הזוויות BAC ו-ABD מתחלפות ולכן: $BD \parallel AC$.

ב. לפי משפט ז.ז. ניתן להוכיח בקלות את הדמיון הנ"ל. יחס הדמיון הוא: $\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} = \frac{AD}{AC}$.

ג. לפי מ.תלס במשולש ACE נקבל: $\frac{DE}{BE} = \frac{AD}{BC}$ או: $\frac{DE}{AD} = \frac{BE}{BC}$. המשולש ABC שווה שוקיים.

ולכן: $AC = BC$. נחליף לפי יחס הדמיון ונקבל את הדרוש: $\frac{DE}{BE} = \frac{AD}{BC} = \frac{AD}{AC} = \frac{BD}{AB}$.

תרגיל מספר 10:

א. AC הוא קוטר כי זווית היקפית ישרה נשענת עליו. לכן גם: $\angle BAC = 90^\circ$. חישוב זוויות פשוט ייתן זווית נוספת ולפי ז.ז. המשולשים דומים.

ב. יחס הדמיון הוא: $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{CE}$ או: $\frac{BC}{2R} = \frac{2R}{CE}$ ולכן: $4R^2 = BC \cdot CE$ או: $R = \frac{\sqrt{BC \cdot CE}}{2}$.

ג. ADCE יהיה ריבוע. חפיפה פשוטה לפי משפט ז.ז. של המשולשים ACE ו-ACD תיתן: $CE = DC$.

ולכן גם: $CE = DC = BD$ לפי הנתון. על כן הקטע AD הוא לא רק גובה אלא גם תיכון ולכן שווה

למחצית היתר: $AD = DC = BD = CE$. כעת בעזרת החפיפה ניתן לדעת כי: $AD = DC = CE = AE$

והמרובע הוא מעוין. מאחר ונתון כי: $\angle AEC = 90^\circ$ אזי מדובר בריבוע. לכן המרובע ADCE הוא ריבוע.

תרגיל מספר 11:

א. חישוב זוויות פשוט מראה כי $\angle BDE = \angle BAC = 60^\circ$ ולפי ז.ז. המשולשים דומים.

ב. שימוש במשפט פיתגורס במשולש DEC ייתן ש-DE = 16.5. המשולש ACD הוא מש"ש (לפי

הזוויות) שבסיסו הוא $6\sqrt{3}$. ע"י הורדת גובה לבסיס ניתן לחבר משוואה ע"י מ.פיתגורס במשולש זהב ולמצוא ש-AD = AC = 6.

ג. נסמן ב-x את AF. הקטעים FD ו-BF שווים ויסומנו ב- $6+x$. מיחס הדמיון של הסעיף הקודם

עולה כי: $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$. הצבת כל הביטויים תיתן: $\frac{6+2x}{16.5} = \frac{6}{6+x}$ שפתרונו: $x \sim 2.69$ (מתקבלת משוואה

ריבועית שפתרונותיה אינם מספרים עגולים) (הפתרון השלילי נפסל). ולכן אורך הקטע AF קטן מ-3.

תרגיל מספר 12:

א. הזוויות DAB ו-NCB ישרות (זווית בין משיק ורדיוס). נסמן: $\angle BCM = \alpha$ ונקבל: $\angle CNM = 2\alpha$ (זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על אותו מיתר ולכן הזווית המרכזית גדולה פי 2).

המרובע ADCN הוא בר חסימה לפי שוויון הזוויות הראשון. נקבל: $\angle CNM = \angle ADB = 2\alpha$ ולכן

המשולשים דומים לפי משפט דמיון ז.ז. מאחר וקוטר המעגל הפנימי שווה לרדיוס המעגל החיצוני

נסמן: R - רדיוס המעגל החיצוני ו-r - רדיוס המעגל הפנימי ונקבל כי: $R = 2r$.

יחס הדמיון הוא: $\frac{AB}{BC}$. לפי מ.פיתגורס במשולש BNC כאשר הניצבים הם: r ו-BC והיתר הוא: 3r.

נקבל כי אורך הקטע BC הוא: $BC = \sqrt{(3r)^2 - r^2} = \sqrt{8r^2} = r\sqrt{8}$. נציב ביחס ונקבל: $\frac{AB}{BC} = \frac{4r}{r\sqrt{8}} = \frac{4}{\sqrt{8}} = \sqrt{2}$.

ב. נציב ביחס הדמיון: $\frac{AD}{CN} = \frac{\sqrt{8}}{r} = \sqrt{2}$ נקבל כי: $r = 2$ ולכן רדיוס המעגל הגדול הוא 4 ס"מ.

ג. חישוב קל יראה כי: $AD = CD = \sqrt{8}$ (המרובע ANCD הוא דלתון - ניתן להוכיח ע"י העברת המיתר AC

ולהראות כי המשולש ADC ש"ש). אורך הקטע BC הוא כאמור: $BC = r\sqrt{8} = 2\sqrt{8}$ ולכן נקבל כי

אורך הקטע BC גדול פי 2 מאורך הקטע CD.

תרגיל מספר 13:

א. נתון: $\angle ADC = \angle BED$. נתון: $DE \parallel AC$ ולכן: $\angle BDE = \angle ACD$. המשולשים דומים לפי משפט דמיון 1.1.

ב. מיחס הדמיון נובע: $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BD}$ או: $AC \cdot BE = AD \cdot BD$. מהישרים המקבילים נקבל ממשפט תלס

במשולש ABC: $\frac{BE}{AB} = \frac{DE}{AC}$ או: $AC \cdot BE = AB \cdot DE$ לפי כלל המעבר נקבל: $AD \cdot BD = AB \cdot DE$.

ג. מהנתון: $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$ נחשב את היחס: $\frac{DE}{AC}$.

נבטא: $BD = 0.8DC$ ונציב: $\frac{BD}{BC} = \frac{BD}{BD+DC} = \frac{0.8DC}{0.8DC+DC} = \frac{4}{9} = \frac{DE}{AC}$.

נבטא את DE כך: $DE = \frac{4}{9}AC$. נציב ביחס הקודם: $AB \cdot AC = 36 \rightarrow AB \cdot \frac{4}{9}AC = 16 \rightarrow AB \cdot AC = 36$ או: $AB \cdot DE = AD \cdot BD$.

תרגיל מספר 14:

א. נחפוף את המשולשים KMC ו-KND (ניתן גם לבצע חפיפה עם משולשים אחרים) לפי ז.ז. ונקבל את המבוקש.

ב. מהחפיפה ומהשלמת הסימונים בתרגיל נוכל לקבל כי: $\angle AKN = \angle DKN = \angle CKM = \angle BKM = \alpha$. כמובן: $\angle AKC = 180 - 2\alpha$. המשולש AKC הוא שווה שוקיים (ארבעת המשולשים AKN, DKN, CKM ו-BKM חופפים) ולכן לפי השלמת זוויות נקבל: $\angle KAC = \angle KCA = \alpha$. כעת ניתן לומר כי MN ו-AC מקבילים (זוויות מתחלפות שוות). קל לנמק כי AC שונה מ-MN ומאחר והרדיוסים שווים הרי ש-AN = CM. לכן המרובע ACMN הוא מרפז שווה שוקיים.

ג. נתון כי BKC שווה צלעות ולכן נקבל כי $\alpha = 30^\circ$. המשולשים החופפים הם משולשי זהב

ולכן: $KN = KM = 2R$. כדי לחשב את אורך הבסיס AC נעזר בדמיון: $\triangle AKC \sim \triangle BMC$ ונקבל: $\frac{AK}{BM} = \frac{AC}{BC}$.

ממשפט פיתגורס במשולשי הזהב קל למצוא כי: $AK = R\sqrt{3}$. כמובן המיתר BC שווה באורכו ל-AK

מאחר ונתון כי BKC שווה צלעות. נקבל: $\frac{R\sqrt{3}}{R} = \frac{AC}{R\sqrt{3}}$ ולבסוף: $AC = 3R$.

היקף המרפז הוא: $P_{ACMN} = AC + CM + MN + AN = 3R + R + 4R + R = 9R$.

תרגיל מספר 15:

א. לצורך הנוחיות נסמן: $BE = y$ ובהתאם: $CE = 2y$ וכן: $AM = 3x$ ו- $BM = 5x$. לפי תלס שעון חול

נקבל: $\frac{DC}{BF} = \frac{CE}{BE} = 2$ ולכן לפי הסימון נקבל: $BF = 4x$. לפי מ.תלס במשולש MFN

נקבל: $\frac{BF}{MF} = \frac{BE}{MN} = \frac{4x}{9x} = \frac{4}{9}$ ולכן: $\frac{MN}{BE} = \frac{9}{4}$. הקטע MN גדול פי 2.25 מהקטע BE.

ב. לפי חישוב זווית (הזווית CDE תסומן ב- α ובהתאם לה נקבל כי גם זווית NMG היא α) המשולשים

דומים (ז.ז) והיחס: $\frac{GM}{AF} = \frac{GN}{AD} = \frac{MN}{DF}$.

ג. מיחס הדמיון נקבל: $AD \cdot MN = GN \cdot DF$ או: $3BE \cdot 2.25BE = \frac{3}{40} DF \cdot DF$ או: $\left(\frac{DF}{BE}\right)^2 = 90$.

ולכן: $\frac{DF}{BE} = \sqrt{90}$.

תרגיל מספר 16:

א. מוכיחים לפי משפט דמיון 1.1. יש זווית משותפת וע"י השלמת זוויות צמודות ותכונת החסימות ניתן להגיע כי: $\angle B = \angle DEC$.

ב. מיחס הדמיון עולה כי: $\frac{BC}{CE} = \frac{AC}{DC}$. או: $AC \cdot CE = BC \cdot DC$. נסמן: $DC = x$ ואז: $BC = 4x$.

נציב ונפתור: $4x^2 = 36$ או: $x = 3$. אורך הקטע DC הוא 3 ס"מ.

ג. מהנתון על AC נוכל למצוא את אורכי הקטעים AE ו-CE כך: $AE + CE = 9$

וגם: $AC \cdot CE = (AE + CE) \cdot CE = 36$. נקבל: $CE = 4$, $AE = 5$.

נעזר במ.תלס במשולש שנוצר AFC ונקבל: $\frac{CE}{AE} = \frac{DC}{DF}$ או: $\frac{4}{5} = \frac{3}{DF}$ ולכן: $DF = 3.75$.

חישוב מהיר יראה כי: $BC = 12$. היחס המבוקש הוא: $\frac{BF}{BC} = \frac{5.25}{12} = \frac{7}{16}$.

תרגיל מספר 17:

א. מאחר ו- $DE \parallel BC$ נקבל לפי תלס שעון חול: $\frac{EF}{FC} = \frac{DE}{BC}$. כמוכן נקבל לפי תלס מורחב

במשולש ABC: $\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$. לפי כלל המעבר נקבל: $\frac{AD}{AC} = \frac{EF}{FC}$ וע"י כפל נקבל: $AC \cdot EF = AD \cdot FC$.

ב. נתון כי: $\angle BFE = \angle AGC$ ולפי ז.קודקודיות נקבל: $\angle BFE = \angle DFC$. נתון כי: $\angle GCE = \angle DCE$. המשולשים דומים לפי ז.ז.

ג. מיחס הדמיון נקבל: $\frac{GE}{DF} = \frac{CE}{DC}$ או: $CE \cdot DF = GE \cdot DC$. לפי הנתון: $\frac{DF}{BD} = \frac{1}{5}$ ניתן להגיע: $\frac{AD}{AC} = \frac{1}{4}$.

AC הוא 8 ס"מ ולכן נקבל: $AD = 2$, $DC = 6$. נמצא את GE מהמשוואה: $GE = \frac{CE \cdot DF}{DC} = \frac{24}{6} = 4$.

לפי תלס במשולש ABC מתקיים: $\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{BE} = \frac{1}{3}$. כמוכן הקטע CG הוא תיכון ולכן: $AG = BG$ וממילא

שנקבל: $AB = 4GE = 16$.

תרגיל מספר 18:

א. שני המשולשים הם ישרים זווית. נתון: $\angle AED = \angle CGE$ ו- $FE \parallel BC$ ולכן: $\angle AED = \angle ACB$. המשולשים דומים לפי ז.ז.

ב. מיחס הדמיון נקבל: $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$. ממשפט תלס מורחב במשולש ABC נקבל: $\frac{AF}{AC} = \frac{FG}{BC}$.

סידור של שני היחסים יביא לשוויון: $\frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF}$.

ג. משלושת הנתונים הראשונים נוכל למצוא את אורך הקטע DE. נשתמש במשפט פיתגורס

במשולש AFG ונמצא תחילה את FG: $AG = 13$, $AF = FG + 7$ ולכן:

$$AF^2 + FG^2 = AG^2 \rightarrow (FG + 7)^2 + FG^2 = 169$$

נציב את כל הנתונים החדשים ביחס הקודם ונגלה את DE: $\frac{DE}{AD} = \frac{FG}{AF} \rightarrow \frac{DE}{DE + 7.7} = \frac{5}{12}$

נקבל: $DE = 5.5$. הקטע GE הוא קטע אמצעים במשולש BCD (יוצא מאמצע צלע

ומקביל לצלע אחרת). ולכן: $2GE = BC$. מהנתון: $BF = 4.8$ ולפי תלס מורחב במשולש ABC

נמצא: $\frac{GE}{FG} = \frac{7}{10}$. לאחר סידור נקבל: $\frac{AF}{AB} = \frac{FG}{BC} \rightarrow \frac{12}{16.8} = \frac{FG}{BC} = \frac{FG}{2GE}$

תרגיל מספר 19:

א. נתון: $\angle A + \angle BFE = 180$. המרובע ABCD בר חסימה ולכן: $\angle A + \angle C = 180$ לכן: $\angle BFE = \angle C$.

נתון: $BE \parallel CD$ ולכן: $\angle BDC = \angle DBE$. E-ו F- אמצעי AB ו-AD ולכן FE הוא קטע אמצעים

במשולש ABD. לכן: $FE \parallel DB$ ואז: $\angle FEB = \angle DBE$ לפי משפט דמיון 1.1. המשולשים דומים.

ב. FE קטע אמצעים במשולש ABD, מכאן: $2FE = BD$. יחס הדמיון של הסעיף הקודם הוא: $\frac{CD}{FE} = \frac{BD}{BE}$

ומאחר ו- $FE \parallel BD$ נקבל ע"י השלמת זוויות שהמשולשים FGE ו-HCD דומים ולכן: $\frac{GE}{CD} = \frac{FE}{HD}$. נציב

$$\frac{CD}{FE} = \frac{BD}{BE} \rightarrow CD = \frac{FE \cdot BD}{BE} = \frac{2FE^2}{7.5}. CD = \frac{17 \frac{1}{15}}{FE} = \frac{256}{15FE}$$

$$. \frac{256}{15FE} = \frac{2FE^2}{7.5} \rightarrow FE = 4$$

$$. \frac{FG}{GH} = \frac{3.2}{7.5} \text{ נציב נתונים ונקבל: } \frac{FG}{GH} = \frac{GE}{BE}$$

הקטע CD הוא $4 \frac{4}{15}$ (ניתן למצוא ע"י הצבה בסעיף הקודם). מהמשולשים הדומים שבסעיף הקודם

$$\text{נקבל: } \frac{FG}{HC} = \frac{GE}{CD} = \frac{3.2}{4 \frac{4}{15}} = \frac{3}{4}. \text{ נבודד את FG משתי המשוואות ונשווה: } FG = \frac{32}{75} GH \text{ ו- } FG = 0.75 HC$$

$$\text{נקבל: } 0.75 HC = \frac{32}{75} GH \text{ ולכן: } \frac{CH}{GH} = \frac{32}{0.75 \cdot 75} = \frac{128}{225}$$

תרגיל מספר 20:

א. לפי 1.1. כאשר: $\angle AEB = \angle DEC$ (קודקודיות) ו- $\angle ABD = \angle BDC$.

ב. EF מקביל ל-BC. לפי מ.ת.ל.ס נקבל: $\frac{DE}{BE} = \frac{DF}{FC}$. לפי הדמיון קיבלנו: $\frac{DE}{BE} = \frac{CE}{AE}$. נשווה יחסים ונקבל:

$$. FC \cdot CE = AE \cdot DF \text{ או: } \frac{DF}{FC} = \frac{CE}{AE}$$

$$\text{ג. (i) לפי ת.ל.ס מורחב נקבל: } \frac{DF}{DC} = \frac{EF}{BC} = \frac{EF}{1.5FE} = \frac{2}{3} \text{ ולכן: } DF = \frac{2}{3} DC = \frac{2}{3} (DF + FC) \text{ או: } FC = \frac{1}{2} FD$$

$$\text{זאת בסעיף הקודם ונקבל: } \frac{1}{2} FC \cdot CE = AE \cdot DF \rightarrow FC \cdot CE = AE \cdot DF \text{ ולאחר חילוק נקבל: } \frac{AE}{CE} = \frac{1}{2}$$

$$\text{(ii) היחס המבוקש הוא: } \frac{S_{ABE}}{S_{CDE}} = \left(\frac{AE}{CE} \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

תרגיל מספר 21:

א. חישובי זוויות פשוטים החל מהמשולש CME דרך המשולש BKM ולמשולש AKF יביאו לך.

ב. השטח של שלושת המש"שים החופפים יסומן ב-S. המשולשים CME ו-DFE דומים ויחס הדמיון

$$\text{הוא } \frac{1}{3}. \text{ על כן יחס השטחים הוא: } \frac{1}{9}. \text{ ע"י חישוב פשוט יצא כי שטח המשולש DFE הוא } 9S$$

וכאשר נוריד ממנו את שטחי המשולשים AKF ו-CME נקבל: $S_{AKMCD} = 7S$

$$\text{היחס המבוקש הוא: } \frac{S_{KBM}}{S_{AKMCD}} = \frac{S}{7S} = \frac{1}{7}$$

תרגיל מספר 22:

א. זוויות מתחלפות בין ישרים BC ו-AD מקבילים. זוויות הבסיס שוות במש"ש ABC.
 ב. נסמן ב- x את השטח הקטן $\triangle AEF$. המשולשים AEF ו-ADC דומים ועפ"י הנתון החדש יחס הדמיון הוא: $\frac{5}{11}$ ולכן יחס השטחים הוא: $\frac{25}{121}$. על כן שטח המשולש ADC הוא $4.84x = \frac{121}{25}x$.
 ואם נוריד מגודל זה את שטח המשולש AEF נקבל ששטח המרובע DCFE הוא: $3.84x$.
 המשולשים AEF ו-CBF דומים ויחס הדמיון בניהם הוא 1.2. מכאן שיחס השטחים יהיה: 1.44 ולכן: $S_{CBF} = 1.44x$. חיבור ייתן: $S_{BEDC} = 5.28x$.
 מכאן כי שטח המקבילית גדול משטח המשולש AEF פי 5.28.

ג. המשולשים ABF ו-ECF חופפים ולכן שטחם זהה. כדי למצוא את שטח המשולש ECF נעביר את אלכסון CE שמחלק את המקבילית לשני משולשים שווי שטח שהוא: $2.64x$ ונוריד את שטח המשולש CBF ונקבל: $S_{CBF} = S_{ABF} = 1.2x$. היחס המבוקש הוא: $\frac{S_{BFC}}{S_{AFB}} = \frac{1.44}{1.2} = 1.2$.

תרגיל מספר 23:

א. מתקיים: $\angle ACD = \angle ABC = \alpha$ (זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר).
 AB קוטר ולכן: $\angle ACB = 90^\circ$. נקבל כי: $\angle CAB = 90 - \alpha$. המשולש AGH ישר זווית ולכן: $\angle AGH = \angle BGE = \alpha$. קיבלנו כי: $\angle ACD = \angle BGE$.
 ב. הקטעים GH ו-BC מקבילים. יחס הדמיון של המשולש AHG ו-ACB הוא: $\frac{AH}{AC}$.
 מהנתון נובע: $S_{AHG} = 4S$, $S_{GHCB} = 5S \rightarrow \frac{S_{AHG}}{S_{GHCB}} = \frac{4}{5}$. יחס הדמיון בריבוע ייתן את יחס השטחים ונקבל: $\frac{S_{AHG}}{S_{ACB}} = \left(\frac{AH}{AC}\right)^2 = \frac{4S}{9S} = \frac{4}{9}$ ולכן היחס המבוקש הוא: $\frac{AH}{AC} = \frac{2}{3}$.

תרגיל מספר 24:

מיחס השטחים ניתן להגיע כי $BC = 3 \cdot AD$ ולכן יחס השטחים בין המשולשים הדומים ADE ו-CBE הוא 9.
 השטח של המשולש BEC אם כן יהיה 9S.
 שטח המשולש ABE יסומן ב- x וע"י הנתון של השטחים יהיה ניתן למצוא אותו:
 $S_{ABC} = 3S_{DAB} \rightarrow 9S + x = 3(S + x) \rightarrow x = 3S$
 שטחי המשולשים ABC ו-BCD זהים שכן בשניהם לאותו הבסיס (BC) יש את אותו הגובה (AB) ולכן גם שטח המשולש DEC יהיה 3S.
 חיבור ארבעת המשולשים $\triangle ADE$, $\triangle ABE$, $\triangle BEC$, $\triangle CED$ ייתן את שטח המרפז שהוא: 16S.

תרגיל מספר 25:

א. הקטע EF מקביל לבסיס AB והקטע AK מקביל לשוק BC. המרובע ABFK הוא מקבילית (שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות).
 ב. הקטע FK הוא קטע אמצעים במשולש BDC (יוצא מאמצע הצלע BC ומקביל לצלע CD). המשולשים BKF ו-BDC דומים ויחס הדמיון הוא 0.5.

נקבל כי: $\frac{S_{BKF}}{S_{BDC}} = \frac{1}{4}$ ולכן: $S_{BDC} = 4S$. (אפשר גם לסמן כעת: $S_{KFCD} = 3S$). המרובע ABFK מקבילית

והקטע BK אלכסון ולכן חוצה את שטחה. נוכל לסמן: $S_{BKF} = S_{AKB} = S$. הקטע AK הוא תיכון במשולש ABD לצלע BD ולכן חוצה את שטחו. נסמן: $S_{AKB} = S_{AKD} = S$. לאחר חיבור כל השטחים נקבל כי שטח המרפז הוא $6S$.

תרגיל מספר 26:

- א. נסמן: $MD = 2x$ ונקבל: $BM = 4x$. CL הוא תיכון ולכן: $BL = DL = 3x$.
 חיסור קטעים ייתן כי: $3LM = BL$.
 ב. מהסימון הקודם נקבל כי: $\frac{LM}{MD} = \frac{1}{2}$. הנקודה O פגישת תיכונים ולכן: $\frac{LO}{CO} = \frac{1}{2}$.
 ממילא מתקיים: $\frac{LM}{MD} = \frac{LO}{CO} = \frac{1}{2}$ ולכן: $AC \parallel MO$.
 ג. הקטע CL הוא תיכון במשולש BDC ולכן חוצה את שטחו. נאמר כי: $S_{BLC} = S_{LCD} = 27$.
 נסמן את השטח: $S_{MOL} = t$. המשולשים MOL ו-DCL דומים ולכן נקבל: $\frac{S_{MOL}}{S_{DCL}} = \frac{1}{9}$. נציב ונמצא: $\frac{S_{MOL}}{S_{DCL}} = \frac{t}{27} = \frac{1}{9}$ נקבל כי: $t = 3$. שטח המשולש MOL הוא 3.

תרגיל מספר 27:

- א. ע"י חישוב זוויות פשוט ניתן להגיע למבוקש.
 ב. (i) ניתן להוכיח לפי משפט דמיון ז.ו.
 (ii) לפי יחס הדמיון נקבל: $\frac{AD}{FO} = 6$ ומאחר והקטע AD שווה לאורך רדיוס המעגל אז FO קטן פי 6 מרדיוס המעגל.
 ג. M היא נקודת פגישת תיכונים במשולש ACD ולכן הקטע DG הוא תיכון. תיכון מחלק את שטח המשולש לשני חלקים שווים. יחס הדמיון הוא 6 ולכן יחס השטחים הוא 36. שטח המשולש ACD גדול פי 36 משטח המשולש MOF. לכן שטח המשולש DGC יהיה גדול פי 18 משטח המשולש MOF.

תרגיל מספר 28:

- א. לפי הנתון: $4AF = BF$ נקבל: $4AE = BC$ ולכן גם: $4AE = AD$.
 נבצע חלס במשולש DGE ונקבל: $\frac{AF}{GE} = \frac{DA}{DE} = \frac{4AE}{5AE} = \frac{4}{5}$.
 ב. לצורך הנוחיות נסמן: $S_{AFE} = S$. לפי יחסי שטחים במשולשים הדומים AEF ו-DEC נקבל כי: $S_{AFCD} = 24S$ ולכן: $S_{DEC} = 25S$. לפי יחסי שטחים של המשולשים הדומים AFE ו-BFC נקבל: $S_{BFC} = 16S$. ממילא מתקיים: $\frac{S_{BFC}}{S_{AFCD}} = \frac{16S}{24S} = \frac{2}{3}$.
 ג. נסמן: $S_{EFG} = x$. לפי יחסי שטחים במשולשים הדומים EFG ו-CFD נקבל: $S_{CFD} = 16x$ וכן גם: $S_{AFD} = 24S - 16x$. מיחסי השטחים של המשולשים ADF ו-EDG נקבל משוואה:

$$x = 1.25S \quad \text{שפתרונה הוא:} \quad \frac{24S - 16x}{24S - 16x + S + x} = \left(\frac{AD}{AE}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$\frac{S_{AFD}}{S_{FCD}} = \frac{24S - 16x}{16x} = \frac{24S - 20S}{20S} = \frac{4S}{20S} = \frac{1}{5} \quad \text{לכן היחס המבוקש הוא:}$$

תרגיל מספר 29:

א. הישרים DE, GF ו-AH מקבילים. M פגישת תיכונים ולכן לפי תלס נקבל: $\frac{AM}{DM} = \frac{AG}{GE} = 2$. לצורך

הנוחיות נסמן: $AG = 2x$, $GE = x$. לפי הנתון נקבל: $CE = 5x$. לפי תלס במשולש ACH

נקבל: $\frac{CE}{AC} = \frac{DE}{AH} = \frac{5x}{8x} = \frac{5}{8}$. וגם: $\frac{CG}{AC} = \frac{GF}{AH} = \frac{6x}{8x} = \frac{6}{8}$. ההפרש בין היחסים המבוקשים הוא:

$$\frac{GF}{AH} - \frac{DE}{AH} = \frac{GE}{AC} \quad \text{לפי הסימון מתקיים:} \quad \frac{GE}{AC} = \frac{x}{8x} = \frac{1}{8} \quad \text{ולכן מתקיים:} \quad \frac{GF}{AH} - \frac{DE}{AH} = \frac{1}{8}$$

ב. המשולשים ADH ו-MFD דומים ולכן לפי יחסי שטחים נקבל: $S_{AHFM} = 8S$.

$$\frac{S_{AMG}}{S_{AHFM}} = \frac{3}{10} \rightarrow \frac{S_{AMG}}{8S} = \frac{3}{10} \rightarrow S_{AMG} = 2.4S \quad \text{לפי הנתון נקבל:}$$

המשולשים AGM ו-AED דומים ולכן: $\frac{S_{AGM}}{S_{AED}} = \left(\frac{AG}{AE}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. לאחר הצבה נקבל: $S_{GMDE} = 5.4S$.

מהמשולשים GFC ו-DEC נקבל: $\frac{S_{DEC}}{S_{GFC}} = \left(\frac{CE}{CG}\right)^2 = \frac{25}{36}$. נסמן: $S_{DEC} = x$ ונקבל משוואה: $\frac{x}{x + S + 5.4S} = \frac{25}{36}$

$$S_{DEC} = 14\frac{6}{11}S \quad \text{שפתרונה הוא:}$$

תרגיל מספר 30:

א. מאחר ו-D אמצע קשת הרי שמתקיים: $\angle BAD = \angle DAC$ (ז. היקפיות שוות ונשענות על קשתות שוות).

המיתרים AB ו-BC מאונכים ולכן AC קוטר. נתונים האורכים: $AC = 2R = 20$ ו- $AB = 12$. לפי

מפיתגורס במשולש הישר זווית ABC נמצא כי: $BC = 16$. נסמן: $BE = x$. ממשפט חוצה זווית נקבל

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE} \rightarrow \frac{12}{20} = \frac{x}{16-x} \quad \text{ולכן:} \quad BE = 6$$

ב. מאחר והמיתר מקביל ל-AB הרי שהוא מאונך למיתר BC. קטע שחוצה את הקשת הנשענת על מיתר ומאונך לה עובר דרך מרכז המעגל.

ג. המיתר שהועבר מאונך וחוצה את המיתר BC מאחר והוא עובר דרך מרכז המעגל. ע"י חישוב מהיר יתקבל כי: $EF = 2$.

תרגיל מספר 31:

א. זווית AOC היא 135° ולכן הזווית ההיקפית המתאימה לקשת שלה היא 67.5° . נניח כי K היא

נקודה על היקף המעגל כל שהמרובע AKCD חסום במעגל וזווית AKC היא היקפית על זווית AOC.

לכן נקבל: $\angle ADC = 112.5^\circ$ ומאחר ו- $AD \parallel CO$ אז: $\angle OCD = 67.5^\circ$ וממילא מתקיים: $\angle OCD = \angle AOC = 2 \cdot \angle AOC$.

ב. ע"י חישוב זוויות ניתן לראות כי הקשתות BC ו-CD נשענות על זוויות מרכזיות שוות

ולכן AC חוצה את זווית BAD.

ג. המשולש AOD הוא ישר זווית ושווה שוקים בעל אורך שוק R. לפי מ.פיתגורס נקבל כי אורך

היתר AD הוא: $R\sqrt{2}$. נסמן: $OE = x$ ולפי משפט חוצה זווית במשולש AOD נקבל את המשוואה:

$$\frac{R\sqrt{2}}{R} = \frac{R-x}{x} \quad \text{שפתרונה הוא:} \quad OE = x = \frac{R}{1+\sqrt{2}}$$

תרגיל מספר 32:

א. לפי משפט דמיון ז.ו. ניתן להוכיח זאת.

ב. יחס הדמיון הוא: $\frac{DM}{AM} = \frac{BD}{AC}$ או: $\frac{AC}{AM} = \frac{BD}{DM}$. ממשפט חוצה זווית נקבל: $\frac{BD}{DM} = \frac{BC}{CM}$.

ולכן: $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{CM}$ או: $\frac{AC}{AM} = \frac{BC}{CM}$.

ג. נתון: $\frac{AM}{CM} = \frac{8}{5}$ ולכן: $\frac{AC}{BC} = \frac{8}{5}$. נתון: $AC + BC = 19.5$. ממערכת המשוואות נמצא: $BC = 7.5$.

נסתכל על שני המשולשים BDM ו-BMC כך שהצלעות DM ו-BM הן הבסיסים

ולשתיהן גובה H כלשהו משותף. שטח המשולש BDM הוא: $S_{BDM} = \frac{DM \cdot H}{2}$ ושטח

המשולש BMC הוא: $S_{BMC} = \frac{CM \cdot H}{2}$. כאשר נחלק משוואות נקבל: $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}} = \frac{DM}{CM}$.

לפי משפט חוצה הזווית נקבל: $\frac{DM}{CM} = \frac{BD}{BC} = \frac{6}{7.5}$ ולכן: $\frac{S_{BDM}}{S_{BMC}} = \frac{DM}{CM} = \frac{6}{7.5} = 0.8$.

תרגיל מספר 33:

א. חישוב זוויות פשוט ייתן את המבוקש.

ב. לפי מ.תלס מורחב במשולש DCE מתקיים: $\frac{DA}{DE} = \frac{AB}{CE}$ או: $AB \cdot DE = AD \cdot CE$ לפי מ.חוצה זווית

במשולש DCE מתקיים: $\frac{AD}{AE} = \frac{DC}{CE}$ או: $AE \cdot DC = AD \cdot CE$. נשווה היחסים ונקבל: $AE \cdot DC = AB \cdot DE$.

נתון מע"צ ולכן: $AB = BC$ וממילא: $AE \cdot DC = BC \cdot DE$.

ג. (i). שטח המשולש הוא: $S_{CDE} = \frac{AC \cdot DE}{2}$ או לפי סעיף ב': $S_{CDE} = \frac{DC \cdot AE}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24$.

(ii). ניתן בכמה דרכים: א. לפי יחסי שטחים של המשולשים הדומים ABD ו-ECD נקבל כי: $S_{ABD} = 6$.

ב. לפי המשפט האומר כי תיכון מחלק את המשולש לשני משולשים שווים שטח ולכן: $S_{ADC} = S_{ACE} = 12$.

וכן: $S_{ABD} = S_{ABC} = 6$ (ניתן להוכיח תיכונים בקלות ע"י השלמת זוויות).

תרגיל מספר 34:

א. נתון כי AB קוטר ולכן: $\angle ADB = 90^\circ$. נתון כי CD מקיים: $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$ ולכן לפי מ.חוצה זווית

נקבל: $\angle ADE = \angle EDB = 45^\circ$. לכן נקבל: $\angle COB = 90^\circ$ - זווית מרכזית גדולה פי 2 מההיקפית על אותה הקשת.

ב. ראינו כי: $\angle ADB = \angle COB = 90^\circ$. נתון כי: $AD = DE$ ולכן גם: $\angle A = \angle AED$. זוויות קודקודיות

מקיימות: $\angle AED = \angle CEO$. ממילא נקבל כי: $\angle A = \angle CEO$ וניתן להוכיח $\triangle COE \sim \triangle BDA$ לפי

משפט דמיון ז.ו. יחס הדמיון הוא: $\frac{CO}{BD} = \frac{EO}{AD} = \frac{CE}{AB}$.

ג. מיחס הדמיון נקבל: $CE \cdot AD = OE \cdot AB$. המיתרים AB ו-CD מקיימים במעגל: $CE \cdot DE = AE \cdot BE$.

מאחר ו- $AD = DE$ ניתן להיעזר בכלל המעבר ולומר שמתקיים: $AE \cdot BE = OE \cdot AB$.

ד. (i) מיחס הדמיון נרכיב את המשוואה: $R = 9 \rightarrow 2R^2 = 162 \rightarrow \frac{R}{16.2} = \frac{10}{2R} \rightarrow \frac{CO}{BD} = \frac{CE}{AB}$.

רדיוס המעגל הוא 9.

$$(ii) \text{ נחשב באופן ישיר: } \frac{S_{COE}}{S_{BDA}} = \left(\frac{CE}{AB}\right)^2 = \left(\frac{CE}{2R}\right)^2 = \left(\frac{10}{18}\right)^2 = \frac{25}{81}$$

תרגיל מספר 35:

א. זווית $\angle ACD$ חסומן ב- α ובעקבותיה מגיעים לשוויון הזוויות: $\angle DBF = \angle FBC$.
 ב. לפי ז.ו. ניתן להוכיח זאת בקלות.

ג. מיחס הדמיון מתקבל: $\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{FC}$ וממשפט חוצה הזווית במשולש ABC מתקבל: $\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}$. נשווה

את הכפל: $AB \cdot CE$ בשני היחסים ונקבל: $BE \cdot FC = BC \cdot AE$ ולאחר חילוק כפול יתקבל: $\frac{BE}{BC} = \frac{AE}{FC}$.

תרגיל מספר 36:

א. נתון: $AB \parallel DC$ ולכן: $\angle BAD = \angle ADC$ (ז.מחלפות) נתון כי: $\angle CAD = \angle BAD$

ולכן: $\angle CAD = \angle ADC$. המשולש ACD שווה שוקיים ולכן לפי כלל המעבר

מהנתון: $DF = FE = DC$ נקבל: $AC = EF$.

ב. ממשפט חוצה זווית נקבל: $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CE}$. הוכחנו כי: $AC = EF$ ולכן: $\frac{AB}{BE} = \frac{FE}{CE}$.

ג. נסמן: $\angle FDE = \angle FED = \alpha$. בהתאם נקבל: $\angle DFE = \angle DCF = 180 - 2\alpha$.

לכן: $\angle FDC = 180 - 2(180 - 2\alpha) = 4\alpha - 180$. נבטא את הזוויות: $\angle CAD = \angle ADC$ ונקבל:

$\angle CAD = \angle ADC = 4\alpha - 180 - \alpha = 3\alpha - 180$. נתון כי המרובע ACDH בר חסימה.

נחבר את המשוואה: $\angle BAC + \angle CDF = 180$ נקבל: $2(3\alpha - 180) + 4\alpha - 180 = 180$.

הפתרון הוא: $\alpha = 72$. זוויות המשולש DEF הן: $72, 72, 36$.

תרגיל מספר 37:

א. מאחר ו-M פגישת אלכסונים ידוע: $2DM = BM - 0.5CM = EM$.

נחליף יחסים ונקבל: $\frac{CF}{DF} = \frac{4ME}{MB} = \frac{4 \cdot 0.5CM}{2DM} = \frac{CM}{DM}$.

קטע המקיים זאת הוא חוצה זווית במשולש MCF.

ב. לפי משפט דמיון ז.ו. נקבל את המבוקש.

ג. יחס הדמיון יהיה: $\frac{BM}{CM} = \frac{EM}{DM} = \frac{BE}{CD}$ נציב את: $CM = 2EM$ ו- $2DM = BM$ ונקבל: $\frac{\angle DM}{\angle EM} = \frac{EM}{DM}$.

או במילים אחרות: $DM = EM$. מכאן שהתיכונים שווים באורכם ותיכונים שווים מתאימים לצלעות

שוות לכן המשולש ABC הוא מש"ש.

תרגיל מספר 38:

א. (i) חישוב זוויות פשוט יביא לכך. (ii) לפי הזוויות של החלק הקודם.

ב. ממשפט חוצה זווית במשולש ADE מתקבל: $\frac{DE}{DA} = \frac{GE}{AG}$. DE הוא ק"א ולכן: $DE = \frac{BC}{2}$.

וגם $AD = BD$ לכן: $\frac{GE}{AG} = \frac{DE}{DA} = \frac{BC}{2BD}$.

ג. מהדמיון מתקבל היחס: $\frac{FD}{AD} = \frac{BD}{GD}$ ולכן: $AD^2 = FD \cdot GD = 144$ ומכאן: $AD = BD = BF = 12$.

מהנתון השלישי נקבל: $FC = 2DE + BF$.

לכן: $DE = 8$. נסמן ב- x את GE וב- $x+3$ את AG ונקבל לפי היחס של חוצה הזווית:

$$\text{ולכן: } x = 6 \text{ ומיחס הדמיון ניתן למשוך את } DF. \frac{BC}{2BD} = \frac{16}{2 \cdot 12} = \frac{GE}{AG} = \frac{x}{x+3}$$

אורך הקטע AG הוא 6 ואורך הקטע DF הוא 16.

תרגיל מספר 39:

א. נתון: $\angle ACE = \angle BDE$ ולפי זוויות היקפיות הנשענות על אותה הקשת נאמר כי: $\angle EFB = \angle BDE$.

לכן נקבל: $\angle EFB = \angle ACE$. זוויות מתאימות שוות נמצאות בין ישרים מקבילים $AC \parallel BF$.

ב. מהסעיף הקודם מתקיים: $GC \parallel BF$ ולכן לפי מ.תלס: $\frac{CD}{BD} = \frac{GC}{BF}$ או בהיפוך: $\frac{BD}{CD} = \frac{BF}{GC}$.

$$\text{נבצע החלפה ונקבל: } \frac{BF}{GC} - \frac{BC}{CD} = \frac{BD}{CD} - \frac{BC}{CD} = \frac{BD - BC}{CD} = \frac{CD}{CD} = 1$$

ג. (i) לפי מ.חוצה זווית במשולש ABD נקבל: $\frac{CD}{BC} = \frac{AD}{AB}$. לפי תלס נקבל: $\frac{CD}{BC} = \frac{DG}{GF}$.

$$\text{לפי כלל המעבר נקבל: } \frac{DG}{GF} = \frac{AD}{AB}$$

(ii) הצבה תיתן: $\frac{DG}{GF} = \frac{29}{20}$ וממילא: $GF = \frac{20}{29} DG$.

$$\text{נחשב: } \frac{GC}{BF} = \frac{DG}{DF} = \frac{DG}{DG + GF} = \frac{DG}{DG + \frac{20}{29} DG} = \frac{DG}{1 \frac{20}{29} DG} = \frac{29}{49}$$

תרגיל מספר 40:

א. AB ו- AC ישרים חותכים: $AD \cdot AB = AE \cdot AC$ או: $\frac{AD}{AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}$ ולכן: $AC = \frac{13}{12} AB = \frac{13}{12} t$.

המשולש ABC ישר זווית: $AB^2 + BC^2 = AC^2$. נציב במקום AC את $\frac{13}{12} t$ ונבודד את BC .

$$\text{נקבל: } BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{12} t\right)^2 - t^2} = \sqrt{\frac{169t^2 - 144t^2}{144}} = \sqrt{\frac{25t^2}{144}} = \frac{5}{12} t$$

ב. ידוע כי $CD = 10$ (קוטר במעגל כי $BC \perp BD$). לפי מ.חוצה זווית במשולש BDC

$$\text{נקבל: } \frac{BF}{DF} = \frac{BC}{CD} = \frac{5AB}{12 \cdot 10} = \frac{3}{5} \text{ ולכן: } AB = 14.4$$

ג. ע"י חישוב זוויות יתקבל השוויון: $\angle BCE = \angle BDC$.

זוויות היקפיות שוות נשענות על קשתות שוות ולכן: $BDE = BC$.

תרגילים ללא פרופורציות

תרגילים ללא מעגל

1. המרובע ABCD הוא מקבילית שבה אורך הצלע AB גדולה פי 2 מהצלע AD.

ממשיכים את הצלע AD עד לנקודה K ומחברים אותה לקדקוד B.

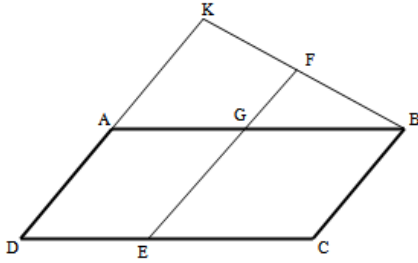
מעבירים את הקטע FE כך ש-F היא אמצע הקטע BK.

EF חותך את הצלע AB בנקודה G ומקביל לצלע AD.

א. הוכח כי המרובע AGED הוא מעוין.

ב. שטח המעוין AGED הוא 20 סמ"ר.

חשב את שטח המרובע DCBK אם ידוע כי A היא אמצע הקטע DK.



2. המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.

הנקודה E נמצאת על הצלע AB כך ש- $2BE = AE$. מחלקת אותה על המלבן ומחלקת אותה על המלבן.

ידוע כי הקטע OE מאונך לאלכסון AC ושווה ל-BE.

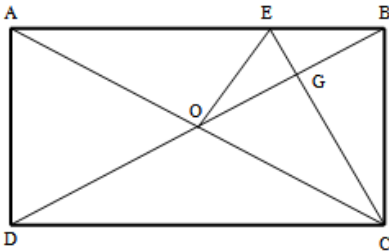
הקטע CE חותך את האלכסון BD בנקודה G.

א. הוכח כי הקטע CE מאונך לאלכסון BD.

ב. הוכח כי מתקיים: $4GE = AE$.

ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר.

חשב את שטח המלבן ABCD.



3. הקטע BD הוא אלכסון במרובע ABCD.

על האלכסון BD בונים משולש שווה צלעות BED.

הצלע BE של המשולש נמצאת על המשך הצלע AB של המרובע.

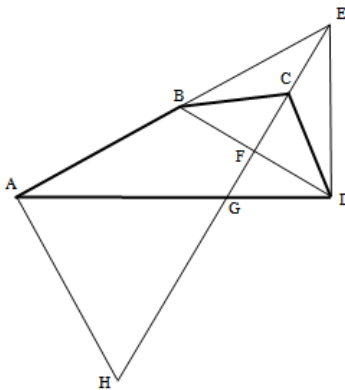
מהנקודה E מעבירים ישר העובר דרך הקדקוד C וחותך את הצלע AD

בנקודה G כך שנוצר המשולש השווה צלעות AGH.

א. הוכח כי ניתן לחסום במעגל את המרובע ABFH.

נחון גם כי: $BC = CD$.

ב. חשב את: $\angle BAD$.



4. המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).

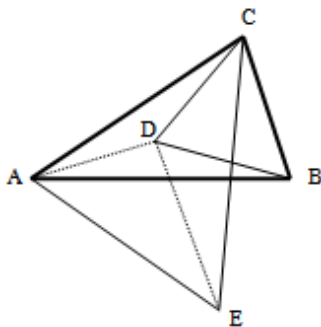
על השוק AC ועל הבסיס BC בונים משולשים שווים צלעות ACE ו-BCD.

מחברים את הנקודה D עם הקדקודים A ו-E.

א. הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

ידוע גם כי: $DE \parallel BC$.

ב. הוכח: $\angle ADE = 90^\circ$.



נתון גם כי היקף המשולש ABC הוא 27 סמ"ר.
אורך הצלע AD קטנה בס"מ אחד מהבסיס BC ואורך הצלע DE גדולה בס"מ אחד מהבסיס BC.

ג. חשב את ההיקפים הבאים: P_{ACE} , P_{BCD} .

5. המרובע ABCD הוא מרופו ($DC \parallel AB$).

E היא נקודה על הבסיס DC הנמצאת במרחקים שווים מהקדקודים B ו-C.

האלכסון AC חוצה את הקטע BE בנקודה O.

הקטע BF חותך את האלכסון AC בנקודה G וחוצה את הקטע CE בנקודה F.

ידוע כי: $AG = 2CG$.

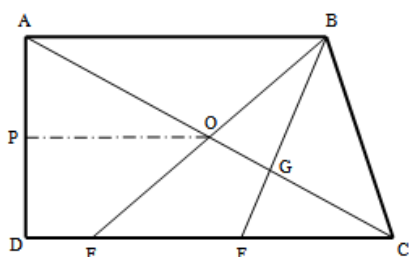
א. הוכח כי הנקודה O היא אמצע האלכסון AC.

הנקודה P נמצאת על השוק AD של המרופו כך ש: $PO \parallel AB$.

ידוע כי אורך הקטע PO הוא 10 ס"מ וכי: $BG = BO$.

נתון: $4DE = CE$.

ב. מצא את אורכי הבסיסים.



6. המרובע ABCD הוא מרופו ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$).

הנקודה M נמצאת על אמצע האלכסון BD של המרופו וממנה מעבירים

את הקטעים ME ו-MF השווים זה לזה ומחברים אותה עם הקדקוד A.

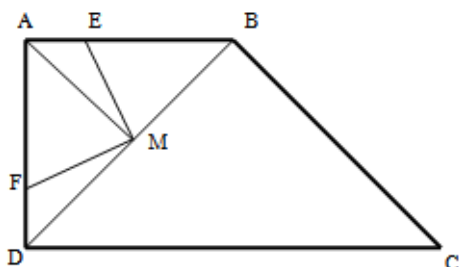
נתון כי: $ME \perp MF$ וכי: $\angle DFM > 90^\circ$.

א. הוכח: $\triangle AFM \cong \triangle MBE$.

נתון כי: $BC = \sqrt{32}$, $AE = FD = 1$, כמוכן: $AM \parallel BC$.

ב. (i) מצא את אורך הקטע BE.

(ii) חשב את שטח המרופו ABCD.



תרגילים עם מעגל

7. המרובע ABCD חסום במעגל. המשיכי המיתרים AB ו-ED נפגשים בנקודה F.

הקטע FD חותך את היקף המעגל בנקודה E כך שמתקיים: $AB = AE$.

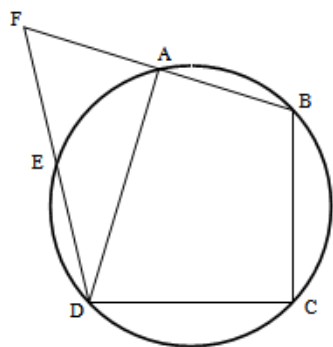
נתון כי הזווית BCD היא ישרה.

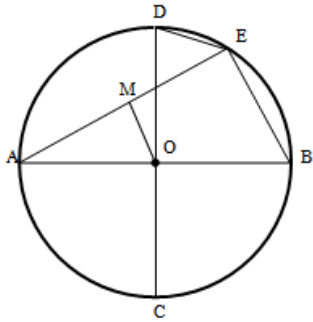
א. הוכח כי הקטע DF שווה לקוטר המעגל.

נתון כי: $DF = BF$ וכי רדיוס המעגל הוא 12.

ב. הוכח כי המרובע AEDB הוא מרופו.

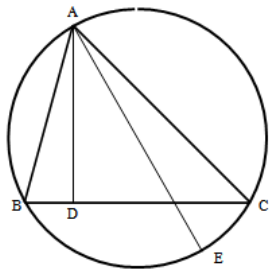
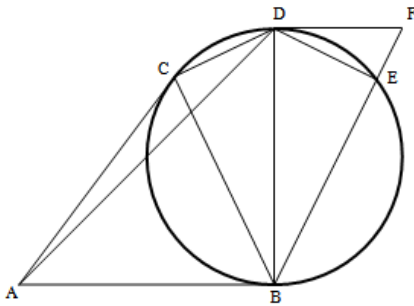
ג. חשב את היקף המרופו AEDB.



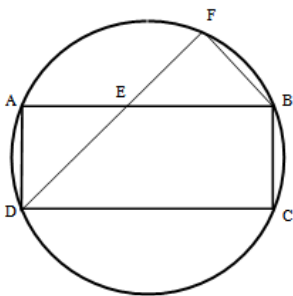


13. במעגל שמרכזו O מעבירים את הקטרים AB ו-CD המאונכים זה לזה. E היא נקודה על היקף המעגל המקיימת: $BE + DE = 15$. מעבירים את המיתר AE. הקטע OM מאונך למיתר AE ושווה למיתר DE. א. הוכח כי המרובע OMEB הוא מרפז ישר זווית. ב. מצא את אורך המיתר BE. נתון כי שטח המרפז הוא 90. ג. מצא את רדיוס המעגל.

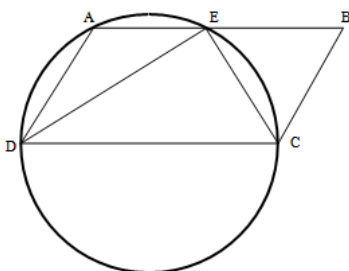
14. דרך הנקודה A מעבירים שני משיקים למעגל AB ו-AC. הנקודות D ו-E נמצאות על היקף המעגל ומהן מעבירים את המיתרים DC ו-DE. ממשיכים את המיתר BE עד לנקודה F שמחוץ למעגל כך ש-DF מאונך למיתר BD ושווה באורכו לרדיוס המעגל. נתון כי: $\angle BFD = \angle BDC$. א. הוכח כי: $\angle BFD = \angle ABC$. נתון: $\angle BED = 90^\circ$. ב. הוכח כי המרובע ADFB הוא מרפז. אורך המשיק AC הוא 8 ס"מ ואורך המיתר CD הוא 6 ס"מ. ג. חשב את שטח המרפז.



15. המשולש ABC חסום במעגל. AD גובה לצלע BC ו-AE ו-BC קוטר במעגל. א. הוכח: $\angle BAD = \angle EAC$. נתון גם כי: $CE = \sqrt{21}$, $AD = 6$, $CD = 8$. ב. חשב את רדיוס המעגל.



16. המרובע ABCD הוא מלבן החסום במעגל. מהקדקוד D מעבירים את המיתר DF החותך את הצלע AB בנקודה E. ידוע כי: $AF = CF$. הצלע AD של המלבן תסומן ב-a. א. הוכח כי המשולש DAE הוא שווה שוקיים. ב. נתון גם כי: $BC = BF$. הבע באמצעות a את רדיוס המעגל.



17. דרך הקדקודים A, C ו-D של המקבילית ABCD מעבירים מעגל. היקף המעגל חוצה את הצלע AB בנקודה E ($AE = BE$). נתון כי DC הוא קוטר במעגל וכי המיתר DE חוצה את זווית D. א. הוכח כי המיתר CE חוצה את זווית C. ב. רדיוס המעגל יסומן ב-R. הבע באמצעות R את היקף המקבילית.

ג. נתון גם: $CE = 4$.

(i) הבע באמצעות R את שטח המקבילית.

(ii) מצא את רדיוס המעגל אם ידוע כי שטח המקבילית הוא 12 סמ"ר.

תשובות סופיות:

תרגיל מספר 1:

- א. ידוע כי AG ו-DE מקבילים וכמוכן ניתן לגלות את אותו הדבר לגבי GE ו-AD. הקטע FG הוא קטע אמצעים במשולש ABK ולכן חוצה את הצלע AB. מאחר ונתון כי: $2AD = AB$ הרי שמתקיים: $AD = AG$ והמקבילית AGED היא מעוין. ב. שטח המקבילית ABCD יהיה 40 סמ"ר. אם נעביר את האלכסון AC נקבל כי שטח המשולש ACD הוא 20 סמ"ר. מאחר ולמשולש ABK יש את אותו הבסיס והגובה נאמר כי גם שטחו הוא 20 סמ"ר ולכן שטח המרובע DCBK הוא 60 סמ"ר.

תרגיל מספר 2:

- א. השלמת זוויות פשוטה תביא לכך. ב. נסמן: $EG = x$. המשולש EOG הוא משולש זהב ולכן: $EO = 2x$. המשולש EOC גם משולש זהב ולכן: $CE = 4x$. הקטע EO הוא תיכון וגובה במשולש AEC ולכן משולש זה הוא שווה שוקיים: $CE = AE$. הרי שנקבל: $4EG = AE$. ג. נתון כי שטח המשולש BEG הוא 5 סמ"ר. שטח המשולש BGC גדול פי 3 ממנו שהרי: $S_{BGC} = \frac{BG \cdot GC}{2} = \frac{BG \cdot 3GE}{2} = 3 \cdot \frac{BG \cdot GE}{2}$ חופפים ולכן שטח כל אחד מהם הוא 15 סמ"ר. שטח המשולש BOC הוא 30 סמ"ר. האלכסונים במלבן מחלקים אותו ל-4 משולשים שווים-שטח ולכן שטח המלבן ABCD הוא 120 סמ"ר.

תרגיל מספר 3:

- א. נתון כי BED מש"צ ולכן: $\angle EBD = 60^\circ$ אז: $\angle ABD = 120^\circ$ (זוויות צמודות). נתון כי AGH מש"צ ולכן $\angle AHG = 60^\circ$ קיבלנו כי סכום זוויות נגדיות הוא 180° ולכן המרובע הוא בר חסימה. ב. נתון: $BC = CD$. נתון גם: $BE = DE$ והצלע CE משותפת. לכן: $\triangle BEC \cong \triangle CED$ וממילא: $\angle BEC = \angle CED$. הקטע FE הוא חוצה זווית במש"צ ולכן גם גובה. נקבל כי: $\angle BFG = 90^\circ$. המרובע ABGH בר חסימה ולכן: $\angle BAH = 90^\circ$. נתון כי: $\angle DAH = 60^\circ$ ולכן: $\angle BAD = 30^\circ$.

תרגיל מספר 4:

- א. ניתן להוכיח לפי משפט חפיפה צ.צ.צ. שהרי מתקיים: $BD = CD$, $AB = AC$ והצלע AD משותפת לשניהם. ב. נסמן: $\angle ABD = \angle ACD = \alpha$ (זמב"ח) ונראה כי סכום הזוויות DAE ו-AED הוא 90° וממילא זווית ADE תהיה גם ישרה. ידוע כי: $\angle BCD = 60^\circ$ וכן: $\angle ACE = 60^\circ$. ע"י חיסור זווית נוכל לסמן: $\angle BCE = \alpha$. הישרים DE ו-BC מקבילים ולכן: $\angle BCE = \angle CED = \alpha$ (מתחלפות).

ידוע כי: $\angle AEC = 60^\circ$ ולכן: $\angle AED = 60 - \alpha$. כעת נבטא את זווית DAE באופן הבא:
ידוע כי $\angle BDC = 60^\circ$ וכן: $\angle ADB = \angle ADC$ (זמב"ח). נחשב את ערכן ונקבל כי כל זווית שווה ל- 150° .
לפי הסימון הקודם ($\angle ABD = \angle ACD = \alpha$) נבטא את זווית DAB ונקבל: $\angle DAB = 30 - \alpha$ וכן גם:
 $\angle DAB = \angle DAC = 30 - \alpha$ (זמב"ח). ידוע כי $\angle CAE = 60^\circ$ ולכן לאחר חישוב זוויות נקבל כי:
 $\angle DAE = 30 + \alpha$. כעת סכום הזווית הוא: $\angle DAE + \angle AED = 30 + \alpha + 60 - \alpha = 90^\circ$.
ממילא מתקיים גם: $\angle ADE = 90^\circ$.

ג. נסמן: $BC = x$. לפי הסימון נקבל: $DE = x + 1$, $AD = x - 1$. כמוכן: $AC = AB = AE = \frac{27 - x}{2}$.

נרכיב משוואה לפי מ.פיתגורס במשולש ADE ונקבל: $(x-1)^2 + (x+1)^2 = \left(\frac{27-x}{2}\right)^2$.

סידורה הוא: $7x^2 + 54x - 721 = 0$. פתרונות המשוואה הם: $x_{1,2} = 7, -12.78$. היקף המשולש BCD הוא 21 ס"מ והיקף המשולש ACE הוא 30 ס"מ.

תרגיל מספר 5:

א. נתון כי הקטעים BE ו-CE שווים ולכן המשולש BEC מש"ש.

AC חוצה את BE ולכן CO הוא תיכון לשוק BE. נתון כי BF תיכון ל-CE ולכן G היא נקודת פגישת תיכונים במש"ש. נסמן: $GO = x$ ולכן: $CG = 2x$. מהנתון כי: $AG = 2CG$ נקבל: $AG = 4x$.
ולאחר חיבור קטעים יתקבל: $AO = CO = 3x$. קיבלנו לפי הסימון כי O היא אמצע האלכסון AC.
ב. המרובע ABED טרפז (שני בסיסים מקבילים ולא שווים) ו-PO הוא קטע אמצעים (מקביל ויוצא

מאמצע השוק BE). נתון כי: $BG = BO$ ולכן נוכל לסמן: $BG = BO = 2x$. יתרה מכן נקבל כי:
 $AB = AG = 4x$ ולכן: $\angle AGB = \angle ABG$. ע"י שוויון זוויות נקבל כי: $BG = BO = EO = CG = CF = EF = 2x$.
מהנתון השני: $4DE = CE$ נוכל לסמן: $DE = x$. נרכיב לפי הקטע אמצעים את המשוואה: $\frac{AB + DE}{2} = PO$.

או: $\frac{5x}{2} = 10$. פתרון המשוואה הוא כמוכן: $x = 4$. אורכי הבסיסים הם: $AB = 16$ ו- $CD = 20$.

תרגיל מספר 6:

א. מאחר ונתון כי: $FM \perp ME$ וגם כי: $\angle A = 90^\circ$ ניתן לומר כי המרובע AEMF הוא בר חסימה ולכן:
 $\angle AFM + \angle AEM = 180^\circ$. ע"י שימוש בזוויות צמודות נקבל: $\angle AFM = \angle MEB$. הרי זווית. נתון גם כי M

אמצע הקטע BD ולכן הקטע AM הוא תיכון לישר במשולש הישר זווית ABD ושווה למחציתה ומתקיים: $AM = BM$. הרי צלע נוספת. לפי מ. חפיפה רביעי (צלע, צלע, זווית שמול הצלע הגדולה) המשולשים חופפים. הנתון: $\angle DFM > 90^\circ$ מחייב כי DM גדולה מ-FM ולכן גם: $AM > MF$ מה שמאפשר שימוש במשפט החפיפה הרביעי.

ב. (i) נסמן: $BE = x$ ונקבל מהחפיפה כי: $AF = x$. מהנתונים המספריים ניתן להרכיב משוואה ע"י שימוש במשפט פיתגורס במשולש ABD באופן הבא: $AB^2 + AD^2 = BD^2$ ונקבל: $(x+1)^2 + (x+1)^2 = \sqrt{32}^2 = 32$.

הפתרון הוא: $x = 3$. אורך הקטע BE הוא 3 ס"מ.

(ii) הגובה AD אורכו הוא 4 ס"מ. ניתן לראות כי הבסיס DC גדול פי 2 מהבסיס AB ולכן אורכו

הוא 8 ס"מ. נחבר משוואה: $S = \frac{(AB + DC) \cdot AD}{2}$ ונקבל: $S = \frac{(4 + 8) \cdot 4}{2} = 24$.

שטח המרפז ABCD הוא 24 סמ"ר.

תרגיל מספר 7:

- א. זווית BCD ישרה ולכן המיתר BD הוא קוטר.
זווית BAD היקפית הנשענת על קוטר ולכן גם היא ישרה. AD גובה במשולש BDF.
נתון כי: $AB = AE$ ולכן גם: $\angle ADF = \angle ADB$ - זוויות היקפיות שוות הנשענות על קשתות שוות.
קיבלנו כי AD הוא גובה וחוצה זווית במשולש BDF ולכן משולש זה הוא שווה שוקיים ובו מתקיים:
 $BD = BF$. מאחר ו-BD הוא קוטר במעגל הרי ש-DF גם קוטר.
ב. ע"י חישוב זוויות הקשתות AB, AE ו-DE נקבל כי המיתר AE מקביל לקוטר BD. מאחר והוא יוצא מאמצע BF הרי שהוא קטע אמצעים במשולש BFD ולכן שווה למחצית הקוטר - לרדיוס. מרובע שבו זוג צלעות נגדיות מקבילות ואינן שוות הוא מרובע.
ג. היקף המרובע שווה ל-5 פעמים רדיוס המעגל. ההיקף הוא 60 ס"מ.

תרגיל מספר 8:

- א. חישוב זוויות יביא לכך שזוויות המשולש הן: $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$.
ב. מחישוב זוויות נקבל כי זווית AFO ישרה. קטע היוצא ממרכז המעגל ומאונך למיתר גם חוצה אותו.
ג. הקטע FO הוא קטע אמצעים במשולש ABG. המיתר BG שווה לרדיוס המעגל (משולש ABG הוא משולש זהב) ולכן FO שווה לחצי מרדיוס המעגל. מאחר ו-CO הוא רדיוס נקבל: $FC = 1.5R$. הקטע AF הוא גובה ותיכון לבסיס במש"ש ACD ולכן: $DC = 2FC = 2 \cdot 1.5R = 3R$.

תרגיל מספר 9:

- א. לפי משפט חפיפה צ.ז.צ. ניתן להוכיח. יש צלע משותפת AB. הצלעות AF ו-AC שוות. הזוויות CAB ו-BAD שוות (היקפיות הנשענות על קשתות שוות).
ב. נסמן: $\angle CAB = \alpha$ ונקבל גם: $\angle DAE = \angle AEB = 3\alpha$. נקבל בנוסף: $\angle AFB = \angle ACB = 6\alpha$ (זווית חיצונית במשולש + זמב"ח). הזווית ההיקפית הנשענת על הקשת AB היא 3α והזווית ההיקפית הנשענת על BC היא α . לכן: $\angle ABC = 2\alpha$ (חיסור זוויות היקפיות). מסכום זוויות במשולש ABC נקבל: $\alpha + 2\alpha + 6\alpha = 180$. הפתרון: $\alpha = 20$. הזוויות של המשולש הן: 60, 60, 60 - שווה צלעות.

תרגיל מספר 10:

- א. מתקיים: $\angle ABC = \angle BEC$ (זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על המיתר).
נתון כי: BE שווה ל-BC ולכן נאמר כי: $\angle ABC = \angle BCE$ (זווית בסיס במש"ש BEC שוות + כלל המעבר) ולכן המשיק AB מקביל למיתר CE. מאחר ו-AB לא שווה למיתר CE נוכל לומר כי המרובע ABEC מרובע.
ב. לפי חישוב זוויות פשוט (רמז: המרובע BEDC חסום במעגל ולכן סכום זוויות נגדיות בו משלימות ל- 180°).
ג. ריבוע.

תרגיל מספר 11:

- א. לפי משפט חפיפה ז.ז.ז ניתן להגיע.
ב. יש להראות ע"י חישוב זוויות כי המיתר AC הוא חוצה זווית הראש במש"ש ABD ולאחר מכן ניתן להגיע ל- $\angle ABC = 90^\circ$.

תרגיל מספר 12:

- א. הזוויות ADB ו-ACB שוות כי הן נשענות על אותו מיתר. לפי צ.ז.צ. ניתן לחפוף.

ב. (i) $AB = BE$ צמב"ח.

(ii) נקבל: $\angle BAE = \angle BEA \rightarrow \angle BAE + \angle BED = 180^\circ$.

לפי זמב"ח נקבל: $\angle BED = \angle CBA \rightarrow \angle BAE + \angle CBA = 180^\circ$.

תרגיל מספר 13:

א. הקטע OM הוא קטע אמצעים במשולש הישר זווית AEB (קטע היוצא מאמצע צלע ומקביל לאחרת).

לכן הוא מקביל למיתר BE ושווה למחציתו (ולא לו) ולכן המרובע OMEB הוא מרפז.

מרפז עם זווית ישרה הוא ישר זווית.

ב. נתון: $BE + DE = 15$. גילינו כי: $2OM = BE$ וכן נתון גם: $OM = DE$.

נציב הכל ונקבל: $2OM + OM = 15$ ולכן: $OM = 5$. המיתר BE אם כן יהיה 10.

ג. שטח מרפז הוא: $S_{OMEB} = \frac{(BE + OM)ME}{2} = 90$. לאחר הצבות נקבל כי: $ME = 12$. נעזר

במ.פיתגורס במשולש ABE. נכתוב: $BE^2 + AE^2 = AB^2$. נציב: $10^2 + 24^2 = AB^2$

ונקבל: $AB = 26$. רדיוס המעגל הוא 13.

תרגיל מספר 14:

א. המשולש ABC הוא שווה שוקיים (משקים שווים) ולכן: $\angle ACB = \angle ABC$. הזוויות: $\angle ACB = \angle BDC$.

הן זווית בין משיק למיתר וזווית היקפית שעל המיתר. נתון כי: $\angle BFD = \angle BDC$ ולכן לפי כלל

המעבר נאמר: $\angle BFD = \angle ABC$.

ב. המיתר BD קוטר (זווית היקפית ישרה עליו). לכן גם: $\angle ABD = 90^\circ$ (משיק מאונך לקוטר בנקודת ההשקה).

נתון כי: $\angle BDF = 90^\circ$ ולכן הצלעות AB ו-DF מקבילות. קל לראות כי הזוויות A ו-ABF לא משלימות

ל- 180° ולכן יש במרובע זוג צלעות נגדיות מקבילות וזוג שאינן מקבילות.

ג. ממשפט פיתגורס במשולש הישר זווית BCD נקבל כי רדיוס המעגל הוא 5 ס"מ. כעת

שטח המרפז הוא: $S = \frac{2R(DF + AB)}{2}$. נפשט ונציב את הנתונים: $S = R(DF + AB) = 5(5 + 6) = 55$.

שטח המרפז הוא 55 סמ"ר.

תרגיל מספר 15:

א. יש להעביר בניית עזר את המיתר CE. המשולש ACE ישר זווית וגם המשולש ABD.

זוויות B ו-E של המשולשים שוות (היקפיות על אותו מיתר) ולכן גם הזוויות $\angle BAD = \angle EAC$.

ב. נעזר במשפט פיתגורס במשולש הישר זווית ADC ונקבל כי AC הוא 10 ס"מ.

נעזר שנית במשפט פיתגורס במשולש ACE ונקבל כי הקוטר AE הוא 11. רדיוס המעגל הוא 5.5 ס"מ.

תרגיל מספר 16:

א. לפי זוויות מתחלפות ניתן לקבל זאת בקלות.

ב. נתבונן במשולש BDF ונמצא את BD באופן הבא: הצלעות: $AD = AE = a$. ממשפט פיתגורס

במשולש ADE נקבל: $DE = a\sqrt{2}$. המשולשים ADE ו-BFE חופפים לפי ז.צ.ו (ניתן לקבל ע"י השלמת

זוויות במשולש BEF באמצעות בניית עזר של האלכסון AC) ולכן: $EF = BF = a$.

נבצע משפט פיתגורס שנית במשולש BFD ונקבל:

$$BF^2 + DF^2 = BD^2 \rightarrow BF^2 + (DE + EF)^2 = BD^2 \rightarrow a^2 + (a + a\sqrt{2})^2 = BD^2$$

לאחר סידור יתקבל: $BD = a\sqrt{4+2\sqrt{2}} \approx 2.6a$. רדיוס המעגל הוא: $R = \frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2} = a\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} \approx 1.3a$.

תרגיל מספר 17:

א. נתון כי DC קוטר ולכן: $\angle DEC = 90^\circ$ (היקפית על קוטר). נסמן: $\angle EDC = \angle ADE = \alpha$

לפי הנתון ונקבל: $\angle DCE = 90 - \alpha$. ע"י המשך השלמת זוויות נקבל כי: $\angle BCE = 90 - \alpha$ ולכן CE גם חוצה זווית.

ב. לפי השלמת הזוויות המשולשים BEC ו-ADE התגלו כשווי-שוקיים. מאחר ו- $DC = 2R$ וגם: $AE = BE$ נוכל לסמן: $AE = BE = R$. היקף המקבילית הוא $6R$.

ג. (i) נתבונן במשולש הישר זווית DEC ובו נבטא את המיתר (ניצב) DE באמצעות R: $DE^2 + 4^2 = (2R)^2$

ונקבל: $DE = \sqrt{4R^2 - 16} = 2\sqrt{R^2 - 4}$. מאחר ושטח שני המשולשים BEC ו-ADE שווה (לשניהם אותו בסיס AE ו-BE השווים זה לזה והגובה לכל בסיס הוא אותו האורך) וכל שטח הוא בדיוק מחצית משטח המשולש DEC (שהרי גם לו יש את אותו הגובה אך בסיס DC גדול פי 2 מהבסיסים של המשולשים האחרים) נוכל לחשב רק את שטחו ולהכפיל פי 2:

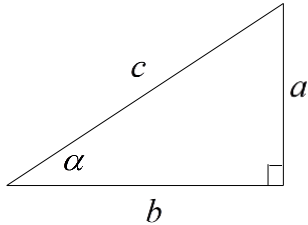
$$S = \frac{4 \cdot 2\sqrt{R^2 - 4}}{2} \cdot 2 = 4\sqrt{4R^2 - 16} = 8\sqrt{R^2 - 4}$$

(ii) נחבר משוואה מתאימה: $8\sqrt{R^2 - 4} = 12$. נחלק פי 8: $\sqrt{R^2 - 4} = 1.5$. נעלה בריבוע: $R^2 - 4 = 2.25$ נבודד: $R^2 = 6.25$ ונפתור. רדיוס המעגל הוא 2.5 ס"מ.

פרק 4 – טריגונומטריה

4.1 - טריגונומטריה במשולש ישר זווית

הגדרות הפונקציות הטריגונומטריות:



$$\sin \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{\text{מול}}{\text{יתר}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{היתר}} = \frac{\text{ליד}}{\text{יתר}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{הניצב שמול הזווית}}{\text{הניצב שליד הזווית}} = \frac{\text{מול}}{\text{ליד}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{הניצב שליד הזווית}}{\text{הניצב שמול הזווית}} = \frac{\text{ליד}}{\text{מול}} = \frac{b}{a}$$

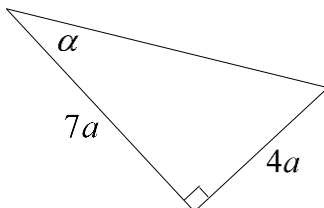
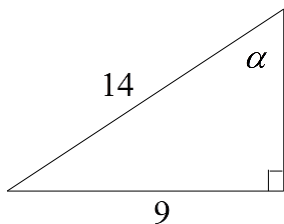
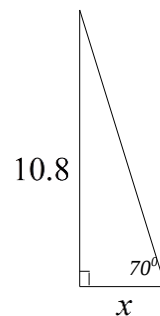
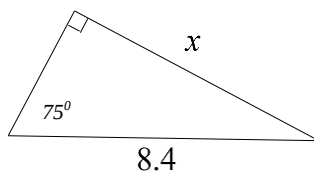
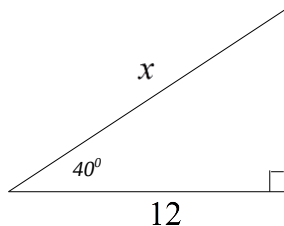
$$\text{משפט פיתגורס: } a^2 + b^2 = c^2$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		רקע היסטורי על טריגונומטריה, הגדרת ארבע הפונקציות הטריגונומטריות במשולש ישר זווית
סרטון 2	תרגיל 1	תרגילי חישוב בסיסיים
סרטון 3	תרגיל 1	תרגילי חישוב בסיסיים – המשך
סרטון 4	תרגיל 2	
סרטון 5	תרגיל 3	
סרטון 6	תרגיל 4	
סרטון 7	תרגיל 5	
סרטון 8	תרגיל 6	הדגמת השימוש בנעלם
סרטון 9	תרגיל 7	הדגמה ראשונה של שאלה עם פרמטרים
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11	תרגיל 9	
סרטון 12	תרגיל 10	כולל הסבר על היתכנות כמה תשובות נכונות שנראות שונה
סרטון 13	תרגיל 11	
סרטון 14		טיפים למריגונומטריה א'
סרטון 15		טיפים למריגונומטריה ב'
סרטון 16		טיפים למריגונומטריה ג'

תרגילים:

1. מצא את ערכו של x במשולשים ישרי הזווית הבאים:

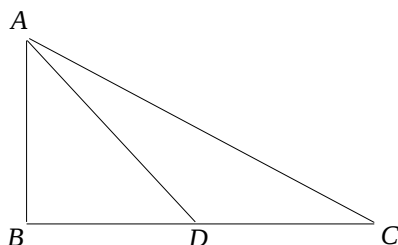


2. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

AD הוא התיכון לניצב BC .

נתון: $\angle C = 28^\circ$, $AB = 6_{cm}$.

מצא: $\angle BAD = ?$, $AD = ?$.

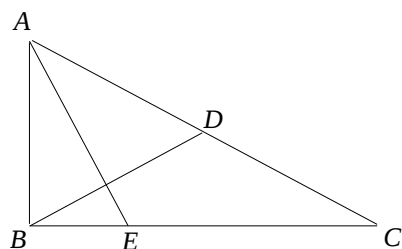


3. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

BD הוא התיכון ליתר ו- AE הוא חוצה הזווית $\angle A$.

נתון: $BC = 8_{cm}$, $BD = 5.6_{cm}$.

מצא: $\angle BAE = ?$, $BE = ?$.



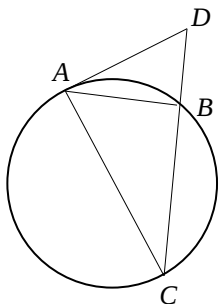
4. מצא את זוויתו של מעוין שאורכי אלכסוניו 24_{cm} ו- 18_{cm} .

5. המשולש $\triangle ABC$ חסום במעגל כך שהצלע AC היא קוטר המעגל.

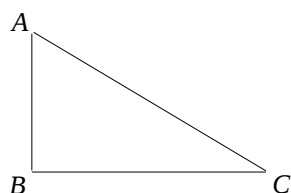
המשיק למעגל בנקודה A והמשך הצלע CB נפגשים בנקודה D .

נתון: $BD = 4_{cm}$, $\angle DAB = 32^\circ$.

מצא את אורכו של רדיוס המעגל.



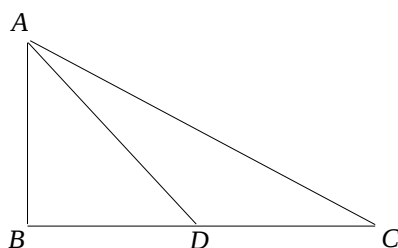
6. במשולש שווה שוקיים שבו השוק ארוכה ב- 4 ס"מ מהבסיס נתון כי זווית הראש היא 34.92° .
מצא את שטח המשולש.



7. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

נתון: $AB = a$, $\angle A = \alpha$.

הבע באמצעות α ו- a את היקף המשולש.



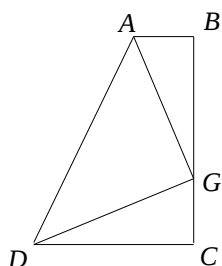
8. המשולש $\triangle ABC$ שבציור הוא משולש ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

AD הוא התיכון לניצב BC .

נתון: $AB = b$, $\angle C = \alpha$.

הבע באמצעות α ו- b את אורכי הקטעים AD ו- BD .

9. במשולש ישר זווית אחת הזוויות החדות היא α ואורך חוצה זווית זו הוא k . הבע באמצעות α ו- k את שטח המשולש ואת אורך היתר.



10. מרפז $ABCD$ הוא מרפז ישר זווית ($\angle B = \angle C = 90^\circ$).

הנקודה G נמצאת על השוק BC כך ש- $AG \perp DG$.

נתון: $\angle BAG = \beta$, $AG = DG = m$.

הבע באמצעות β ו- m את שטח המרפז.

11. משולש שווה שוקיים שאורך שוקו k וזווית הבסיס שלו היא β חוסם מעגל. הבע באמצעות β ו- k את רדיוס המעגל.

פתרונות:

1. א. $x = 15.665_{cm}$ ב. $x = 8.114_{cm}$ ג. $x = 3.931_{cm}$ ד. $\alpha = 40.005^\circ$ ה. $\alpha = 29.745^\circ$
2. $\angle BAD = 43.24^\circ$, $AD = 8.236_{cm}$ 3. $\angle BAE = 22.792^\circ$, $BE = 3.294_{cm}$
4. $73.74^\circ, 73.74^\circ, 106.26^\circ, 106.26^\circ$ 5. $R = 6.04_{cm}$ 6. $S = 28.618_{cm^2}$

$$AD = \sqrt{b^2 + \frac{b^2}{4 \tan^2 \alpha}} \quad , BD = \frac{b}{2 \tan \alpha} \quad .8 \quad P = a \left(1 + \tan \alpha + \frac{1}{\cos \alpha} \right) .7$$

$$\frac{(m \sin \beta + m \cos \beta)^2}{2} \quad .10 \quad AC = \frac{k \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha} \quad , S = \frac{k^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \tan \alpha}{2} \quad .9$$

$$R = k \cos \beta \tan \frac{\beta}{2} \quad .11$$

4.2 – זהויות טריגונומטריות

זהויות היסוד

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

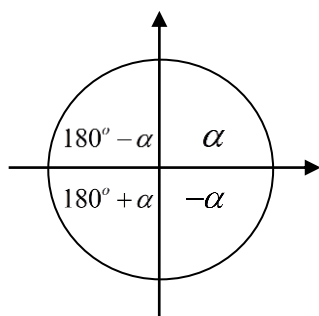
זהויות של סכום והפרש זוויות

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

זהויות של זווית כפולה

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$



המעגל הטריגונומטרי

המעגל הטריגונומטרי הוא מעגל היחידה (מעגל קונוי שרדיוסו 1)

טבלת ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור הזוויות המיוחדות:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\emptyset$
$\cot \alpha$	$\emptyset$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

$$\begin{aligned} \tan 0^\circ &= 0 & \cos 0^\circ &= 1 & \sin 0^\circ &= 0 \\ \tan 90^\circ &= \emptyset & \cos 90^\circ &= 0 & \sin 90^\circ &= 1 \\ \tan 180^\circ &= 0 & \cos 180^\circ &= -1 & \sin 180^\circ &= 0 \\ \tan 270^\circ &= \emptyset & \cos 270^\circ &= 0 & \sin 270^\circ &= -1 \end{aligned}$$

הזהויות של מעגל היחידה

$$\sin / \cos / \tan (360^\circ + \alpha) = \sin / \cos / \tan \alpha$$

$$\begin{array}{c|c} + & + \\ \hline - & - \end{array} \begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \sin(-\alpha) &= -\sin \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline - & + \end{array} \begin{aligned} \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos \alpha \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c|c} - & + \\ \hline + & - \end{array} \begin{aligned} \tan(180^\circ - \alpha) &= -\tan \alpha \\ \tan(180^\circ + \alpha) &= \tan \alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan \alpha \end{aligned}$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		זהויות היסוד – חלק א'
סרטון 2		זהויות היסוד – חלק ב'
סרטון 3		זהויות היסוד – חלק ג'
סרטון 4	תרגיל 1	כולל הסבר על מה עושים עם זהויות ומהי הוכחת זהויות
סרטון 5	תרגיל 1	המשך שאלה מהסרטון הקודם
סרטון 6		זהויות של סכום והפרש זוויות
סרטון 7	תרגיל 2	
סרטון 8		זהויות של זווית כפולה
סרטון 9	תרגיל 3	
סרטון 10	תרגיל 3	
סרטון 11		ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור הזוויות $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$
סרטון 12		המעגל הטריגונומטרי: הקדמה והסבר על זוויות ראי
סרטון 13		המעגל הטריגונומטרי: תרגול זוויות ראי
סרטון 14		המעגל הטריגונומטרי: הסבר על שימוש במעגל הטריגונומטרי
סרטון 15		המעגל הטריגונומטרי: סיכום הזהויות הנובעות מהמעגל הטריגונומטרי
סרטון 16		המעגל הטריגונומטרי: חישוב ללא מחשבון של פונקציה טריגונומטרית על פי המעגל הטריגונומטרי
סרטון 17	תרגיל 4	
סרטון 18		המעגל הטריגונומטרי: ערכי הפונקציות הטריגונומטריות עבור הזוויות $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$
סרטון 19	תרגיל 5	

תרגילים

1. הוכח את הזהויות הבאות:

$$\cos^3 \alpha + \cos \alpha \sin^2 \alpha = \cos \alpha$$

$$\frac{\sin^3 \alpha}{\sin(90^\circ - \alpha) - \cos^3 \alpha} = \tan \alpha$$

$$\frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2$$

$$\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \tan^2 \alpha \sin^2 \alpha$$

2. הוכח את הזהות הבאה:

$$\tan \alpha - \tan \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

3. הוכח את הזהויות הבאות:

$$4 \sin \alpha \cos \alpha \cos 2\alpha = \sin 4\alpha$$

$$(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha$$

$$(\sin 3\alpha - \cos 3\alpha)^2 = 1 - \sin 6\alpha$$

$$\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$$

$$\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cot 2\alpha$$

$$\frac{\cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$$

4. ענה ללא שימוש במחשבון:

$$\cos(-45^\circ) = \quad \tan 225^\circ = \quad \sin 150^\circ =$$

$$\sin 510^\circ = \quad \sin 315^\circ = \quad \cos 210^\circ =$$

$$\cos 930^\circ = \quad \cos 120^\circ = \quad \tan 120^\circ =$$

$$\tan(-225^\circ) = \quad \tan(-30^\circ) = \quad \sin 330^\circ =$$

5. הוכח את הזהות הבאה:

$$\frac{\sin(180^\circ - \alpha) + \sin(90^\circ - \alpha)}{\cos(-2\alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

4.3 - טריגונומטריה – משוואות

$$\cos x = \cos \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$x = \alpha + 360^\circ k$$

$$x = -\alpha + 360^\circ k$$

$$x = \pm \alpha + 360^\circ k$$

$$\tan x = \tan \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$x = \alpha + 180^\circ k$$

$$\sin x = \sin \alpha$$

$$\Downarrow$$

$$x = \alpha + 360^\circ k$$

$$x = 180^\circ - \alpha + 360^\circ k$$

סיכום פתרונות המשוואות המיוחדות:

$$\cos x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 90^\circ + 180^\circ k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\tan x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 180^\circ k$$

$$x = \pi k$$

$$\sin x = 0$$

$$\Downarrow$$

$$x = 180^\circ k$$

$$x = \pi k$$

$$\cos x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 360^\circ k$$

$$x = 2\pi k$$

$$\sin x = 1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 90^\circ + 360^\circ k$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\cos x = -1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 180^\circ + 360^\circ k$$

$$x = \pi + 2\pi k$$

$$\sin x = -1$$

$$\Downarrow$$

$$x = 270^\circ + 360^\circ k$$

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	רקע, ידע מקדים, כיצד פותרים משוואה עם סינוס
סרטון 2	תרגיל 2	
סרטון 3	תרגיל 3	
סרטון 4	תרגיל 4	
סרטון 5	תרגיל 5	כיצד פותרים משוואה עם קוסינוס
סרטון 6	תרגיל 6	
סרטון 7	תרגיל 7	כיצד פותרים משוואה עם טנגנס
סרטון 8	תרגיל 8	
סרטון 9	תרגיל 9	
סרטון 10	תרגיל 10	
סרטון 11	תרגיל 11	
סרטון 12	תרגיל 12	הסבר על המשוואות המיוחדות (שבאגף ימין שלהן 0, 1 או -1)
סרטון 13	תרגיל 13	משוואות sin-sin

	14 תרגיל	סרמון 14
משוואות COS-COS	15 תרגיל	סרמון 15
	16 תרגיל	סרמון 16
משוואות tan-tan	17 תרגיל	סרמון 17
משוואות מסוג $abc=0$	18 תרגיל	סרמון 18
	19 תרגיל	סרמון 19
	20 תרגיל	סרמון 20
משוואות עם הצבת t	21 תרגיל	סרמון 21
	22 תרגיל	סרמון 22
	23 תרגיל	סרמון 23
משוואות עם מכנה ותחום הגדרה	24 תרגיל	סרמון 24
	25 תרגיל	סרמון 25
הכרות עם שימוש בזהויות בפתרון משוואות טריגונומטריות	26 תרגיל	סרמון 26
	27 תרגיל	סרמון 27
	28 תרגיל	סרמון 28
	29 תרגיל	סרמון 29
	30 תרגיל	סרמון 30
	31 תרגיל	סרמון 31
משוואות עם חלוקה ב- $\cos$ לקבלת $\tan$	32 תרגיל	סרמון 32
פתרון משוואות בתחום נתון	33 תרגיל	סרמון 33
	34 תרגיל	סרמון 34
	35 תרגיל	סרמון 35
רדיאנים – הסבר על מהו רדיאן והקשר $\pi = 180^\circ$	36 תרגיל	סרמון 36
	37 תרגיל	סרמון 37
	38 תרגיל	סרמון 38
	39 תרגיל	סרמון 39

תרגילים:

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad .1$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad .2$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .3$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \quad .4$$

$$\cos x = \frac{1}{2} \quad .5$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .6$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad .7$$

$$\tan x = -1 \quad .8$$

$$\tan x = 5 \quad .1 \quad \cos x = -0.6 \quad .2 \quad \sin x = 0.7 \quad .3 \quad .9$$

$$\tan 5x = -1 \quad .1 \quad 2 \cos 2x = -\sqrt{3} \quad .2 \quad \sin 3x = \frac{1}{2} \quad .3 \quad .10$$

$$\tan(50^\circ - x) = 1.3 \quad .1 \quad \cos(75^\circ - 3x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad .2 \quad \sin(2x + 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .3 \quad .11$$

$$\cos x = 1 \quad .1 \quad \cos x = 0 \quad .2 \quad \sin x = -1 \quad .3 \quad \sin x = 1 \quad .4 \quad \sin x = 0 \quad .5 \quad .12$$

$$\tan x = 1 \quad .1 \quad \tan x = 0 \quad .2 \quad \cos x = -1 \quad .3 \quad .1$$

$$\sin x = \sin 3x \quad .13$$

$$\sin x = \sin(120^\circ - x) \quad .1 \quad \sin 2x = \sin(x + 30^\circ) \quad .2 \quad .14$$

$$\cos x = \cos 3x \quad .15$$

$$\cos x = \cos(40^\circ - x) \quad .16$$

$$\tan 2x = \tan(60^\circ - x) \quad .17 \quad \tan x = \tan 3x \quad .18$$

$$\sin x \cos 3x = 0 \quad .18$$

$$\sin 2x - 2\sin^2 2x = 0 \quad .19$$

$$\cos^2 x = \frac{3}{4} \quad .20$$

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad .21$$

$$\tan^2 x - 3\tan x - 4 = 0 \quad .22$$

$$\cos x - \frac{2}{\cos x} + 1 = 0 \quad .23$$

$$\frac{\sin x}{\cos x - 1} = 0 \quad .24$$

$$\frac{\cos 2x}{\tan x + 1} = 0 \quad .25$$

$$\sin x = \cos x \quad .26$$

$$\sin x - \tan x = 0 \quad .27$$

$$\sin x - \sin 2x = 0 \quad .28$$

$$3\cos x - \cos 2x = 0 \quad .29$$

$$\cos 2x = -\cos 3x \quad .1 \quad \sin x = -\sin 3x \quad .18 \quad .30$$

$$\sin(x + 30^\circ) = -\cos x \quad .31$$

$$3\sin^2 x = \cos^2 x \quad .1 \quad \sin x = 2\cos x \quad .1 \quad \sin x = -\cos x \quad .1 \quad \sin x = \cos x \quad .18 \quad .32$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad [-360^\circ, 360^\circ] \quad .1 \quad \sin x = \frac{1}{2} \quad [0^\circ, 360^\circ] \quad .18 \quad .33$$

$$\cos 4x + 1 = 3\sin 2x \quad [-180^\circ, 180^\circ] \quad .34$$

$$\frac{\sin 6x}{1 - \cos 4x} = 0 \quad [0^\circ, 135^\circ] \quad .35$$

$$\pi = 180^\circ \quad .36$$

$$\tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad [-2\pi, 2\pi] \quad .37$$

$$\cos 4x + 1 = 3\sin 2x \quad [-\pi, \pi] \quad .38$$

$$\frac{\sin 6x}{1 - \cos 4x} = 0 \quad \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \quad .39$$

$$.40 \quad \text{רשמו פתרונות בתחום } \frac{-3\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \text{ לתרגילים 1-8, 12, 15, 16, 20, 21, 23-28, 31.}$$

פתרונות:

$$x = 45^\circ + 360^\circ k, x = 135^\circ + 360^\circ k \quad .2 \quad x = 30^\circ + 360^\circ k, x = 150^\circ + 360^\circ k \quad .1$$

$$x = 210^\circ + 360^\circ k, x = -30^\circ + 360^\circ k \quad .4 \quad x = -60^\circ + 360^\circ k, x = 240^\circ + 360^\circ k \quad .3$$

$$.8 \quad x = 30^\circ + 180^\circ k \quad .7 \quad x = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad .6 \quad x = \pm 60^\circ + 360^\circ k \quad .5$$

$$.1 \quad x = 44.427^\circ + 360^\circ k, x = 135.573^\circ + 360^\circ k \quad .9 \quad x = -45^\circ + 180^\circ k$$

$$x = \pm 126.87^\circ + 360^\circ k$$

$$.1 \quad x = 10^\circ + 120^\circ k, x = 50^\circ + 120^\circ k \quad .10 \quad x = 78.69^\circ + 180^\circ k \quad .11$$

$$x = \pm 75^\circ + 180^\circ k$$

$$x = 90^\circ + 180^\circ k, x = -30^\circ + 180^\circ k \quad .12 \quad x = -9^\circ + 36^\circ k \quad .1$$

$$x = 180^\circ k \quad .12 \quad x = -2.431^\circ + 180^\circ k \quad .1 \quad x = 10^\circ + 120^\circ k, x = 40^\circ + 120^\circ k \quad .1$$

$$.11 \quad x = 90^\circ + 180^\circ k \quad .1 \quad x = -270^\circ + 360^\circ k \quad .1 \quad x = 90^\circ + 360^\circ k \quad .1$$

$$x = 360^\circ k$$

$$.13 \quad x = 45^\circ + 180^\circ k \quad .11 \quad x = 180^\circ \quad .1 \quad x = 180^\circ + 360^\circ$$

$$x = 180^\circ k, x = 45^\circ + 90^\circ k$$

$$x = 90^\circ k \quad .15 \quad x = 60^\circ + 180^\circ k \quad .1 \quad x = 30^\circ + 360^\circ k, x = 50^\circ + 120^\circ k \quad .14$$

$$.18 \quad x = 20^\circ + 60^\circ \quad .1 \quad x = 90^\circ k \quad .17 \quad x = 20^\circ + 180^\circ k \quad .16$$

$$x = 180^\circ k, x = 30^\circ + 60^\circ k$$

$$x = 90^\circ k, x = 15^\circ + 180^\circ k, x = 75^\circ + 180^\circ k \quad .19$$

$$x = \pm 30^\circ + 360^\circ k, x = \pm 150^\circ + 360^\circ k \quad .20$$

$$x = 90^\circ + 360^\circ k, x = 210^\circ + 360^\circ k, x = -30^\circ + 360^\circ k \quad .21$$

$$x = 360^\circ k \quad .23 \quad x = 75.964^\circ + 180^\circ k, x = -45^\circ + 180^\circ k \quad .22$$

$$.26 \quad x = 45^\circ + 90^\circ, x \neq -45^\circ + 180^\circ k \quad .25 \quad x = 180^\circ k, x \neq 360^\circ \quad .24$$

$$x = 45^\circ + 180^\circ k$$

$$.29 \quad x = 360^\circ k, x = 60^\circ + 120^\circ k \quad .28 \quad x = 180^\circ k, x = 360^\circ k \quad .27$$

$$x = \pm 106.307^\circ + 360^\circ k$$

$$x = 36^\circ + 72^\circ k, x = 180^\circ + 360^\circ k \quad .1 \quad x = 90^\circ k, x = -90^\circ + 180^\circ k \quad .N \quad .30$$

$$x = -45^\circ + 360^\circ k \quad .1 \quad x = 45^\circ + 180^\circ k \quad .N \quad .32 \quad x = 120^\circ + 180^\circ k \quad .31$$

$$x = 30^\circ + 180^\circ k, x = -30^\circ + 180^\circ k \quad .1 \quad x = 63.435^\circ + 180^\circ k \quad .1$$

$$x = -210^\circ, x = -30^\circ, x = 150^\circ, x = 330^\circ \quad .1 \quad x = 30^\circ, x = 150^\circ \quad .N \quad .33$$

$$x = 30^\circ, x = 60^\circ, x = 120^\circ \quad .35 \quad x = -165^\circ, x = 15^\circ, x = -105^\circ, x = 75^\circ \quad .34$$

$$x = -\frac{7}{6}\pi, x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{5}{6}\pi, x = \frac{11}{6}\pi \quad .37$$

$$x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2}{3}\pi \quad .39 \quad x = -\frac{11}{12}\pi, x = \frac{\pi}{12}, x = -\frac{7}{12}\pi, x = \frac{5}{12}\pi \quad .38$$

$$.40$$

$$1. \frac{-7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad 2. \frac{-5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \quad 3. \frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \quad 4. \frac{-5\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$$

$$5. \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \quad 6. \frac{-7\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \quad 7. \frac{-5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \quad 8. \frac{-5\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

$$12. \kappa. -\pi, 0, \pi \quad \lambda. \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \quad \mu. \frac{-3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \quad 7. \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad \pi. 0 \quad \iota. -\pi, \pi$$

$$\rho. -\pi, 0, \pi \quad \sigma. \frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \quad 15. \frac{-3\pi}{2}, -\pi, 0, \pi, \frac{3\pi}{2} \quad 16. \frac{-8\pi}{9}, \frac{\pi}{9}, \frac{10\pi}{9}$$

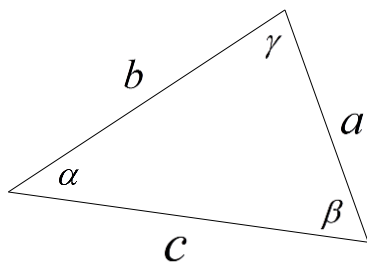
$$20. \frac{-7\pi}{6}, \frac{-5\pi}{6}, \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \quad 21. \frac{-3\pi}{2}, \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad 23. 0 \quad 24. -\pi, 0, \pi$$

$$25. \frac{-3\pi}{2}, \frac{-5\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2} \quad 26. \frac{-3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \quad 27. -\pi, 0, \pi$$

$$28. -\pi, \frac{-\pi}{3}, 0, \frac{\pi}{3}, \pi \quad 31. \frac{-4\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

4.4 - מריגונומטריה במישור

משפט הסינוסים



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

במשולש, צלע חלקי סינוס הזווית שמולה הוא גודל קבוע
והוא שווה לפעמיים רדיוס המעגל החוסם.

משפט הקוסינוסים

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad \text{או} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

מתי נשתמש בכל משפט

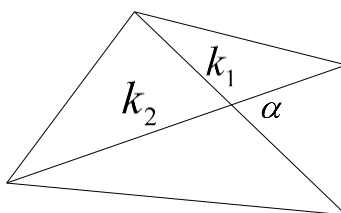
- נשתמש במשפט הסינוסים כאשר:
 - נתונות שתי זוויות וצלע
 - נתונות שתי צלעות והזווית מול אחת מהן
 - נתון רדיוס המעגל החוסם וצלע/זווית נוספת
- נשתמש במשפט הקוסינוסים כאשר:
 - נתונות שתי צלעות והזווית ביניהן
 - נתונות שלוש צלעות
- כאשר ישנם יותר נתונים מאשר בסעיפים שלהלן ייתכן שנוכל להשתמש בשני המשפטים. בבחירת המשפט בו נשתמש כדאי לזכור שבמשפט הסינוסים תיתכנה שתי תשובות לזווית, גם אם בפועל רק אחת נכונה, ובמשפט הקוסינוסים תתקבל בוודאות הזווית הנכונה.

שטח משולש

$$S_{\Delta} = \frac{a^2 \sin \beta \sin \gamma}{2 \sin \alpha} \quad \text{או} \quad S_{\Delta} = \frac{ab \sin \gamma}{2} \quad \text{או} \quad S_{\Delta} = \frac{a \cdot h}{2}$$

שטח מרובע על פי אלכסוניו

$$S = \frac{k_1 k_2 \sin \alpha}{2}$$



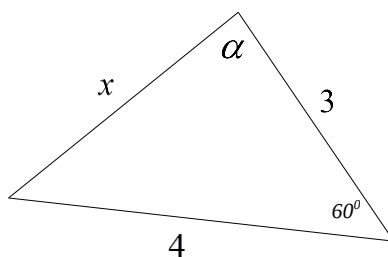
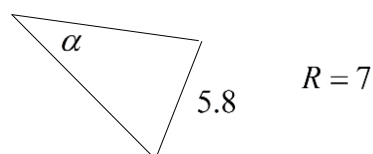
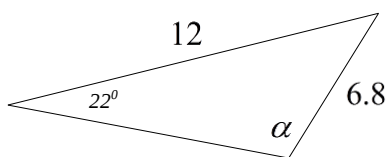
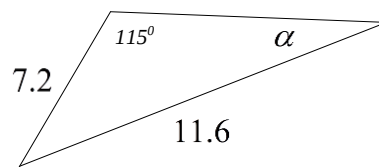
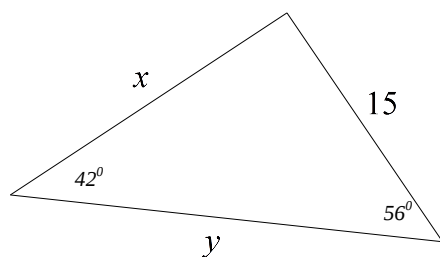
לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הסבר על משפט הסינוסים
סרטון 2	תרגיל 1	תרגילי בסיס משפט הסינוסים – חלק א'
סרטון 3	תרגיל 1	תרגילי בסיס משפט הסינוסים – חלק ב' – היתכנות שתי תשובות לזווית
סרטון 4	תרגיל 1	תרגילי בסיס משפט הסינוסים – חלק ג' – קבלת משוואה ופתרונה
סרטון 5		הסבר על משפט הקוסינוסים
סרטון 6	תרגיל 2	תרגילי בסיס משפט הקוסינוסים + למה אין שתי תשובות לזווית
סרטון 7		הסבר על מתי משתמשים במשפט הסינוסים ומתי במשפט הקוסינוסים
סרטון 8	תרגיל 3	
סרטון 9	תרגיל 4	
סרטון 10	תרגיל 5	
סרטון 11	תרגיל 6	
סרטון 12	תרגיל 7	
סרטון 13		שימוש פעמיים במשפט הקוסינוסים ליצירת שתי משוואות בענני נעלמים
סרטון 14	תרגיל 8	
סרטון 15		עלוש נוסחאות לשטח משולש
סרטון 16	תרגיל 9	
סרטון 17		נוסחת שטח מרובע על פי אלכסוניו
סרטון 18	תרגיל 10	
סרטון 19	תרגיל 11	

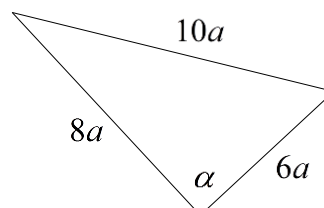
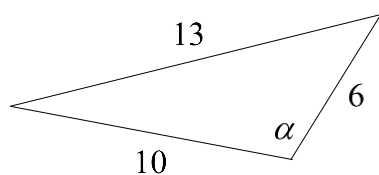
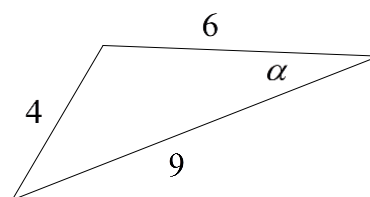
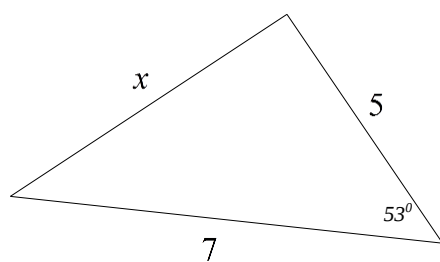
תרגילים

1. מצא את ערכו של $\alpha/x/y$ במשולשים הבאים (R הוא רדיוס המעגל החוסם, נתוני

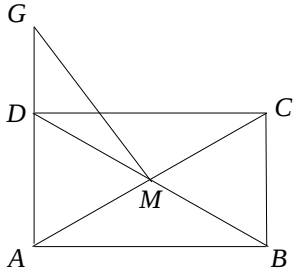
הצלעות בס"מ):



2. מצא את ערכו של α/x במשולשים הבאים:



3. נתון משולש שווה שוקיים $\triangle ABC$ ($AB = AC$) שאורך השוק שלו הוא 22 ס"מ וגודלה של זווית הבסיס בו הוא 70° . CD הוא חוצה זווית הבסיס $\angle C$. מצא את אורכו של הקטע AD .



4. אלכסוני המלבן $ABCD$ נפגשים בנקודה M . הנקודה G נמצאת

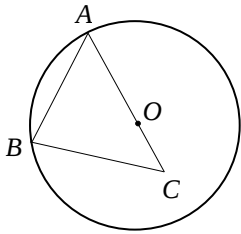
על המשך הצלע AD .

נתון: $AD = 3_{cm}$, $AB = 4_{cm}$, $DG = 1.2_{cm}$.

מצא את גודלו של הקטע GM .

5. מרובע שאורכי אלכסוניו 8_{cm} ו- 11_{cm} חסום במעגל שאורך רדיוסו הוא 6_{cm} .

חשב את זווית המרובע.



6. הצלע AB במשולש $\triangle ABC$ היא מיתר במעגל שמרכזו O .

הצלע AC עוברת במרכז המעגל כמתואר בשרטוט.

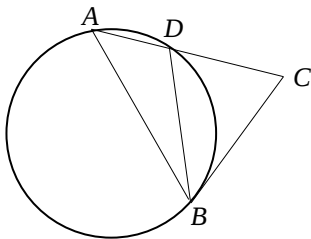
נתון: $\angle BAC = 38^\circ$, $OC = 3_{cm}$, $BC = 9_{cm}$.

מצא את אורכם של רדיוס המעגל ושל הצלע AB .

7. אחד האלכסונים במקבילית יוצר זווית של 30° עם צלע אחת של המקבילית וזווית של

61.05° עם הצלע הסמוכה לה. אחת מצלעות המקבילית גדולה ב-3 ס"מ מהצלע הסמוכה לה.

חשב את היקף המקבילית.



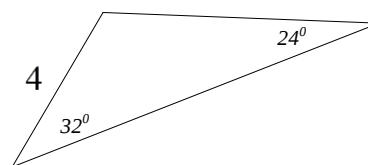
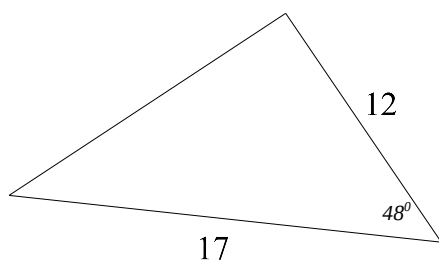
8. המשולש $\triangle ABD$ חסום במעגל שרדיוסו R .

המשך הצלע AD והמשק למעגל בנקודה B נפגשים בנקודה C .

נתון: $\angle ADB = \beta$, $\angle C = \alpha$.

הבע באמצעות R , α ו- β את אורך הקטע BC .

9. חשב את שטחי המשולשים הבאים:



10. חשב את שטחו של מרפז שווה שוקיים שאורך האלכסון שלו 8 ס"מ והוא יוצר זווית של 15° עם הבסיסים.

11. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$) חוצה את הזווית $\angle B$.

נתון: $\angle A = \alpha$, $AB = m$

הבע באמצעות α ו- m את שטח המשולש $\triangle ABC$.

פתרונות:

1. א. $x = 18.585_{cm}$, $y = 22.199_{cm}$ ב. $\alpha = 34.231^\circ$ ג. $\alpha = 41.382^\circ$ ד. $\alpha = 138.618^\circ$

2. א. $\alpha = 155.526^\circ$ ב. $\alpha = 24.474^\circ$ ג. $\alpha = 73.898^\circ$ ד. $x = 5.646_{cm}$

3. $\alpha = 20.742^\circ$ ג. $\alpha = 105.962^\circ$ ד. $\alpha = 90^\circ$ א. $AD = 13.064_{cm}$ ב. $GM = 3.360_{cm}$

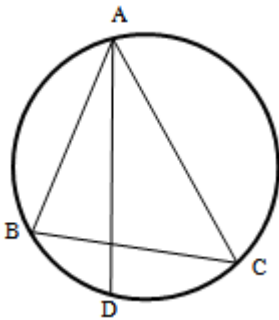
5. $66.444^\circ, 113.556^\circ, 41.810^\circ, 138.190^\circ$ 6. $AB = 14.56_{cm}$, $R = 9.242_{cm}$ 7. $P = 22_{cm}$

8. $BC = \frac{2R \sin \beta \sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha}$ 9. א. $S = 75.801_{cm^2}$ ב. $S = 8.641_{cm^2}$

10. $S = 16_{cm^2}$ 11. $S_{\triangle ABCD} = \frac{m^2 \tan^2 \alpha \sin 45^\circ \cos \alpha}{2 \sin(\alpha + 45^\circ)}$

4.5- תרגילים מסכמים:

תרגילים הכוללים שימוש במשפט הסינוסים ונוסחת שטח משולש:



1. המשולש ABC חסום במעגל כמתואר באיור.

מעבירים את המיתר AD החוצה את זווית BAC.

ידוע כי: $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$.

מסמנים: $AD = k$.

א. הבע באמצעות k את אורך המיתר BD.

ב. ידוע כי שטח המשולש ABD הוא 8.379 סמ"ר.

מצא את k (עגל למספר שלם).

2. נתונה מקבילית ABCD ובה מעבירים את האלכסונים AC ו-BD אשר נחתכים בנקודה M.

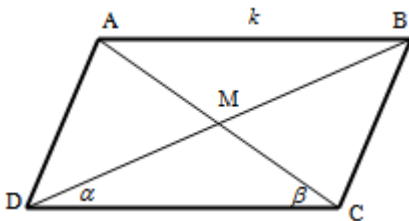
מסמנים: $AB = k$, $\angle BDC = \alpha$, $\angle ACD = \beta$.

א. הוכח כי אלכסוני המקבילית מקיימים: $\frac{AC}{BD} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$.

ב. (i) הבע באמצעות α ו- k את שטח המשולש DMC.

(ii) הבע באמצעות α ו- k את שטח המקבילית ABCD.

ג. נתון כי: $\frac{AC}{BD} = 2$. הראה כי שטח המקבילית הוא: $\frac{4k^2 \sin^2 \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.



3. במרובע ABCD מעבירים את האלכסונים AC ו-BD.

ידוע כי האלכסון AC גדול פי 2 מהאלכסון BD וכי

זווית C גדולה פי 2 מזווית B.

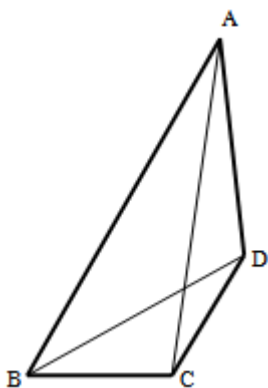
R_1 הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC ו- R_2 הוא

רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD. מסמנים: $\angle B = \beta$.

א. הוכח כי: $\frac{R_1}{R_2} = 4 \cos \beta$.

ב. ידוע כי הרדיוס R_1 גדול פי 2 מהרדיוס R_2 .

הוכח כי המרובע ABCD הוא מרפז.



4. במשולש ABC הזווית C היא 60° .

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרים המשולשים ACD ו-ABD.

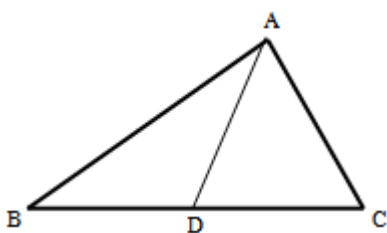
ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא: $R_1 = \sqrt{3}$.

כמוכן רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא: $R_2 = 3$.

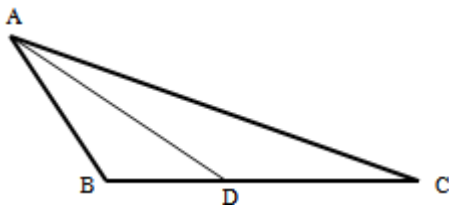
א. הוכח כי המשולש ABC הוא ישר זווית.

ב. היקף המשולש ABC הוא $P = 12 + 4\sqrt{3}$.

חשב את שטח המשולש.



5. המשולש ABC הוא קהה זווית ($\angle B > 90^\circ$) ובו הזווית C היא: 11.536° .

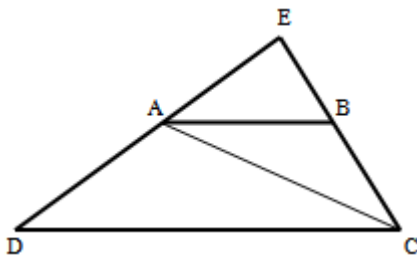


מעבירים את הקטע AD המחלק את המשולש לשני משולשים רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD הוא 24 ס"מ. רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD הוא 12 ס"מ. א. מצא את זווית B.

ב. הראה כי אורך הצלע AC גדולה פי 2 מאורך הצלע AB.

ג. מצא את אורך הצלע AB אם ידוע כי שטח המשולש ABC הוא 1.76 סמ"ר.

6. המרובע ABCD הוא טרפז ($AB \parallel CD$).



ממשיכים את השוקיים AD ו-BC עד לפגישתם בנקודה E. ידוע כי: $DE \perp CE$.

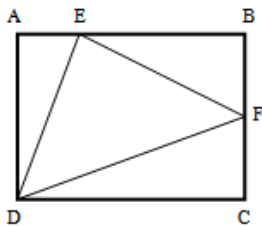
מעבירים את האלכסון AC אשר חוצה את זווית C.

מסמנים את הבסיס הגדול DC ב-k ואת: $\angle ACD = \alpha$.

א. הבע באמצעות k ו- α את הבסיס הקטן של הטרפז AB.

ב. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המשולש ABC כאשר: $k = 12$, $\alpha = 15^\circ$.



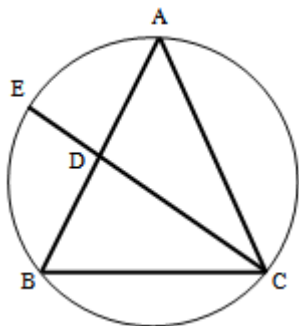
7. במלבן ABCD מסמנים את הנקודות E ו-F הנמצאות על הצלעות AB ו-BC בהתאמה כך ש-E מקיימת: $3AE = BE$ ו-F היא אמצע הצלע BC.

אורך הצלע AD שווה לאורך הקטע BE.

מעבירים את הקטעים EF, DF ו-DE כך שנוצר במשולש DEF.

א. סמן ב-t את אורך הקטע AE והבע באמצעות t את אורכי צלעות המשולש DEF.

ב. חשב את זוויות המשולש EDF.



8. המשולש ABC הוא שווה שוקיים החסום במעגל שרדיוסו 8 ס"מ.

מהקדקוד C מעבירים את המיתר CE החותך את השוק AB בנקודה D.

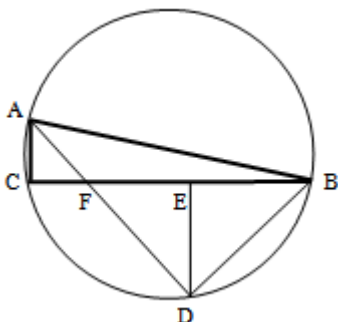
ידוע כי E היא אמצע הקשת AB והיחס בין הקטעים BD ו-CD הוא 4:7.

מסמנים: $\angle ACD = \alpha$.

א. מצא את זוויות המשולש ABC (עגל למספרים שלמים).

ב. חשב את אורך המיתר BE.

ג. חשב את שטח המשולש BED.



9. המשולש ABC חסום במעגל כך ש-AB הוא קוטר.

הנקודה D היא אמצע הקשת BC וממנה מעבירים את

המיתרים AD ו-BD ומעלים גובה DE לצלע BC.

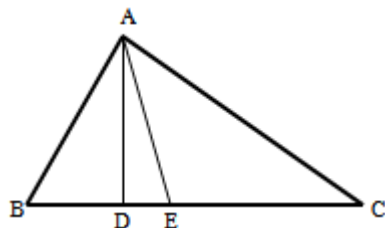
מסמנים: $DE = k$ ונתון כי: $\angle ABC = 10^\circ$.

א. הבע באמצעות k את רדיוס המעגל.

ב. הבע באמצעות k את שטח המשולש ABF.

ג. מצא את k אם ידוע כי שטח המשולש ABF הוא 15.363 סמ"ר.

10. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle A = 90^\circ$).



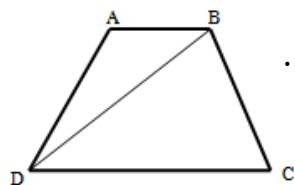
הקטעים AD ו-AE הם בהתאמה גובה ליתר וחוצה זווית.

מסמנים: $\angle DAE = \alpha$, $DE = k$.

א. הבע באמצעות k ו- α את שטח המשולש ABC.

ב. חשב את שטח המשולש ABC אם ידוע כי: $\alpha = 30^\circ$ ו- $k = 2$.

11. המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD$, $AD = BC$).

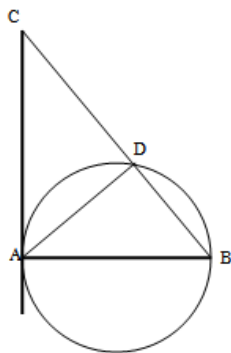


מעבירים את האלכסון BD ומסמנים: $\angle ADB = \beta$, $\angle BDC = \alpha$, $BD = m$.

א. בטא באמצעות α ו- m את אורכי הבסיסים AB ו-CD.

ב. חשב את זוויות הטרפז אם ידוע כי: $\frac{AB}{CD} = \frac{13}{20}$ וכי: $\beta = 2\alpha$.

12. המיתר AB הוא קוטר במעגל שרדיוסו R ו-AD הוא מיתר.



ממשיכים את המיתר BD ומעבירים משיק מהנקודה A.

המשיק והמשך המיתר נפגשים בנקודה C.

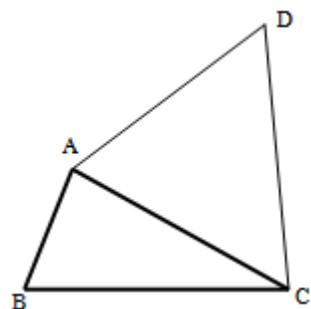
מסמנים: $\angle BAD = \alpha$.

א. הבע באמצעות α ו-R את שטח המשולש ABD.

ב. הבע באמצעות α ו-R את שטח המשולש ACD.

ג. מצא את α אם ידוע כי שטח המשולש ABD קטן פי 4 משטח המשולש ACD.

13. רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABC הוא r_1 .



הנקודה D שמחוץ למשולש מעבירים את הצלעות AD ו-CD כך שנוצר

המשולש ACD ובו: $\angle C = \angle D = \beta$. ידוע כי זווית B גדולה פי 2 מ- β .

רדיוס המעגל החוסם את המשולש ACD (r_2) גדול פי 1.5 מ- r_1 .

א. מצא את β (הדרכה: הבע באמצעות r_1 ו- r_2 את AC והשווה אותם).

ב. נתון כי הרדיוס r_2 הוא 6 ס"מ.

חשב את אורך הצלע AC.

ג. חשב את שטח המשולש ACD.

14. המשולש ABC הוא שווה שוקיים בעל זווית ראש α , ($AB = AC$).

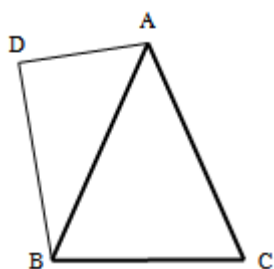
אורך הבסיס BC הוא k . על השוק AB בונים משולש ישר זווית ABD ובו $\angle D = 90^\circ$.

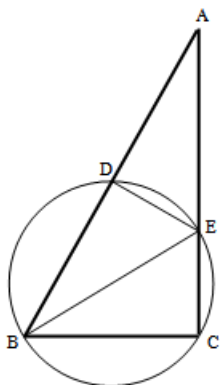
א. הבע באמצעות k ו- α את אורך שוק המשולש ABC.

ב. הניצב AD במשולש ABD שווה ל- $0.85k$ וכי: $\angle ABD = 40^\circ$.

מצא את זוויות המשולש ABC.

ג. חשב את שטח המרובע ABCD אם ידוע כי $k = 6$.





15. המשולש ABC הוא ישר זווית ($\angle C = 90^\circ$) ובו: $\angle B = 2\alpha$.

מעבירים מעגל שרדיוסו R דרך הקודקודים B ו-C אשר חותך את צלעות

המשולש בנקודות D ו-E. המיתר BE חוצה את זווית B.

א. הבע באמצעות R ו- α את שטח המשולש ABE.

ב. ידוע כי המשולש ABE הוא שווה שוקיים וכי אורך המיתר CE הוא 6 ס"מ.

חשב את שטח המשולש ABE.

תשובות סופיות:

1. א. $BD = \frac{k \sin 20}{\sin 80}$ ב. $k = 7$ ג. (i) $\frac{k^2 \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$ (ii) $\frac{2k^2 \sin \alpha \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$ ד. $S = 8\sqrt{3}$ ב.

5. א. 156.42° ג. 2 ס"מ. א. $\frac{k \tan \alpha}{\tan 2\alpha}$ ב. $\frac{k^2 \tan^2 \alpha \sin 2\alpha}{2 \tan^2 2\alpha}$ ג. $S = 7.75$ א.

7. א. $DE = t\sqrt{10}$, $EF = t\sqrt{11.25}$, $DF = t\sqrt{18.25}$ ב. 81.86° , 51° , 47.14° א.

8. א. 58° , 58° , 64° ב. $BE = 7.75$ ג. $S = 13.1$ א.

9. א. $R = \frac{k}{2 \sin^2 40} = 1.21k$ ב. $S = \frac{k^2 \sin 10}{2 \sin 50 \sin^3 40} = 0.426k^2$ ג. $k = 6$ א.

10. א. $S = \frac{k^2}{2 \sin(45 + \alpha) \sin(45 - \alpha) \tan^2 \alpha} = \frac{k^2}{2 \sin(45 + \alpha) \cos(45 + \alpha) \tan^2 \alpha} = \frac{k^2}{\sin(90 + 2\alpha) \tan^2 \alpha} = \frac{k^2}{\cos 2\alpha \tan^2 \alpha}$ ב. $S = 24$ א.

11. א. $AB = \frac{m \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$, $CD = \frac{m \sin(2\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$ ב. 59.5° , 120.4° א.

12. א. $S = R^2 \sin 2\alpha$ ב. $S = \frac{2R^2 \cos^3 \alpha}{\sin \alpha}$ ג. $\alpha = 26.56^\circ$ א. $\beta = 60^\circ$ א. $AC = 6\sqrt{3}$ ג. $S = 27\sqrt{3}$ א.

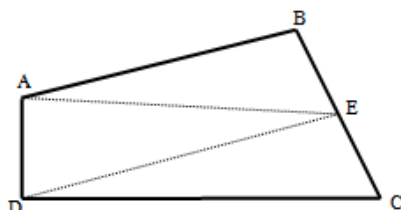
14. א. $\frac{k}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}$ ב. 44.4° , 67.78° , 67.78° ג. $S = 37.18$ א. $S = R^2 \tan 2\alpha$ א. $S = 36$ ב.

תרגילים הכוללים שימוש במשפט הקוסינוסים ושטח משולש:

1. באיור שלפניך נתון המרובע ABCD.

נסמן את הצלעות באופן הבא: $AB = 6x$, $BC = 5x$, $CD = 7x$, $AD = 3x$.

א. חשב את זווית BDC.



E היא נקודה הנמצאת על אמצע הצלע BC.

מעבירים את הקטעים AE ו-DE כך ש-DE מקביל ל-AB.

נסמן: $\angle ABC = \alpha$.

ב. הבע באמצעות α את היחס הבא: $\frac{S_{ABE}}{S_{AECD}}$.

2. נתון המרובע ABCD.

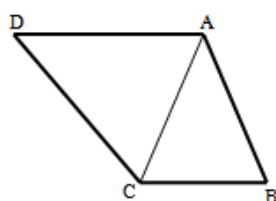
מעבירים את האלכסון AC השווה למחצית הצלע DC.

ידוע כי: $BC = 9$, $AB = 18$, $AD = 36$.

נתון כי: $\angle ACD = \angle ABC$.

א. הוכח כי המשולש ADC הוא שווה שוקיים.

ב. הראה כי שטח המשולש ADC גדול פי 4 משטח המשולש ABC.



3. במשולש ABC הזווית A היא 60° .

מעבירים את הקטע AD כך שנוצרת זווית: $\angle ADB = 60^\circ$.

ידוע כי $AB = \sqrt{28}$ וכי הצלע AD במשולש ABD גדולה פי 1.5 מהצלע BD.

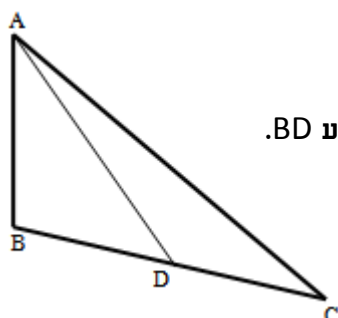
א. מצא את אורך הצלע BD.

* ב. היקף המשולש ABC הוא: $P = 2.5\sqrt{28} + 7$.

(1) סמן: $DC = t$ והבע באמצעות t את אורך הצלע AC.

(2) מצא את t .

ג. חשב את שטח המשולש ABC.

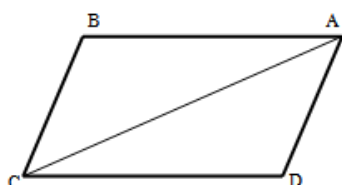


4. במקבילית ABCD אורך האלכסון AC הוא $\sqrt{79}$ ס"מ.

היקף המקבילית הוא 20 ס"מ וידוע כי: $\angle B = 120^\circ$.

א. מצא את אורכי צלעות המקבילית.

ב. חשב את שטח המקבילית.



5. המרובע ABCD הוא מרפז ישר זווית ($\angle B = 90^\circ$).

מסמנים את הבסיס: $AB = t$ וידוע כי: $AD = 3t$, $DC = 1.6t$.

היקף המרפז הוא: 40 ס"מ.

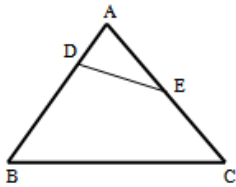
א. הבע באמצעות t את אורך האלכסון AC.

ב. ידוע גם כי: $\angle D = 60^\circ$.

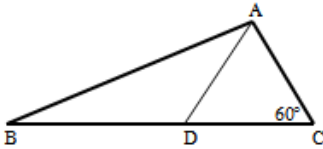
(i) חשב את אורך הקטע AC.

(ii) חשב את שטח המרפז.

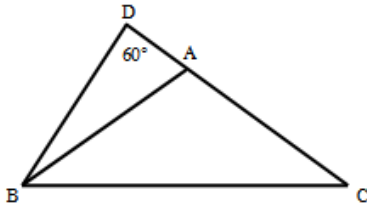




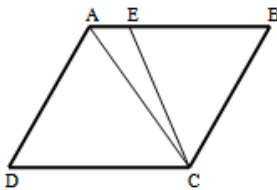
6. במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 6 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 5 ס"מ.
 הנקודה E היא אמצע AC והנקודה D נמצאת על AB כך ש- $BD = 4$ ס"מ.
 ידוע כי אורך הקטע DE קטן פי 2 מהצלע BC.
 א. מצא את אורך הצלע DE.
 ב. חשב את שטח המשולש ADE.



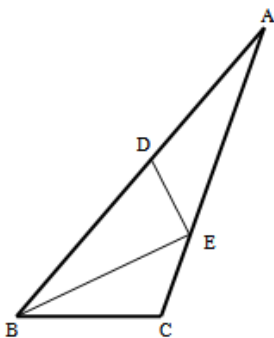
7. הזווית C במשולש ABC היא 60° . אורך הצלע BC הוא 6 ס"מ.
 הנקודה D נמצאת על הצלע BC ומחלקת אותה כך ש- $BD = 2CD$.
 ידוע כי גם: $AB = 3AD$.
 א. מצא את אורך הצלע AC.
 ב. חשב את היקף המשולש ABC.



8. המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).
 ממשיכים את הצלע AC עד לנקודה D כך שאורך שוק המשולש גדולה פי 3.8 מהקטע AD. ידוע כי: $\angle D = 60^\circ$.
 אורך הקטע BD הוא 21 ס"מ.
 א. מצא את אורך הקטע AD.
 ב. חשב את שטח המשולש ABC.



9. המרובע ABCD הוא מעוין ובו $\angle D = 60^\circ$.
 מעבירים את האלכסון AC ואת הקטע CE כך שהנקודה E נמצאת על הצלע AB ומחלקת אותה ביחס: $\frac{BE}{AE} = 4$.
 א. חשב את זווית AEC.
 ב. נתון כי שטח המשולש AEC הוא 8.66 סמ"ר. חשב את שטח המעוין.



10. במשולש ABC הקטע BE חוצה את זווית B.
 הנקודה D היא אמצע הצלע AB ומקיימת: $DE = CE$.
 ידוע כי: $BC = 6$, $BE = 8$, $BD = 9$.
 א. מצא את זווית B.
 ב. חשב את שטח המשולש ADE.

תשובות סופיות:

1. א. 74.12° ב. $\frac{S_{ABE}}{S_{AEC}} = 0.412 \sin \alpha$ 3. א. 4. ב. (1) $1.5\sqrt{28} + 3 - t$ (2) 3. ג. $S = 18.18$.
 4. א. 3 ס"מ - 7 ס"מ. ב. $S = 18.18$ 5. א. $AC = \sqrt{32.36t^2 - 448t + 1600}$ 6. (i) 13. (ii) 78 סמ"ר.
 א. $DE = \sqrt{6.5} = 2.54$ ב. $S = 12.18$ 7. א. $AC = 1.5$ ב. $P = 12.9$ 8. א. 5 ס"מ. ב. $S = 172.77$ 9. א. 109.1° ב. $S = 86.6$.
 10. א. 40.72° ב. $S = 12.52$.

תרגילים הכוללים שימוש במשפט סינוסים ומשפט קוסינוסים:

1. המרובע ABCD הוא מלבן. מעבירים את האלכסון BD וממשיכים אותו עד לנקודה E

שמחוץ למלבן. מחברים את הנקודה E עם הקדקוד C. ידוע כי אורך הצלע AD של

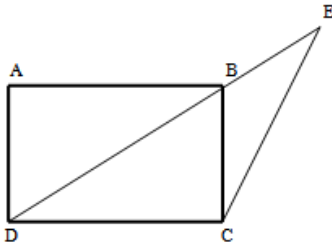
המלבן הוא 6 ס"מ וכי אורך הקטע BE הוא 9 ס"מ.

הזווית CBE היא 115° .

א. מצא את אורך הקטע CE.

ב. מצא את אורך האלכסון BD.

ג. חשב את שטח המשולש DCE.

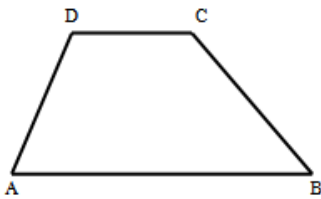


2. נתון המרובע ABCD שבו: $AB=12$, $BC=8$, $CD=7$.

ידוע כי הזווית BAD היא 56° .

א. חשב את היקף המרובע.

ב. חשב את שטח המרובע.



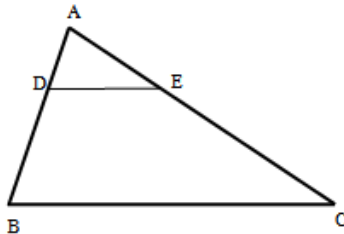
3. הקטע DE מקביל לצלע BC במשולש ABC כמתואר באיור.

נתון כי: $BD = \sqrt{129}$, $BC=15$, $CE=13$.

ידוע כי זווית AED היא 60° .

א. חשב את אורך הקטע DE אם ידוע כי הוא קטן מ-10 ס"מ.

ב. חשב את שטח המשולש ADE.

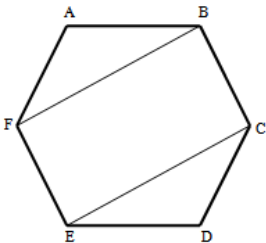


4. באיור שלפניך נתון משושה משוכלל שעמחו הכולל הוא: S.

א. הבע באמצעות S את אורך צלע המשושה.

מעבירים אלכסונים במשושה כך שנוצר המלבן BFEC.

ב. הבע באמצעות S את שטח המלבן.



5. המרובע ABCD חסום במעגל כמתואר באיור.

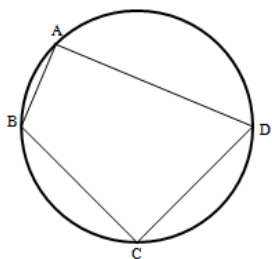
ידוע כי: $AB=b$, $BC=a$, $CD=a$, $AD=3b$.

א. הבע באמצעות a ו-b את $\cos \angle BCD$.

ב. הוכח כי אם BD קוטר אז מתקיים: $a=b\sqrt{5}$.

ג. נתון כי רדיוס המעגל הוא 3 ס"מ.

הסתמך על סעיף ב' וחשב את שטח המרובע ABCD.



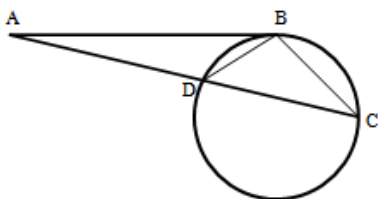
6. באיור שלפניך הישר AB משיק למעגל.

הנקודה A אשר מחוץ למעגל יוצא ישר חותך ACD.

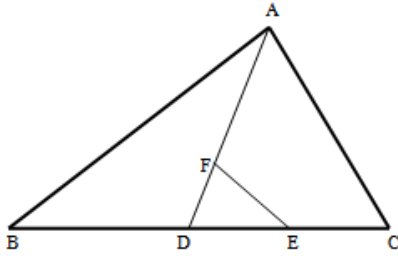
מהנקודות C ו-D מעבירים את המיתרים BC ו-BD.

ידוע כי אורך המשיק הוא 15 ס"מ.

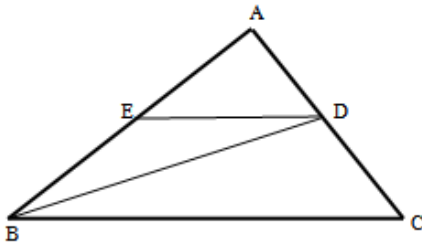
החלק החיצוני AD הוא 10 ס"מ ואורך המיתר BD הוא 6 ס"מ.



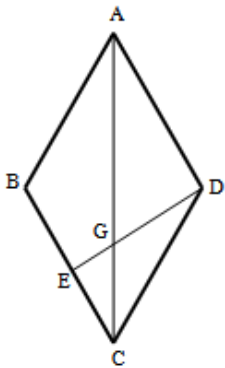
- א. חשב את זווית ACB.
 ב. חשב את רדיוס המעגל.
 ג. חשב את השטח המשולש BCD.



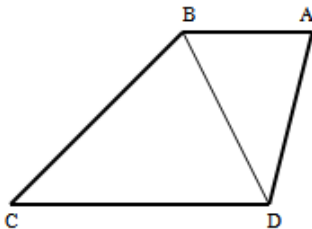
7. במשולש ABC מעבירים את התיכון AD.
 מהנקודה E שנמצאת באמצע הקטע DC מעבירים את הקטע EF כך שהמרובע ACEF הוא בר-חסימה.
 נתון: $EF = CE = t$ ו- $\angle C = \alpha$. ידוע כי: $2DF = AF$.
 א. הבע באמצעות t ו- α את:
 (1) אורך הקטע DF.
 (2) אורך הקטע AB.
 ב. ידוע כי: $AB = DE\sqrt{19}$. מצא את α .



8. באיור שלפניך נתון המשולש ABC.
 הקטע BD חוצה את זווית B והנקודה E היא אמצע הצלע AB.
 מעבירים את הקטע DE השווה באורכו לקטע DC.
 ידוע כי: $AB = 12$, $BC = 13$, $BD = 10$.
 א. חשב את זווית B.
 ב. נתון כי אורך הקטע AD הוא 4 ס"מ. חשב את היקף המשולש ADE.

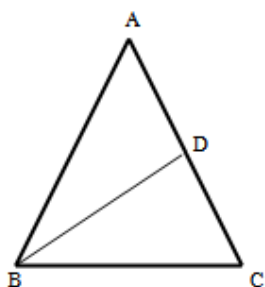


9. נתון המעוין ABCD.
 אורך האלכסון הגדול במעוין AC גדול פי 1.8 מצלע המעוין.
 א. חשב את זוויות המעוין.
 מהקדקוד D מעבירים את הקטע DE שאורכו הוא m .
 DE חותך את האלכסון AC בנקודה G. הזווית EDC תסומן ב- α .
 ב. הבע באמצעות m ו- α את אורך הקטע CE.
 ג. הבע באמצעות m ו- α את שטח המשולש EGC.



10. המרובע ABCD הוא טרפז ($AB = CD$).
 מעבירים את האלכסון BD המקיים: $\angle BCD = \angle ADB$.
 נתון כי: $AB = 5$, $AD = 10$, $CD = 20$.
 כמוכן ידוע כי השוק BC גדולה פי 2 מהאלכסון BD.
 א. הראה כי השוק BC שווה לבסיס CD.
 ב. חשב את זווית C.
 ג. ממשיכים את שוקי הטרפז AD ו-BC עד לנקודה E שמחוץ לטרפז.
 חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש CDE.

11. המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) בעל זווית ראש 36° החסום במעגל



שקוטרו 16 ס"מ. מעבירים תיכון לשוק BD.

א. מצא את אורך הבסיס BC במשולש.

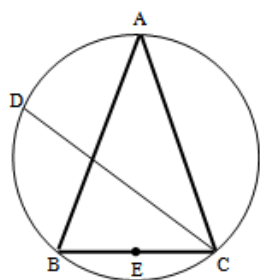
ב. חשב את אורך התיכון BD.

ג. מסמנים: r_1 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש ABD.

r_2 - רדיוס המעגל החוסם את המשולש BCD.

$$\frac{r_1}{r_2} = 2 \cos 36^\circ \text{ הוכח את היחס הבא:}$$

12. המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$) החסום במעגל שרדיוסו R.



הנקודה E היא אמצע הבסיס BC והנקודה D היא אמצע הקשת AB.

ידוע כי זווית הבסיס של המשולש היא 80° .

א. הבע באמצעות R את הקטע CD.

ב. הבע באמצעות R את הקטע DE.

ג. r הוא רדיוס המעגל החוסם את המשולש CED.

הבע באמצעות R את r .

13. במשולש ABC אורך הצלע AC הוא 8 ס"מ ואורך הצלע AB הוא 10 ס"מ.

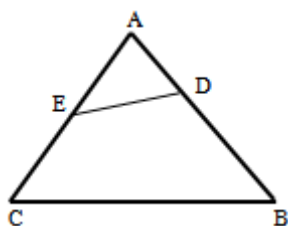
הנקודה E היא אמצע הצלע AC והנקודה D מקיימת: $AD = 3$.

$$\frac{DE}{BC} = \frac{2}{5} \text{ ידוע כי:}$$

א. מצא את אורך הקטע DE.

ב. חשב את רדיוס המעגל החוסם את המשולש ADE.

ג. חשב את שטח המרובע BCED.



14. הקדקודים B ו-C של המשולש ABC נמצאים על מעגל שמרכזו O.

מרכז המעגל O מונח על הצלע AC.

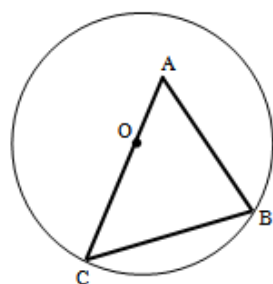
אורך הצלע AB הוא 12 ס"מ ואורך הקטע AO הוא 4.5 ס"מ.

זווית BAC היא 60° .

א. חשב את רדיוס המעגל.

מעבירים את הקוטר BD ואת הקטע AD כך שנוצר המשולש ADB.

ב. חשב את זווית ADB.



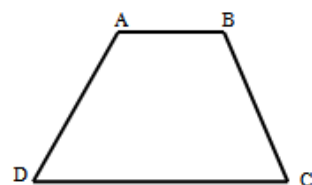
15. המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים ($AB \parallel CD, AD = BC$).

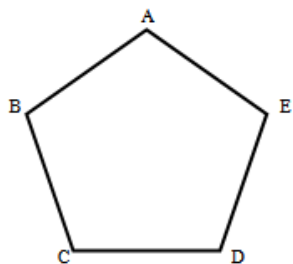
מידות הטרפז הן: $AB = 6, BC = 8, CD = 12$.

א. מצא את זווית C (עגל למספר שלם).

ב. מצא את אורך אלכסון הטרפז.

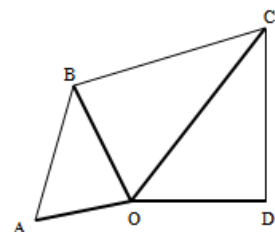
ג. חשב את רדיוס המעגל החוסם את הטרפז.





16. באיור שלפניך נתון מחומש משוכלל ACBDE בעל אורך צלע a .

- הבע באמצעות a את אלכסון המחומש AD.
- הבע באמצעות a את רדיוס המעגל החוסם את המחומש.
- הבע באמצעות a את שטח המחומש.
- אורך רדיוס המעגל החוסם את המחומש הוא 6 ס"מ. חשב את שטח המחומש.



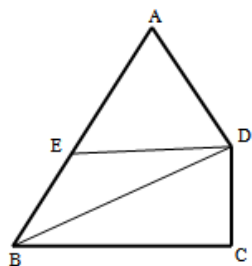
17. מהנקודה O מעבירים את הקטעים OA, OB, OC ו-OD.

- ידוע כי זווית AOB שווה לזווית COD והיא מסומנת ב- α . המשולש COD הוא ישר זווית ($\angle CDO = 90^\circ$).
- נתונים האורכים: $AO = 8$, $BO = 9$, $DO = 10$.
- מסמנים: $AB = m$, $BC = 1.4m$, $CD = 1.5m$.

א. הבע באמצעות m את $\sin \alpha$. (העזר במשולש COD ובטא תחילה את CO).

ב. מצא את m אם ידוע כי רדיוס המעגל החוסם את המשולש AOB הוא $8\frac{2}{3}$.

ג. חשב את זווית BOC.

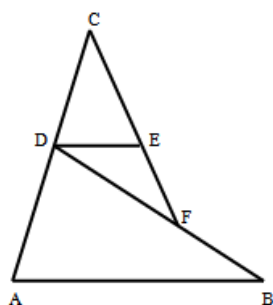


18. נתון מרובע ABCD. מהקדקוד D מעבירים את האלכסון BD ואת הקטע DE כך שהמשולש ADE הוא שווה שוקיים ($AD = DE$).

נתון כי: $AE = 6$, $BE = 4$, $BD = \sqrt{65}$.

א. מצא את $\cos \angle DAB$.

ב. חשב את שטח המשולש ABD.



19. מהנקודה A מעבירים את הקטעים AB ו-AC.

הנקודה D היא אמצע AC וממנה מעבירים את המקביל ל-AB.

מחברים את הנקודה C עם E באמצעות הקטע CF.

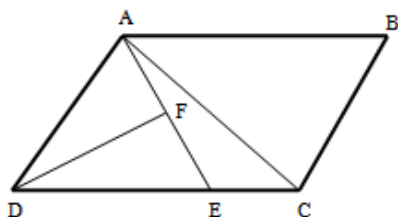
ידוע כי המשולשים ABD, DEF ו-DCE הם שווים שוקיים:

($AB = BD$, $DC = CE$, $EF = DE$). נתון כי: $AD = 8$.

א. חשב את אורך הקטע BF (מצא את זוויות המשולשים תחילה).

ב. מחברים את הנקודות B ו-C.

חשב את אורך הצלע BC.



20. המרובע ABCD הוא מקבילית.

הקטע AE מקצה על הצלע DC קטעים המקיימים: $3CE = DE$.

מעבירים תיכון DF לצלע AE במשולש ADE.

ידוע כי: $\angle ADF = \angle CDF = \alpha$. מסמנים: $CE = k$.

א. הבע באמצעות k ו- α את אורך הקטע AE.

ב. מעבירים את האלכסון AC. הבע באמצעות k ו- α את היקף המשולש ACE.

ג. היקף המשולש ACE הוא $4.5k$. מצא את α .

תשובות סופיות:

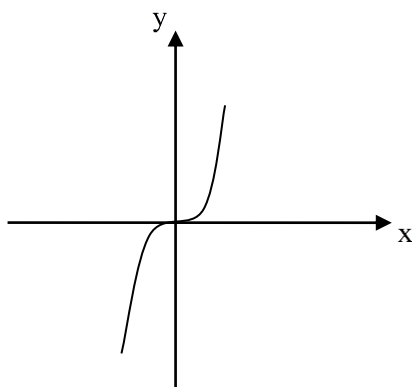
1. א. 12.75 ס"מ ב. 14.19 ס"מ ג. 63.05 סמ"ר.
2. א. 36.63 ס"מ ב. 75.84 סמ"ר.
3. א. 7 ס"מ ב. 34.48 סמ"ר.
4. א. $\sqrt{\frac{2S}{\sqrt{27}}}$ ב. $\frac{2}{3}S$.
5. א. $\cos \angle BCD = \frac{a^2 - 5b^2}{a^2 + 3b^2}$ ג. $S = 18$.
6. א. 26.56° ב. $R = 6.7$ ג. $S = 25.15$.
7. א. (1) $DF = 2t \cos \alpha$ (2) $AB = 2t\sqrt{1 + 15\cos^2 \alpha}$ ב. $\alpha = 60^\circ$.
8. א. 36.38° ב. 14.689 ס"מ.
9. א. 128.32° ; 51.68° ב. $1.27m \sin \alpha$ ג. $\frac{0.35m^2 \sin^2 \alpha \sin(128.32 - \alpha)}{\sin(25.84 + \alpha)}$.
10. א. $\angle C = 28.9^\circ$ ג. $R = 13.77$.
11. א. 9.4 ס"מ ב. 10.1 ס"מ.
12. א. $R\sqrt{3}$ ב. $1.48R$ ג. $r = 1.15R$.
13. א. $DE = \sqrt{1.6} = 1.26$ ב. $R = 2$ ג. $S = 22.75$.
14. א. $R = 10.5$ ב. 24.31° .
15. א. 68° ב. 11.66 ג. $R = 6.28$.
16. א. $1.618a$ ב. $0.85a$ ג. $1.72a^2$ ד. $S = 85.57$.
17. א. $\sin \alpha = \frac{1.5m}{\sqrt{100 + 2.25m^2}}$ ב. $m = 16$ ג. 56.89° .
18. א. 0.6 ב. $S = 20$.
19. א. 4.94 ס"מ ב. 17.19 ס"מ.
20. א. $AE = 6k \sin \alpha$ ב. $P_{ACE} = k + 6k \sin \alpha + k\sqrt{25 - 24 \cos 2\alpha}$ ג. $\alpha = 14.47^\circ$.

פרק 5 – חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

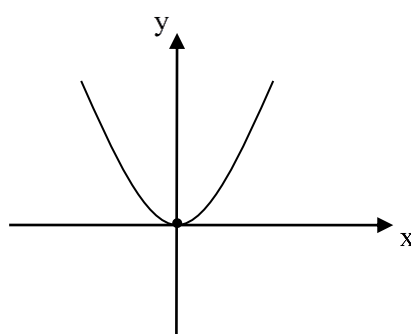
5.1 – נגזרות ומשיקים

פונקציות נפוצות

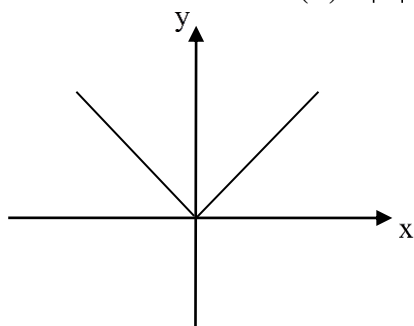
הפונקציה $f(x) = x^3$:



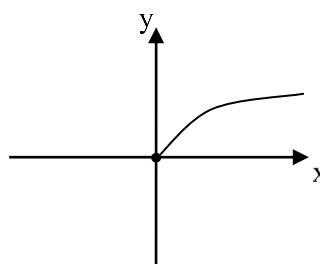
הפונקציה $f(x) = x^2$:



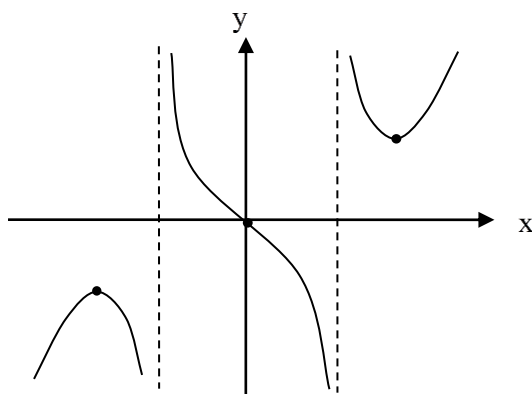
הפונקציה $f(x) = |x|$:



הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$:



פונקציה עם מכנה, למשל $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:



הנגזרת

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

כללי הגזירה

$$\text{כלל גזירה מס' 1: } f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): } f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): } f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\text{כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): } f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$$

$$\text{כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): } f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$$

$$\text{כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של } \frac{1}{x} \text{): } f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): } f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$$

$$\text{כלל גזירה מס' 8 (מנה): } f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$\text{כלל גזירה מס' 9 (שורש): } f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

שיפוע של פונקציה

השיפוע (m) של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת

$$\text{בנקודה } A(x_1, y_1) \text{ כלומר: } m = f'(x_1)$$

השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע

$$\text{הפונקציה בנקודה } A(x_1, y_1).$$

משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה

$$\text{למציאת ישר: } y - y_1 = m(x - x_1)$$

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 1		מהי פונקציה, פונקציות נפוצות, פונקציה רציפה
סרמון 2		משיפוע של ישר לשיפוע של פונקציה
סרמון 3	תרגיל 1	כלל גזירה 1 (x^n)
סרמון 4	תרגיל 2	כלל גזירה 2 (כפל בקבוע)
סרמון 5	תרגיל 3	כלל גזירה 3 (גזירת קבוע)
סרמון 6	תרגיל 4	כלל גזירה 4 (סכום והפרש)
סרמון 7	תרגיל 5	כלל גזירה 5 (פונקציה מורכבת)
סרמון 8	תרגיל 6	כלל גזירה 6 $\left(\frac{1}{x}\right)$
סרמון 9	תרגיל 7	כלל גזירה 7 (מכפלה)
סרמון 10	תרגיל 8	כלל גזירה 8 (מנה)
סרמון 11	תרגיל 9 א-1	כלל גזירה 9 (שורש) – חלק א'
סרמון 12	תרגיל 10	גזירת פונקציות עם פרמטרים
סרמון 13	תרגילים 11,12	שיפוע של פונקציה
סרמון 14	תרגיל 13	שיפוע של המשיק לפונקציה
סרמון 15	תרגיל 14	משוואת המשיק לפונקציה (כולל מציאת משוואת משיק כשנתון x)
סרמון 16	תרגילים 15,16	מציאת משוואת משיק כשנתון y
סרמון 17	תרגילים 17,18	מציאת משוואת משיק כשנתון m
סרמון 18	תרגיל 19	מציאת משוואת משיק כשנתונה θ (הזווית בין הישר לכיוון החיובי של ציר ה- x).
סרמון 19	תרגילים 20,21	משוואת משיק עם מציאת פרמטר יחיד
סרמון 20	תרגיל 22	משוואת משיק עם מציאת שני פרמטרים
סרמון 21	תרגיל 23	כיצד מוצאים משיק כללי וכיצד מוצאים משיק מנקודה חיצונית

תרגילים:

1. גזור:

א. $f(x) = x^3$

ב. $f(x) = x^7$

ג. $f(x) = x^2$

ד. $f(x) = x$

ה. $f(x) = x^{-3}$

ו. $f(x) = x^{-1}$

ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$

ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$

ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

2. גזור:

א. $f(x) = 2x^3$

ב. $f(x) = 3x^7$

ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$

ה. $f(x) = 8x$

ו. $f(x) = 3x^{-2}$

ז. $f(x) = \frac{4}{x}$

ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$

ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

3. גזור:

א. $f(x) = 12$

ב. $f(x) = \frac{7}{8}$

4. גזור:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$

5. גזור:

א. $f(x) = (5x - 2)^3$

ב. $f(x) = (x^3 + 6)^5$

ג. $f(x) = 3(x - x^2)^2$

ד. $f(x) = \frac{(5 - x)^3}{4}$

ה. $f(x) = \frac{2(x + 1)^4}{3}$

6. גזור:

$$א. f(x) = \frac{3}{x}$$

$$ב. f(x) = -\frac{2}{x}$$

$$ג. f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$ד. f(x) = \frac{3}{x^3}$$

$$ה. f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x}$$

$$ו. f(x) = \frac{2}{3-x}$$

$$ז. f(x) = \frac{6}{x+5}$$

7. גזור:

$$א. f(x) = (5x+1)(x-3) \quad ב. f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad ג. f(x) = x^3(6-x)^4$$

8. גזור:

$$א. f(x) = \frac{3x-1}{1+2x}$$

$$ב. f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12}$$

$$ג. f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$$

$$ד. f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$$

$$ה. f(x) = \frac{1}{x}$$

$$ו. f(x) = \frac{3}{x^3}$$

9. גזור:

$$א. f(x) = \sqrt{x}$$

$$ב. f(x) = 4\sqrt{x+1}$$

$$ג. f(x) = \sqrt{x^3-1}$$

$$ד. f(x) = (3x+1)\sqrt{x}$$

$$ה. f(x) = x^2\sqrt{x+3}$$

$$ו. f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$$

10. גזור:

$$א. f(x) = ax^4 - bx$$

$$ב. f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c$$

$$ג. f(x) = \frac{x-2a}{x-4a}$$

$$ד. f(x) = a\sqrt{bx^2+c}$$

11. מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2, 2)$.

12. מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$ בנקודה שבה $x = -2$.

13. מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה שבה $x = 1$.

14. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה שבה $x = -1$.

15. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה שבה $y = 2$.

16. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם

ציר ה- x .

17. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

18. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו -2.

19. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של

ציר ה- x זווית של 135° .

20. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$ בנקודה שבה $x = 3$ הוא 8.

מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

21. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$ בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4.

מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

22. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ בנקודה $(1, 6)$ הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

23. א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x = t$.

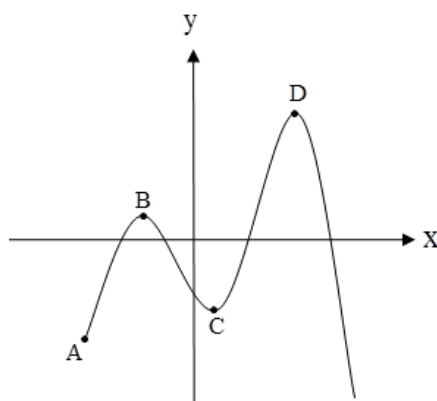
ב. מצא את ערכו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה $(-1, 1)$.

פתרונות:

1. א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$ ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
2. א. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ ב. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ג. $6x^2$ ד. $21x^6$ ה. $2x^3$ ו. $\frac{6x^5}{7}$ ז. 8
3. א. $-\frac{6}{x^3}$ ב. $-\frac{4}{x^2}$ ג. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ד. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$ ה. 0 ו. 0 ז. $3x^2 + 4x - 3$
4. א. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$ ב. $15(5x-2)^2$ ג. $15x^2(x^3+6)^4$ ד. $6(x-x^2)(1-2x)$
5. א. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ב. $\frac{8(x+1)^3}{3}$ ג. $-\frac{3}{x^2}$ ד. $\frac{2}{x^2}$ ה. $-\frac{2}{x^3}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$
6. א. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ב. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ג. $-\frac{6}{(x+3)^2}$ ד. $10x-14$
7. א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$
8. א. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ג. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$ ד. $4ax^3-b$ ה. $\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$
9. א. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ב. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$ ג. $m=17$ ד. $m=4$ ה. $m=2$
10. א. $y=24x+22$ ב. $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$ ג. $y=6x-24$ ד. $y=-6x-12$
11. א. $y=2x-3$ ב. $y=-2x+8$ ג. $y=-x+1\frac{1}{3}$ ד. $y=-x-1\frac{1}{3}$
12. א. $a=2, y=8x-18$ ב. $a=2, y=-4x-2$
13. א. $b=2, a=6, y=-6x+12$ ב. $y=2tx-t^2+1$ ג. $t=0, t=-2$

5.2 - חקירת פולינום

נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום)



מינימום/מקסימום מקומי (פנימי) - B, C, D

מינימום/מקסימום קצה - A

מינימום/מקסימום מוחלט - D

נקודות קיצון מקומיות

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.

בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית – נקודה כזו

נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

מציאת נקודות קיצון מקומיות:

א. נגזור את הפונקציה.

ב. נשווה את הנגזרת לאפס ונחלק את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.

ג. נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .

ד. נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון ע"י טבלה.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
1		מהן נקודות קיצון, קיצון מקומי/קצה/מוחלט
2	תרגיל 1	מציאת נקודות קיצון מקומיות – שלבי עבודה +דוגמא
3	תרגיל 2	
4	תרגיל 3	
5	תרגיל 4	
6	תרגילים 5,6	שאלות על נקודות קיצון בשילוב מציאת פרמטרים
7	תרגיל 7	חקירת פונקציית פולינום
8	תרגיל 8	
9	תרגיל 9	
10	תרגיל 10	
11	תרגיל 11	

תרגילים

1. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.
2. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.
- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
3. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.
- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
4. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.
- א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
- ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
5. לפונקציה $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.
- מצא את ערכו של הפרמטר a .
6. לפונקציה $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$.
- מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
7. נתונה הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$. ענה על הסעיפים הבאים:
- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
- ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
8. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטוט.

9. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. שרטוט.

10. נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודת חיתוך עם ציר ה- y .
ה. שרטוט.

11. נתונה הפונקציה $f(x) = x^3$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
ה. שרטוט.

פתרונות:

(הערה: הגרפים לשאלות בחקירות פונקציה מופיעים בסוף הפתרונות באופן מרוכז)

1. $\max(5, 25)$ א. $\min(2, -16), \max(-2, 16)$ ב. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$

ירידה: $-2 < x < 2$ 3. א. $\min(-\sqrt{5}, -16), \min(\sqrt{5}, -16), \max(0, 9)$

ב. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$ או $x > \sqrt{5}$ ירידה: $0 < x < \sqrt{5}$ או $x < -\sqrt{5}$

4. א. $\min(3, 5)$ ב. עלייה: $x > 3$ עלייה: $x < 3, x \neq 0$ 5. $a = 3$ 6.

7. $a = 2, b = -16$ א. כל x ב. $\max(5, 25)$ ג. עלייה: $x < 5$ ירידה: $x > 5$

ד. $(0, 0), (10, 0)$ 8. כל x ב. $\max(-2, 16), \min(2, -16)$ ג. עלייה: $x > 2$ או

$x < -2$ ירידה: $-2 < x < 2$ ד. $(-\sqrt{12}, 0), (\sqrt{12}, 0), (0, 0)$ 9. א. כל x

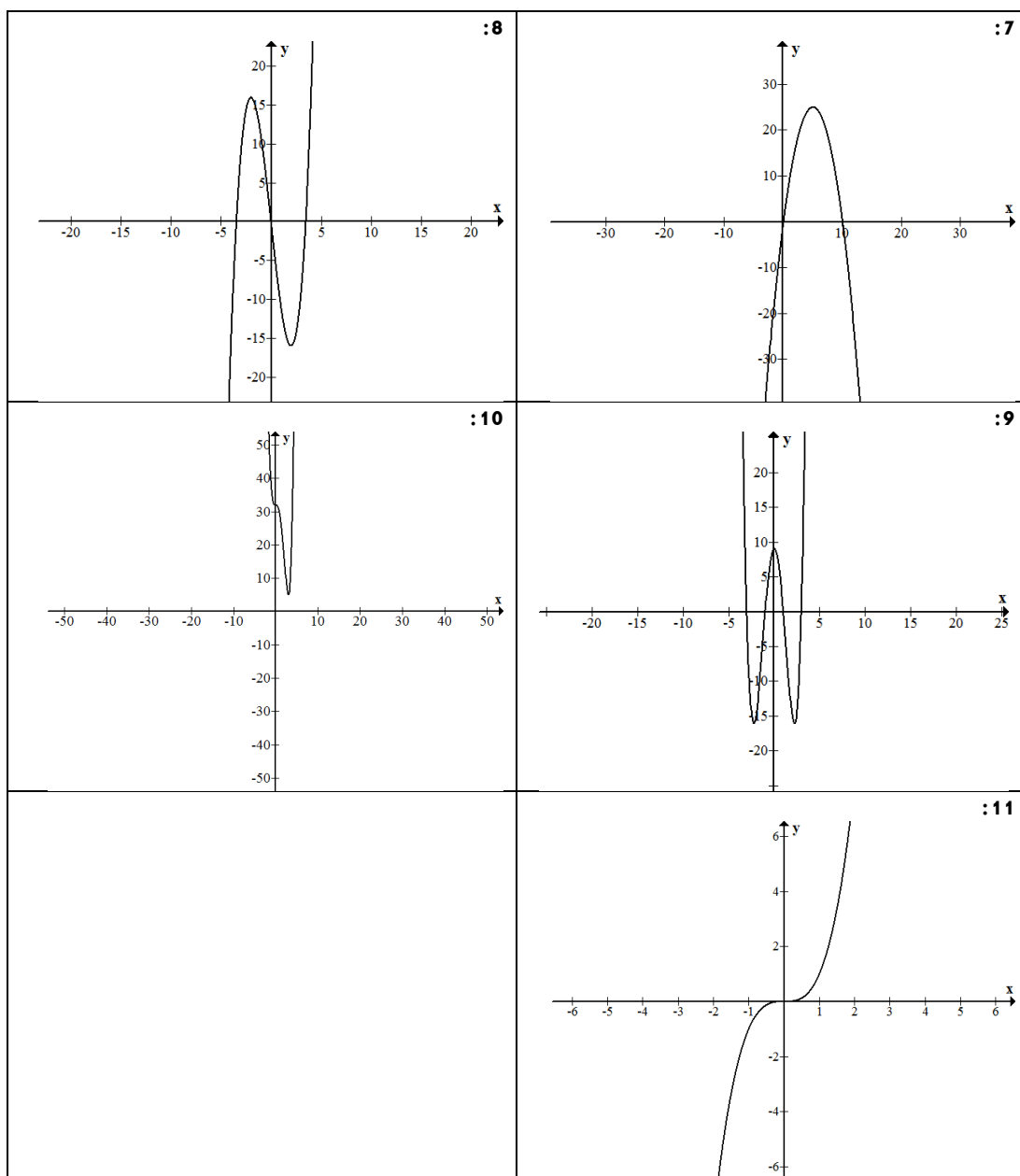
ב. $\min(-\sqrt{5}, -16), \min(\sqrt{5}, -16), \max(0, 9)$ ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$ או

$x > \sqrt{5}$ ירידה: $0 < x < \sqrt{5}$ או $x < -\sqrt{5}$ ד. $(\pm 1, 0), (\pm 3, 0), (0, 9)$

10. א. כל x ב. $\min(3, 5)$ ג. תחומי עלייה: $x > 3$ תחומי ירידה: $x < 3$ ד. $(0, 32)$

11. א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x ד. $(0, 0)$

גרפים:



5.3 - חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש

סעיפי חקירה מלאה של פונקציה:

- א. תחום הגדרה.
- ב. נקודות קיצון.
- ג. תחומי עלייה וירידה.
- ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
- ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- ו. שרטוט.

תחום הגדרה של פונקציה

- כל פולינום מוגדר לכל x .
- בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
- בפונקציה עם שורש, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

אסימפטוטות

▪ אסימפטוטה אנכית

עבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית.

כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי שצמצם אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

▪ אסימפטוטה אופקית

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד)

אם $m > n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.

אם $m = n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = \frac{a}{b}$.

אם $m < n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 1	תרגיל 1	הסבר על תחום הגדרה של מנות
סרמון 2	תרגיל 2	הסבר על תחום הגדרה של שורשים
סרמון 3	תרגיל 3	נקודות קיצון בפונקציות מנה
סרמון 4		הגדרת אסימפטוטות אופקיות ואנכיות
סרמון 5	תרגיל 4	
סרמון 6	תרגיל 5	
סרמון 7	תרגיל 6	
סרמון 8	תרגיל 7	
סרמון 9	תרגיל 8	
סרמון 10	תרגיל 9	
סרמון 11	תרגיל 10	
סרמון 12	תרגיל 11	נקודת אי הגדרה
סרמון 13	תרגיל 12	
סרמון 14	תרגיל 13	
סרמון 15	תרגיל 14	
סרמון 16	תרגיל 15	נקודת אי הגדרה
סרמון 17	תרגיל 16	
סרמון 18	תרגיל 17	
סרמון 19	תרגיל 19	אסימפטוטות בפונקציות שורש (לראשונה)
סרמון 20	תרגיל 19	מציאת פרמטרים בשאלות של אסימפטוטות
סרמון 21	תרגיל 20	מציאת פרמטרים בשאלות של אסימפטוטות
סרמון 22	תרגיל 21	
סרמון 23	תרגיל 22	
סרמון 24	תרגיל 23	
סרמון 25	תרגיל 24	
סרמון 26	תרגיל 25	חקירת פונקציית מנה (ללא פיתול) – חלק א'
סרמון 27	תרגיל 25	חקירת פונקציית מנה (ללא פיתול) – חלק ב'
סרמון 28	תרגיל 25	חקירת פונקציית מנה (ללא פיתול) – חלק ג'
סרמון 29	תרגיל 26	
סרמון 30	תרגיל 27	
סרמון 31	תרגיל 28	
סרמון 33	תרגיל 29	
סרמון 34	תרגיל 30	
סרמון 35	תרגיל 31	
סרמון 36	תרגיל 32	חקירת פונקציית שורש (ללא פיתול) – חלק א'
סרמון 37	תרגיל 32	חקירת פונקציית שורש (ללא פיתול) – חלק ב'

תרגילים

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{ב. } f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \quad \text{ג. } f(x) = \frac{2x}{x-3}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$$

2. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ב. } f(x) = 2\sqrt{x-3} \quad \text{ג. } f(x) = 3x\sqrt{1-2x} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$$

$$\text{3. נתונה הפונקציה } f(x) = \frac{6x}{x^2 - 10x + 9}$$

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה? ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

$$\text{4. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = x^2 - 4x - 12$$

$$\text{5. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$$

$$\text{6. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{5x^2 + 1}{x^2 - 9}$$

$$\text{7. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{2x^2 - 5x + 2}{1 + 3x^2}$$

$$\text{8. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{3x}{x^2 - 2x - 15}$$

$$\text{9. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{1}{x^3}$$

$$\text{10. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: } f(x) = \frac{6x^3 - 5x + 1}{1 + 2x^2}$$

11. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+b}{x-b}$

12. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

13. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+12}$

14. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+6x-16}{x-2}$

15. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{2x^2-4x}$

16. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

17. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

18. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2-4}$

19. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4x^2+1}{ax^2-x+b}$

לפונקציה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y=2$ ואסימפטוטה אנכית שמשוואתה

$x=-1$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

20. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax+8}{x+b\sqrt{x}}$

הפונקציה חותכת את האסימפטוטה האופקית שלה בנקודה $(16, 2)$. מצא את ערכי

הפרמטרים a ו- b .

21. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

$$22. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

$$23. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = x + \frac{1}{x}$$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

$$24. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

$$25. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

$$26. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

$$27. \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

28. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x-3}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטוט.

29. נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטוט.

30. נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{6-x}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטוט.

31. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

32. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$

חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים: א. תחום הגדרה. ב. נקודות קיצון. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים. ו. שרטוט.

פתרונות:

(הערה: הגרפים לשאלות בחקירות פונקציה מופיעים בסוף הפתרונות באופן מרוכז)

1. א. כל x ב. כל x ג. $x \neq 3$ ד. $x \neq \pm 1$ ה. $x \neq 0, 2, -2$ ו. $x \neq 4, -2$ ז. כל x
2. א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \leq \frac{1}{2}$ ד. $x > -4$ ה. $x \geq 2$ או $x \leq -5$ ו. $x > 3$ או x
3. א. $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$ ב. $-3 < x < 0$ ג. $x \leq 2$ וגם $x \neq -2, 1$ ד. $x \neq 1$ תחומי ירידה: $3 < x \neq 9$ או $x < -3$ 4. אין
5. אופקית: $y = 3$ אנכית: $x = 2$ 6. אופקית: $y = 5$ אנכית: $x = \pm 3$

7. אופקית: $y = \frac{2}{3}$ 8. אופקית: $y = 0$, אנכית: $x = 5$, $x = -3$ 9. $x = 0$, $y = 0$
10. אין 11. אופקית: $y = a$, אנכית: $x = b$ 12. אופקית: $y = 1$, אנכית: $x = 1$, נקודת
- אי הגדרה: $(2, 4)$ 13. $x = 4$, $y = 1$ 14. אין, לפונקציה יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה הם
- $(2, 10)$ 15. אופקית: $y = \frac{1}{2}$, אנכית: $x = 2$ נקודת אי הגדרה: $(0, 0)$ 16. $x = 0$, $y = 0$
17. $x = -1$, $y = 0$ אופקית: $y = 0$, אנכית: $x = 2$ 19. $b = -3$, $a = 2$
20. $b = 1$, $a = 2$ 21. א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה
- ד. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$ ה. $y = 2$, $x = 3$ 22. א. כל x
- ב. $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$ ג. תחומי עלייה: $1 < x$ או $x < -3$, תחומי ירידה:
- $-3 < x < 1$ ד. $(3, 0), (0, 0)$ ה. $y = 1$ 23. א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, 2), \max(-1, -2)$
- ג. תחומי עלייה: $1 < x$ או $x < -1$, תחומי ירידה: $-1 < x < 1$, $x \neq 0$ ד. אין ה. $x = 0$
24. א. $x \neq 1$, $x \neq 4$ ב. $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$ ג. תחומי עלייה:
- $-2 < x < 2$, $x \neq 1$, תחומי ירידה: $2 < x \neq 4$ או $x < -2$ ד. $(0, 0)$
- ה. $y = 0$, $x = 1$, $x = 4$ 25. א. $x \neq \frac{1}{3}$, $x \neq 3$ ב. $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$
- ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$ וגם $x \neq \frac{1}{3}$ תחומי ירידה: $1 < x \neq 3$ או $x < -1$ ד. $(0, 2)$
- ה. אופקית: $y = 2$, אנכית: $x = 3$, $x = \frac{1}{3}$ 26. א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה עולה
- בכל תחום הגדרתה ד. $(0, -2), (2, 0)$ ה. אין, יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $(3, 1)$
27. א. $x \neq \pm 1$ ב. אין ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה ד. $(0, -2), (2, 0)$
- ה. $y = 1$, $x = -1$ יש נקודת אי הגדרה ששיעוריה $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ 28. א. $x \geq 3$ ב. $\min(3, 0)$
- קצה ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה ד. $(3, 0)$ 29. א. $x \geq 1$
- ב. $\max(1, 0), \min(2, -2)$ קצה ג. תחומי עלייה: $2 < x$, תחומי ירידה: $1 < x < 2$
- ד. $(1, 0), (4, 0)$ 30. א. $x \leq 6$ ב. $\min(6, 0), \max(4, 4\sqrt{2})$ קצה
- ג. תחומי עלייה: $x < 4$, תחומי ירידה: $4 < x < 6$ ד. $(0, 0), (6, 0)$ 31. א. $x \geq 0$

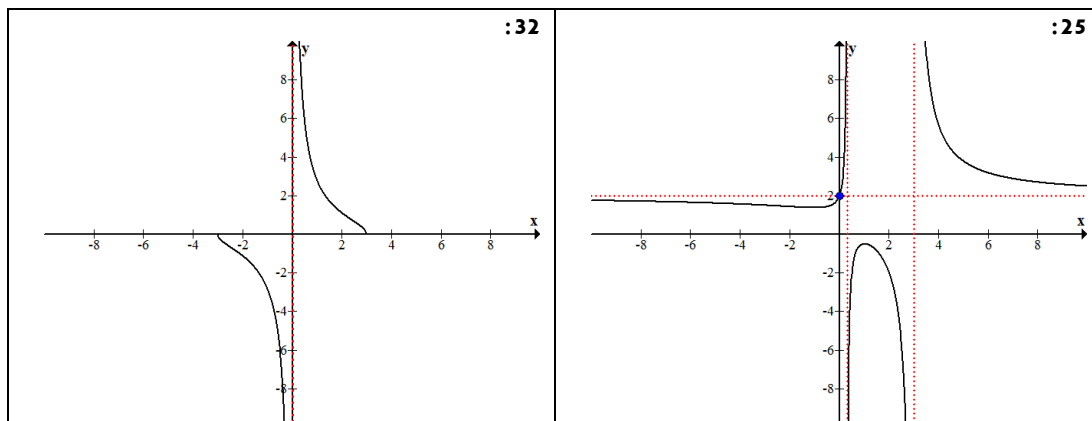
ב. $\min(0,0), \max(1,1)$ קצה ג. תחומי עלייה: $0 < x < 1$, תחומי ירידה: $1 < x$

ד. $(0,0)$ ה. $y=0$ 32. א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$

ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה ג. תחומי עלייה: אף x , תחומי ירידה:

$-3 \leq x \leq 3$, $x \neq 0$ ד. $(-3,0)$, $(3,0)$ ה. אנכית: $x=0$

גרפים:



5.4 - חקירת פונקציה עם פרמטר

סיווג נקודות קיצון באמצעות y'' :

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת קיצון אז:

אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.

אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 1	תרגילים 1,2,3	סיווג נקודות קיצון לפי הנגזרת השנייה
סרמון 2	תרגיל 4	
סרמון 3	תרגיל 4	המשך שאלה מסרמון קודם

תרגילים:

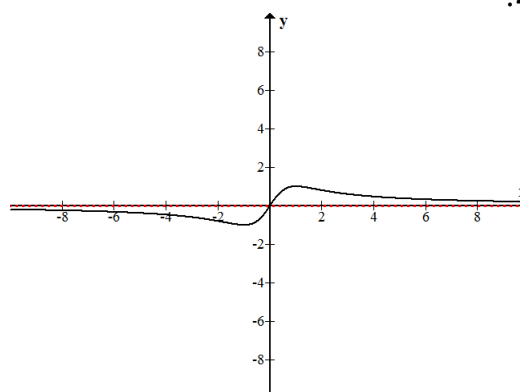
1. מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 12x$
2. מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^2 - 6x - 16$
3. מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3b^2x$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$).
 - א. תחום הגדרה.
 - ב. נקודות קיצון.
 - ג. תחומי עלייה וירידה.
 - ד. נקודות חיתוך עם הצירים.
 - ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים.
 - ו. שרטוט.

פתרונות:

1. $\min(2, -16), \max(-2, 16)$
2. $\min(3, -25)$
3. $\min(b, -2b^3), \max(-b, 2b^3)$
4. א. כל x ב. $\max\left(a, \frac{1}{a}\right), \min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$
- ג. תחומי עלייה: $-a < x < a$, תחומי ירידה: $x < -a$ או $x > a$ ד. $(0, 0)$ ה. אופקית: $y = 0$

גרפים:

4:



5.5 - חשבון דיפרנציאלי – בעיות קיצון

שלבי עבודה:

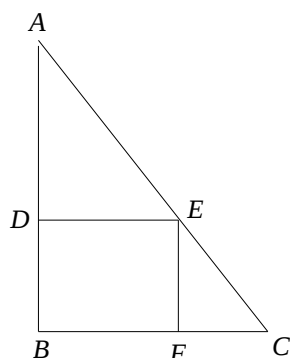
- א. נגדיר את אחד הגדלים בשאלה כ- x .
- ב. נבטא את שאר הגדלים בשאלה באמצעות x .
- ג. נבנה פונקציה שמבטאת את מה שרצו שיהיה מינימלי/מקסימלי.
- ד. נגזור את הפונקציה, נשווה לאפס ונחלק את ערך/ערכי ה- x .
- ה. נוודא שערך ה- x מסעיף ד' הוא אכן מינימום/מקסימום באמצעות " y (או טבלה).
- ו. ננסח את התשובה לשאלה המקורית.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

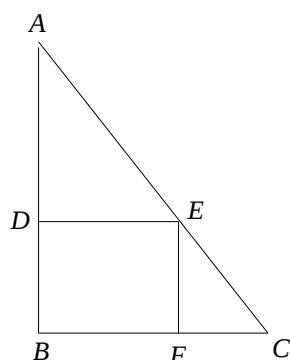
מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1	תרגיל 1	רקע והדגמת הרעיון העומד מאחורי בעיות קיצון
סרטון 2	תרגיל 1	שלבי עבודה בפתרון בעיות קיצון
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6	תרגיל 5	
סרטון 7	תרגיל 6	
סרטון 8	תרגיל 7	
סרטון 9		הכרת הגופים במרחב וחישוב שטח המעטפת/שטח הפנים/הנפח של כל גוף
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11	תרגיל 9	
סרטון 12	תרגיל 10	
סרטון 13	תרגיל 11	
סרטון 14	תרגיל 12	
סרטון 15	תרגיל 13	
סרטון 16	תרגיל 14	
סרטון 17	תרגיל 15	
סרטון 18	תרגיל 15	

תרגילים

1. מבין כל זוגות המספרים שסכומם 14 מצא את הזוג שמכפלתו מקסימלית.
2. נתונים שלושה מספרים שסכומם 24. המספר הראשון שווה למספר השני. מצא מהם המספרים אם ידוע שמכפלתם מקסימלית.
3. מצא את המספר החיובי שאם נוסיף לו את המספר ההופכי לו הסכום המתקבל יהיה מינימלי.
4. מבין כל המשולשים שווים השוקיים שהיקפם 24 ס"מ מצא את אורך בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.
5.
 - א. מבין כל המשולשים שווים השוקיים שהיקפם a מצא את בסיסו של המשולש בעל השטח הגדול ביותר.
 - ב. הוכח: מבין כל המשולשים שווים השוקיים בעלי אותו היקף המשולש בעל השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.



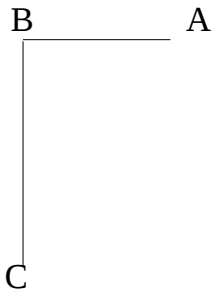
6. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן.
נתון: $BC = 16_{cm}$, $AB = 20_{cm}$.
מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.



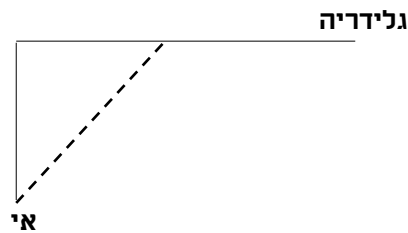
7. במשולש ישר זווית $\triangle ABC$ ($\angle B = 90^\circ$) הנקודה E נמצאת על היתר AC כך שהמרובע $EDBF$ הוא מלבן.
נתון: $BC = b$, $AB = a$.
מצא את שטחו של המלבן בעל השטח הגדול ביותר.

8. נתונה תיבה שבבסיסה ריבוע ושטח הפנים שלה הוא 96 סמ"ר. מצא את מידות התיבה שנפחה מקסימלי.

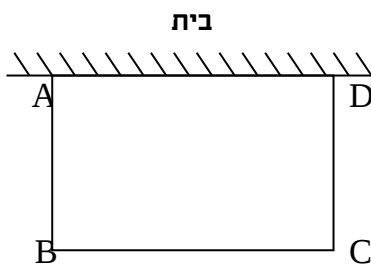
9. מכל הגלילים הישרים שהיקף פרישת המעטפת שלהם הוא k מצא את נפחו של הגליל בעל הנפח המקסימלי.



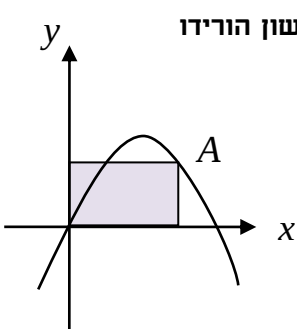
10. שני הולכי רגל יוצאים בו זמנית לדרכם, האחד מעיר A מערבה לעיר B והשני מעיר B דרומה לעיר C. המרחק בין הערים A ו-B הוא 20 ק"מ. מהירות הרוכב שיצא מ-A היא 4 קמ"ש ומהירות הרוכב השני 2 קמ"ש. כעבור כמה זמן מיציאת הרוכבים יהיה המרחק ביניהם מינימלי? מצא גם את המרחק המינימלי.



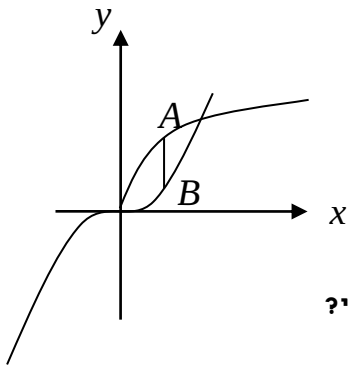
11. אדם נמצא על אי במרחק 0.5 ק"מ מהחוף. על החוף, במרחק של 3 ק"מ מהנקודה הקרובה ביותר לאי, נמצאת גלידריה. האדם שוחה במהירות של 8 קמ"ש ורץ על החוף במהירות של 10 קמ"ש. לאיזה מרחק מהגלידריה עליו לשחות כדי להגיע לגלידריה בזמן הקצר ביותר?



12. אדם מתכנן לבנות מרפסת בביתו ורוצה להציב מעקה סביב המרפסת. שטח המרפסת המתוכנן הוא 24 מ"ר. מחיר מעקה בחזית המרפסת (BC) הוא 120 ₪ למטר ומחיר מעקה בציד המרפסת הוא 40 ₪ למטר. מה צריכים להיות מימדי המרפסת כדי שמחיר המעקה יהיה מינימלי?



13. נתונה הפונקציה $f(x) = 6x - x^2$. מנקודה A שעל הפונקציה ברביע הראשון הורידו אנכים לצירי השיעורים כך שנוצר מלבן כמתואר בערטוט. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



14. נתונות הפונקציות $f(x) = 2\sqrt{x}$ ו- $g(x) = \frac{1}{3}x^3$.

את הנקודה A שעל $f(x)$ חיברו עם הנקודה B,

שנמצאת מתחתיה על $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?

15. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x-1}$ והישר $y = 2x$. בין הישר והפונקציה ברביע הראשון

חסמו מלבן. מצא את מידות המלבן שהיקפו מינימלי.

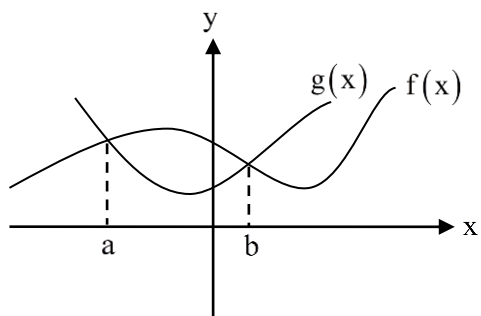
פתרונות:

1. 7, 7 2. 8, 8, 8 3. 1 4. 8 יח"א 5. א. 6. $\frac{a}{3}$ 7. $\frac{ab}{4}$ יח"ש
8. $4 \cdot 4 \cdot 4$ 9. $\frac{k^3}{216\pi}$ יחידות נפח 10. 4 שעות, המרחק: $\sqrt{80}$ ק"מ 11. $2\frac{1}{3}$ ק"מ
12. $4 \cdot 6$ 13. $A(4, 8)$ 14. $A(1, 2)$ 15. $1 \cdot 2$

5.6 - חשבון אינטגרלי

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

חישוב שטחים



$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 1		מהו אינטגרל, נוסחת האינטגרל
סרמון 2	תרגיל 1	
סרמון 3	תרגיל 2	
סרמון 4	תרגיל 3	
סרמון 5	תרגיל 4	
סרמון 6	תרגיל 5	מציאת פונקציה קדומה- הסבר ודוגמא
סרמון 7	תרגיל 6	
סרמון 8	תרגיל 7	הסבר על חישוב שטחים כולל דוגמא
סרמון 9	תרגיל 8	
סרמון 10	תרגיל 9	
סרמון 11	תרגיל 10	
סרמון 12	תרגיל 11	
סרמון 13	תרגיל 12	

תרגילים

1. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int x^3 dx = \quad \text{ב. } \int 12x^5 dx = \quad \text{ג. } \int x^4 dx = \quad \text{ד. } \int 2x^3 dx = \quad \text{ה. } \int \frac{2}{3} x^5 dx =$$

$$\text{ו. } \int 7 dx = \quad \text{ז. } \int \left(\frac{5}{6} x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx = \quad \text{ח.}$$

$$\int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx =$$

2. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int x^{-3} dx = \quad \text{ב. } \int \frac{1}{x^3} dx = \quad \text{ג. } \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx = \quad \text{ד.}$$

$$\int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx =$$

3. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int x^{\frac{1}{2}} dx = \quad \text{ב. } \int \sqrt{x} dx = \quad \text{ג. } \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \quad \text{ד. } \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx =$$

4. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\text{א. } \int (5x-1)^3 dx = \quad \text{ב. } \int 3(2-7x)^4 dx = \quad \text{ג. } \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx =$$

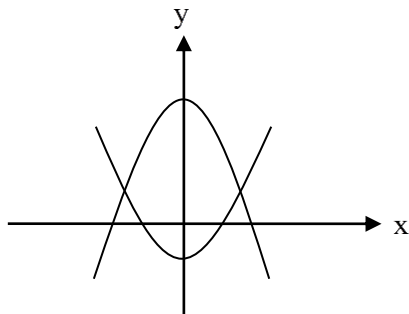
$$\text{ד. } \int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx = \quad \text{ה. } \int \sqrt{ax+b} dx =$$

5. נחונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 3x^2 - 7$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2, -1)$.

6. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$. ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא

5. מצא את הפונקציה.

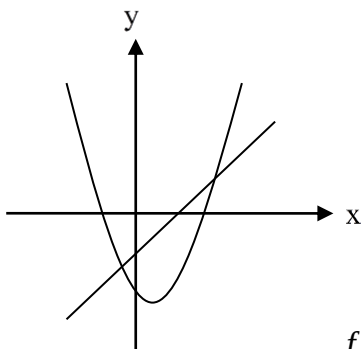


7. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 1, g(x) = 7 - x^2$$

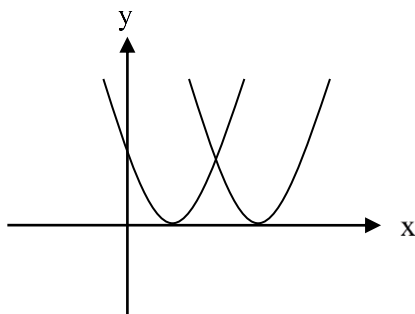
8. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות:

$$f(x) = x^2 - 4x - 12, g(x) = x - 6$$



9. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות: $f(x) = x^3, g(x) = x$

10. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x$ וציר ה- x .



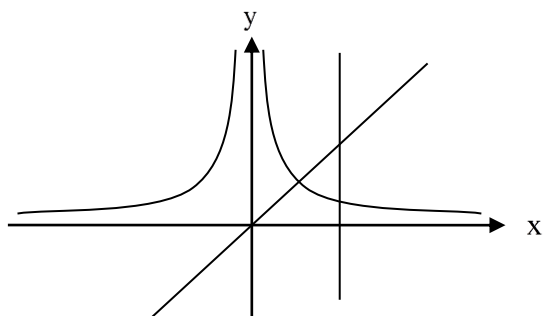
11. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x^2 - 2x + 1, g(x) = x^2 - 6x + 9$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות וציר ה- x .

12. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = \frac{1}{x^2}, g(x) = x$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

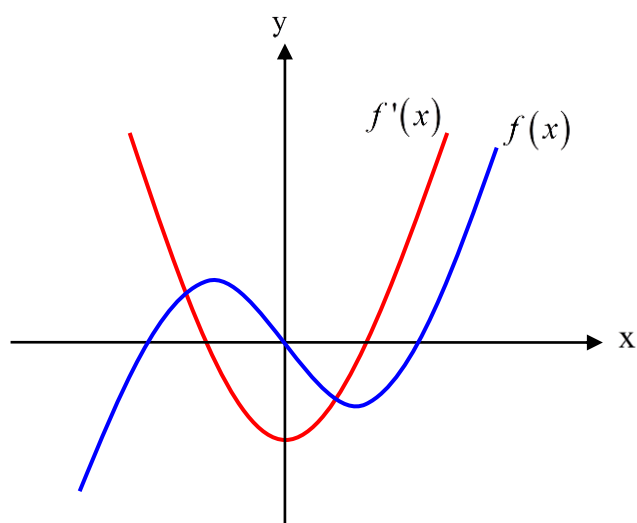
הישר $x = 2$ וציר ה- x .



פתרונות:

1. א. $\frac{x^4}{4} + c$ ב. $2x^6 + c$ ג. $\frac{x^5}{5} + c$ ד. $\frac{x^4}{2} + c$ ה. $\frac{x^6}{9} + c$ ו. $7x + c$
2. א. $\frac{x^5}{6} + 4x^4 - \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{1}{3}x + c$ ב. $\frac{x^4}{5} - \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{b} + bx + c$ ג. $-\frac{x^{-2}}{2} + c$ ד. $-\frac{x^2}{2} + c$
3. א. $-\frac{1}{2x^2} + c$ ב. $-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{a}{2x^2} + c$ ג. $2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c$ ד. $\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} + c$
4. א. $\frac{(5x-1)^4}{20} + c$ ב. $\frac{3(2-7x)^5}{35} + c$ ג. $-\frac{3}{6x+5} + c$
5. א. $\frac{\sqrt{6x-3}}{3} + c$ ב. $\frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c$ ג. $f(x) = x^3 - 7x + 5$
6. $f(x) = x^2 - 6x + 14$ 7. $S = \sum_{n=1}^{\infty} 21\frac{1}{3}$ 8. $S = \sum_{n=1}^{\infty} 57\frac{1}{6}$ 9. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$
10. $S = \sum_{n=1}^{\infty} 8$ 11. $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3}$ 12. $S = \sum_{n=1}^{\infty} 1$

5.7 – הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת



- כאשר $f(x)$ עולה, $f'(x)$ חיובית ולהיפך.
- כאשר $f(x)$ יורדת, $f'(x)$ שלילית ולהיפך.
- כאשר ל- $f(x)$ יש נקודת קיצון, $f'(x)$ מחליפה סימן (חותכת את ציר ה- x) ולהיפך.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

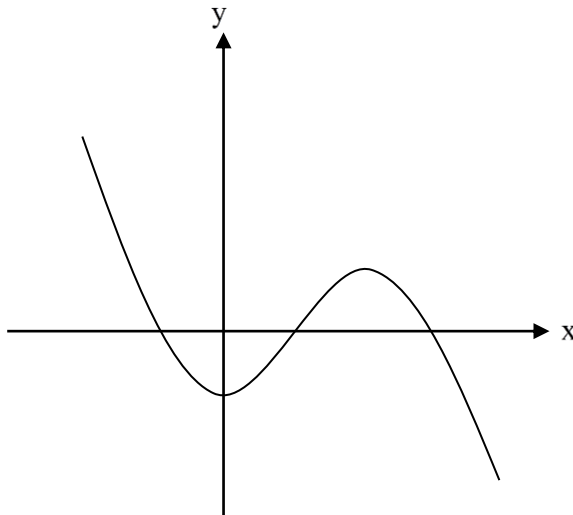
מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
1		הסבר על הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
2	תרגיל 1	
3	תרגיל 2	
4	תרגיל 3	
5	תרגיל 4	

תרגילים

1. נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הנגזרת.

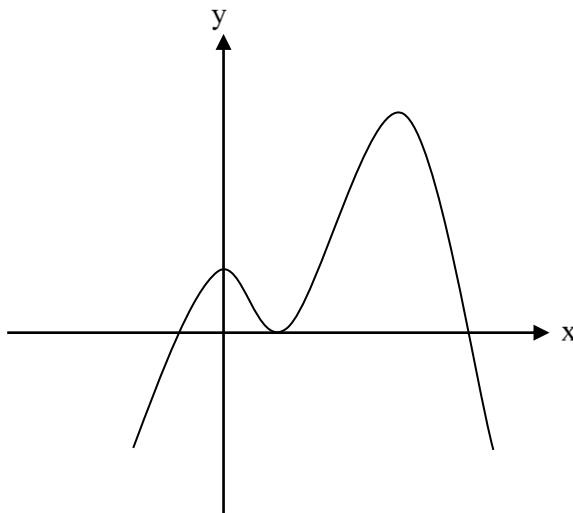
נמק את שיקוליך בשרטוט.



2. נתון גרף של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הנגזרת.

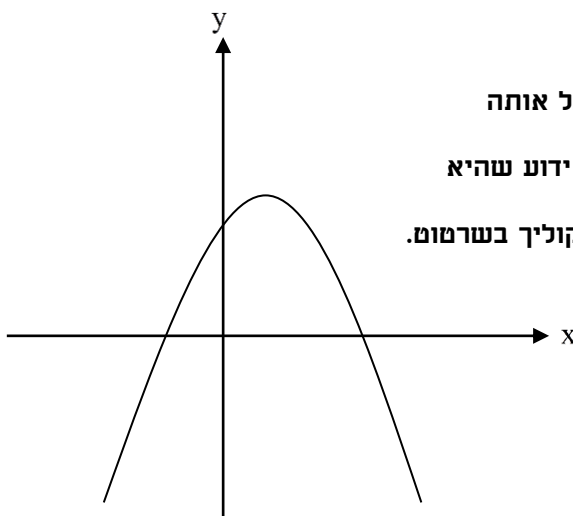
נמק את שיקוליך בשרטוט.



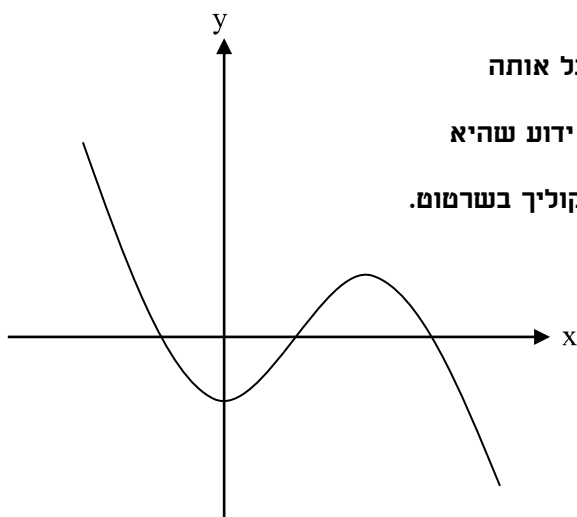
3. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה

מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע שהיא

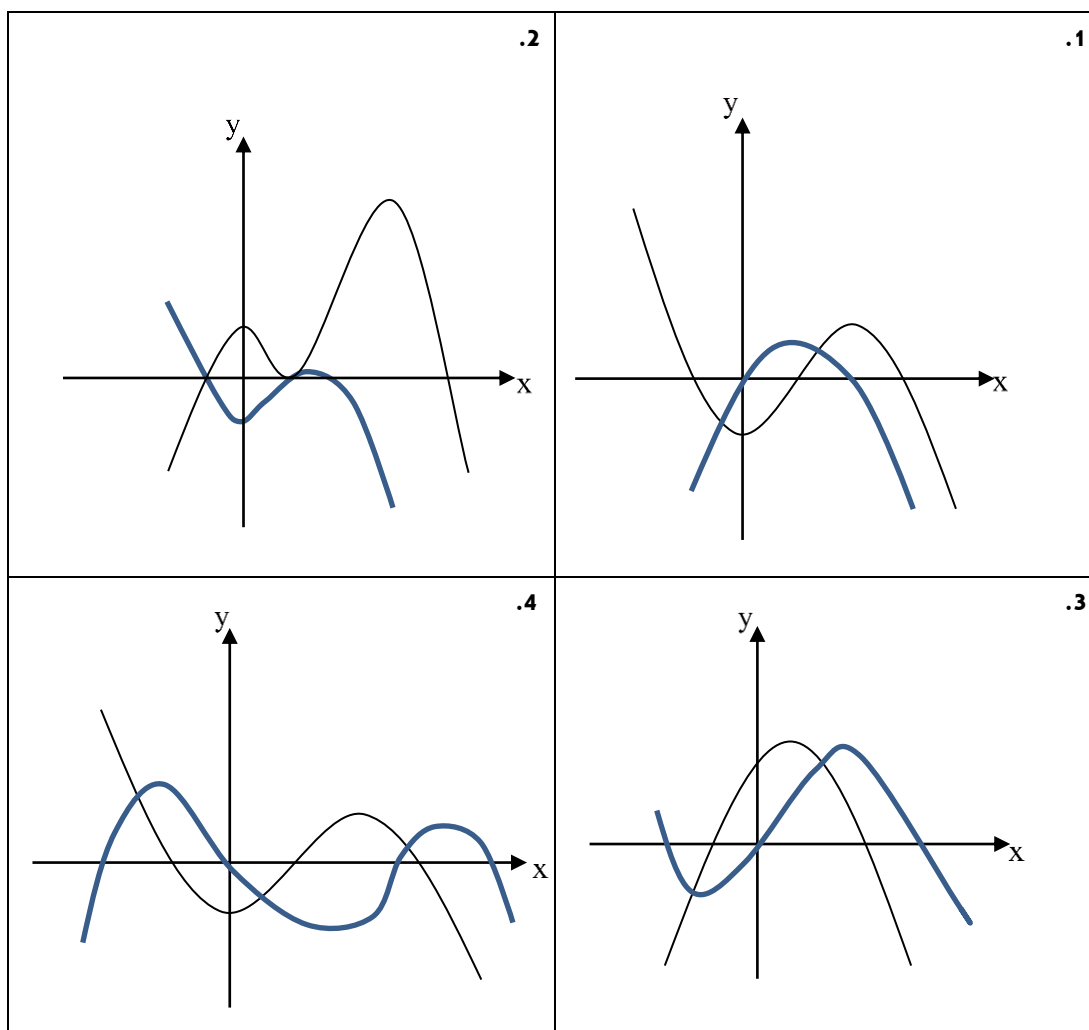
עוברת בראשית הצירים. נמק את שיקוליך בשרטוט.



4. נתון גרף הנגזרת של פונקציה. צייר על אותה מערכת צירים את גרף הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בראשית הצירים. נמק את שיקוליך בשרטוט.



פתרונות:



5.8 - תרגילים מסכמים – חשבון דיפרנציאלי:

תרגילים העוסקים בחקירת פונקציה פולינומית:

1. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 3$. הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 2$.

א. מצא את הפרמטר a .

ב. מצא את הנקודות המקיימות $f'(x) = 0$.

ג. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

2. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 + a$. ידוע כי הפונקציה עוברת בראשית הצירים.

א. מצא את הפרמטר a .

ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

3. נתונה הפונקציה: $y = (x-2)(x+1)^2$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ב. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4. נתונה הפונקציה: $y = (x-3)(2-x)^2$.

א. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5. נתונה הפונקציה: $y = 2x^2(x+a)^2$, $a > -6$. ידוע שלפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x = 4$.

א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.

ב. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון? אם כן מצא אותן.

ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מצא האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

6. לגרף הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x^2 + kx$ מעבירים משיק $y = 21x + 6$ החותך אותו

בנקודה שבה: $x = 6$.

א. מצא את k .

ב. מצא את נקודת ההשקה של המשיק עם הפונקציה $f(x)$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ד. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון?

ה. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

7. נתונה הפונקציה: $y = -3x^3 + 6x^2 - 4x + d$. ידוע שהפונקציה חותכת של ציר ה- x

בנקודה שבה: $x = 2$.

א. מצא את d .

ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?

ג. כתוב את תחומי העלייה וירידה של הפונקציה.

ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8. נתונה הפונקציה: $f(x) = 3(3x-5)^4$.

א. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

1. א. $a = -3$. ב. $(1, 4)$. ג. לא. ד. עולה בכל תחום הגדרתה חוץ מ- $x = 1$.

2. א. $a = 0$. ב. $Min(0, 0)$, $Max(-\frac{1}{4}, \frac{5}{256})$, $Min(-2, -4)$. ג. עולה: $x > 0$, $-2 < x < -\frac{1}{4}$.

יורדת: $x < -2$, $-\frac{1}{4} < x < 0$.

3. א. $Max(-1, 0)$, $Min(1, -4)$. ב. עולה: $x < -1$, $x > 1$, יורדת: $-1 < x < 1$. ג. $(-1, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -2)$.

4. א. $Max(2, 0)$, $Min(2\frac{2}{3}, -\frac{4}{27})$. ב. עולה: $x < 2$, $x > 2\frac{2}{3}$, יורדת: $2 < x < 2\frac{2}{3}$.

ג. $(2, 0)$, $(3, 0)$, $(0, -12)$.

5. א. $a = -4$, $y = 2x^2(x-4)^2$. ב. $(0, 0)$, $(2, 32)$, $(4, 0)$. ג. עולה: $0 < x < 2$, $x > 4$.

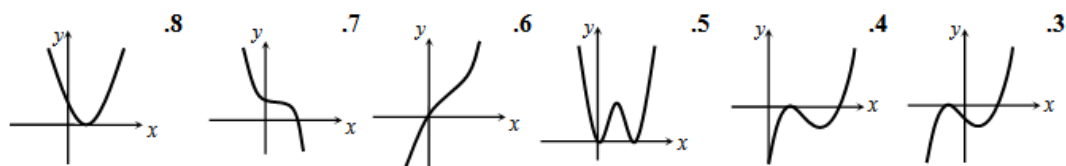
יורדת: $x < 0$, $2 < x < 4$. ד. $(4, 0)$, $(0, 0)$.

6. א. $k = 10$. ב. $(-1, -15)$. ג. $(0, 0)$. ד. לא. ה. עולה בכל תחום הגדרתה.

7. א. $d = 8$. ב. לא. ג. יורדת בתחום $x \neq 1.5$. ד. $(0, 8)$.

8. א. $Min(1\frac{2}{3}, 0)$. ב. עולה בתחום: $x > 1\frac{2}{3}$, יורדת בתחום: $x < 1\frac{2}{3}$. ג. $(0, 1875)$, $(1\frac{2}{3}, 0)$.

סקיצות לשאלות 3-8:



תרגילים העוסקים בחקירת פונקציה רציונאלית:

1. נתונה הפונקציה: $y = ax + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x}$. ידוע כי גרף הפונקציה עובר בנקודה: $(3, 7.5)$.

- א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

2. נתונה הפונקציה: $y = \frac{-9}{10 + ax - 2x^2}$. ידוע כי יש לפונקציה אסימפטומה אנכית: $x = 5$.

- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. האם יש לפונקציה עוד אסימפטומות? אם כן מהן?
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

3. נתונה הפונקציה: $y = \frac{a}{2x^2 + 5}$. ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה: $y = 2$.

- א. מצא את הפרמטר a .
- ב. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
- ד. האם יש לפונקציה נקודות חיתוך עם ציר ה- x ? אם כן – מצא אותן.

4. א. הוכח כי לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{9 - x^2}{x^2 - k}$ יש נקודת קיצון שנמצאת על ציר ה- y .

- ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ מוגדרת לכל x אם ידוע כי שיעור ה- y של נקודת הקיצון הוא 3.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ד. מצא את האסימפטומה האופקית של הפונקציה.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע בכמה נקודות יחתוך אותו הישר: $y = -1$.

5. לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{ax + 4}{x^2}$ יש נקודת קיצון שבה: $x = -8$.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{ax^2 - 20x + 28}{x^2 + 2a}$.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את האסימפטומה האופקית שלו בנקודה: $(0.5, 3)$.

- א. מצא את ערך הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. העזר בגרף הפונקציה וקבע עבור אלו ערכים של k הישר: $y = k$ יחתוך את גרף הפונקציה בנקודה אחת בלבד.

7. הפונקציה: $f(x) = \frac{ax-30}{x^2-6x+a}$ מוגדרת עבור כל x .

- ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x = 2$.
- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
- ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

8. נתונה הפונקציה: $y = \frac{a^2x-4}{2x^2-1}$. ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$ הוא: $m = 4$.

- א. מצא את כל הערכים האפשריים עבור a .
- ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ג. מצא את נקודת החיתוך בין המשיק הנתון ומשיק העובר דרך נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

9. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+ax+6}{x-2}$. ידוע שאחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .

- א. מצא את הערך של a .
- ב. הצב את הערך של a שמצאת בסעיף א' ומצא:
 - (1) את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - (2) את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים (אם יש כאלה).
 - (3) את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
 - (4) את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים (אם יש כאלה).
- ג. עבור אלו ערכי x הפונקציה שלילית?
- ד. נתון הישר: $y = k$. עבור אלו ערכי k אין נקודות משותפות לישר ולגרף הפונקציה? נמק.

10. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x-a}{x-1}$, $a \neq 1$.

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.
- ג. הבע באמצעות a את השיעורים של נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .
- ד. (1) מצא עבור אילו ערכים של a הפונקציה $f(x)$ עולה לכל x בתחום ההגדרה.
- (2) ישר המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה $x = a$ מקביל לישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$. מצא את הערך של a אם נתון כי הפונקציה עולה לכל x .

$$11. \text{ נתונה הפונקציה: } y = \frac{x+3}{x-2} + A$$

גרף הפונקציה עובר בנקודה: $(3A, A)$.

א. מצא את A .

ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ג. הוכח כי גרף הפונקציה יורד לכל x .

ד. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

ו. נתון הישר: $y = k$. האם קיים ערך של k עבורו הישר חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות שונות?

$$12. \text{ נתונה הפונקציה: } y = \frac{x^2 - m}{ax - 4}, \quad a > 0$$

ידוע כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת על ציר ה- y .

א. מצא את הערך של הפרמטר m .

ב. הצב את הערך של m שמצאת בסעיף א' והבע באמצעות a את:

(1) תחום ההגדרה של הפונקציה.

(2) נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.

(3) האסימפטוטות לגרף הפונקציה המקבילות לצירים.

ג. סרטט סקיצה וסמן בה את נקודות הקיצון ואת משוואות האסימפטוטות שהבעת באמצעות a בסעיף הקודם.

ד. ידוע כי נקודת הקיצון שאינה על ציר ה- y , נמצאת במרחקים שווים מהצירים.

מצא את הערך של הפרמטר a .

ה. נתון הישר: $y = k$.

מצא עבור אילו ערכים של k אין לישר ולגרף הפונקציה נקודות משותפות כלל.

תשובות סופיות:

$$1. \text{ א. } a = 2, \quad y = 2x + \frac{9}{2} \cdot \frac{1}{x}, \quad \text{ב. } \text{Max}(-1.5, -6), \text{Min}(1.5, 6) \quad \text{ג. עולה: } x < -1.5, x > 1.5,$$

יורדת: $-1.5 < x < 1.5, x \neq 0$.

$$2. \text{ א. } a = 8 \quad \text{ב. כן. } x = -1 \quad \text{ג. } \text{Max}(2, -0.5) \quad \text{ד. עולה: } x < 2, x \neq -1 \quad \text{יורדת: } x > 2, x \neq 5.$$

$$3. \text{ א. } a = 10 \quad \text{ב. כל } x \quad \text{ג. } \text{Max}(0, 2) \quad \text{ד. אין חיתוך עם ציר ה-} x.$$

$$4. \text{ ב. מתקבל: } k = -3 \quad \text{ג. } (-3, 0), (3, 0) \quad \text{ד. } y = -1 \quad \text{ה. באף נקודה. הגרף שואף לישר ואינו חותך אותו.}$$

$$5. \text{ א. } a = 1, \quad f(x) = \frac{x+4}{x^2} \quad \text{ב. עולה: } -8 < x < 0, \text{ יורדת: } x < -8, x > 0 \quad \text{ג. } (-4, 0).$$

$$6. \text{ א. } a = 3, \quad f(x) = \frac{3x^2 - 20x + 28}{x^2 + 6} \quad \text{ב. } \text{Max}(-2, 8), \text{Min}(3, -\frac{1}{3}) \quad \text{ג. עולה: } x < -2, x > 3$$

$$\text{יורדת: } -2 < x < 3 \quad \text{ד. } (2, 0), (0, 4\frac{2}{3}), (4\frac{2}{3}, 0) \quad \text{ו. } k = 8, -\frac{1}{3}, 3$$

7. א. $a=10$, $y = \frac{10x-30}{x^2-6x+10}$ (הפתרון: $a=-6$ נפסל). ב. כן - $(4,5)$. ג. עולה: $2 < x < 4$.

יורדת: $x < 2$, $x > 4$. ד. $(3,0)$, $(0,-3)$.

8. א. $a = \pm 2$. ב. $(0,4)$, $(1,0)$. ג. המשיק: $y = -4x + 4$ אשר עובר בנקודה $(1,0)$.

9. א. $a = -3$. ב. (1) $x \neq 2$ (2) $(0,-3)$ (3) $Max(-3,0)$, $Min(4,5)$ (4) $x = 2$. ג. $x < 2$. ד. $-3 < k < 5$.

10. א. $x \neq 1$. ב. $x = 1, y = 1$. ג. $(0,a)$, $(a,0)$. ד. (1) $a > 1$ (2) $a = 2$.

11. א. $A = -1$. ב. $x \neq 2$. ג. הנגזרת בנויה ממנה של מספר שלילי בחיובי ולכן תמיד שלילית:

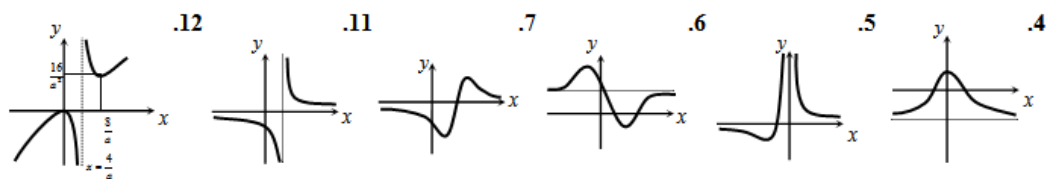
$$y' = \frac{-5}{(x-2)^2} = \left[\frac{(-)}{(+)} \right] \rightarrow \text{שלילי}$$

ד. $(0, -2.5)$. ו. לא. אין נקודות על גרף הפונקציה בעלות שיעור y זהה.

12. א. $m = 0$ (מתקבל: $am = 0$ וידוע כי: $a > 0$ לכן נותרנו עם הפתרון הנ"ל).

ב. (1) $x \neq \frac{4}{a}$ (2) $Min\left(\frac{8}{a}, \frac{16}{a^2}\right)$, $Max(0,0)$ (3) $x = \frac{4}{a}$. ד. $a = 2$. ה. $0 < k < 4$.

סקיצות לשאלות 4-7 ו-11-12:



תרגילים העוסקים בחקירה של פונקצית שורש (אי-רציונאלית):

1. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{16x - x^2}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיים וקצוות).
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

2. נתונה הפונקציה: $f(x) = -2\sqrt{36x - x^2}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיים וקצוות).
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

3. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 4}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצוות).
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y .
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

4. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x^2 + 24x - 25}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. כתוב את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

5. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 10x - 16} + k$.

- ידוע כי לפונקציה יש נקודת מקסימום הנמצאת על ציר ה- x .
- א. מצא את ערך הפרמטר k .
- ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן מצא אותן. אם לא נמק מדוע והראה חישוב מתאים.
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

6. נתונה הפונקציה: $f(x) = k\sqrt{9 - x^2}$. ידוע כי לפונקציה נקודת קיצון שבה: $y = 12$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k .
- ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ג. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון כלשהן? אם כן מצא אותן. אם לא נמק מדוע והראה חישוב מתאים.
- ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

7. נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 1 - 2\sqrt{x + 1}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
- ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.

- ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

8. נתונה הפונקציה: $f(x) = x + k - \sqrt{11 - 2x}$. ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(5, 6)$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ג. האם יש לפונקציה נקודות קיצון כלשהן? אם כן מצא אותן ואם לא נמק מדוע.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

9. נתונה הפונקציה: $f(x) = 3x + k\sqrt{x}$. ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 16$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

10. נתונה הפונקציה: $f(x) = k\sqrt{x} - x$. ידוע כי הישר $y = 3$ חותך את הפונקציה בנקודה שבה: $x = 9$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. האם הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודות? אם כן מצא אותן.
 ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.

11. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2}{8} - 4\sqrt{x}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

12. נתונה הפונקציה: $f(x) = kx + k\sqrt{x} - 4$. ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(4, 4k)$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. האם יש לפונקציה נקודות קיצון?
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

13. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{16 - x}$.

- א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

14. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{kx} - \sqrt{4-x}$. ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 2$.
 א. מצא את ערך הפרמטר k .

- ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ג. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x בעוד נקודות? אם כן מצא אותן ואם לא נמק.
 ד. האם יש לפונקציה נקודות קיצון? אם כן מצא אותן ואם לא נמק.

15. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{9-2x} + m$.
 א. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
 ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ג. מצא את m אם ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה: $(3, 2)$.
 ד. מצא את נקודות קיצון הקצה של הפונקציה.

16. נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \sqrt{16-x^2}$.
 א. מה תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ג. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

17. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{8-x^2} + kx$.
 הישר: $y = -2x + 4$ משיק לפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .
 א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ד. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

18. נתונה הפונקציה: $y = \frac{\sqrt{x-2}}{4} + \frac{x}{16}$.
 א. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון מקומיות (פנימיות)? אם כן מצא אותן.
 ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.
 ד. האם יש לגרף הפונקציה נקודות חיתוך עם הצירים? אם כן מצא אותן.
 ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ו. נתון הישר: $y = m$. לאילו ערכים של m יש לישר ולגרף הפונקציה נקודה משותפת אחת בלבד?

19. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x^2}$.
 א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודת קיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
 ג. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

20. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{ax+6}{\sqrt{9-x^2}}$.

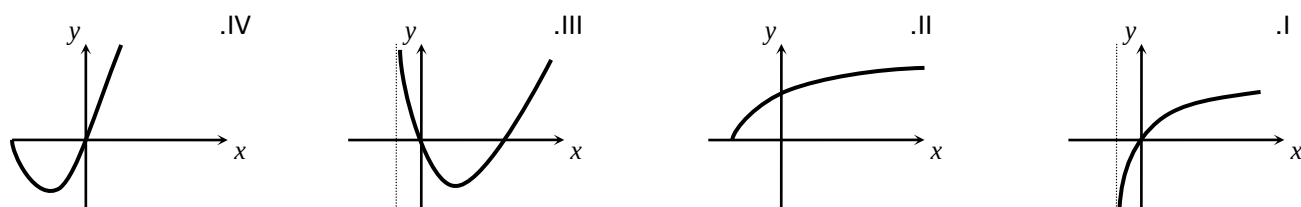
- מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
 ידוע כי הוא מקביל לישר: $3y - x = 0$.
 א. מצא את ערך הפרמטר a .
 ב. כתוב את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 ד. כתוב את התחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

21. לפניך שלוש פונקציות: $h(x) = x\sqrt{x+k}$; $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+k}}$; $f(x) = \sqrt{x+k}$; $(k > 0)$.

- א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו לא נכונות והצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
 i. לכל הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.
 ii. כל הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.
 iii. כל הפונקציות חותכות את ציר ה- x פעם אחת בלבד.

- מעבירים משיקים לגרפים של הפונקציות: $f(x)$ ו- $g(x)$ בנקודת החיתוך שלהם עם ציר ה- y .
 ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $g(x)$ גדול ב- $\frac{1}{4}$ משיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x)$.
 ב. i. בטא באמצעות k את שיפועי המשיקים לכל פונקציה.
 ii. מצא את k .

- ג. לפניך 4 איורים, קבע איזה איור מייצג כל פונקציה. נמק את בחירותיך.

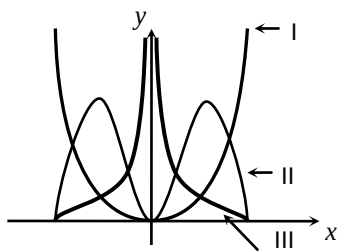


22. לפניך שלוש פונקציות: $h(x) = \frac{\sqrt{k-x^2}}{x^2}$; $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{k-x^2}}$; $f(x) = x^2\sqrt{k-x^2}$; $(k > 0)$.

- א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:
 i. לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ תחום הגדרה זהה, השונה מתחום ההגדרה של: $h(x)$.
 ii. קיימת פונקציה אשר אינה חותכת את ציר ה- x כלל.
 iii. הפונקציות: $h(x)$ ו- $g(x)$ הפוכות זו מזו בתחומי העלייה והירידה שלהן (כאשר אחת עולה השנייה יורדת).
 iv. לפונקציה: $f(x)$ יש נקודת קיצון אחת בלבד.

מסמנים נקודה $A(0, \sqrt{12})$ עם ציר ה- y .

- ידוע כי מרחקה מאחת מנקודות החיתוך של גרף הפונקציה: $f(x)$ עם ציר ה- x שאינה בראשית הוא: $d = 6$.



ב. מצא את k .

- ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוגן.
 ד. לפניך איור ובו מסורטטות הסקיצות של שלושת הפונקציות.
 קבע עפ"י הסעיפים הקודמים איזה גרף שייך לכל פונקציה.

23. לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$; $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$

א. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לשתי הפונקציות יש את אותו תחום ההגדרה.

ii. לשתי הפונקציות יש נקודות קיצון הנמצאות על הישר: $y = x$.

iii. הפונקציות לא חותכות זו את זו.

מגדירים פונקציה נוספת והיא: $h(x) = (g(x))^2$

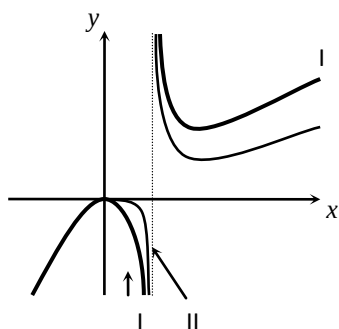
ב. כתוב באופן מפורש את הפונקציה החדשה: $h(x)$.

ג. האם תחום ההגדרה של הפונקציה: $h(x)$ זהה לשל: $g(x)$? נמק.

ד. באיור הסמוך ישנם שני גרפים.

קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזו פונקציה כל גרף מתאר

מבין הפונקציות: $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$. נמק את בחירותיך.



24. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{kx}{\sqrt{k-x^2}}$, $k > 0$

א. i. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה? (במא באמצעות k).

ii. מהן האסימפטוטות האנכיות של הפונקציה?

ב. הראה כי הפונקציה עולה עבור כל ערך של k בתחום הגדרתה.

ג. כתוב את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x . (במא באמצעות k).

המשיק אשר מצאת בסעיף הקודם חותך את אחת האסימפטוטות של הפונקציה בנקודה A.

ידוע כי שטח המשולש הכלוא בין המשיק, ציר ה- x והאסימפטוטה הנ"ל הוא: $S = 4$.

ד. מצא את k .

25. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+2}{x+4}$. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \sqrt{f(x)}$

א. כתוב בצורה מפורשת את הפונקציה $g(x)$.

ב. לפניך מספר טענות.

קבע אילו מהטענות הבאות נכונות ואלו אינן נכונות. הצדק את קביעותיך באמצעות חישוב מתאים:

i. לפונקציות תחום הגדרה זהה.

ii. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

iii. שתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x באותה נקודה.

iv. לשתי הפונקציות יש אסימפטוטה משותפת.

ג. מצא את נקודות החיתוך של כל פונקציה עם ציר ה- y .

אסף פתר את סעיפים א' ו-ב' והחליט לטעון את הטענה הבאה:

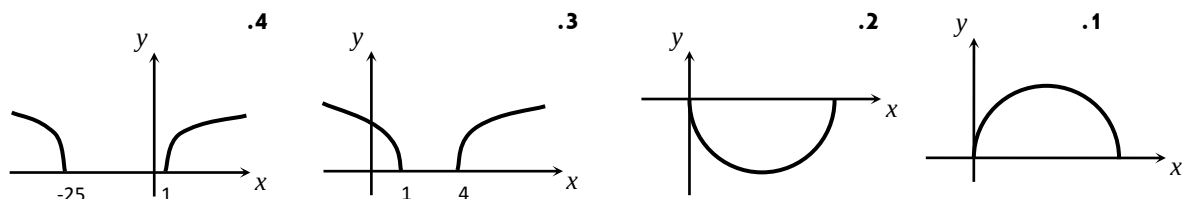
היות והפונקציה $g(x)$ מוגדרת להיות: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ אזי ניתן למצוא את שיעור ה- y של כל נקודה שעל גרף הפונקציה $f(x)$ ע"י כך שנמצא תחילה את שיעור ה- y של הנקודה בעלת אותו שיעור x על הגרף של $g(x)$ ונעלה אותה בריבוע.

ד. האם אסף צודק? נמק בצורה איכותית (חישובים אינם נדרשים) את שיקולך.

תשובות סופיות:

1. א. $0 \leq x \leq 16$ ב. $Max(8,8)$, $Min(16,0)$, $Min(0,0)$ ג. עולה: $0 \leq x < 8$ יורדת: $8 < x \leq 16$.
2. א. $0 \leq x \leq 36$ ב. $Max(0,0)$, $Max(36,0)$, $Min(18,-36)$ ג. עולה: $18 < x \leq 36$ יורדת: $0 \leq x < 18$.
3. א. $x \leq 1$, $x \geq 4$ ב. $Min(1,0)$, $Min(4,0)$ ג. עולה: $x \geq 4$ יורדת: $x \leq 1$ ד. $(0,2)$.
4. א. $x \geq 1$, $x \leq -25$ ב. $Min(1,0)$, $Min(-25,0)$ ג. עולה: $x \geq 1$ יורדת: $x \leq -25$.

סקיצות של שאלות: 1-4:



5. א. $k = -3$ ב. $2 \leq x \leq 8$ ג. כן - ישנן נקודות קיצון קצה: $Min(2,-3)$, $Min(8,-3)$ ד. עולה: $2 \leq x < 5$ יורדת: $5 < x \leq 8$.
6. א. $k = 4$ ב. $-3 \leq x \leq 3$ ג. כן - ישנן נקודות קיצון קצה: $Min(-3,0)$, $Min(3,0)$ ד. עולה: $-3 \leq x < 0$ יורדת: $0 < x \leq 3$.
7. א. $x \geq -1$ ב. $Max(-1,0)$, $Min(0,-1)$ ג. $(-1,0)$, $(3,0)$ ד. עולה: $x > 0$ יורדת: $-1 \leq x < 0$.

8. א. $k = 2$ ב. $x \leq 5.5$ ג. כן - ישנה נקודת קיצון קצה: $(5.5, 7.5)$. לא קיימת נקודת קיצון מקומית מאחר ו- $x = 5$ המתקבל בעת השוואת הנגזרת לאפס נפסל כי אינו מקיים את המשוואה המקורית.

ד. $(1,0)$. הנקודה שבה $x = -7$ אינה מקיימת את המשוואה המקורית ולכן נפסלת.

9. א. $k = -12$ ב. $Max(0,0)$, $Min(4,-12)$ ג. עולה: $x > 4$ יורדת: $0 \leq x < 4$.

10. א. $k = 4$ ב. $(1,3)$ ג. $Max(4,4)$, $Min(0,0)$ ד. $(0,0)$, $(16,0)$.

11. א. $x \geq 0$ ב. $Max(0,0)$, $Min(4,-6)$ ג. עולה: $x > 4$ יורדת: $0 \leq x < 4$ ד. $(0,0)$, $(\sqrt[3]{1024},0)$.

12. א. $k = 2$ ב. יש קיצון קצה - $(0,-4)$ ג. עולה בכל תחום הגדרתה. ד. $(1,0)$.

13. א. $0 \leq x \leq 16$ ב. $Min(0,4)$, $Max(8,2\sqrt{8})$, $Min(16,4)$ ג. עולה: $0 \leq x < 8$ יורדת: $8 < x \leq 16$.

14. א. $k = 1$ ב. $0 \leq x \leq 4$ ג. לא. ד. אין קיצונים.

15. א. יש להראות כי הנגזרת מורכבת מחיבור של שני ביטויים שחיוביים תמיד ומכאן שסימן הנגזרת חיובי

והפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה. $\left(f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{9-2x}} \right)$ - הנגזרת בנויה משני ביטויים חיוביים.

ב. $0 \leq x \leq 4.5$ ג. $m = 2$ ד. $Min(0,-1)$, $Max(4.5, 2 + \sqrt{4.5})$.

16. א. $-4 \leq x \leq 4$ ב. $Min(4,4)$, $Max(\sqrt{8}, 2\sqrt{8})$, $Min(-4,-4)$ ג. $(-\sqrt{8},0)$, $(0,4)$.

17. א. $k = -1$ ב. $-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}$ ג. $Min(\sqrt{8}, -\sqrt{8})$, $Max(2,4)$, $Min(-\sqrt{8}, \sqrt{8})$.

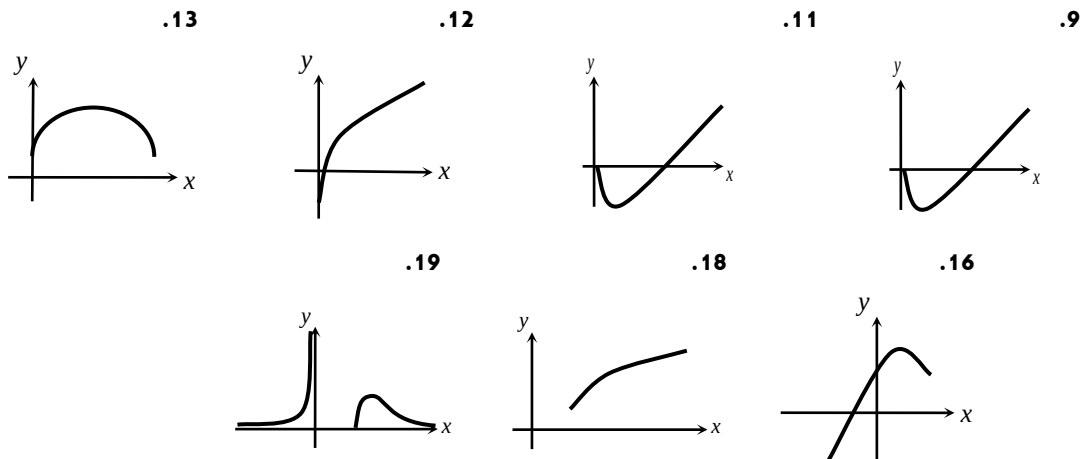
ד. עולה: $-\sqrt{8} \leq x < 2$ יורדת: $2 < x \leq \sqrt{8}$.

18. א. $x \geq 2$. ב. אין נקודות קיצון. ג. $\left(2, \frac{1}{8}\right)$. ד. אין נקודות חיתוך עם הצירים. ו. $m \geq \frac{1}{8}$.

19. א. $x < 0, x \geq 2$. ב. $\text{Max}\left(3, \frac{1}{\sqrt{27}}\right)$. ג. $(2, 0)$.

20. א. $a = 1$. ב. $-3 < x < 3$. ג. $(-1.5, \sqrt{3})$. ד. יורדת: $-3 < x < -1.5$. עולה: $-1.5 < x < 3$.

סקיצות של שאלות 9-19 (אלו שיש בהן גרף):



21. א. i. המענה אינה נכונה. תחומי ההגדרה הם: $f(x): x \geq -k$; $g(x): x > -k$; $h(x): x \geq -k$.

ii. המענה אינה נכונה. הפונקציה: $f(x)$ עולה תמיד שכן: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+k}} > 0$.

הפונקציה: $g(x)$ גם עולה תמיד שכן: $g'(x) = \frac{x+2k}{(x+k)^{1.5}} > 0$ כי הנקודה $x = -2k$ אינה בתחום

ההגדרה וערך הנגזרת בתחום ההגדרה חיובי. לפונקציה: $h(x)$ יש נקודת מינימום ב- $x = -\frac{2}{3}k$

אשר בתוך תחום הגדרתה ולכן היא יורדת עבור: $-k < x < -\frac{2}{3}k$.

iii. המענה אינה נכונה. להלן נקודות החיתוך: $f(x): (-k, 0)$; $g(x): (0, 0)$; $h(x): (-k, 0), (0, 0)$.

ב. i. $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{k}}$, $g'(0) = \frac{1}{\sqrt{k}}$. ii. $k = 4$. ג. $I = g(x)$, $II = f(x)$, $IV = h(x)$.

22. א. i. המענה אינה נכונה. תחומי ההגדרה:

$f(x): -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$; $g(x): -\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$; $h(x): -\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}, x \neq 0$

ii. המענה אינה נכונה. נקודות החיתוך הן: $f(x): (\pm\sqrt{k}, 0)$, $(0, 0)$; $g(x): (0, 0)$; $h(x): (\pm\sqrt{k}, 0)$.

iii. המענה נכונה. עבור $g(x)$ נקבל: $g'(x) = \frac{2kx - x^3}{(k - x^2)^{1.5}}$ ולכן: $x = 0$ נקודת מינימום.

(הנקודות $x = \pm\sqrt{2k}$ נפסלות).

עבור $h(x)$ נקבל: $h'(x) = \frac{x^3 - 2kx}{(k - x^2)^{1.5}}$ ולכן: $x = 0$ נקודת מקסימום. (הנקודות $x = \pm\sqrt{2k}$ נפסלות).

iv. המענה אינה נכונה. לפונקציה יש 3 נקודות קיצון: $x = 0, x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}k}$.

ב. $k = 24$. ג. $\text{Max}(\pm 4, 32\sqrt{2})$, $\text{Min}(0, 0)$. ד. $I = g(x)$, $II = f(x)$, $III = h(x)$.

23. א. i. המענה אינה נכונה. תחומי ההגדרה הם: $g(x): x > 1$; $f(x): x \geq 0, x \neq 1$.

ii. המענה נכונה. ל- $f(x)$ יש נקודת קיצון $(4, 4)$ ול- $g(x)$ יש קיצון $(2, 2)$.

שתייהן נמצאות על הישר $y = x$.

iii. המענה נכונה. מתקבלים: $x = 0, 1$ אשר שניהם נפסלים מחמת תחום ההגדרה של הפונקציות.

ב. $h(x) = \frac{x^2}{x-1}$. ג. לא. $h(x): x \neq 1$. ד. $I = h(x)$, $II = f(x)$.

24. א. i. $-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$. ii. $x = \pm\sqrt{k}$. ב. הנגזרת היא: $f'(x) = \frac{k^2}{(k-x^2)^{1.5}} > 0$. ג. $y = \sqrt{k}x$. ד. $k = 4$.

25. א. $g(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}$.

ב. i. המענה אינה נכונה. תחומי ההגדרה הם: $g(x): x < -4, x \geq -2$; $f(x): x \neq -4$.

ii. המענה נכונה. הנגזרות חיוביות: $f(x) = \frac{1}{(x+4)^2} > 0$ ו- $g(x) = \frac{1}{(x+4)^2 \sqrt{\frac{x+2}{x+4}}} > 0$.

iii. המענה נכונה. הנקודה היא: $(-2, 0)$.

iv. המענה נכונה. האסימפטומה משותפת היא: $x = -4$.

ג. $f(x): (0, \frac{1}{2})$; $g(x): (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

ד. אסף צודק שכן מכוח ההגדרה: $g(x) = \sqrt{f(x)}$ ניתן לראות כי עבור כל ערך של x_0 בחיתוך תחום

ההגדרה המשותף קיימות שתי נקודות: $A(x_0, f(x_0))$ ו- $B(x_0, g(x_0))$ (אחת על כל גרף כמובן)

ושיעורי ה- y שלהן מקיימות: $g(x_0) = \sqrt{f(x_0)}$.

5.9 - תרגילים מסכמים – בעיות קיצון:

שאלות עם פונקצית פולינום:

- נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 45. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום זהה לו?
ג. באיזה מקרה (א' או ב') המכפלה תהיה גדולה יותר? הראה דרך חישוב.

- א. מבין כל המספרים המקיימים: $3x + y = 60$ מצא את המספרים x ו- y שמכפלת ריבועיהם מקסימלית.
ב. מהי המכפלה הנ"ל?

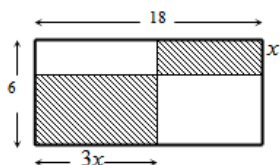
- סכום שלושה מספרים הוא 11. ידוע כי המספר הראשון גדול ב-4 מהמספר השני.
הראה כי המספרים שמכפלתם היא מקסימלית מקיימים:
א. מכפלת שני המספרים הקטנים שווה למספר הגדול.
ב. ערך המכפלה של שלושת המספרים שווה לריבוע מהמספר הגדול מביניהם.

- סכום שלושה מספרים הוא 26. מספר אחד גדול פי 3 מהשני.
מצא את שלושת המספרים שסכום ריבועיהם הוא מינימלי.

5. x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x + 6y = 60$.
א. הבע את y באמצעות x .

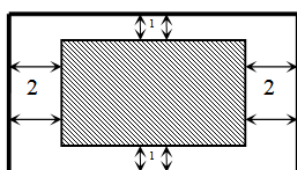
- ב. מה צריכים להיות המספרים x ו- y כדי שמכפלת ריבועיהם תהיה מקסימלית?
ג. מהי המכפלה הנ"ל?

- נתונים שלושה מספרים שסכומם הוא 36. ידוע שמספר אחד זהה לשני.
א. מה צריכים להיות שלושת המספרים כדי שמכפלתם תהיה מקסימלית?
ב. כיצד תשתנה התוצאה אם מספר אחד יהיה גדול פי 2 מהשני במקום זהה לו?
ג. באיזה מקרה תהיה מכפלה גדולה יותר?

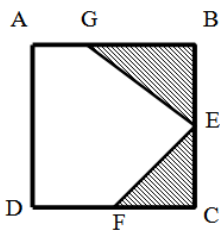


7. במלבן שצלעותיו הן 6 ס"מ ו-18 ס"מ חסומים שני מלבנים מקווקווים.
אורך אחד המלבנים המקווקווים גדול פי 3 מרוחב המלבן השני כמתואר באיור.
א. מה צריך להיות האורך x כדי שסכום שטחי שני המלבנים יהיה מקסימלי.
ב. עבור ה- x שמצאת מהו סכום השטחים הללו?

8. יוסי רוצה לקנות דף מחשב צבעוני ומיוחד בעל היקף של 60 ס"מ כדי להכין ברכה ליום הולדתה של חברתו רחל. המדפסת של יוסי אינה מדפיסה עד גבולות הדף אלא משאירה מרחק של 2 ס"מ אחד מקצות הדף העליון והתחתון, ומרחק של 2 ס"מ מצידי הדף (ראה איור).
יוסי רוצה לבחור דף שבו השטח שהמדפסת תוכל להדפיס יהיה מקסימלי.



- מה הן מידות הדף שיוסי צריך לקנות כדי שהשטח המודפס יהיה מקסימלי?



9. בריבוע ABCD חסומים שני משולשים ישרי-זווית GBE ו- ECF כמתואר באיור.

ידוע שאורך הקטע AG הוא 5 ס"מ ואורך צלע הריבוע ACBD הוא 13 ס"מ.

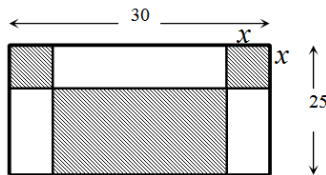
המשולש ECF הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים (CE=CF).

א. מצא מה צריך להיות אורך שוק המשולש ECF עבורו

סכום שטחי שני המשולשים הנ"ל יהיה מקסימלי.

ב. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?

10. במלבן שצלעותיו הן 30 ס"מ ו- 25 ס"מ חסומים שני ריבועים ומלבן (המסומנים)



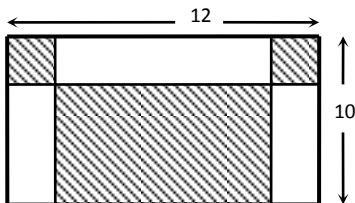
כמתואר באיור. מסמנים את צלע הריבוע ב- x .

א. מצא מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי

שסכום השטחים של שני הריבועים והמלבן יהיה מינימלי.

ב. עבור אורך הצלע שמצאת מהו סכום השטחים המינימלי?

11. במלבן שמידותיו הן 12 ס"מ ו- 10 ס"מ חסומים בצדדים למעלה שני ריבועים ומלבן מתחתיהם במרכז.



א. מצא מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום

השטחים של שני הריבועים והמלבן יהיו מינימליים.

ב. מה יהיה השטח שלהם במקרה זה?

12. הנקודות K, L, M, N מקצות קטעים שווים במלבן ABCD

כך ש: $BK = BL = DM = DN = x$.

צלעותיו של המלבן הן 20 ס"מ ו- 12 ס"מ.

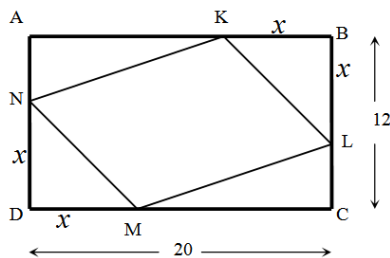
א. הבע באמצעות x את סכום שטחי המשולשים:

$\triangle AKM + \triangle BKL + \triangle CLM + \triangle DNM$

ב. מצא מה צריך להיות x כדי ששטח המרובע LKNM

יהיה מקסימלי.

ג. מה הוא השטח של המרובע LKNM במקרה זה?



13. במלבן ABCD שמידותיו הן 40 ס"מ ו- 16 ס"מ מקצים נקודות על צלעות

המלבן כך שמתקיים: $AE = BF = CG = DH = x$.

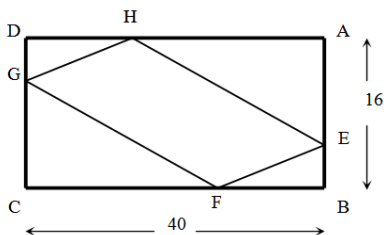
א. הבע באמצעות x את שטחי ארבעת המשולשים:

$\triangle AEH + \triangle BEF + \triangle CGF + \triangle DGH$

ב. מצא מה צריך להיות x עבורו שטח המרובע EFGH

יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה שטח המרובע EFGH במקרה זה?

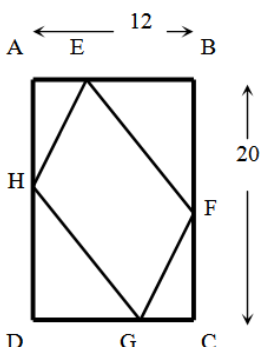


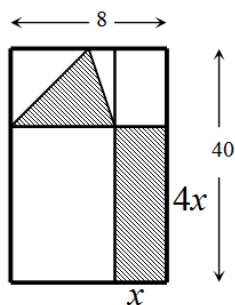
14. אורך המלבן ABCD הוא 20 ס"מ ורוחבו הוא 12 ס"מ כמתואר באיור.

מקצים על צלעות המלבן קטעים כך ש: $AH = BE = CF = DG = x$.

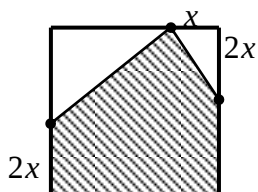
א. מצא מה צריך להיות x עבורו שטח המרובע EFGH יהיה מינימלי.

ב. עבור ה- x שמצאת מה השטח המינימלי?

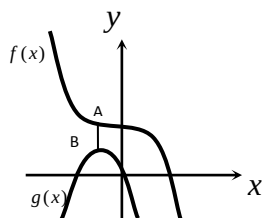




15. נתון מלבן שמידותיו הן 8 ס"מ על 40 ס"מ.
 מעבירים ישרים המקבילים לצלעות המלבן כך שנוצרים 4 מלבנים.
 מסמנים צלע אחת של המלבן הימני ב- x כך שהצלע הסמוכה לה גדולה פי 4 ממנה כמתואר באיור ובמלבן השמאלי בונים משולש.
 א. בטא באמצעות x את סכום השטחים של המלבן והמשולש המקווקוים.
 ב. מצא מה צריכים להיות מידות המלבן הימני כדי שסכום השטחים הנ"ל יהיה מינימלי.
 ג. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?

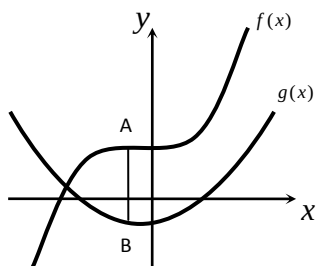


16. נתון ריבוע בעל אורך צלע של 16 ס"מ.
 מקצים קטע שאורכו x על הצלע העליונה ושני קטעים שאורכם הוא $2x$ על הצלעות הצדדיות כמתואר באיור כך שנוצר המחומש המקווקו.
 מצא מה צריך להיות ערכו של x עבורו שטח המחומש יהיה מקסימלי.

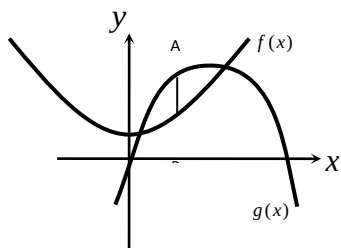


17. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
 $f(x) = 16 - 2x^3$, $g(x) = -6x^2 - 18x$
 מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע השני ומותחים ממנה ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

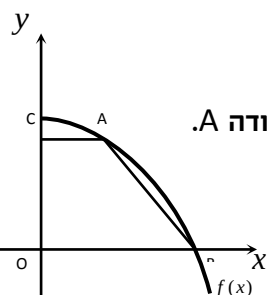
- א. מצא את שיעורי הנקודה A עבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



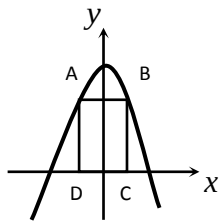
18. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:
 $f(x) = x^3 + 8$, $g(x) = x^2 + x - 6$
 מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ומורידים ממנה ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.
 א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי.
 ב. מה יהיה האורך המקסימלי?



19. באיור שלפניך מתוארות הפונקציות: $f(x) = x^2 + 3$, $g(x) = 20x - x^2$.
 מעבירים קטע AB המקביל לציר ה- y כך שהנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.
 א. נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .
 הבע באמצעות t את אורך הקטע AB.
 ב. מה צריך להיות t כדי שאורך הקטע AB יהיה מקסימלי?
 ג. מהו האורך AB במקרה זה?



20. נתונה הפונקציה: $f(x) = 36 - x^2$. על גרף הפונקציה ברביע הראשון מסמנים נקודה A מהנקודה A מעבירים ישר המקביל לציר ה- x שחותך את ציר ה- y בנקודה C.
 הנקודה B היא נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ו-O ראשית הצירים.

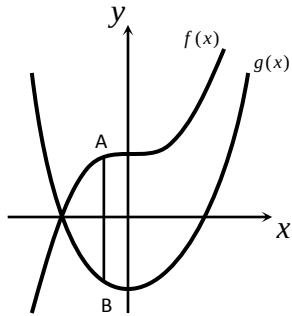


מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המרפז ABCO יהיה מקסימלי?
 21. מעבירים ישר AB המקביל לציר ה- x כך שהנקודות A ו-B נמצאות על גרף הפונקציה $f(x) = 48 - x^2$.

מהנקודות A ו-B מורידים אנכים לציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה B עבור שטח המלבן ABCD יהיה מקסימלי.

ב. עבור שיעורי הנקודה B שמצאת מה יהיה השטח?



22. באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = x^3 + 8$ ו- $g(x) = 6x^2 - 24$.

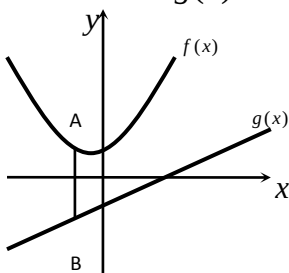
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף

הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

א. מצא את שיעורי הנקודה A בתחום: $x_A < 4$

עבורם הקטע AB יהיה מקסימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



23. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 + x + 7$ ו- $g(x) = 2x - 5$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ונקודה B נמצאת על גרף

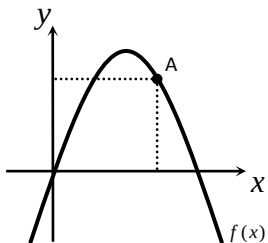
הפונקציה $g(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . נסמן את שיעור

ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את t עבורו אורך הקטע AB יהיה מינימלי.

ג. עבור הערך של t שמצאת בסעיף הקודם, מה יהיה אורך הקטע AB?



24. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x) = -x^2 + 7x$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.

מהנקודה A מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם היקף

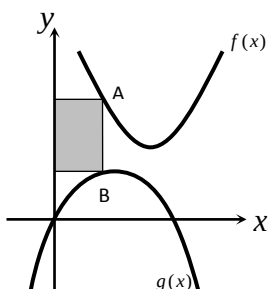
המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם היקף המלבן יהיה מינימלי?

25. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^2 - 8x + 18$ ו- $g(x) = -x^2 + 4x$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ כך

שהקטע AB מקביל לציר ה- y . מותחים אנכים מהנקודות A ו-B לציר ה- y כך שנוצר מלבן (המסומן).

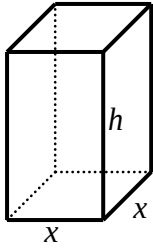


נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

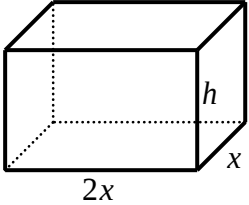
א. הבע באמצעות t את שטח המלבן המסומן.

ב. מצא את ערכו של t עבורו שטח המלבן הוא מקסימלי.

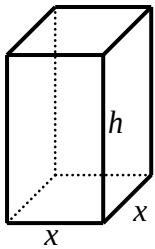
ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



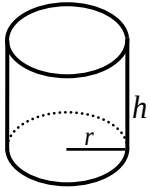
26. נתונה תיבה שגובהה הוא h ובסיסה הוא ריבוע שאורך צלעו היא x .
 נתון כי צלע הריבוע וגובה התיבה מקיימים: $4x + h = 63$.
 א. הבע את h באמצעות x .
 ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .
 ג. מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח הפנים יהיה מקסימלי?



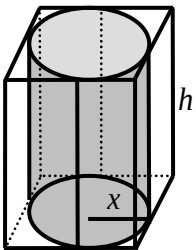
27. נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה פי 2 מהצלע הסמוכה לה כמתואר באיור.
 ידוע כי גובה התיבה h וצלע המלבן הקטנה x מקיימים: $x + h = 9$.
 מצא מה צריכים להיות מידות בסיס התיבה כדי שנפחה יהיה מקסימלי.



28. נתונה תיבה שבסיסה הוא ריבוע. ידוע כי סכום כל המקצועות הוא 60 ס"מ.
 נסמן את אורך צלע הבסיס ב- x ואת גובה התיבה ב- h .
 א. הבע את h באמצעות x .
 ב. מצא את מידות התיבה עבורם נפחה הוא מקסימלי.
 ג. מה הוא הנפח המקסימלי של התיבה?



29. נתון גליל שרדיוס בסיסו הוא r וגובהו h .
 ידוע כי סכום הרדיוס והגובה הוא 6 ס"מ.
 מצא את מידות רדיוס הגליל וגובהו עבורם נפח הגליל יהיה מקסימלי.



30. באיור שלפניך מתוארים תיבה שבסיסה ריבוע וגליל החסום בתוך התיבה.
 רדיוס הגליל יסומן ב- x וגובהו ב- h . ידוע כי הסכום של x ו- h הוא 12 ס"מ.
 א. הבע באמצעות x את אורך מקצוע הבסיס של התיבה.
 ב. (i) הבע באמצעות x את נפח הגליל.
 (ii) הבע באמצעות x את נפח התיבה.
 ג. מצא את x עבורו הנפח הכלוא בין התיבה לגליל יהיה מינימלי.

תשובות סופיות:

1. א. 15, 15, 15. ב. 10, 20, 15. ג. מקרה א'. 2. א. $x=10$, $y=30$. ב. $M=90000$.
3. המספרים: 2, 3, 6. 4. 4, 10, 12. 5. א. $y=10 - \frac{x}{6}$. ב. $y=5$, $x=30$. ג. $M=22500$.
6. א. 12, 12, 12. ב. 8, 12, 16. ג. מקרה א'. 7. א. $x=3$. ב. $S=54$. 8. 14 ס"מ, 16 ס"מ.
9. א. 4 ס"מ. ב. $S=125$. 10. א. $x=10$. ב. $S=350$. 11. א. 4 ס"מ. ב. $S=56$.
12. א. $2x^2 - 32x + 240$. ב. $x=8$. ג. $S=128$. 13. א. $-2x^2 + 56x$. ב. $x=14$. ג. $S=248$.
14. א. $x=8$. ב. $S_{Min}=112$. 15. א. $6x^2 - 36x + 160$. ב. 3 ס"מ על 12 ס"מ. ג. $S=214$. 16. $x=6$.
17. א. $A(-1,18)$. ב. $AB=6$. 18. א. $A(-\frac{1}{3}, 7\frac{26}{27})$. ב. $AB=14\frac{5}{27}$. 19. א. $-2t^2 + 20t - 3$. ב. $t=5$.
20. א. $AB=47$. ב. $A(2,32)$. 21. א. $B(4,32)$. ב. $S=256$. 22. א. $A(0,8)$.
23. א. $AB=32$. ב. $B(t, 2t-5)$. ג. $t=0.5$. 24. א. $A(4,12)$. ב. $A(0,0)$.

25. א. $S = 2t^3 - 12t^2 + 18t$ ב. $t = 1$ ג. $S = 8$ 26. א. $h = 63 - 4x$ ב. $p = -14x^2 + 252x$ ג. $x = 9$
27. $x = 6$ 28. א. $h = 15 - 2x$ ב. $5 \times 5 \times 5$ ג. $V = 125$
29. $r = 4$, $h = 2$ 30. א. $2x$ ב. (i) $V = 12\pi x^2 - \pi x^3$ (ii) $V = 48x^2 - 4x^3$ ג. $x = 8$

שאלות עם פונקציה רציונאלית:

1. נתונים שני מספרים x ו- y שמקיימים: $2x^2y = 27$

א. הבע את y באמצעות x

ב. מה צריכים להיות המספרים כדי שסכומם יהיה מינימלי?

2. א. מבין כל המשולשים השווים שוקיים ששטחם הוא 128 סמ"ר מצא את אורך הבסיס ואורך גובהו במשולש שבו סכום אורך הבסיס וגובהו הוא מינימלי.

ב. מה יהיה הסכום במשולש זה?

3. מכפלת שלושה מספרים היא 27. ידוע כי המספר הראשון זהה לשני.

נסמן ב- x את המספר הראשון.

א. הבע באמצעות x את המספר השלישי.

ב. מצא את שלושת המספרים שסכומם מינימלי.

4. נתונים שני מספרים חיוביים. ידוע כי המספר הראשון גדול פי 4 מהמספר השני.

מחברים של המספר השני עם ההופכי של המספר הראשון.

א. מצא מה יהיו המספרים עבורם חיבור זה יהיה מינימלי.

ב. מה הוא ערך החיבור?

5. נתונים שלושה מספרים חיוביים כך שהמספר השני גדול פי 3 מהמספר הראשון והמספר השלישי

גדול פי 9 מהמספר הראשון. המספר הראשון יסומן ב- x .

א. הבע באמצעות x את המספרים השני והשלישי.

ב. הבע באמצעות x את הסכום בין המספר הראשון למספרים ההופכיים של המספרים השני והשלישי.

ג. מצא את שלושת המספרים עבורם הסכום שהבעת בסעיף הקודם הוא מינימלי.

6. נתונים שני מספרים. ידוע כי המספר הראשון גדול ב-14 מהמספר השני.

סמן ב- x את המספר הקטן. מצא את המספרים עבורם ההפרש בין המספר ההופכי של המספר הקטן

למספר ההופכי של המספר הגדול הוא מקסימלי.

7. x ו- y הם שני מספרים חיוביים המקיימים: $xy + y = 16$

א. הבע את y באמצעות x

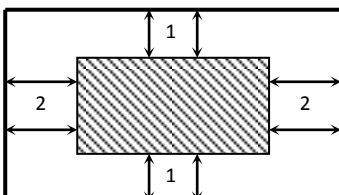
ב. מצא מה צריכים להיות x ו- y עבורם הסכום: $x + y$ יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה הסכום במקרה זה?

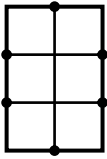
8. בבית הדפוס "עמירן" רוצים לעצב גלויה על גבי קרטון ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר.

הנהלת החברה החליטה שיש להשאיר רווחים של ס"מ אחד מקצות

הדף העליון והתחתון ו-2 ס"מ מצדי הדף (ראה איור).

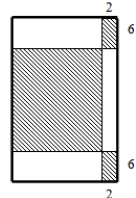


- א. מצא מה צריכים להיות מידות הקרטון כדי שהשטח של התמונה יהיה מקסימלי.
ב. מה יהיה השטח במקרה זה?



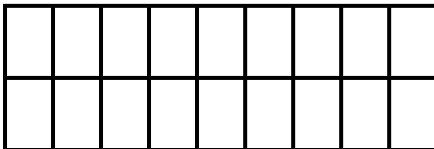
9. בחלון מלבני שעומתו הכולל הוא 192 מ"ר בונים סורגי מתכת מ-7 מוטות: 3 מאונכים ו-4 אופקיים (ראה איור).

מצא מה צריכים להיות אורכי המוטות המינימליים שיחסמו את חלון זה.



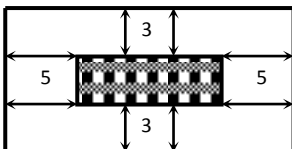
10. נתון מלבן שעומתו 1176 סמ"ר. מקצים בצדדי המלבן העליון והתחתון קטעים שאורכם 2 ס"מ ובצדדי המלבן הימניים קטעים שאורכם 6 ס"מ כך שנוצרים שיעה מלבנים. מסמנים שלושה מלבנים כמתואר באיור. חשב מה צריכים להיות מידות המלבן כדי שסכום שטחי המלבנים המסומנים יהיה מקסימלי.

11. בתור תשתית לקיר עץ, קנו רפי וחבריו מוטות מתכת. מחיר המוטות נקבע בהתאם לאורכם. החבורה העמידה 10 מוטות מתכת מאונכים ולאחר מכן תפסו אותם עם שלושה מוטות נוספים אופקים כמתואר בתרשים. אחד מחבריו של רפי מדר וגילה שעמח המלבן שנוצר הוא 120 מ"ר. רפי בתגובה שמח ואמר "איזה יופי! עכשיו אני יודע שהשקעתנו הייתה מינימלית".



מצא מה צריכים להיות אורכי המוטות המינימליים עבור השטח שמדר חברו של רפי.

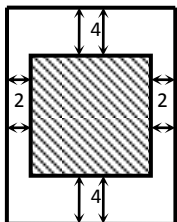
12. חיים הוא אחד מעובדי חברת "דפוס יהלום בע"מ". תפקידו של חיים הוא להדביק גליות על משטחי קרטון בעלי שטח מינימלי כך שיישארו רווחים של 3 ס"מ מקצות הקרטון העליון והתחתון, ו-5 ס"מ מצידי הקרטון (ראה איור). יום אחד קיבל חיים שיחת טלפון מלקוח אנונימי ששאל אותו את השאלה הבאה: "יש לי מגוון גדול של גליות במידות שונות אשר שטחן זהה והוא 60 סמ"ר. מה הן המידות של גלויה אשר שטח משטח הקרטון שלה יהיה מינימלי?"



- א. עזור לחיים לענות ללקוח על שאלתו והראה דרך חישוב.
ב. מה יהיו מידות הקרטון עבור הגלויה המסוימת?

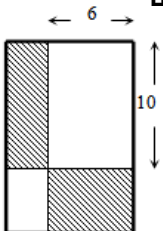
13. לרותי צבעי מים ומשטח עץ שעומתו הכולל הוא 162 סמ"ר.

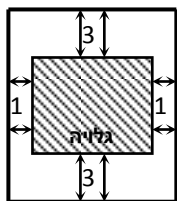
רותי רוצה לצייר מלבן במרכז המשטח כך שמרחקו מצידי המשטח 2 ס"מ ומהקצוות העליון והתחתון של המשטח 4 ס"מ. רותי ראתה שהמשטח שברשותה לא עומד בתנאים אלו ולכן החליטה לקנות משטח חדש. כשהגיעה רותי לנגר הוא אמר לה שמחיר העץ נקבע לפי מידותיו. איזה מידות רותי צריכה לבקש כדי לקבל משטח שבו היא תוכל לצייר מלבן בעל שטח מקסימלי לפי דרישותיה?



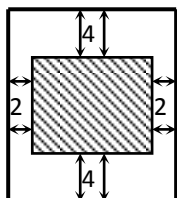
14. נתון מלבן שעומתו הוא 135 סמ"ר. מעבירים ישרים המקבילים לצלעות המלבן ומקצים עליהם קטעים באורכים של 6 ו-10 ס"מ (ראה איור). ע"י הקצאת קטעים אלו נוצרים מלבנים נוספים המסומנים באיור.

- א. מצא מה צריכים להיות מידות המלבן הנתון עבורם סכום שטחי מלבנים אלו יהיה מינימלי.
ב. מה יהיה השטח הלבן במקרה זה?

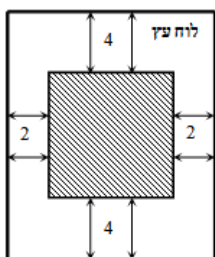




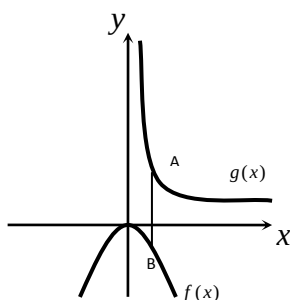
15. לדני גלוייה מלבנית במידות לא ידועות ששטחה הכולל הוא 12 סמ"ר. דני רוצה לקנות קרטון כדי להדביק את הגלוייה במרכזו. כשהלך דני לחנות כלי מלאכה אמר לו המוכר שניתן לבחור קרטון עפ"י שטח. דני הדגיש למוכר שהוא רוצה שהגלוייה תהיה מודבקת במרכז הקרטון כך שמרחקה מצידי הקרטון יהיה 1 ס"מ בלבד ומרחקה מהקצוות העליון והתחתון יהיה 3 ס"מ. המוכר נתן לדני קרטון בעל שטח מינימלי עבור הגלוייה שלו. א. מה הן מידות הגלוייה עבורן שטח הקרטון הוא מינימלי? ב. מה הוא שטח הקרטון שנתן המוכר לדני?



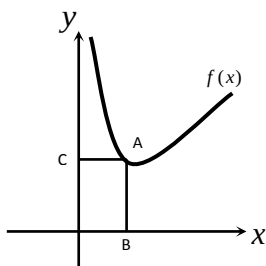
16. לרבקה קרטון מלבני ששטחו הכולל הוא 162 סמ"ר. רבקה רוצה לחתוך מלבן במרכז הקרטון כדי שתוכל להשתמש בשארית הקרטון כמסגרת לתמונה. על מנת שהקרטון לא יקרע רבקה צריכה לשמור על רווחים של 2 ס"מ מצידי הקרטון ו-4 ס"מ מקצותיו העליון והתחתון. מה הן מידות הקרטון עבורן שטח המלבן שרבקה תחתוך יהיה מקסימלי?



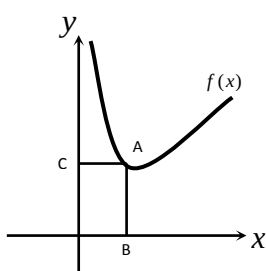
17. אלינה קיבלה משימה בשיעור מלאכה: יש להכין מסגרת לתמונה מלוח עץ ששטחו הכולל הוא 242 סמ"ר כך שעובי המסגרת בצדדים יהיה 2 ס"מ ובקצוות העליון והתחתון – 4 ס"מ (ראה איור). כדי לבחור את מידות לוח העץ, אלינה צריכה לדעת את השטח המקסימלי שעליה לנסר עבור המקום לתמונה (השטח המסומן). א. מה יהיו מידות לוח העץ שאלינה צריכה להזמין עבור המשימה? ב. מה יהיה השטח המקסימלי לתמונה עבור המידות שאלינה בחרה?



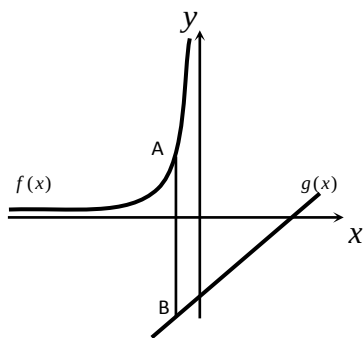
18. נתונות הפונקציות: $f(x) = -\frac{x^2}{16}$, $g(x) = \frac{1}{x^2}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה-y. א. מצא את שיעורי הנקודה A עבורם אורך הקטע AB יהיה מינימלי. ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



19. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x) = x + \frac{16}{x^3}$ ברביע הראשון. מהנקודה A מורידים אנכים לצירים כפי שמתואר באיור כך שנוצר המלבן ABCO. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מינימלי.



20. באיור שלפניך נתונה הפונקציה $f(x) = x + \frac{8}{x}$ ברביע הראשון. מנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים לצירים כך שמתקבל מלבן ABCO. א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן ABCO יהיה מינימלי. ב. מה הוא ההיקף המינימלי?



21. הגרפים שלפניך מתארים את הפונקציות: $f(x) = -\frac{4}{x}$, $g(x) = x - 3$.

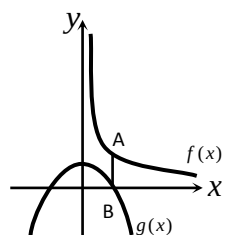
מסמנים על גרף הפונקציה $f(x)$ נקודה A ועל גרף הפונקציה $g(x)$

נקודה B כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם אורך

הקטע AB יהיה מינימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



22. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{x}$ ו- $g(x) = -4x^2 + 1$.

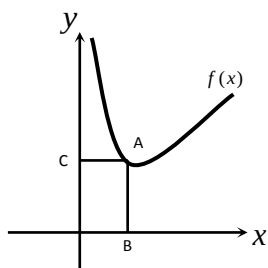
מעבירים ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה A ואת

גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה B.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם אורך

הקטע AB יהיה בעל אורך מינימלי.

ב. מה יהיה האורך AB במקרה זה והיכן תמוקם הנקודה B?



23. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = x + \frac{16}{x^2}$ ברביע הראשון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים שיוצרים

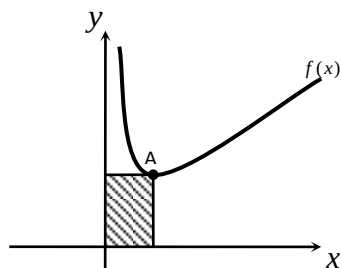
את המלבן ABCO (O-ראשית הצירים).

נסמן ב- t את שיעור ה- x של הנקודה A.

א. במא באמצעות t את שיעור ה- y של הנקודה A ואת שטח המלבן ABCO.

ב. מצא מה צריך להיות ערך של t עבורו שטח המלבן יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה שטח המלבן במקרה זה?



24. באיור שלפניך נתון גרף הפונקציה: $f(x) = 2x + \frac{8}{x^2} + 3$ ברביע הראשון.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$.

מנקודה זו מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המקווקו).

הנקודה A תסומן ב- $A\left(t, 2t + \frac{8}{t^2} + 3\right)$.

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.

ב. מצא את ערכו של t עבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.

ג. עבור הערך של t שמצאת בסעיף הקודם, מה יהיה שטחו של המלבן?

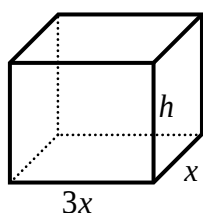
25. נתונה תיבה שבסיסה מלבן ונפחה הוא $V = 288$. ידוע כי אורך הבסיס גדול פי 3 מרוחבו (ראה איור).

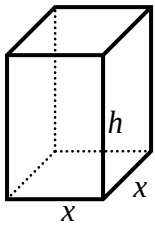
מסמנים ב- x את מקצוע המלבן הקטנה וב- h את גובה התיבה.

א. הבע את h באמצעות x .

ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .

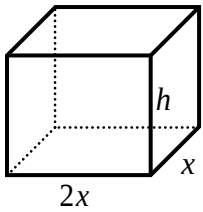
ג. מצא את מידות התיבה עבורם שטח הפנים של התיבה יהיה מינימלי.





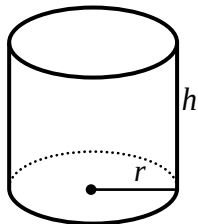
26. נפח תיבה שבסיסה ריבוע הוא 729 סמ"ר.

- נסמן ב- x את אורך מקצוע הבסיס וב- h את גובה התיבה (ראה איור).
 א. הבע את h באמצעות x .
 ב. הבע את שטח הפנים של התיבה באמצעות x .
 ג. מה צריך להיות x עבורו שטח הפנים של התיבה יהיה מינימלי?



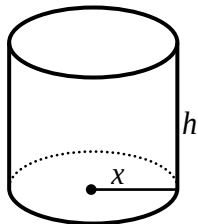
27. נפח קופסה בצורת תיבה הפתוחה מלמעלה הוא 36 סמ"ר.

- בסיס הקופסה הוא מלבן שרוחבו גדול פי 2 מאורכו.
 א. מצא את מידות בסיס הקופסה עבורו שטח הפנים שלה יהיה מינימלי.
 ב. מה יהיה גובה הקופסה במקרה זה?



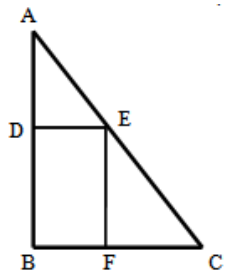
28. נתון גליל שרדיוסו r וגובהו h . ידוע כי רדיוס הגליל וגובהו מקיימים: $r^2 \cdot h = 128$.

- א. (i) הבע באמצעות r את גובה הגליל.
 (ii) הבע באמצעות r את שטח הפנים של הגליל.
 ב. מצא את אורך הרדיוס עבורו שטח הפנים של הגליל יהיה מינימלי.
 ג. מה יהיה נפח הגליל במקרה זה?



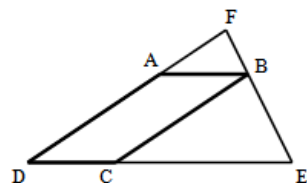
29. הנפח של קופסת עפרונות בצורת גליל הוא $V = 512\pi$.

- ידוע כי הקופסה פתוחה מלמעלה.
 רדיוס הקופסה יסומן ב- x וגובה הקופסה יסומן ב- h .
 א. הבע באמצעות x את גובה הקופסה ואת שטח הפנים שלה.
 ב. מצא את רדיוס הקופסה עבורו שטח הפנים שלה יהיה מינימלי.
 ג. מה יהיה שטח הפנים של הקופסה במקרה זה?



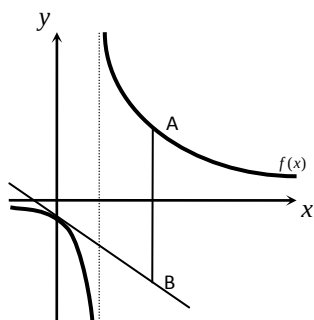
30. במשולש הישר זווית ABC חוסמים מלבן BDEF כמתואר באיור.

- מידות המלבן הן: $DE = 6$, $EF = 12$.
 מסמנים את אורך הצלע AB ב- x .
 א. הבע באמצעות x את אורך הצלע BC.
 ב. מצא את אורכי הניצבים AB ו-BC של המשולש בעל השטח המינימלי.



31. המרובע ABCD הוא מקבילית.

- מהקדקוד B מעבירים את הצלע EF הנפגשת עם המשני הצלעות DC ו-AD.
 ידוע כי מידות המקבילית הן: $AD = 8$, $AB = 2$.
 מסמנים את אורך הצלע DE ב- x .
 א. הבע באמצעות x את אורך הצלע DF.
 ב. מצא את x עבורו סכום הצלעות DE ו-DF הוא מינימלי.
 ג. מה הוא הסכום המינימלי?

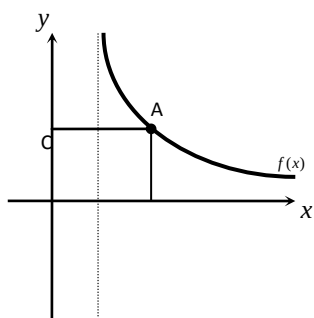


32. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+10}{x-2}$ ברביע הראשון.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y .
א. מצא את משוואת המשיק.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $f(x)$ ו-B על גרף המשיק
כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

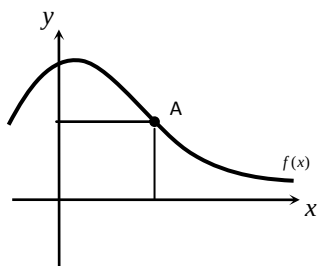
ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורן אורך הקטע AB הוא מינימלי.
ג. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



33. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+5}{x-4}$ ברביע הראשון.

מהנקודה A שעל גרף הפונקציה מורידים אנכים לצירים כך
שנוצר המלבן ABCO.

מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי ששטח המלבן יהיה מינימלי.



34. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x+12}{x^2+3}$ בתחום: $x \geq 0$.

מקצים נקודה A על גרף הפונקציה וממנה מורידים אנכים לצירים כך שנוצר
המלבן ABCO כמתואר באיור.

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח
המלבן יהיה מקסימלי.

ב. מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם שטח המלבן יהיה מינימלי בתחום הנ"ל.

35. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{x+8}{x-1}$ והישר: $y = \frac{9x}{25}$.

הנקודות A ו-B נמצאות על הגרפים של הפונקציות כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

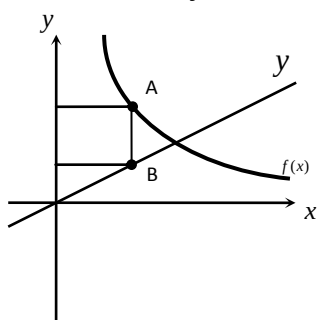
מהנקודות A ו-B מותחים אנכים לציר ה- y כך שנוצר המלבן ABCD.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן ABCD.

ב. מצא את t עבורו היקף המלבן הוא מינימלי.

ג. מה יהיה ההיקף במקרה זה?



תשובות סופיות:

$$.3, .3, .3 \rightarrow \frac{27}{x^2} \rightarrow .32 \rightarrow .16, .16 \rightarrow .2 \rightarrow x=3, y=1.5 \rightarrow y=\frac{27}{2x^2} \rightarrow .1$$

$$S = x + \frac{1}{3x} + \frac{1}{9x}$$

$$.S=7 \quad .1 \quad .x=3, y=4 \quad .2 \quad .y=\frac{16}{x+1} \quad .8 \quad .7$$

8. א. 11 ס"מ ו- 22 ס"מ. ב. $S=162$. ג. 9. 12 ו-16 מטרים. ד. 10. 14 ס"מ ו- 84 ס"מ.

11. 6 ו-20 מטרים. 12. א. 6 ס"מ על 10 ס"מ. ב. 12 ס"מ על 20 ס"מ. 13. 9 ס"מ על 18 ס"מ.

14. א. 15 ס"מ על 9 ס"מ. ב. $S = 75$.

15. א. ס"מ על 6 ס"מ. ב. $S = 48$. 16. 9 ס"מ על 18 ס"מ. 17. א. 11 ס"מ על 22 ס"מ. ב. $S = 98$.

$\cdot p=16 \cdot \mathbf{A}(2,6) \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{20} \cdot \mathbf{A}(2,4) \cdot \mathbf{19} \cdot \mathbf{AB}=\frac{1}{2} \cdot \mathbf{A}(2,0.25) \cdot \mathbf{N} \cdot \mathbf{18}$

21. א. $A(-2, 2)$ ב. $AB = 7$ 22. א. $A(0.5, 2)$ ב. $AB = 2$, הנקודה B ממוקמת על ציר ה- x .

$$.S=12 \quad .1 \quad .t=2 \quad .2 \quad .S=t^2+\frac{16}{t} \quad .A\left(t,t+\frac{16}{t^2}\right) \quad .N \quad .23$$

$$.S=18 \quad .1 \quad .t=2 \quad .3 \quad .P=4t+\frac{16}{t^2}+6 \quad .N \quad .24$$

$$. 4 , 12 , 24 \Leftarrow x=4 \text{ .} \text{ا.} S=6x^2+\frac{768}{x} \text{ .} \text{ب.} h=\frac{96}{x} \text{ .} \text{ج.} \text{د.}$$

$$.h=2 \quad .\text{ج} \quad .3, 6 \quad .\text{ن} \quad .27 \quad .x=9 \quad .\text{ا} \quad .S=2x^2 + \frac{2916}{x} \quad .\text{ب} \quad .h=\frac{729}{x^2} \quad .\text{ن} \quad .26$$

$$V = 128\pi \text{ .} \text{ } r = 4 \text{ .} \text{ } S = \frac{256\pi}{r} + 2\pi r^2 \text{ (ii). } h = \frac{128}{r^2} \text{ (i) .} \text{ } \text{.28}$$

$$S = 192\pi \text{ .} \text{ } x = 8 \text{ .} \text{ } S = \frac{1024\pi}{x} + \pi x^2 \text{ , } h = \frac{512}{x^2} \text{ .} \text{ } \textbf{29}$$

30. $BC = \frac{6x}{x-12}$ 30

31. א. $DF = \frac{8x}{x-2}$ ב. מתקבלת הפונקציה: $L = \frac{x^2+6x}{x-2}$ הפתרון הוא: $x=6$ ג. $L=18$.

$A(5, 2.5)$.33 $AB = 24$.1 $A(4, 7)$.1 $y = -3x - 5$.N .32

34. א. $A(2,2)$ ב. בקצה התחום שמח המלבן יהיה אפס ולכן: $A(0,0)$.

$$P = 12.6995, \quad t = 4\frac{3}{4}, \quad P = \frac{1.28t^2 + 0.72t + 16}{t - 1} \quad \text{.N. 35}$$

שאלות עם פונקצית שורש:

1. x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x + y = 15$.

א. הבע את y באמצעות x .

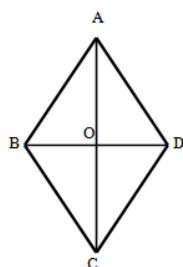
ב. מצא את x ו- y עבורם סכום השורשים שלהם יהיה מקסימלי.

2. נתונים שני מספרים חיוביים x ו- y המקיימים: $3x + y = 36$.

א. הבע את y באמצעות x .

ב. מצא את המספרים עבורם סכום השורשים שלהם מקסימלי.

ג. מה יהיה סכום השורשים שלהם במקרה זה?



3. נתון המעוין ABCD. ידוע כי סכום אורכי האלכסונים של המעוין הוא 80 ס"מ.

הנקודה O היא נקודת פגישת האלכסונים במעוין.

הקטע AO יסומן ב- x .

א. הבע את אורכי האלכסונים באמצעות x .

ב. מה צריך להיות ערכו של x עבורו אורך צלע המעוין היא מינימלית?

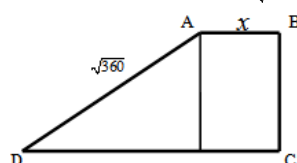
4. באיור שלפניך מתואר מרפז ישר זווית ABCD המחולק למלבן ומשולש ישר זווית.

גובה המרפז BC גדול פי 3 מהבסיס הקטן AB ואורך השוק הארוכה AD הוא $\sqrt{360}$.

הבסיס הקטן יסומן ב- x .

א. הבע באמצעות x את אורך הבסיס הגדול DC.

ב. מצא את ערכו של x עבורו אורך הבסיס DC יהיה מקסימלי.

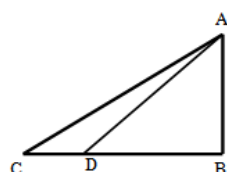


5. המשולש ABC הוא משולש ישר זווית. הנקודה D נמצאת על הניצב BC

כך שהקטע BD גדול פי 2 מהקטע CD. ידוע כי סכום הניצבים הוא 13 ס"מ.

א. מצא את אורכי הניצבים עבורם אורך הקטע AD יהיה מינימלי.

ב. מה יהיה אורך היתר AC במקרה זה?



6. המשולש ABC הוא שווה שוקיים ($AB = AC$).

הקטע AE הוא גובה לבסיס BC.

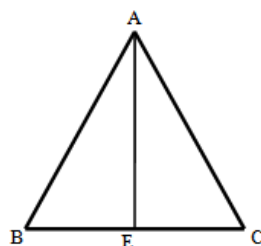
ידוע כי סכום אורכי הבסיס והגובה הוא 20 ס"מ.

הגובה AE יסומן ב- x .

א. הבע באמצעות x את היקף המשולש ABC.

ב. מצא את x עבורו ההיקף שהבעת בסעיף הקודם הוא מינימלי.

ג. עבור הערך של x שמצאת בסעיף הקודם מה הוא השטח של המשולש?



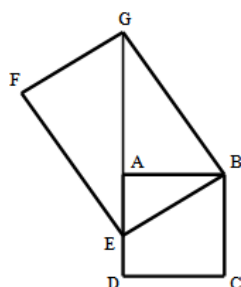
7. המרובע ABCD הוא ריבוע. הנקודה E נמצאת על הצלע AD של הריבוע

והנקודה G נמצאת על המשך הצלע AD. מעבירים את הקטעים BE ו-BG.

ומוסיפים את הנקודה F כך שהמרובע BEFG הוא מלבן כמתואר באיור.

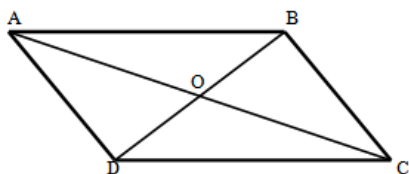
אלכסון המלבן GE גדול פי 2 מהצלע BE של המלבן וסכום הצלע BE

ואלכסון המלבן GE הוא 16 ס"מ. הקטע BE יסומן ב- x .



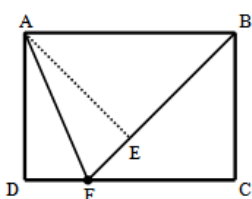
- א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AE.
 ב. מצא את x עבורו אורך צלע הריבוע תהיה מקסימלית. (העזר במשולש ABE).

8. המרובע ABCD הוא מקבילית. הנקודה O היא פגישת האלכסונים AC ו-BD.



- ידוע כי האלכסון BD מאונך לצלעות BC ו-AD של המקבילית.
 כמוכן האלכסון AC גדול ב- 27 ס"מ מהצלע BC.
 סמן את הצלע BC ב- x וענה על השאלות הבאות:
 א. הבע באמצעות x את אורך הקטע CO.
 ב. הבע באמצעות x את אורך הקטע BO.
 ג. מצא עבור איזה ערך של x יהיה אורך הקטע BO מקסימלי.

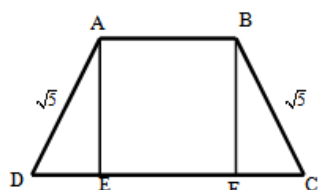
9. המרובע ABCD הוא מלבן. מסמנים נקודה F הנמצאת על הצלע CD של המלבן.



- מורידים גובה מהקדקוד A לקטע BF בתוך המלבן שנוגע בו בנקודה E.
 ידוע כי אורך הקטע BE הוא 26 ס"מ וכי הקטע BF גדול פי 1.5 מהגובה AE.
 נסמן את אורך הקטע AE ב- x .

- א. הבע באמצעות x את אורך הקטע FE.
 ב. הבע באמצעות x את אורך הקטע AF.

- ג. מצא את הערך של x עבורו אורך הקטע AF הוא מינימלי.
 ד. מצא את שטח המלבן עבור ערך ה- x שמצאת בסעיף הקודם.



10. המרובע ABCD הוא טרפז שווה שוקיים. מורידים את גבהים

לטרפז AE ו-BF כך שהמרובע ABEF הוא ריבוע.

ידוע כי אורך שוק בטרפז הוא $\sqrt{5}$ ס"מ.

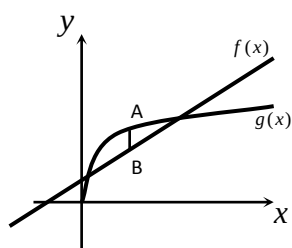
מצא מה צריך להיות אורך הבסיס הקטן AB עבורו אורך הבסיס DC יהיה מקסימלי.

11. באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x + 3$ ו- $g(x) = 4\sqrt{x}$.

מסמנים נקודה A על גרף הפונקציה $g(x)$ ונקודה B על גרף הפונקציה $f(x)$ כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y .

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A עבורם אורך הקטע AB יהיה מקסימלי.

ב. מה יהיה אורך הקטע AB במקרה זה?



12. נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = 2x^2 + 30$ ו- $g(x) = 8\sqrt{x}$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$

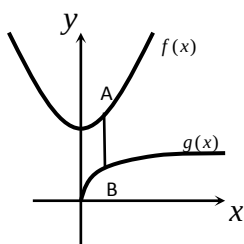
כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y . נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את:

(i). שיעורי הנקודה B.

(ii). אורך הקטע AB.

ב. מצא את t עבורו אורך הקטע AB יהיה מינימלי.



13. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{4-x}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

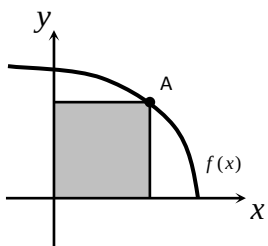
מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המסומן).

מסמנים את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.

ב. מצא את t עבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה היקף המלבן במקרה זה?



14. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4\sqrt{5-x}$. הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

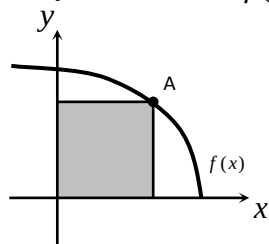
מורידים אנכים לצירים כך שנוצר מלבן (בעל השטח המסומן).

מסמנים את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את היקף המלבן.

ב. מצא את t עבורו היקף המלבן יהיה מינימלי.

ג. מה יהיה היקף המלבן במקרה זה?



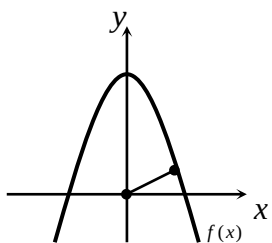
15. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 6\frac{3}{4} - x^2$.

א. מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון שמרחקה

מראשית הצירים הוא מינימלי.

ב. האם קיימת נקודה על גרף הפונקציה שמרחקה מראשית הצירים

הוא מקסימלי? אם כן היכן היא ממוקמת?

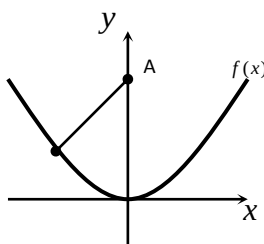


16. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{4}x^2$.

הנקודה $A(0,6)$ נמצאת על ציר ה- y והנקודה B היא נקודה כלשהי

על גרף הפונקציה ברביע השני.

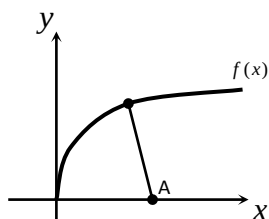
מצא את שיעורי הנקודה B עבורם המרחק בין A ל-B יהיה מינימלי.



17. נתון גרף הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x}$.

מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הראשון שמרחקה

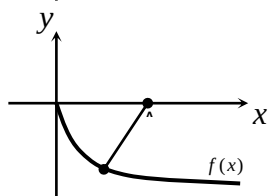
מהנקודה $A(6,0)$ מינימלי.



18. נתון גרף הפונקציה: $f(x) = -3\sqrt{x}$.

מצא נקודה על גרף הפונקציה ברביע הרביעי שמרחקה

מהנקודה $A(5.5,0)$ הוא מינימלי.



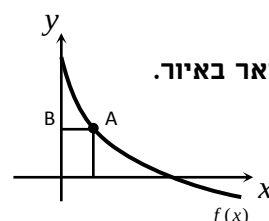
19. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 6 - 3\sqrt{x}$.

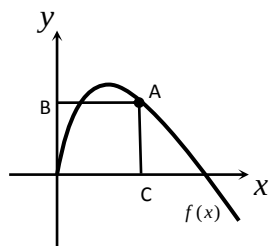
הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה ברביע הראשון.

מהנקודה A מותחים אנכים לצירים אשר חותכים אותם בנקודות B ו-C כמתואר באיור.

נסמן את שיעור ה- x של הנקודה A ב- t .

א. הבע באמצעות t את סכום הקטעים AC+AB.





ב. מצא את ערכו של t עבורו סכום הקטעים הנ"ל יהיה מינימלי

20. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x$.

הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון.

מהנקודה A מותחים אנכים לצירים AB ו-AC כמתואר באיור.

מצא את שיעורי הנקודה A עבורם סכום הקטעים $AB + AC$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות:

1. א. $y = 15 - x$. ב. $y = 12$, $x = 3$. ג. $y = 36 - 3x$. ד. $y = 27$, $x = 3$. ה. $4\sqrt{3} \sim 6.92$.
2. א. $AC = 2x$, $BD = 80 - 2x$. ב. $x = 20$. ג. $DC = x + 3\sqrt{40 - x^2}$. ד. $x = 4$.
3. א. $AB = 4$, $BC = 9$. ב. $AC = \sqrt{97}$. ג. $P = 2\sqrt{1.25x^2 - 10x + 100} + 20 - x$. ד. $x = 8$. ה. 48 .
4. א. $AE = 16 - 3x$. ב. $x = 6$. ג. $CO = 0.5x + 13.5$. ד. $BO = \sqrt{-\frac{3x^2}{4} + \frac{27x}{2} + 182\frac{1}{4}}$. ה. $x = 9$.
5. א. $EF = 1.5x - 26$. ב. $AF = \sqrt{3.25x^2 - 78x + 676}$. ג. $x = 12$. ד. 216 . ה. $AB = 1$.
6. א. $A(4, 8)$. ב. $AB = 1$.
7. א. (i) $B(t, 8\sqrt{t})$. (ii) $AB = 2t^2 - 8\sqrt{t} + 30$. ב. $t = 1$. ג. $P = 2t + 4\sqrt{4 - t}$. ד. $P = 10$.
8. א. $P = 2t + 8\sqrt{5 - t}$. ב. $t = 1$. ג. $P = 18$.
9. א. $A(2.5, 0.5)$. ב. כן, הנקודה $(0, 6.75)$ והיא נמצאת על ציר ה- y .
10. א. $B(-4, 4)$. ב. $(4, 4)$. ג. $(1, -3)$. ד. $l = t + 6 - 3\sqrt{t}$. ה. $t = 2.25$. ו. $(16, 0)$.

5.10 - תרגילים מסכמים – חשבון אינטגרלי:

שאלות העוסקות בפונקציה פולינומית - מציאת פונקציה קדומה בלבד:

1. נתונה הפונקציה: $g(x) = \frac{3x-1}{x}$ ונתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x) : f'(x) = kx^2 + 3x$.

ידוע ששיפוע המשיק לפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה $x = \frac{1}{2}$ זהה לשיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$

בנקודה שבה $x = -4$.

א. מצא את k .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע שהפונקציות נחתכות בנקודה שבה $x = 1$.

2. נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x) : f'(x) = kx + 2$.

ידוע כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את הפונקציה $g(x) = \frac{6x-1}{x}$ בנקודה שבה $y = 5$

וכי שיפוע המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודת החיתוך שלהן הוא $m = 4$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

3. הפונקציה $f(x)$ משיקה לפונקציה: $g(x) = \frac{4x-1}{x}$.

בנקודת ההשקה העבירו משיק שמשוואתו $y = x + 2$.

הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = x$.

א. מצא את נקודת ההשקה.

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

4. נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x) : f'(x) = ax^2 - 5x + b$.

לפונקציה יש קיצון בנקודה שבה $x = 1$. ידוע ששיפוע המשיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{3x-16}{x}$

בנקודה שבה $x = 2$ זהה לשיפוע המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ באותה נקודה.

א. מצא את a ואת b .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע שהיא עוברת בראשית הצירים.

ג. הראה שאין לפונקציה $f(x)$ עוד נקודות חיתוך עם ציר ה- x מלבד ראשית הצירים.

5. נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = kx + 7\frac{3}{4}$.

ידוע כי לפונקציה $f(x)$ ולפונקציה $g(x) = \frac{4x+4}{x}$ יש משיק משותף בנקודה שבה $x = 4$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את ערך הפרמטר k .

ג. מצא את הפונקציה $f(x)$.

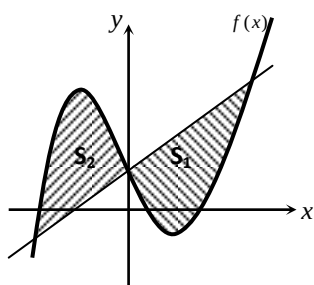
6. נתונה הנגזרת של הפונקציה $f(x)$: $f'(x) = ax^2 + 3x$.
 משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ היא $y = -3x + 8.5$.
 א. מצא את ערך הפרמטר a .
 ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ג. האם יש לגרף הפונקציה עוד משיקים בעלי שיפוע זהה למשיק זה?
 אם כן – מצא אותם, אם לא נמק.

7. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = ax^3 + bx$.
 ידוע כי משוואת המשיק לפונקציה באחת מנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x היא: $y = 16x - 32$.
 כמובן מתקיים גם: $f'(1) = -4$.
 א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
 ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

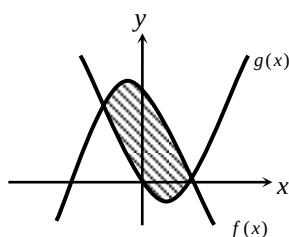
8. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x^2 + kx - 3$.
 ידוע כי ערך הנגזרת בנקודה שבה $x=1$ הוא -4 .
 כמובן הישר $y = 4$ חותך את גרף הפונקציה בנקודות החיתוך של עם ציר ה- y .
 א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ג. האם הישר $y = 4$ חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודות? אם כן מהן?

9. הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא: $f''(x) = 12x$.
 לפונקציה יש נקודת קיצון על ציר ה- x שבה $x = 2$.
 א. האם יש לפונקציה עוד נקודות קיצון?
 ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

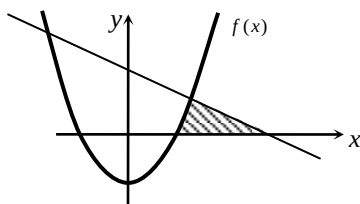
שאלות העוסקות בפונקציה פולינומית - חישובי שטחים (ללא מציאת פונקציה קדומה):



10. לפניך הגרפים של הפונקציות: $f(x) = x^3 - 12x + 1$, $y = 13x + 1$.
 הוכח: $S_1 = S_2$.



11. לפניך נתונות שתי הפונקציות הבאות:
 $f(x) = -1.5x^2 - 3x + 36$, $g(x) = 3x^2 - 12x$.
 א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.
 ב. חשב את השטח הנוצר בין שתי הפונקציות.

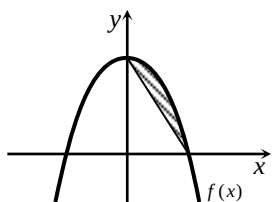


12. נתונות הפונקציה: $f(x) = x^2 - 16$ והישר: $y = -x + 14$.

- מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.
- חשב את השטח המוגבל בין הגרפים ברביע הראשון.

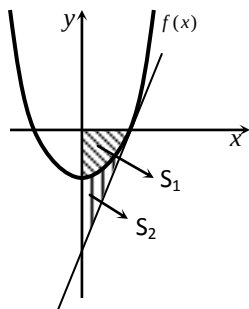
13. נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^3 + 4x$.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- הוכח שציר ה- x מחלק את השטח הכלוא בינו לבין הפונקציה לשני חלקים שווים.



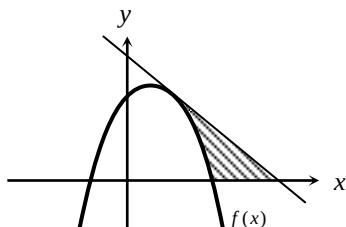
14. לגרף הפונקציה: $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 8$ מעבירים ישר העובר דרך נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים ושיפועו שלילי (ראה איור).

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- מצא את משוואת הישר.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והישר.



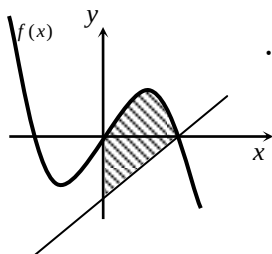
15. לגרף הפונקציה: $f(x) = x^2 - 3x - 4$ מעבירים משיק בעל שיפוע חיובי דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x כמתואר באיור.

- מצא את משוואת המשיק.
- חשב את יחס השטחים $\frac{S_1}{S_2}$ המסומנים באיור.



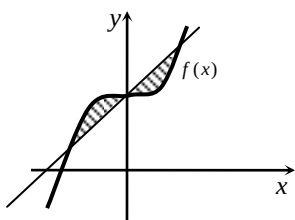
16. לגרף הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ מעבירים משיק בנקודה שבה: $x = 2$ (ראה איור).

- מצא את משוואת המשיק.
- חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



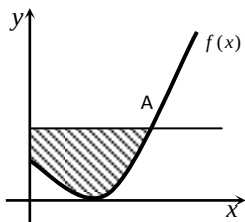
17. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה: $f(x) = 4x - x^3$ והישר: $y = 4x - 8$.

- מצא את נקודות החיתוך בין שני הגרפים.
- חשב את השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר וציר ה- y (המסומן).



18. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה: $f(x) = x^3 + 8$ והישר: $y = x + 8$.

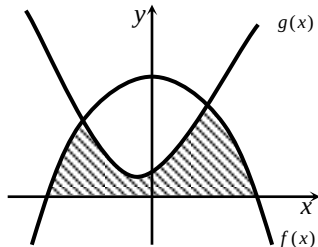
- מצא את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות.
- חשב את השטח הכלוא בין שתי הפונקציות.



19. הישר $y = 4$ חותך את גרף הפונקציה: $f(x) = (x-1)^2$

בנקודה A שברביע הראשון.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- y (המסומן).

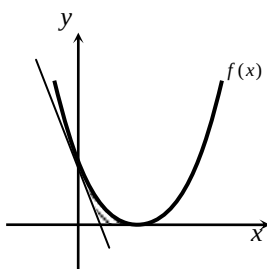


20. באיור שלפניך מתוארים הפונקציות:

$$f(x) = 16 - x^2 \text{ ו- } g(x) = x^2 + 2x + 4$$

א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (המסומן).



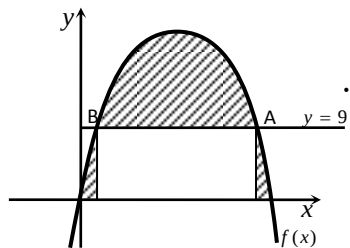
21. נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-2)^2$

מנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y מעבירים משיק.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

ג. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (השטח המסומן).



22. נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 10x$

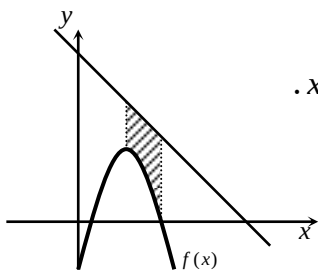
הישר: $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות A ו-B כמתואר באיור.

מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x כך שנוצר מלבן ABCD.

א. מצא את נקודות החיתוך של הישר: $y = 9$ עם גרף הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שטח המלבן ABCD.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x (השטח המסומן).



23. נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 6x - 5$

מעבירים ישר ששיפועו: $m = -1$ וחותר את ציר ה- x שנקודה שבה: $x = 8$.

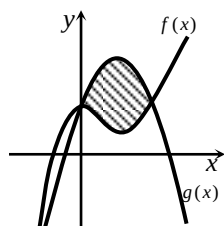
מישר זה מורידים אנכים לגרף הפונקציה בנקודת המקסימום שלה

ובנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x (ראה איור).

א. מצא את משוואת הישר.

ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י הישר וגרף הפונקציה (השטח המסומן).



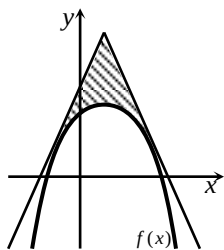
24. נתונות הפונקציות: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ ו- $g(x) = -2x^2 + bx + 2$

הפונקציות נחתכות בנקודה שבה: $x = 2$.

א. מצא את ערך הפרמטר b .

ב. מצא את שאר נקודות החיתוך של שתי הפונקציות.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות (השטח המתואר באיור).



25. לגרף הפונקציה: $f(x) = -x^2 + 4x + 21$ מעבירים משיקים בנקודות

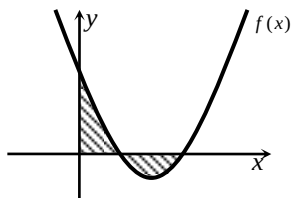
שבהן: $y = 9$ כמתואר באיור. משיקים אלו נחתכים בנקודה A.

א. כתוב את משוואות המשיקים.

ב. מצא את שיעורי הנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י המשיקים וגרף הפונקציה (השטח המסומן).

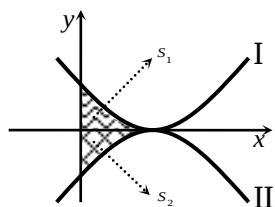
26. א. חשב את האינטגרל הבא: $\int_0^6 (x^2 - 8x + 12) dx$.



ב. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = x^2 - 8x + 12$.

חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- y וציר ה- x .

ג. הסבר מדוע התוצאה שקיבלת אינה תואמת את זו של סעיף א'.

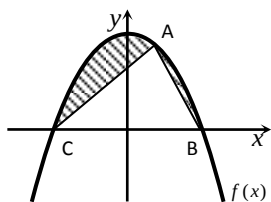


27. נתונות הפונקציות: $f(x) = (x-2)^2$ ו- $g(x) = -(x-2)^2$ כמתואר באיור.

א. התאם בין הפונקציות לגרפים I ו-II.

ב. מסמנים את השטחים שבין כל פונקציה והצירים ב- S_1 ו- S_2 כמתואר באיור.

הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 שווים זה לזה.



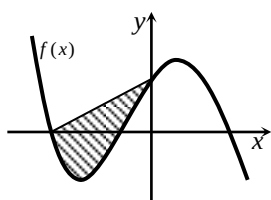
28. נתונה הפונקציה: $f(x) = 9 - x^2$.

מהנקודה $A(1,8)$ שעל הגרף הפונקציה מעבירים ישרים לנקודות

החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x ב- B ו- C כך שנוצר משולש ABC.

א. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.

ב. חשב את השטח מוגבל בין גרף הפונקציה והמשולש ABC (השטח המסומן).



29. נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 18x + 40$.

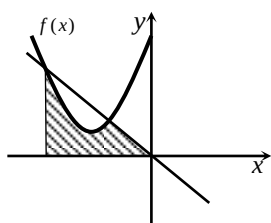
ידוע כי לפונקציה יש נקודת חיתוך עם ציר ה- x שבה $x = -5$.

מנקודה זו מעבירים ישר החותך את הפונקציה בנקודת החיתוך

שלה עם ציר ה- y (ראה איור).

א. כתוב את משוואת הישר.

ב. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והישר (השטח המסומן).



30. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 + 6x + 12$.

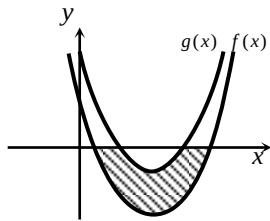
ישר העובר בראשית הצירים חותך את גרף הפונקציה בנקודה

שבה $x = -4$ כמתואר באיור.

א. מצא את משוואת הישר.

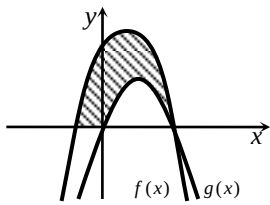
ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והפונקציה.

ג. מצא את השטח המוגבל בין הישר, גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר $x = -4$.



31. נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 7x + 10$ ו- $g(x) = x^2 - 7x + 12$.

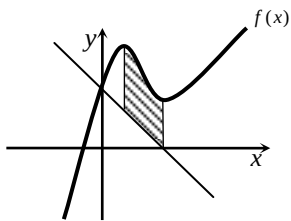
- א. מצא את נקודות החיתוך של שתי הפונקציות עם ציר ה- x ?
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- x (השטח המסומן).



32. באיור שלפניך מתוארות הפונקציות: $f(x) = -x^2 + 2x + k$ ו- $g(x) = 4x - x^2$.

ידוע כי אחת מנקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה- x היא זהה ואינה ראשית הצירים.

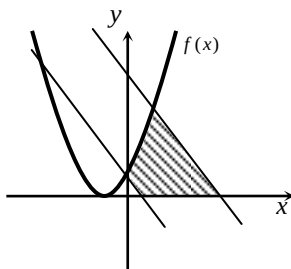
- א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים של הפונקציות וציר ה- x .



33. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$.

מהנקודה $(3, 0)$ שעל ציר ה- x מעבירים ישר החותך את גרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- y כמתואר באיור הסמוך.

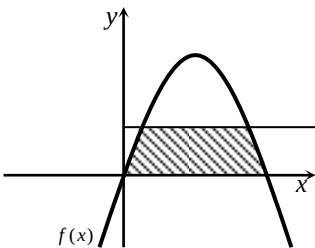
- א. מצא את משוואת הישר.
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ג. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, הישר שמצאת בסעיף א' ואנכים לציר ה- x מנקודות הקיצון.



34. באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x) = (x+1)^2$.

מנקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- y מעבירים ישר l_1 ששיפועו הוא $m = -2$. כמו כן מעבירים ישר נוסף l_2 המקביל לישר l_1 וחותר את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -5$.

- א. מצא את משוואות הישרים l_1 ו- l_2 .
 ב. מצא את שאר נקודות החיתוך של הישרים הנ"ל עם הפונקציה.
 ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישרים וציר ה- x (השטח המסומן).



35. נתונה הפונקציה: $f(x) = kx - x^2$. הישר $y = 9$ חותך את גרף הפונקציה בשתי נקודות.

- ידוע כי שיעור ה- x של אחת מנקודות החיתוך הוא $x = 9$.
 א. מצא את ערך הפרמטר k .
 ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה בין שני הגרפים.
 ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x (המסומן).

שאלות העוסקות בפונקציה פולינומית - מציאת פונקציה קדומה וחישובי שטחים:

36. נתונה הנגזרת: $f'(x) = 6x$. ידוע שהפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 5$.

- א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה וציר ה- x .

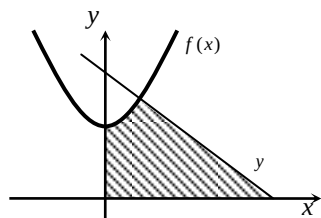
37. לגרף הפונקציה $f(x)$ שנגזרתה היא: $f'(x) = -x^2 + x + 2$ מעבירים משיק מנקודת המקסימום שלה.

ידוע שמשיק זה חותך את גרף הפונקציה בעוד נקודה והיא $(-2.5, 3)$.

א. מצא את נקודת המקסימום.

ב. מצא את הפונקציה.

ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והמשיק (עגל עד לשתי ספרות אחרי הנקודה).



38. הנגזרת של פרבולה מרחפת $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x$.

מהנקודה $(2, 10)$ שעל גרף הפרבולה מעבירים ישר y המאונך למשיק

שם (נורמל) (ראה איור).

א. מצא את משוואת הפרבולה.

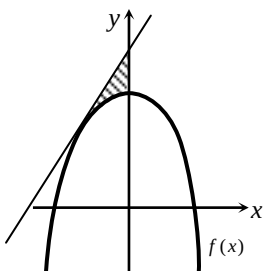
ב. מצא את משוואת הישר y .

ג. חשב את השטח המוגבל בין הגרף הפרבולה, הישר והצירים.

39. נתונה הנגזרת: $f'(x) = -2x + 3$. ידוע שגרף הפונקציה חותך את ציר ה- y בנקודה שבה: $y = 4$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה ובין הצירים.



40. משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = -2$ היא: $y = x + 13$.

הנגזרת של הפונקציה היא: $f'(x) = -4x - 7$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

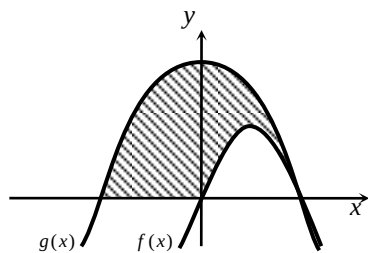
ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- y . (ראה איור).

41. הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$ היא: $f''(x) = 4$.

לפונקציה יש נקודת מינימום $(1, -8)$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה וציר ה- x .



42. באיור שלפניך מתוארות הפונקציות שנגזרותיהן:

$$f'(x) = 4 - 2x, \quad g'(x) = -2x + 1$$

ידוע ששתי הפונקציות חותכות את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 4$.

א. מצא את הפונקציות.

ב. חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות וציר ה- x .

43. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ המתוארת באיור שלפניך היא: $f'(x) = 3 - 2x$.

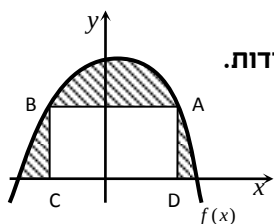
ישר AB שמשוואתו היא $y = 6$ חותך בנקודות A ו- B את גרף הפונקציה.

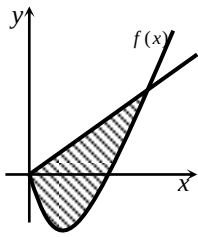
מנקודות אלו מורידים אנכים לציר ה- x כך שנוצר מלבן $ABCD$ ששטחו 30 יחידות.

ידוע ששיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

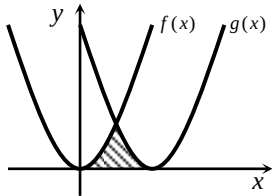
ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המלבן וציר ה- x .





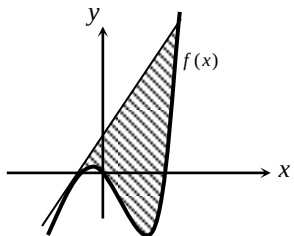
44. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$ והישר: $y = 2x$.
נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 6$ וידוע הישר חותך את
הפונקציה בנקודה שבה ערך ה- y הוא 16.

- מצא את הפונקציה $f(x)$.
- האם יש לגרף הפונקציה ולישר עוד נקודות חיתוך? אם כן מצא אותן.
- חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה והישר.



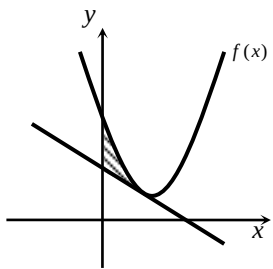
45. באיור שלפניך חותך גרף הפונקציה: $f(x) = x^2$ את גרף הפונקציה $g(x)$
בנקודה שבה $x = 2$. הנגזרת של הפונקציה $g(x)$ היא: $g'(x) = 2x - 8$.
א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

- חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- x (המסומן).

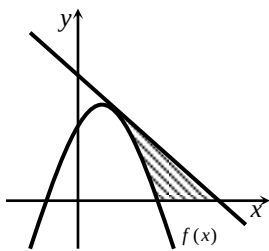


46. נתונה הנגזרת: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.
משיק ששיפועו 15 משיק לפונקציה ברביעי הרביעי בנקודה שבה: $y = -20$.
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. האם יש עוד משיקים לגרף הפונקציה בעלי שיפוע 15? אם כן- מצא אותם.
ג. (i) הראה שהנקודה שבה $x = 7$ משותפת למשיק שמצאת בסעיף
הקודם ולפונקציה $f(x)$.

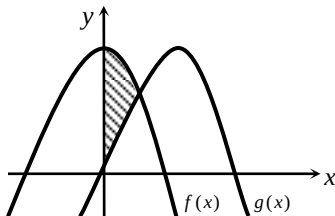
- (ii) מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף הקודם (ראה איור).



47. משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 2$ היא: $y = -x + 3$.
נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = x - 3$.
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. חשב את השטח המוגבל בין המשיק וגרף הפונקציה (ראה איור).

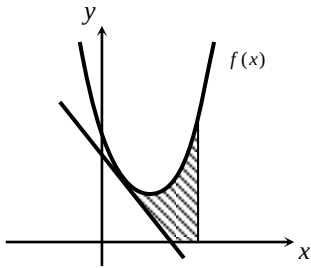


48. הישר $y = -x + 16$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 4$.
נגזרת הפונקציה היא: $f'(x) = -x + 3$.
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
ב. חשב את השטח הכלוא בין המשיק, גרף הפונקציה וציר ה- x (ראה איור).

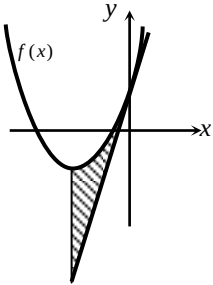


49. הנגזרות של הגרפים $f(x)$ ו- $g(x)$ הן: $g'(x) = 10 - 2x$, $f'(x) = -2x$.
הפונקציות חותכות זו את זו בנקודה (2.5, 18.75).

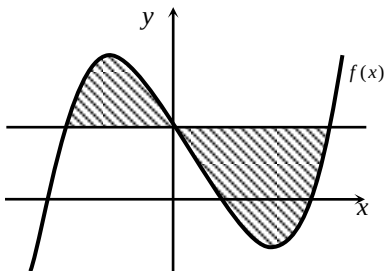
- מצא את הפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$.
- העזר באיור וחשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- y .



50. הישר $y = -2x + 5$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 1$.
 נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 4$.
 א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר: $x = 3$. (ראה איור)



51. הנגזרת של הפרבולה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x + 6$.
 ידוע שהפרבולה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 5$.
 מנקודה זו מעבירים משיק לגרף הפרבולה (ראה איור).
 א. מצא את $f(x)$.
 ב. חשב את השטח מוגבל בין גרף הפרבולה, המשיק וישר היוצא מנקודת הקיצון של הפרבולה (ראה איור).



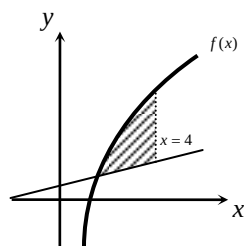
52. נגזרת הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x^2 - 8x - 12$.
 הישר $y = 5$ חותך את גרף הפונקציה $f(x)$ על ציר ה- y .
 א. מצא את הפונקציה $f(x)$.
 ב. מצא את השטח המוגבל בין הישר והפונקציה (ראה איור).

תשובות סופיות:

1. א. $k = 1$. ב. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 1.5x^2 + \frac{1}{6}$. ג. $f(x) = x^2 + 2x + 2$. ד. $k = 2$. ה. $f(x) = x^2 + 2x + 2$.
2. א. $(1, 3)$. ב. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2\frac{1}{2}$. ג. $f(x) = x^3 - 2.5x^2 + 2x$. ד. $a = 3, b = 2$. ה. $f(x) = x^3 - 2.5x^2 + 2x$.
3. א. $y = -0.25x + 6$. ב. $k = -2$. ג. $f(x) = -x^2 + 7\frac{3}{4}x - 10$. ד. $y = -3x + 5\frac{1}{8}$. ה. $f(x) = -2x^3 + 1.5x^2 + 6$.
4. א. $a = -6$. ב. $f(x) = x^4 - 4x^2$. ג. $a = 4, b = -8$. ד. $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + 4$. ה. $k = -4$.
5. א. $(3, 4), (-1, 4)$. ב. $f(x) = 2x^3 - 24x + 32$. ג. $S = 162$. ד. $(4, 0), (-2, 36)$. ה. $f(x) = 2x^3 - 24x + 32$.
6. א. $(-2, 0), (0, 0), (2, 0)$. ב. $S = 44\frac{5}{6}$. ג. $(-6, 20), (5, 9)$. ד. $S = 44\frac{5}{6}$. ה. $(-2, 0), (0, 0), (2, 0)$.
7. א. $(0, 8), (4, 0), (-4, 0)$. ב. $y = -2x + 8$. ג. $S = 5\frac{1}{3}$. ד. $y = 5x - 20$. ה. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{7}{8}$.
8. א. $y = -2x + 7$. ב. $S = \frac{7}{12}$. ג. $(2, 0)$. ד. $S = 12$. ה. $(0, 0), (1, 9), (-1, 7)$.

19. $S = 9\frac{1}{3}$. א. $(2,12)$, $(-3,7)$. ב. $S = 43\frac{2}{3}$. 21. א. $y = -4x + 4$. ב. $(1,0)$. ג. $S = \frac{2}{3}$.
22. א. $(1,9)$, $(9,9)$. ב. $S_{ABCD} = 72$. ג. $S = 94\frac{2}{3}$. 23. א. $y = -x + 8$. ב. $Max(3,4)$. ג. $S = 2\frac{2}{3}$.
24. א. $b = 4$. ב. $(-2,-14)$, $(0,2)$. ג. $S = 4$. 25. א. $y = 8x + 25$, $y = -8x + 57$. ב. $A(2,41)$. ג.
26. $S = 42\frac{2}{3}$. א. 0 . ב. $S = 21\frac{1}{3}$. ג. האינטגרל של סעיף א' מכיל ערכים חיוביים ושליליים יחדיו.
- פעולת האינטגרל מחסרת בין השניים ומכיוון שהגדלים החיוביים והשליליים שווים בערך מוחלט (זואת ניתן לראות לפי החישוב של סעיף ב') התקבל הסכום 0 . 27. א. $I = f(x)$, $II = g(x)$.
28. א. $B(3,0)$, $C(-3,0)$. ב. $S = 12$. 29. א. $y = 8x + 40$. ב. $S = 93\frac{3}{4}$.
30. א. $y = -x$. ב. $(-3,3)$. ג. $S = 7\frac{5}{6}$. 31. א. $(2,0)$, $(3,0)$, $(4,0)$, $(5,0)$. ב. $S = 4\frac{1}{3}$.
32. א. $k = 8$. ב. $S = 25\frac{1}{3}$. 33. א. $y = 3 - x$. ב. $Min(3,3)$, $Max(1,7)$. ג. $S = 8$.
34. א. $y_{l_1} = -2x + 1$, $y_{l_2} = -2x + 6$. ב. $(-4,9)$, $(1,4)$. ג. $S = 6\frac{5}{12}$.
35. א. $k = 10$. ב. $(1,9)$. ג. $S = 81\frac{1}{3}$. 36. א. $f(x) = 3x^2 - 75$. ב. $S = 500$.
37. א. $(2,3)$. משיק בנקודת המקסימום מקביל לציר ה- x ולכן משוואתו תהיה מהסוג $y = k$.
- מאחר והנקודה הנוספת היא $(-2.5,3)$ ניתן להבין שמשוואת המשיק היא $y = 3$ ולכן נקודת המקסימום תהיה $(2,3)$.
- ב. $f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{3}$. ג. $S = 11\frac{25}{64} \approx 11.391$.
38. א. $f(x) = x^2 + 6$. ב. $4y + x = 42$. ג. $S = 214\frac{2}{3}$. 39. א. $f(x) = -x^2 + 3x + 4$. ב. $S = 20\frac{5}{6}$.
40. א. $f(x) = -2x^2 - 7x + 5$. ב. $S = 5\frac{1}{3}$. 41. א. $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$. ב. $S = 21\frac{1}{3}$.
42. א. $f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = -x^2 + x + 12$. ב. $S = 46.5$. 43. א. $f(x) = -x^2 + 3x + 10$. ב. $S = 27\frac{1}{6}$.
44. א. $f(x) = x^2 - 6x$. ב. $(0,0)$. ג. $S = 85\frac{1}{3}$. 45. א. $g(x) = (x-4)^2$. ב. $S = 5\frac{1}{3}$.
46. א. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$. ב. $y = 15x + 28$. ג. $S = 546.75$ (ii) .
47. א. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 5$. ב. $S = 1\frac{1}{3}$. 48. א. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8$. ב. $S = 42\frac{2}{3}$.
49. א. $f(x) = 25 - x^2$, $g(x) = 10x - x^2$. ב. $S = 31\frac{1}{4}$. 50. א. $f(x) = x^2 - 4x + 6$. ב. $S = 2\frac{5}{12}$.
51. א. $f(x) = x^2 + 6x + 5$. ב. $S = 9$. 52. א. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 12x + 5$. ב. $S = 189\frac{1}{3}$.

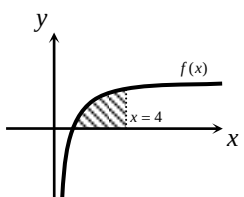
שאלות שונות העוסקות בפונקציה רציונלית:



1. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{12}{x^4} + 3$.

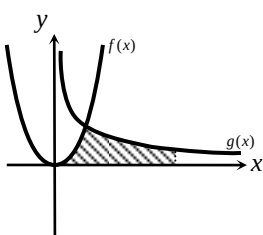
- ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה הנמצאת ברביע הראשון היא: $y = 15x - 16$.
א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

- מעבירים ישר $y = 2.75x$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A הנמצאת ברביע הראשון.
ב. מצא את שיעורי הנקודה A.
ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והישרים: $y = 2.75x$ ו- $x = 4$ (המקווקו).



2. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2 - \frac{16}{x^3}$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר: $x = 4$.



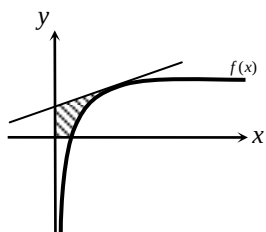
3. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x) = 2x^2$ ו- $g(x) = \frac{a}{x^2}$ בתחום: $x > 0$.

- ידוע כי הגרפים נחתכים ברביע הראשון בנקודה הנמצאת על הישר: $y = 4x$.
א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים ואת a .
ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר: $x = 4$.

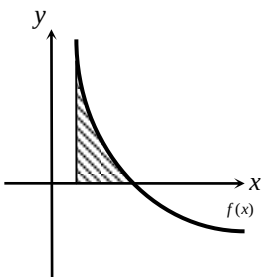
4. א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{27}{x^2} + 3x + 1$ בנקודה שבה: $x = 1$.

- ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק והישר: $x = 4$.



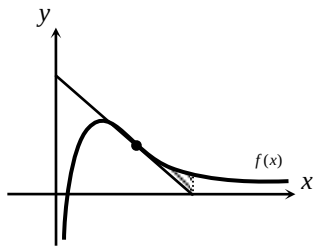
5. נתונה הפונקציה: $f(x) = 8 - \frac{a}{x^3}$ בתחום: $x > 0$. ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$ היא: $y = 3x + 4$.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
ב. חשב את השטח המוגבל ע"י גרף הפונקציה, המשיק והצירים.



6. גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{a - x^2}{x^2}$ חותך את ציר ה- x בנקודה $(6, 0)$.

- א. מצא את a וכתוב את הפונקציה.
ב. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והישר: $x = 2$.



*הערה: תרגיל זה בנוי מבעיית קיצון וחישוב אינטגרלי יחד:

7. א. מבין כל המשיקים לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}$

מצא את משוואת המשיק ששיפועו מינימלי.

באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה והמשיק שמצאת בסעיף א'.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, המשיק ואנך

לציר ה- x היוצא מנקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

שאלות שונות העוסקות בפונקציה אי-רציונאלית:

1. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{k}{2\sqrt{x}} - 2x$

ידוע כי שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 4$ הוא: $m = -7.75$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה משיק לה בנקודת

החיתוך שלה עם ציר ה- x .

2. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = kx - \frac{1}{\sqrt{x}}$. נתונה הפונקציה: $g(x) = 2x^2 - 9x - 4$.

ידוע כי המשיק לגרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה: $x = 3$ מקביל למשיק לגרף

הפונקציה $f(x)$ בנקודה שבה: $x = 1$.

א. מצא את k .

ב. מצא את הפונקציה $f(x)$ אם ידוע כי היא חותכת את גרף הפונקציה $g(x)$ בנקודה שבה: $y = 77$.

3. א. מצא על גרף הפונקציה: $g(x) = 2\sqrt{x}$ נקודה שבה שיעור ה- x שווה לשיעור ה- y .

ב. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 1 - \frac{3}{2\sqrt{x}}$.

ידוע כי הפונקציה $f(x)$ חותכת את הפונקציה $g(x)$ בנקודה שמצאת בסעיף הקודם.

מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. האם הגרפים של הפונקציה $f(x)$ ו- $g(x)$ נחתכים בנקודות נוספות? אם כן מצא אותן.

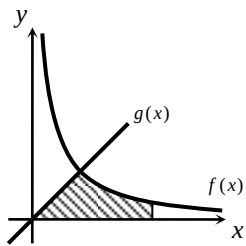
4. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + k$

ידוע כי גרף הפונקציה עולה בתחום: $0 < x < 4$ ויורד בתחום: $x > 4$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. מצא את הפונקציה אם ידוע כי ערכה המרבי הוא: 8.

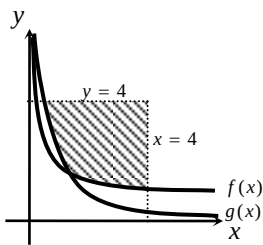
ג. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .



5. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{16}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = 2x - 1$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח המוגבל בין שני הגרפים, ציר ה- x והישר: $x = 9$.



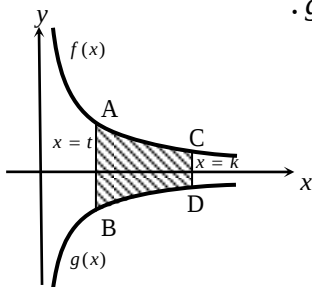
6. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. מעבירים את הישרים: $x = 4$ ו- $y = 4$ כך שנוצר הריבוע ABCO.

i. חשב את השטח הכלוא בין הישרים הנ"ל והגרפים של שתי הפונקציות.

ii. חשב את היחס בין השטח שמצאת בסעיף הקודם לבין שטח הריבוע.



7. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}}$ ו- $g(x) = -\frac{3}{\sqrt{x}}$.

מעבירים שני ישרים: $x = k$ ו- $x = t$ אשר חותכים של את הגרפים

של הפונקציות ויוצרים את הקטעים AB ו-CD. ידוע כי: $AB = 2CD$.

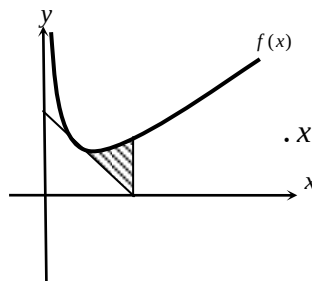
א. הראה כי: $k = 4t$.

ב. השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות

והישרים: $x = k$ ו- $x = t$ הוא: $S = 12$. מצא את k .

8. באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + x$.

א. מצא את נקודת המינימום שלה.



מנקודת המינימום של הפונקציה מעבירים ישר לנקודה: $(2, 0)$ שעל ציר ה- x .

ב. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, הישר ואנך לציר ה- x

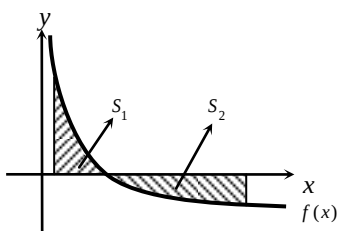
היוצא מהנקודה $(2, 0)$ עד לנקודת החיתוך עם גרף הפונקציה.

9. א. מצא עבור איזה ערך של a יתקיים: $\int_1^a \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$.

באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1$.

מעבירים שני אנכים לציר ה- x והם: $x = 1$ ו- $x = 13$ כך

שנוצרים השטחים: S_1 ו- S_2 .



ב. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ג. i. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x והאנך $x = 1$, (S_1) .

ii. היעזר בתוצאה שקיבלת ובסעיף א' וקבע לכמה שווה השטח: S_2 . נמק את טענתך.

10. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{\sqrt{x}}$.

א. ענה על הסעיפים הבאים:

- i. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ii. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- iii. הראה כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.

ב. מעבירים משיק לגרף הפונקציה ששיפועו הוא: $m = \frac{17}{16}$. מצא את נקודת ההשקה.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x ואנך לציר ה- x מנקודת ההשקה שמצאת בסעיף הקודם.

תשובות סופיות - פונקציה רציונאלית:

1. א. $f(x) = -\frac{4}{x^3} + 3x$ ב. $A(2, 5.5)$ ג. $S = 1.125$

2. א. $(2, 0)$ ב. $S = 2.5$ 3. א. $a = 32$, ב. $(2, 8)$ ג. $S = 13\frac{1}{3}$

4. א. $y = -51x + 82$ ב. $S = 182.25$ 5. א. $a = 1$, ב. $f(x) = 8 - \frac{1}{x^3}$ ג. $S = 3$

6. א. $a = 36$, ב. $f(x) = \frac{36 - x^2}{x^2}$ ג. $S = 8$ 7. א. $y = -x + 2$ ב. $S = \frac{1}{8}$

תשובות סופיות - פונקציה אי-רציונאלית:

1. א. $k = 1$ ב. $f(x) = \sqrt{x} - x^2 + 14$

2. א. $k = 4$ ב. $f(x) = 2x^2 - 2\sqrt{x} - 156$

3. א. $(4, 4)$ ב. $f(x) = x - 3\sqrt{x} + 6$ ג. כן - $(9, 6)$

4. א. $k = -2$ ב. $f(x) = 8\sqrt{x} - 2x$ ג. $(0, 0)$, $(16, 0)$

5. א. $(4, 8)$ ב. $S = 48$ 6. א. $(1, 1)$ ב. $S = 11$ ii. $\frac{11}{16}$ 7. א. $k = 4$

8. א. $Min(0.5, 1.5)$ ב. $S = 1.75$

9. א. $a = 13$ ב. $(5, 0)$ ג. $S_1 = 2$ ii. לפי $\int_1^{13} \left(\frac{3}{\sqrt{2x-1}} - 1 \right) dx = 0$ נקבל כי: $S_1 + S_2 = 0$

ולכן: $S_2 = |-S_1| = 2$

10. א. i. $x > 0$ ii. $(4, 0)$ iii. הנגזרת היא: $f'(x) = 1 + \frac{4}{x\sqrt{x}} > 0$ ב. $(16, 14)$ ג. $S = 88$

פרק 6 – גיאומטריה אנליטית

6.1 - נקודה וישר

המרחק בין שתי נקודות: $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

אמצע קטע בין שתי נקודות: $x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

שיפוע בין שתי נקודות: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

משוואת ישר: $y = mx + n$ m הוא שיפוע הישר, n הוא ערך ה- y של נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה- y .

ישרים מקבילים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 \neq n_2$.

ישרים חותכים מקיימים: $m_1 \neq m_2$.

ישרים מתלכדים מקיימים: $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$.

שיפועי ישרים מאונכים מקיימים: $m_1 \cdot m_2 = -1$.

נוסחה למציאת משוואת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

הקשר בין שיפוע ישר לזווית שהוא יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x : $m = \tan \alpha$.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

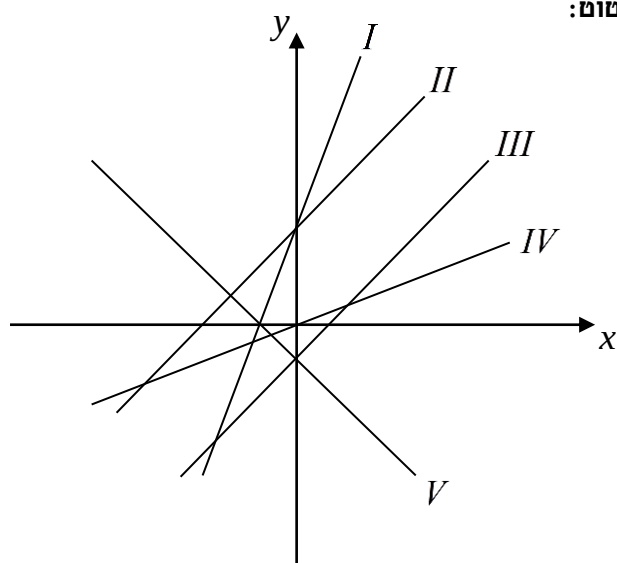
מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
1		רקע היסטורי, מיקום נקודות על מערכת צירים, רביעים
2		אמצע קטע בין שתי נקודות – הסבר ונוסחה
3	תרגיל 1	
4		מרחק בין שתי נקודות – הסבר ונוסחה
5	תרגיל 2	
6		שיפוע בין שתי נקודות – הסבר ודוגמאות
7		משמעות מושג השיפוע בין שתי נקודות
8		שיפועי קטעים המקבילים לצירים
9		משוואת הישר $y = mx + n$ - חלק א'
10		משוואת הישר $y = mx + n$ - חלק ב': המשמעות של m ו- n , מציאת נקודות חיתוך עם הצירים, שרטוט ישר על מערכת צירים
11		איך יודעים אם הנקודה נמצאת על ישר
12		מציאת נקודת החיתוך בין שני ישרים
13		מצב הדדי בין ישרים, תכונות, שיפועי ישרים מאונכים
14	תרגיל 3	
15	תרגיל 4	
16		ישרים שמקבילים לצירים
17		הנוסחה למציאת משוואת ישר $y - y_1 = m(x - x_1)$
18	תרגיל 5	
19		הנוסחה $m = \tan \alpha$ וההסבר כיצד הגיעו אליה
20	תרגיל 6 א'	
21	תרגיל 6 ב'	
22	תרגיל 7	

תרגילים:

1. הנקודות $A(2, -7)$, $B(-10, 4)$ ו- $C(6, 11)$ הן שלושה קדקודים של מקבילית. מצא את שיעורי הקדקוד הרביעי.

2. נתונה נקודה B ברביע השלישי, ששיעור ה- y שלה גדול פי 3 משיעור ה- x שלה ומרחקה מהנקודה $A(-4, 1)$ הוא 5. מצא את שיעורי הנקודה B .

3. התאם בין משוואות הישרים הבאים לישרים בשרטוט:



1) $y = x + 3$

2) $y = -x - 1$

3) $y = 2x + 3$

4) $y = x - 1$

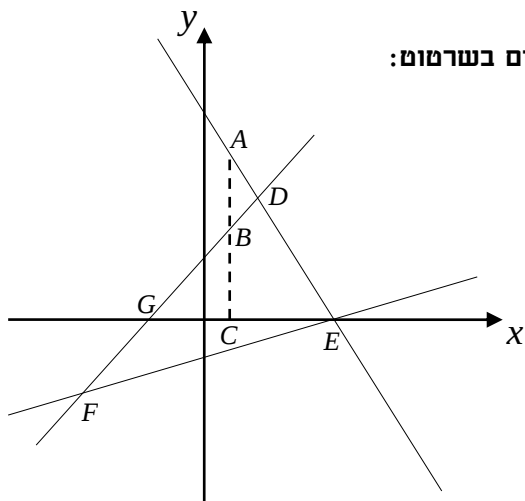
5) $y = \frac{1}{2}x$

4. במשולש $\triangle ABC$ נתונים שיעורי הקדקודים: $A(5, -1)$, $B(3, 7)$, $C(-5, 5)$. הוכח שהמשולש ישר זווית ושווה שוקיים.

5. נתון מעוין $ABCD$ שבו נתונים הקדקודים $A(-9, 1)$ ו- $B(5, -7)$. משוואת הישר עליו מונח האלכסון AC היא $x + 3y + 6 = 0$.

א. מצא את משוואת הישר עליו מונח האלכסון BD .

ב. מצא את משוואת הישר עליו מונחת הצלע BC .



6. שלוש המשוואות הבאות מייצגות את הישרים המופיעים בשרטוט:

$$2x + y - 8 = 0, \quad x - y + 2 = 0, \quad x - 4y - 4 = 0$$

א. חשב את שטח המשולש $\triangle DEF$.

ב. נתון: $BC = 3$. חשב את אורך הקטע AB .

7. BD הוא התיכון לצלע AC במשולש $\triangle ABC$ שבו נתון הקודקוד $A(-6, 1)$. משוואת התיכון BD היא $x - y = 1$ ומשוואת הצלע BC היא $3x + 5y = 67$. מצא את שיעורי הקודקוד C .

פתרונות:

1. $D(18, 0)$ 2. $B(-1, -3)$ 3. $I(1)$ II (2) V (3) I (4) III (5) IV
5. א. $l_{BD}: y = 3x - 22$ ב. $l_{BC}: y = -\frac{1}{8}x - 6\frac{3}{8}$ 6. א. $S_{DEF} = 18$ יח"ש
7. $AB = 3$ יחידות אורך ב. $C(14, 5)$

6.2 – המעגל

הגדרת המעגל:

המקום הגיאומטרי של כל הנקודות, הנמצאות במרחק קבוע מנקודה קבועה במישור נקרא מעגל.

משוואת מעגל: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

משוואת מעגל קנוני: $x^2 + y^2 = R^2$.

לפניך טבלת הסרטונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרטון
סרטון 1		הגדרת המעגל, משוואת המעגל, מעגל קנוני
סרטון 2	תרגיל 1	
סרטון 3	תרגיל 2	
סרטון 4	תרגיל 3	
סרטון 5	תרגיל 4	
סרטון 6	תרגיל 5	
סרטון 7		מעגל שמשיק לצירים
סרטון 8	תרגיל 6	
סרטון 9	תרגיל 7	
סרטון 10	תרגיל 8	
סרטון 11	תרגיל 9	
סרטון 12		סיכום ביניים, ידע מקדים

תרגילים:

1. מצא את מרכזם ורדיוסם של המעגלים הבאים:

א. $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 49$

ב. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 10$

ג. $(x-m)^2 + (y+n)^2 = m^2 + n^2$

2. מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(-4,5)$ ומרכזו בנקודה $O(2,-1)$.

3. מצא את משוואתו של מעגל שעובר בנקודה $A(11,2)$, רדיוסו 13 ומרכזו נמצא על

הישר $y = 2x - 1$.

4. מצא את משוואתו של מעגל שהנקודות $A(-2,3)$ ו- $B(4,-3)$ הן קצות הקוטר שלו.

5. מצא את משוואתו של מעגל שמרכזו נמצא על הישר $x = 4$, רדיוסו 10 והוא חותך מציר ה- x מיתר שאורכו 12.

6. מצא את משוואתו של מעגל המשיק לשני הצירים ורדיוסו 4.

7. מצא את משוואות המשיקים למעגל $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$ בנקודות על המעגל שבהן $y = 5$.

8. נתון מעגל שמשוואתו $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 25$.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

ב. העבירו קוטר במעגל, המאונך לציר ה- x . מצא את שטח המרובע הנוצר על ידי נקודות החיתוך שמצאת בסעיף א' ונקודת החיתוך של הקוטר עם המעגל, הנמצאת ברביע הראשון.

9. נתון ישר שמשוואתו $y = 2x - 10$. הישר חותך את ציר ה- x בנקודה A ואת ציר ה- y

בנקודה B . בנקודה A מעבירים משיק למעגל שהקטע AB הוא קוטרו. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה C . מצא את אורך הקטע BC .

פתרונות:

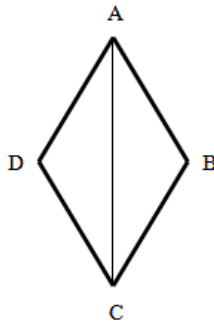
1. $P(-2,1)$ 2. $M(3,-3)$ 3. $M(3,-3)$ 4. 1.697 יחידות אורך. 5. א. 3. ב. $\frac{8}{\sqrt{10}}$.

ג. 2. 6. $S_{ABC} = 2.5$ יח"ש. 7. $(-1, -4)$ 8. $y = 3x - 4$.

9. $y = 2x + 10$, $y = \frac{2}{11}x + 6\frac{4}{11}$.

6.3 – שאלות מסכמות:

תרגילים משולבים ללא שימוש במעגל:



1. במעוין ABCD שיעור אחת הנקודות הוא $(0, 6)$.

ידוע כי משוואת האלכסון AC היא: $y = -1.5x + 6$

ואחת ממשוואות הצלעות היא: $5y + x = 4$.

א. מצא את משוואת האלכסון השני.

ב. מצא את שאר קודקודי המעוין.

2. במרובע ABCD ידוע כי שיפוע הצלע BC הוא 3 ושיעורי הנקודה A הם $(1, 4)$.

א. איזה מרובע הוא? הראה חישוב מתאים.

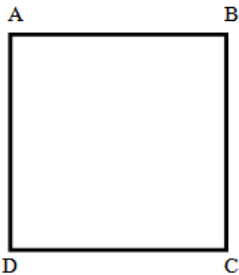
נתון גם: $D(4, 13)$, $m_{CD} = -\frac{1}{3}$, $BC = \sqrt{90}$.

ב. איזה מרובע הוא כעת? הראה חישוב מתאים.

נתון גם: $B(-8, 7)$.

ג. איזה מרובע הוא כעת? הראה חישוב מתאים.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.



3. אמצע הקטע AB נמצא בראשית הצירים. ידוע כי $A(6, 8)$.

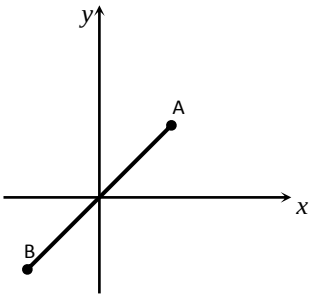
א. מצא את שיעור הנקודה B.

מוסיפים את הנקודה C כך שמרחקה מראשית הצירים הוא 10.

ב. העזר במרחק AB וקבע איזה משולש הוא המשולש ABC.

נתון כי שיעורי הנקודה C הם: $(6, -8)$.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.



4. הנקודה D היא אמצע הקטע AB שמשוואתו היא: $3y + 2x + 4 = 0$.

שיעורי הנקודה A הם $(-8, 4)$ ו-B היא נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-x.

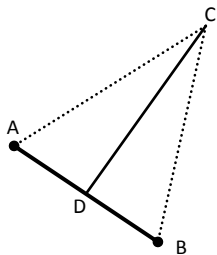
א. מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.

מהנקודה D מעלים אנך שחותך את ציר ה-y בנקודה C.

ב. איזה משולש הוא המשולש ABC? נמק את תשובתך.

ג. (i) חשב את שיעורי הנקודה C.

(ii) חשב את שטח המשולש ABC.



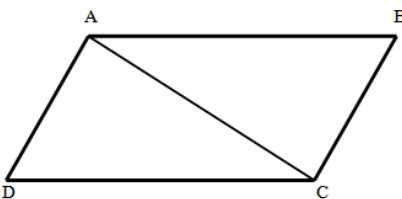
5. במקבילית ABCD האלכסון AC מאונך לצלע AD.

שיעורי הנקודה C הם $(-7, -3)$ ושיפוע הקטע BC הוא: $m = \frac{1}{3}$.

הנקודה A נמצאת על ציר ה-y והנקודה B נמצאת על ציר ה-x.

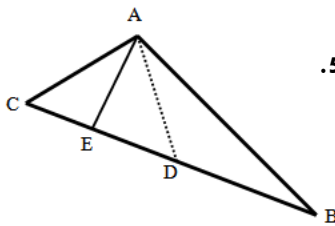
א. מצא את משוואות הישרים AC ו-BC.

ב. חשב את שיעורי הנקודות A, B ו-D.



ג. חשב את שטח המקבילית.

6. במשולש ABC הצלע AC מונחת על הישר: $y = 5$. הנקודה A נמצאת על ציר ה- y .



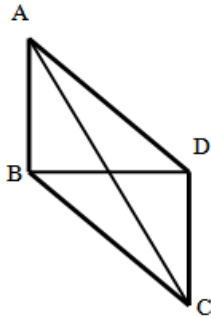
הנקודה B נמצאת ברביע הראשון ומרחקה מכל ציר הוא 11.

הנקודה D היא אמצע הצלע BC במשולש ABC ושיעור ה- x שלה הוא 5.

א. מצא את שיעורי הנקודה D ואת אורך הקטע AC.

הנקודה E נמצאת על הצלע BC כך שמתקיים: $AE \perp BC$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה E.



7. במקבילית ABCD האלכסונים AC ו-BD מונחים על

הישרים: $y = -x + 8$ ו- $y = 4$ בהתאמה.

הצלע CD מונחת על הישר: $x = 8$.

א. מצא את שיעורי הנקודות של קודקודי המקבילית.

ב. מצא את משוואת הצלע AB.

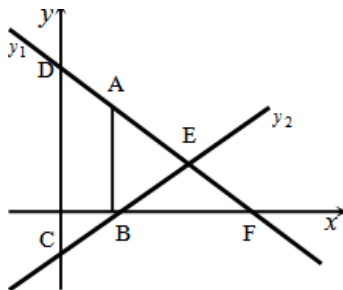
ג. חשב את שטח המקבילית.

8. נתונים שני ישרים: $y_1 = -\frac{x}{2} + 8$, $y_2 = \frac{x}{2} - 2$.

מעלים מהישר y_2 אנך מנקודת החיתוך שלו B עם ציר ה- x שחותך את הישר y_1 בנקודה A.

הנקודות C ו-D הן נקודות החיתוך של הישרים עם ציר ה- y כך שנוצר מרפז ABCD.

א. מצא את שיעורי הנקודות של קודקודי המרפז ABCD.



הישרים y_1 ו- y_2 נחתכים בנקודה E. הנקודה F היא נקודת החיתוך

של הישר y_1 עם ציר ה- x כך שנוצר המשולש BEF.

ב. חשב את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. חשב את יחס השטחים: $\frac{S_{BEF}}{S_{ABCD}}$.

9. במרובע ABCD ידוע כי: $m_{AB} = m_{CD} = 2$.

שיעורי הקודקוד B הם: $(-1, -5)$ ונקודת פגישת האלכסונים K הם: $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{3})$.

א. מצא את משוואת הצלע AB ואת משוואת האלכסון BD.

נתון גם כי: $C(-4, -3)$ ו- $d_{AB} = \sqrt{80}$.

ב. מצא את משוואת הצלע CD.

ג. איזה מרובע הוא המרובע ABCD? נמק והראה חישוב מתאים.

10. במרובע ABCD שקדקודיו הם: $A(-5,12)$, $B(11,4)$, $C(7,8)$, $D(1,2)$ בנו משולש DEF

כך ש-E ו-F הם בהתאמה אמצעי הצלעות AB ו-BC.

א. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ב. חשב את השיפועים הבאים: m_{DE} (1) m_{EF} (2).

ג. איזה משולש הוא המשולש DEF?

ד. חשב את שטח המשולש DEF.

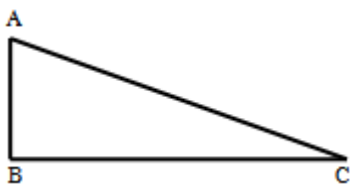
11. במשולש ישר זווית ABC ($\angle B = 90^\circ$) שיעורי הנקודה A הם: $(-4,12)$ ושיעורי הנקודה B הם: $(-2,6)$.

א. מצא את משוואת הניצב BC.

הנקודה D נמצאת על היתר AC ושיעוריה הם: $(-2,11)$.

ב. מצא את שיפוע היתר AC.

ג. מצא את שיעורי הקדקוד C.



12. AD ו-BE הם בהתאמה גבהים לצלעות BC ו-AC במשולש ABC.

ידוע כי שיעורי נקודת פגישת הגבהים K הם: $(1,3)$.

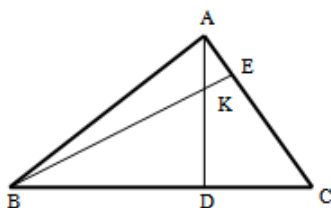
שיעורי הנקודות D ו-E הם: $D(-2,4)$, $E(3,5)$.

א. צא את משוואת הגובה AD ואת משוואת הצלע AC.

ב. מצא את שיעורי הקדקוד A.

ג. מצא את משוואת הגובה BE ואת משוואת הצלע BC.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד B.



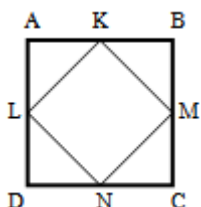
13. המרובע ABCD הוא ריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים.

הצלע AB מונחת על הישר: $y = 8$, הצלע BC מונחת על הישר: $x = 5$, הצלע CD

מונחת על הישר: $y = -2$ והצלע AD מונחת על הישר: $x = -5$.

מקצים על אמצעי הצלעות את הנקודות K, L, M, N כך שנוצר המרובע LMNK.

איזה מרובע הוא המרובע LMNK? נמק והראה חישוב מתאים.



14. במשולש ABC הקדקודים A ו-B הם נקודות החיתוך של הישר AB עם הצירים והנקודה C

היא נקודת החיתוך של שני הישרים BC ו-AC כפי שמתואר באיור. הקטעים AB ו-BC מונחים

בהתאמה על הישרים: $y = -3x + 12$ ו- $4y + x = 4$.

הנקודה D היא נקודת החיתוך של הישר BC עם ציר ה-y.

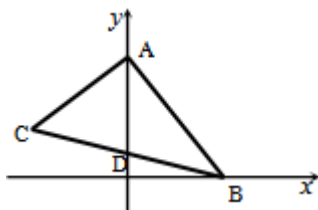
ידוע כי הקטע AD מחלק את המשולש ABC לשני משולשים ABD ו-ACD שווי שטח.

א. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-D.

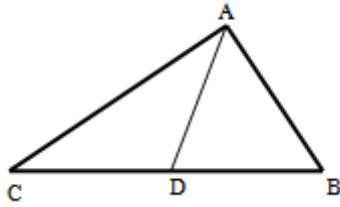
ב. חשב את שטח המשולש ABD ומצא את שיעורי הנקודה C.

ג. איזה קטע במשולש ABC הוא הקטע AD? נמק.

ד. חשב את שטח המשולש ABC.



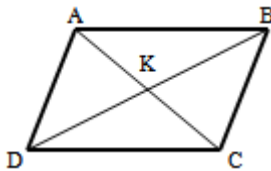
15. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש ABC כך שהקטע AD מחלק אותו לשני משולשים שווים שטח ABD ו-ACD. הצלע BC מונחת על הישר: $y = 4$ וידוע ששיעור ה- x של הנקודה C הוא: $x_C = -1$. כמוכן נתון: $A(7,8)$, $m_{AB} = -2$.



- מצא את משוואת הצלע AB.
- מצא את שיעורי הנקודות B ו-D.
- חשב את אורך הצלע BC ואת אורך הקטע AD.
- (i) איזה קטע הוא AD בתוך המשולש ABC?
(ii) איזה משולש הוא המשולש ABC?

16. במקבילית ABCD נקודת פגישת האלכסונים K נמצאת על ציר ה- y בנקודה שבה: $y = 4$.

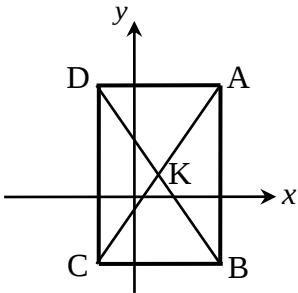
- הנקודה C נמצאת על ציר ה- x ושיפוע הצלע BC הוא: $m_{BC} = -\frac{1}{3}$. שיעורי הנקודה D הם: $(5,7)$.



- מצא את שיעורי הנקודה B.
- כתוב את משוואת הישר BC.
- מצא את שיעורי הנקודות C ו-A.

17. הצלע AB של המלבן ABCD מונחת על הישר: $x = 8$.

- אורך האלכסון במלבן הוא 26 ס"מ ונקודת פגישת האלכסונים K היא $(3,3)$.
- מצא את שיעורי הקדקודים A ו-B אם ידוע ש-A נמצאת ברביע הראשון.
 - מצא את שיעורי הקדקודים C ו-D.
 - מצא את שטח המלבן.



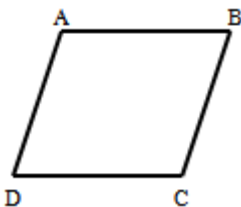
18. משוואות הצלעות AB, BC ו-AC של המשולש ABC הם בהתאמה:

$$y = x + 5, \quad y = 3x - 1, \quad y = 5x - 3$$

- סרטט את המשולש במחברת הבחינה שלך וענה על השאלות הבאות:
- מצא את שיעורי הנקודות של קודקודי המשולש.
 - מצא את שלושת המשוואות של הגבהים במשולש ABC.
 - הראה שהגבהים חותכים זה את זה באותה נקודה.

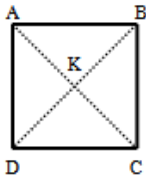
19. במעין ABCD הנקודה D נמצאת על ציר ה- x ונתון: $A(3,2)$, $B(5,6)$.

- מצא את שיעורי הנקודה D אם ידוע שהיא נמצאת מימין לציר ה- y .
- מצא את שיעורי הנקודה C.
- (i) חשב את השיפועים: m_{AD} , m_{AB} .
(ii) מה ניתן לומר על המעין ABCD?



20. בריבוע ABCD שיעורי נקודת פגישת האלכסונים K הם: (6,8). אורך אלכסון בריבוע הוא 20.

הנקודה B נמצאת על ציר ה- x והנקודה D נמצאת על ציר ה- y (הנקודות לא על ראשית הצירים).

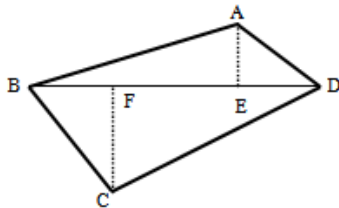


א. מצא את שיעורי הנקודות של הקדקודים B ו-D.

ב. מצא את משוואת הישר AC.

ג. חשב את שטח הריבוע.

21. נתון מרובע ABCD שקדקודיו הם: $A(3,13)$, $B(-2,4)$, $C(9,3)$, $D(8,14)$.



מורידים גבהים AE ו-CF לאלכסון BD.

א. מצא את משוואת האלכסון BD ואת אורכו.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את אורכי הגבהים AE ו-CF.

ד. חשב את שטח המרובע ABCD.

22. נתון מרובע ABCD ששיעורי קדקודיו הם: $A(5,32)$, $B(7,36)$, $C(5,26)$, $D(3,22)$.

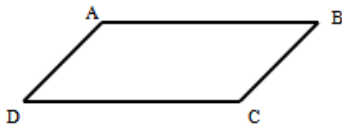
א. הוכח שהמרובע הוא מקבילית.

ב. כתוב את משוואת האלכסון AC.

ג. מצא את נקודת פגישת האלכסונים של המקבילית.

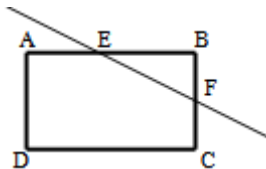
ד. מצא את משוואת הישר המקביל לצלעות AB ו-CD.

של המקבילית ועובר דרך נקודת פגישת האלכסונים.



23. המרובע ABCD הוא מלבן. שיעורי הקדקוד B הם: (1,6) ושיפוע הצלע AB הוא: $m=3$.

דרך אמצעי הצלעות AB ו-BC מעבירים ישר שמשוואתו היא: $y = \frac{1}{2}x + 3$



החותך בנקודות E ו-F בהתאמה.

א. מצא את משוואות הצלעות AB ו-BC.

ב. מצא את שיעורי הנקודות E ו-F.

ג. מצא את שיעורי הקדקודים A ו-C.

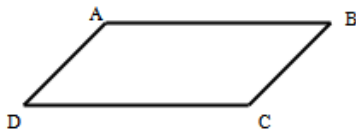
24. המרובע ABCD הוא מקבילית שבו אורך הצלע A גדול פי 2 מאורך הצלע BC.

נתון: $A(2,5)$, $B(7,17)$, $x_D = 4.5$ הנקודה D נמצאת ברביע הרביעי.

א. מצא את שיעור ה- y של הנקודה D ($y_D = ?$).

ב. מצא את שיעורי נקודת פגישת האלכסונים של המקבילית.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.



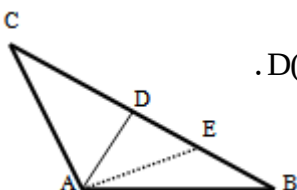
25. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). מעבירים במשולש את הגובה

לבסיס AD ומסמנים נקודה E על הבסיס BC כך שמתקיים: $BE = DE$.

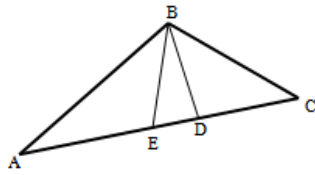
קדקוד הראש A נמצא בראשית הצירים ונתון כי: $D(5,7)$, $E(8.5,2.5)$.

א. מצא את שיעורי שאר קדקודי המשולש.

ב. כתוב את משוואת השוק AC.



26. הקדקוד A של המשולש ABC נמצא בראשית הצירים. מורידים גובה BD ותיכון BE לצלע AC



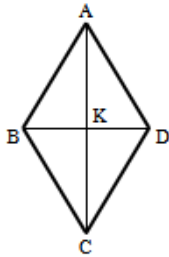
כמתואר באיור. ידוע כי: $m_{BD} = -4$, $B(4,18)$, $x_E = 6$.

א. מצא את משוואת הגובה BD.

ב. מצא את משוואת הצלע AC.

ג. חשב את שיעורי הנקודות E, D ו-C.

27. המרובע ABCD הוא מעוין. הנקודה $K(5,7)$ היא נקודת פגישת אלכסוני המעוין.



ידוע כי: $m_{AB} = 2$, $B(1,4)$.

א. מצא את משוואת הצלע AB.

ב. מצא את שיפוע האלכסון BD.

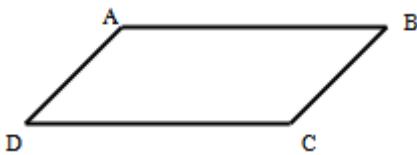
ג. מצא את משוואת האלכסון AC.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד A.

28. המרובע ABCD הוא מקבילית שבה אורך הצלע AB גדול פי 2 מאורך הצלע הסמוכה לה.

שיעורי שניים מקודקודי המקבילית הם: $A(9,8)$, $B(1,2)$.

שיעורי הנקודה C, אשר נמצאת ברביע הראשון, מקיימים: $x_C = y_C$.



א. מצא את אורך הצלע AB.

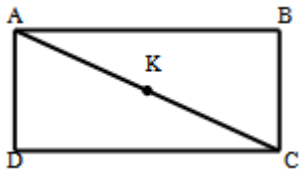
ב. מצא את שיעורי הקדקוד C.

ג. מצא את שיעורי נקודת פגישת האלכסונים.

ד. מצא את שיעורי הקדקוד D.

29. במלבן ABCD שיעורי הנקודה D הם $(2,3)$.

שיעורי נקודת פגישת האלכסונים K הם $(4,6)$ ושיפוע האלכסון AC הוא: $m_{AC} = 2$.



שיפוע הצלע CD הוא: $m_{CD} = 3$.

א. מצא את שיעורי הקדקוד B.

ב. מצא את משוואת הצלע AB.

ג. מצא את משוואת האלכסון AC ואת שיעורי הקדקוד A.

30. הצלע AC של המשולש ABC נמצאת על ציר ה-y. שיעורי הנקודה C הם $(0,2)$

ושיעורי הנקודה A הם $(0,12)$. הנקודה E היא אמצע הצלע AC. הנקודה B נמצאת על ציר ה-x

כל ששיעור ה-x שלה הוא: $x_B = -4$. מעבירים דרך הנקודה E ישר DE

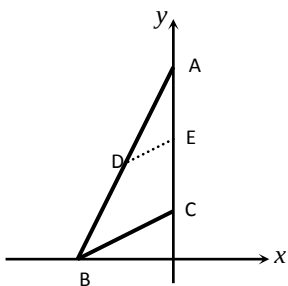
המקביל לצלע BC כמתואר באיור.

א. מצא את שיעורי הנקודה E.

ב. כתוב את משוואת הצלע BC.

ג. כתוב את משוואת הישר DE.

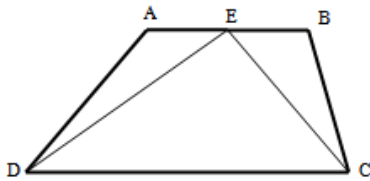
ד. מצא את שיעורי הנקודה D.



31. המרובע ABCD הוא מרפז. הנקודה E היא אמצע הבסיס AB וידוע כי היא נמצאת על ציר ה- x .

שיעורי הנקודה B הם $(3, 2)$ והצלע AD מונחת על הישר: $x = -5$.

אורך הקטע DE הוא $\sqrt{80}$ כך ש-D ברביע השלישי וכן: $\angle DEC = 90^\circ$.



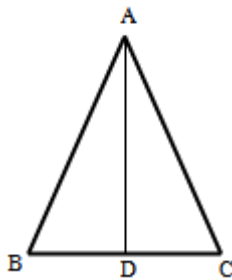
א. מצא את שיעורי הנקודות A, D ו-E.

ב. מצא את משוואת הקטע CE ואת משוואת הבסיס CD.

ג. מצא את שיעורי הנקודה C.

ד. חשב את שטח המשולש DEC.

32. המשולש ABC הוא משולש שווה שוקיים ($AB = AC$). הבסיס BC נמצא על הישר: $y = -2$.



מקצים נקודה D על הבסיס BC כך שלקדקוד A ולנקודה D

מתקיים: $x_A = x_D = 1$. הנקודה A נמצאת ברביע הראשון והנקודה B

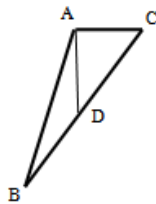
נמצאת ברביע השלישי. נתון כי: $d_{BD} = 5$.

א. איזה קטע הוא AD במשולש ABC? נמק את תשובתך.

ב. מצא את שיעורי הקדקודים B ו-C.

ג. שטח המשולש הוא 20. מצא את שיעורי הקדקוד A.

33. הצלע AC של המשולש ABC מונחת על הישר: $y = 8$. הקטע AD הוא תיכון לצלע BC



ומשוואתו היא: $x = 3$. נתון: $B(-1, -2)$.

א. מצא את שיעורי הקדקוד C וכתוב את משוואת הצלע BC.

ב. איזה משולש הוא המשולש ACD? נמק וחשב את שטחו.

ג. חשב את שטח המשולש ABC.

34. המרובע ABCD הוא מעוין שאלכסוניו נפגשים בראשית הצירים.

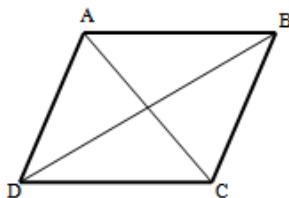
שיעורי אחד מקודקודי המעוין הם $(-2, 2)$.

א. מצא את משוואות האלכסונים של המעוין.

ידוע כי שיעור ה- x של אחד מקודקודי המעוין הוא 5.

ב. מצא את שאר קודקודי המעוין.

ג. חשב את שטח המעוין.



35. נתון משולש ABC.

הצלע AB מונחת על הישר: $y = x + 2$ והצלע BC מונחת על הישר: $y = 2x - 5$.

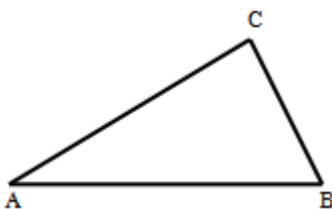
א. מצא את שיעורי הנקודה B.

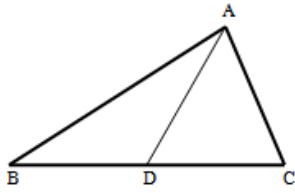
ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא 1.

ב. מצא את שיעור ה- y של הנקודה A.

ג. כתוב את משוואת הישר AC אם ידוע כי שיפועו הוא: $m = \frac{1}{2}$.

ד. מצא את שיעורי הנקודה C.





36. הקטע AD הוא תיכון לצלע BC במשולש ABC.

ידוע כי: $D(2,3)$, $B(1,1)$.

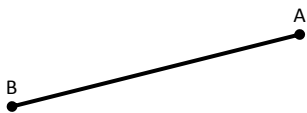
א. מצא את שיעורי הקדקוד C.

ב. מצא את משוואת הצלע BC.

הצלעות AC ו-AB מונחות בהתאמה על הישרים: $y = x$, $y = 8 - x$.

ג. מצא את שיעורי הקדקוד A.

ד. חשב את אורך התיכון AD.



37. באיור שלפניך מתואר הקטע שקצותיו הם: $A(-5,-2)$ ו- $B(0,10)$.

א. מצא את אורך הקטע AB.

הנקודה C היא אמצע הקטע AB.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך הנקודה C והנקודה $(2.5,9)$.

ד. קבע אילו מהנקודות הבאות נמצאות על הישר שמצאת בסעיף הקודם. נמק את בחירתך.

א. $(4.5,11)$ ב. $(6.5,0)$ ג. $(0.5,6)$ ד. $(0.5,6)$

תשובות סופיות:

1. א. $y = \frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3}$ ב. $(-1,1)$, $(4,0)$, $(5,5)$.

2. א. אף מרובע. לא ניתן להצביע על אף תכונה. ב. מלבן. ניתן להראות כי יש למרובע שני זוגות צלעות נגדיות מקבילות ושתי זוויות ישרה.

ג. ריבוע. ניתן להראות כי קיימות זוג צלעות סמוכות שוות. ד. $S = 90$.

3. א. $B(-6,-8)$. ב. משולש ישר זווית. אם במשולש יש תיכון שמחצית הצלע אותה הוא חוצה

אז המשולש הוא ישר זווית. ג. $S = 96$.

4. א. $B(-2,0)$, $D(-5,2)$. ב. משולש שווה שוקיים. הקטע CD הוא אנך אמצעי ולכן הוא תיכון וגובה

ולבסיס במשולש ABC. ג. (i) $C(0,9.5)$ (ii) $S = 32.5$. 5. א. $BC: y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, $AC: y = -3x - 24$.

ב. $A(0,-24)$, $B(2,0)$, $D(-9,-27)$. ג. $S = 210$.

6. א. $AD = 1$, $D(5,8)$. ב. $E(-0.2,5.4)$. 7. א. $A(0,8)$, $B(0,4)$, $C(8,0)$, $D(8,4)$. ב. $x = 0$. ג. $S = 32$.

8. א. $A(4,6)$, $B(4,0)$, $C(0,-2)$, $D(0,8)$. ב. $E(10,3)$, $F(16,0)$. ג. $\frac{S_{BEF}}{S_{ABCD}} = \frac{9}{16}$.

9. א. $AB: y = 2x - 3$, $BD: y = 6x + 1$. ב. $CD: y = 2x + 5$. ג. מרפז. ניתן להראות שיש זוג צלעות נגדיות

מקבילות (AB ו-CD) ואינן שוות.

10. א. $E(3,8)$, $F(9,6)$. ב. (1) $m_{DE} = 3$ (2) $m_{EF} = -\frac{1}{3}$. ג. משולש ישר זווית.

ניתן לראות כי שתי הצלעות EF ו-DE מאונכות זו לזו על סמך הסעיף הקודם. ד. $S = 20$.

11. א. $y = \frac{1}{3}x + 6\frac{2}{3}$. ב. $m = -\frac{1}{2}$. ג. $C(4,8)$.

12. א. $AC: y = -x + 8$, $AD: y = -\frac{1}{3}x + 3\frac{1}{3}$, ב. $A(7,1)$, ג. $BC: y = 3x + 10$, $BE: y = x + 2$.

ד. $B(-4, -2)$, 13. ריבוע.

14. א. $A(0,12)$, $B(4,0)$, $D(0,1)$, ב. $S_{ABD} = 22$, $C(-4,2)$, ג. תיכון. קטע במשולש

המחלק אותו לשני משולשים שווים שטח הוא תיכון. ד. $S_{ABC} = 44$.

15. א. $y = -2x + 22$, ב. $D(4,4)$, $B(9,4)$, ג. $BC = 10$, $AD = 5$.

ד. (i) תיכון -קטע במשולש שחוצה אותו לשני משולשים שווים שטח הוא תיכון. (ii) משולש ישר

זווית - אם במשולש יש תיכון לצלע ששווה למחציתה אז המשולש הוא ישר זווית.

16. א. $B(-5,1)$, ב. $y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, ג. $C(-2,0)$, $A(2,8)$, 17. א. $B(8,-9)$, $A(8,15)$.

ב. $D(-2,15)$, $C(-2,-9)$, ג. $S_{ABCD} = 240$, 18. א. $A(2,7)$, $B(1,2)$, $C(3,8)$.

ב. $5y + x = 43$, $3y + x = 23$, $y + x = 3$, 19. א. $D(7,0)$, ב. $C(9,4)$, ג. (i) $m_{AB} = 2$, $m_{AD} = -\frac{1}{2}$.

(ii) המעוין ABCD הוא ריבוע - מעוין עם זווית ישרה הוא ריבוע.

20. א. $B(0,16)$, $D(12,0)$, ב. $y = \frac{3}{4}x + 3\frac{1}{2}$, ג. $S_{ABCD} = 200$.

21. א. $y = x + 6$, $d_{BD} = \sqrt{200}$, ב. $E(5,11)$, $F(3,9)$, ג. $d_{AE} = \sqrt{8}$, $d_{CF} = \sqrt{72}$, ד. $S_{ABCD} = 80$.

22. ב. $x = 5$, ג. $(5,29)$, ד. $y = 2x + 19$.

23. א. $AB: y = 3x + 3$, $BC: y = -\frac{1}{3}x + 6\frac{1}{3}$, ב. $E(0,3)$, $F(4,5)$, ג. $A(-1,0)$, $C(7,4)$.

24. א. $y_D = -1$. (הפתרון השני נפסל מאחר והנקודה D נמצאת ברביע הרביעי שבו ערך שיעור ה-y הוא

שלילי). ב. $(5.75, 8)$, ג. $C(9.5, 11)$, 25. א. $C(-2, 16)$, $B(12, -2)$, ב. $y = -8x$.

26. א. $y = -4x + 34$, ב. $y = \frac{1}{4}x$, ג. $E(6, 1.5)$, $D(8, 2)$, $C(12, 3)$.

27. א. $y = 2x + 2$, ב. $m_{BD} = \frac{3}{4}$, ג. $3y + 4x = 41$, ד. $A(3.5, 9)$.

28. א. $d_{AB} = 10$, ב. $C(5, 5)$, ג. $(7, 6.5)$, ד. $D(13, 11)$.

29. א. $B(6, 9)$, ב. $y = 3x - 9$, ג. $y = 2x - 2$, $A(7, 12)$.

30. א. $E(0, 7)$, ב. $y = \frac{1}{2}x + 2$, ג. $y = \frac{1}{2}x + 7$, ד. $D(-2, 6)$.

31. א. $C(5, -3)$, $E(-1, 0)$, $A(-5, -2)$, $D(-5, -8)$, ב. $CD: y = \frac{1}{2}x - 5\frac{1}{2}$, $CE: y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, ג. $C(5, -3)$.

32. $S_{DEC} = 30$. א. תיכון/גובה/חוצה זווית הראש - הקטע AD מאונך לבסיס BC ולכן מקיים את

שלושתם. ב. $C(6, -2)$, $B(-4, -2)$, ג. $A(1, 2)$.

33. א. $y = 1.25x - 0.75$, $C(7, 8)$, ב. משולש ישר זווית. הקטעים AC ו-AD מאונכים. ג. $S_{ACD} = 10$, $S_{ABC} = 20$.

34. א. $y = x$, $y = -x$, ב. $(2, -2)$, $(-5, -5)$, $(5, 5)$, ג. $S_{ABCD} = 40$, 35. א. $B(7, 9)$, ב. $y = 3$.

ג. $y = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$, ד. $C(5, 5)$, 36. א. $C(3, 5)$, ב. $y = 2x - 1$, ג. $A(4, 4)$, ד. $AD = \sqrt{5}$.

37. א. $AB = 13$, ב. $C(-2.5, 4)$, ג. $y = x + 6.5$, ד. א. שאר הנקודות לא מקיימות את משוואת הישר.

תרגילים עם מעגל ללא משיק:

1. א. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של הישרים: $y = 2x - 1$

ו- $y = -3x + 14$ ורדיוסו הוא: $R = \sqrt{34}$.

ב. מצא את נקודות החיתוך של מעגל זה עם הצירים.

ג. חשב את שטח המשולש שקדקודיו הם נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים (שמצאת שסעיף הקודם).

2. נתון המעגל: $(x+4)^2 + (y-5)^2 = 50$.

ישר שמשוואתו: $6y = 8x + 12$ חותך את המעגל בשתי נקודות כך שנוצר מיתר בניהן.

א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך בין הישר והמעגל.

ב. חשב את אורך המיתר הנ"ל.

3. הנקודה $(12,5)$ נמצאת על היקף המעגל שמשוואתו היא: $(x-a)^2 + (y-8)^2 = 25$

כאשר: $a < 10$ פרמטר.

א. מצא את a .

ב. מצא את משוואת הישר שעליו מונח הקוטר המחבר בין הנקודה $(12,5)$ ומרכז המעגל.

ג. חשב את המרחק של הנקודה $(12,5)$ מראשית הצירים.

4. משוואות הצלעות AB ו-BC במשולש ABC הן בהתאמה: $2y - x = 56$ ו- $8y + x = 104$.

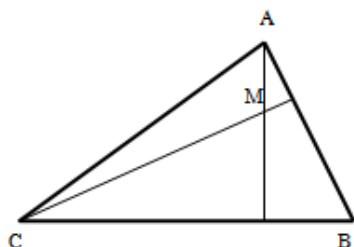
מעבירים גבהים לצלעות AB ו-BC אשר נחתכים בנקודה $M(0,-2)$ שבתוך המשולש.

א. מצא את משוואות הגבהים.

ב. מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. מצא את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו

הוא הקטע BM.



5. קודקודי המרובע ABCD הם: $A(3,8)$, $B(6,5)$, $C(3,2)$, $D(0,5)$.

חוסמים את מרובע זה בתוך מעגל.

א. איזה מרובע הוא המרובע ABCD? (מקבילית, מלבן, מעוין, ריבוע או מרפז כלשהו?)

(העזר בחישובי שיפועי ומרחקי צלעות).

ב. מצא את משוואת המעגל החוסם את המרובע ABCD.

6. הישרים: $9y + 11x = 94$ ו- $y = -3x + 14$ נחתכים בנקודה B.

בנקודה זו עובר מעגל שמרכזו בנקודה: $M(-9,1)$.

ידוע שמעגל זה חותך את הישרים (חוץ מהנקודה B)

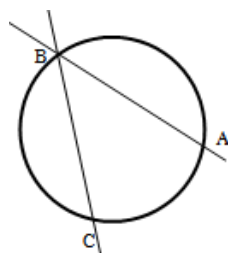
בעוד שתי נקודות A ו-C (ראה איור).

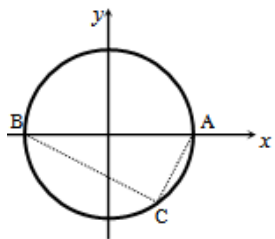
א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את משוואת המעגל.

ג. מצא את שיעורי הנקודה A – נקודת החיתוך של

הישר שמשוואתו: $y = -3x + 14$ עם המעגל.





7. בסרטוט שלפניך מתואר המעגל הקנוני: $x^2 + y^2 = 289$.

המעגל חותך את ציר ה- x בנקודות A ו-B.

הנקודה C נמצאת על היקף המעגל ברביע הרביעי כך שנוצר המשולש ABC.

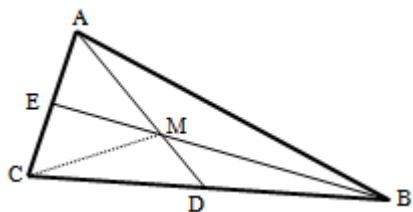
ידוע ששיעור ה- x בנקודה C הוא 15.

א. מצא את שיעור ה- y של הנקודה C.

ב. חשב את שיעורי הנקודות A ו-B ואת שטח המשולש ABC.

ג. מצא נקודה D ברביע השלישי כך ששטח המשולש ABD יהיה

זהה לשטח המשולש ABC.



8. קודקודי המשולש ABC הם $A(2,5)$, $B(7,-3)$, $C(0,1)$.

מעבירים תיכונים AD ו-BE לצלעות BC ו-AC בהתאמה.

מנקודת פגישת האלכסונים M מותחים את הקטע CM

כך שנוצר מעגל שמרכזו בנקודה M ורדיוסו הוא הקטע CM.

א. מצא את משוואות האלכסונים AD ו-BE.

ב. מצא את שיעורי הנקודה M ואת אורך הקטע CM.

ג. כתוב את משוואת המעגל.

9. הנקודה $A(17,4)$ נמצאת על המעגל שמשוואתו: $(x-7)^2 + (y-4)^2 = R^2$.

הישר $x=1$ חותך את המעגל בשתי נקודות B ו-C כך ש-B נמצאת ברביע הרביעי.

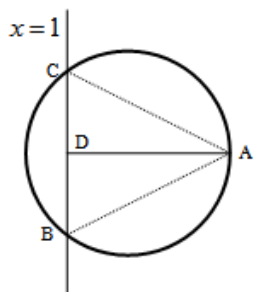
מעבירים את הקטע AD המאונך לישר BC וידוע כי הנקודה D היא אמצע BC.

א. מצא את רדיוס המעגל.

ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.

ג. (i). חשב את מרחק הנקודה A מהישר $x=1$.

(ii). חשב את שטח המשולש ABC.



10. הנקודות M ו-D נמצאות על הישר: $y=12$.

ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה M הוא 9 וכי המרחק של

הנקודה M מראשית הצירים גדול ב-6 מהמרחק

בין הנקודות D ו-M (ראה איור).

בונים מעגל שמרכזו נמצא בנקודה M ורדיוסו הוא האורך DM.

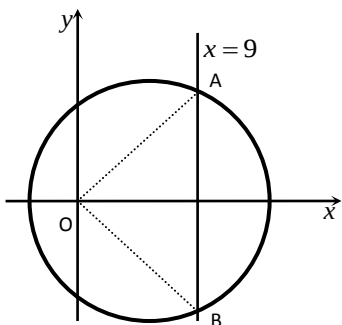
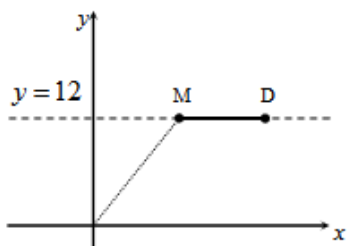
א. (i). מצא את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.

(ii). מצא את שיעור ה- x של הנקודה D.

ב. כתוב את משוואת המעגל.

ג. האם המעגל הזה חותך את ציר ה- x ואת ציר ה- y ?

הראה חישוב מתאים לטענתך.



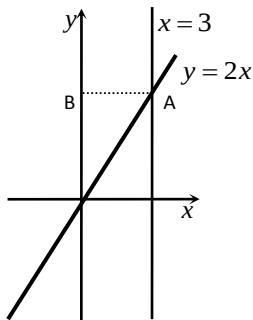
11. באיור שלפניך מתואר המעגל שמשוואתו: $(x-6)^2 + y^2 = 45$.

מעבירים את הישר: $x=9$ החותך את המעגל בנקודות A ו-B.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. כתוב את משוואות הישר AO (O – ראשית הצירים).

ג. חשב את שטח המשולש AOB.



12. באיור שלפניך מתואר הישר: $y = 2x$.

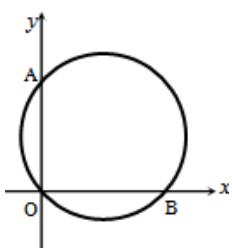
מעבירים את הישר $x = 3$ החותך את הישר השני בנקודה A.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

מעבירים מהנקודה A אנך לציר ה-y AB.

ב. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה B ורדיוסו הוא הקטע AB.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה-y.



13. באיור שלפניך מתואר המעגל: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$.

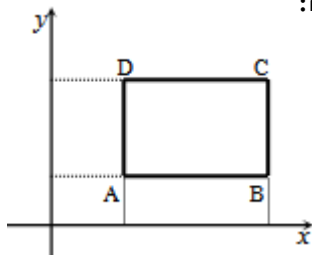
המעגל חותך את הצירים בנקודות A, B ו-O.

א. מצא את נקודות החיתוך של המעגל עם הצירים.

ב. מצא נקודה C הנמצאת על היקף המעגל ברביע הראשון

כך שהמרובע ABCO יהיה מלבן.

ג. חשב את היקף המלבן.



14. באיור שלפניך מתואר מלבן ABCD שצלעותיו מונחות על הישרים הבאים:

$$y = 2, y = 8, x = 3, x = 11$$

א. מצא את שיעורי הנקודות של קודקודי המלבן.

ב. חשב את אורך האלכסון במלבן.

ג. כתוב את משוואת המעגל החוסם את המלבן.

ד. האם מעגל זה חותך את הציר ה-x? הראה חישוב מתאים.

15. א. מצא את נקודת החיתוך של הישרים: $y = -4x + 7$ ו- $3y = x + 5$.

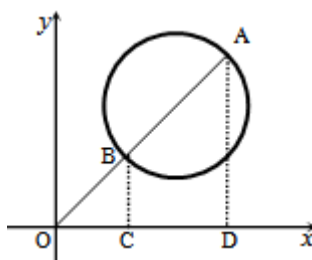
ב. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודת החיתוך של הישרים ועובר דרך

נקודת החיתוך של הישר: $3y = x + 5$ עם ציר ה-x.

ג. מסמנים על הישר: $y = -4x + 7$ שלוש נקודות A, B ו-C.

ידוע כי שיעור ה-x של כל נקודה הוא: $x_A = 1, x_B = 0, x_C = -1$.

קבע איזו נקודה נמצאת בתוך המעגל.



16. באיור שלפניך נתון המעגל: $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 32$.

א. הוכח כי מעגל זה אינו חותך את הצירים.

מעבירים ישר AO המחבר את ראשית הצירים עם מרכז המעגל

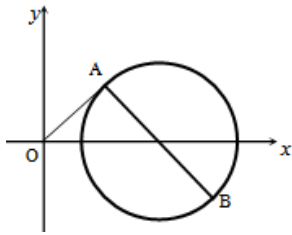
וחותך את המעגל בנקודות A ו-B.

ב. כתוב את משוואת ישר זה.

ג. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של הישר עם המעגל.

מנקודות החיתוך מורידים אנכים AD ו-BC לציר ה-x.

ד. חשב את שטח הטרפז ABCD.



17. באיור שלפניך נתון המעגל: $(x-6)^2 + y^2 = 5$.

הישר: $y = -0.5x + 3$ חותך את המעגל בשתי נקודות A ו-B.

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

מעבירים את הישר AO (O – ראשית הצירים).

ב. חשב את אורך הקטע AO.

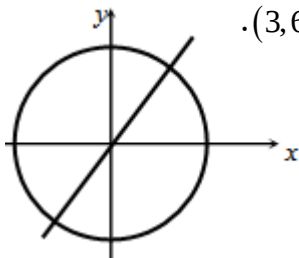
ג. חשב את שטח המשולש הנוצר בין הקטע AO, ציר ה-x והישר AB.

18. המעגל: $x^2 + (y-4)^2 = R^2$ חותך את הישר: $y = x + 7$ בנקודה $(2, 9)$.

א. מצא את רדיוס המעגל R.

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר והמעגל.

ג. חשב את אורך המיתר שנוצר בין שתי נקודות החיתוך.



19. הישר שמשוואתו היא: $y = mx$ חותך את המעגל: $x^2 + y^2 = 45$ בנקודה $(3, 6)$.

א. מצא את m.

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של הישר עם המעגל.

ג. הראה כי המיתר שנוצר בין שתי נקודות החיתוך של

הישר והמעגל הוא קוטר במעגל.

תרגילים עם מעגל ומשיק:

20. ישר שמשוואתו: $y = 2x - 7$ חותך את המעגל: $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 5$ בשתי נקודות P ו-Q.

ידוע שמרחק הנקודה P מראשית הצירים גדול יותר מאשר המרחק של

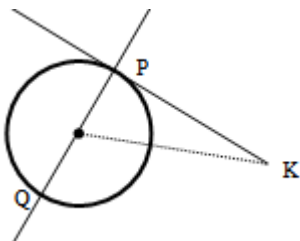
הנקודה Q מראשית הצירים. דרך הנקודה P מעבירים משיק למעגל.

א. מצא את שיעורי הנקודה P.

ב. מצא את משוואת המשיק.

ג. הנקודה K נמצאת על המשיק ושיעור ה-x של הוא 10.

חשב את מרחק הנקודה K ממרכז המעגל.



21. מעגל שמרכזו M משיק לצירים בנקודות: A(10,0) ו-B(0,10) כמתואר באיור.

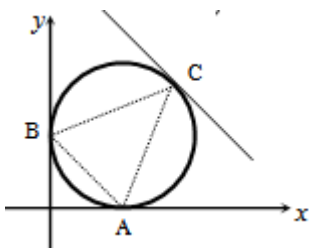
מעבירים משיק למעגל שמשוואתו היא: $y = -\frac{3}{4}x + 30$ אשר משיק למעגל בנקודה C.

א. מצא את משוואת המעגל.

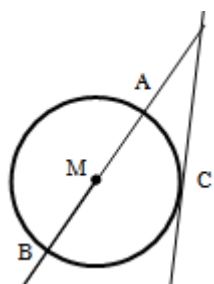
ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. חשב את אורכי הצלעות של המשולש ABC

ואת ערך המכפלה: $AB \cdot AC \cdot BC$.



22. הנקודות A, B ו-M נמצאות על הישר: $y = 3x - 12$ כך ש-M היא אמצע AB.



בונים מעגל שמרכזו בנקודה M והוא עובר בנקודות A ו-B.

ידוע כי: $x_B = -1$, $y_A = 3$.

מהנקודה $C(11, -3)$ שעל היקף המעגל מעבירים משיק למעגל.

א. מצא את שיעורי הנקודות A, B ו-M.

ב. כתוב את משוואת המעגל.

ג. (i). מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה C.

(ii). מצא את נקודת החיתוך בין המשיק והישר: $y = 3x - 12$.

23. הנקודה $A(6, 24)$ נמצאת על היקף המעגל שמשוואתו: $(x+4)^2 + y^2 = R^2$.

מנקודה זו מעבירים משיק למעגל.

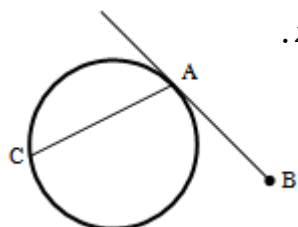
על המשיק מסמנים נקודה B והעל היקף המעגל מסמנים נקודה נוספת C (ראה איור).

הנקודה C נמצאת ברביע השלישי, כמוכן ידוע כי: $x_B = 18$ וכי: $x_C = -14$.

א. מצא את רדיוס המעגל וכתוב את המשוואה.

ב. מצא את שיעורי הנקודות B ו-C.

ג. העזר בחישוב אורכי הקטעים AB ו-AC וחשב את היחס: $\frac{AB}{AC}$.



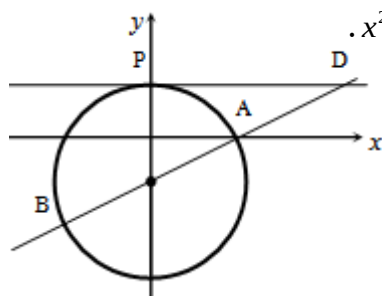
24. המעגל שמשוואתו: $(x-4)^2 + (y-b)^2 = 41$ עובר בראשית הצירים ומרכזו

נמצא ברביע הרביעי.

א. מצא את משוואת המעגל.

ב. מצא את נקודת החיתוך השנייה של המעגל עם ציר ה-x.

ג. מצא את משוואת המשיק בנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם.



25. הנקודה P נמצאת על היקף המעגל שמשוואתו היא: $x^2 + (y+3)^2 = 25$.

מנקודה זו מעבירים משיק אשר מקביל לציר ה-x כמתואר באיור.

בנוסף, מעבירים ישר חותך העובר דרך נקודת מרכז המעגל וחותך

את המעגל בנקודות A ו-B (ברביע השלישי).

ידוע כי הישר החותך נחתך עם המשיק בנקודה $D(6\frac{2}{3}, 2)$.

א. כתוב את משוואת המשיק.

ב. כתוב את משוואת הישר החותך.

ג. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

26. המעגל שמשוואתו: $x^2 + (y-10)^2 = 100$ חסום במשולש הישר זווית ושווה שוקיים ABC

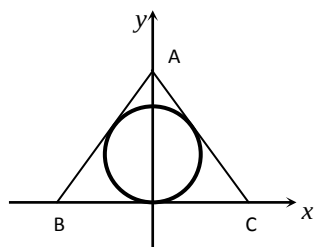
($\angle A = 90^\circ$) (ראה איור).

הנקודות B ו-C נמצאות על ציר ה-x ושיעוריהן הם: $C(24, 0)$, $B(-24, 0)$.

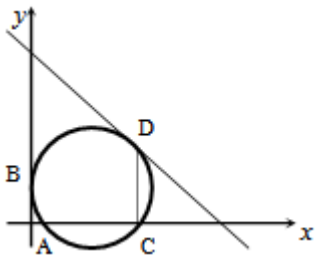
ידוע כי המעגל משיק לשוק AC של המשולש בנקודה שבה $x = 6$.

א. (i) מצא את השיפוע של השוקיים AC ו-AB.

(ii) כתוב את משוואות השוקיים AC ו-AB.



- ב. מצא את נקודת ההשקה של השוק AB עם המעגל.
ג. הראה כי הקודקוד A נמצא על ציר ה- y .



27. מעגל שמרכזו בנקודה $M(15,12)$ משיק לציר ה- y בנקודה B

וחותך את ציר ה- x בשתי נקודות A ו-C כמתואר באיור.

מהנקודה C מעלים אנך לציר ה- x שחותך את המעגל בנקודה נוספת D.

דרך הנקודה D עובר משיק למעגל.

א. כתוב את משוואת המעגל.

ב. מצא את שיעורי הנקודות C ו-D.

ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D.

28. נתון המעגל הקנוני הבא: $x^2 + y^2 = 169$.

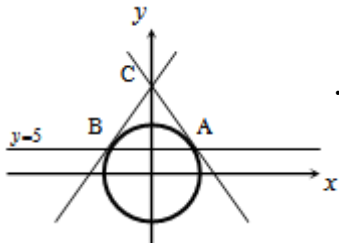
הישר $y = 5$ חותך את המעגל בשתי נקודות A ו-B. (A ברביע הראשון).

מנקודות אלו מעבירים משיקים למעגל אשר נחתכים בנקודה C (ראה איור).

א. מצא את שיעורי הנקודות A ו-B.

ב. מצא את משוואת המשיקים למעגל בנקודות אלו.

ג. מצא את נקודת החיתוך של המשיקים הראה כי היא על ציר ה- y .



29. המרפז ABCD ($AB \parallel CD$) חסום במעגל שמשוואתו היא: $(x-4)^2 + (y-6)^2 = R^2$.

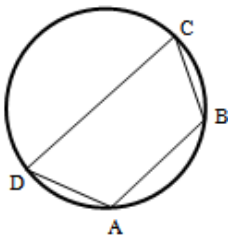
ידוע כי הבסיס הקטן AB מונח על הישר: $y = 2x - 11$ וכי: $x_B = 10$.

א. מצא את רדיוס המעגל.

ב. כתוב את משוואת הישר DC אם ידוע כי הוא עובר דרך מרכז המעגל.

ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודה D אם ידוע כי D היא אחת

מנקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x .



30. נתון מעגל שמרכזו בנקודה M. מעגל זה משיק לציר ה- x בנקודה A.

מהנקודה E שעל ציר ה- x מעלים אנך אשר משיק למעגל בנקודה B (ראה איור).

הקטע BC מקביל לציר ה- x ו-O היא נקודת ראשית הצירים כך שנוצר מרפז

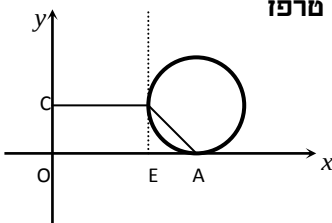
ישר זווית ABCO שעומתו הוא 170 סמ"ר.

ידוע כי: C(0,10) ו-10 ס"מ AE .

א. (i). מצא את שיעורי הנקודה B.

(ii). מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. כתוב את משוואת המעגל.

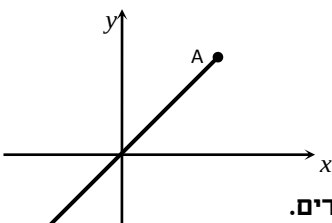


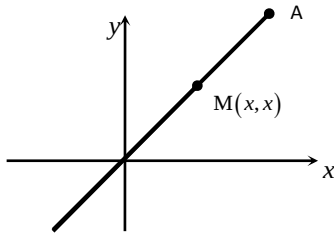
31. הנקודה A(6,6) נמצאת על הישר: $y = x$ כמתואר באיור.

א. מצא את מרחק הנקודה A מראשית הצירים.

ב. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה A והוא עובר דרך ראשית הצירים.

ג. מצא את משוואת המשיק למעגל בנקודת החיתוך השנייה שלו עם ציר ה- x .





32. הנקודות A ו-M נמצאות על הישר: $y = x$ כמתואר באיור.

ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא 8.

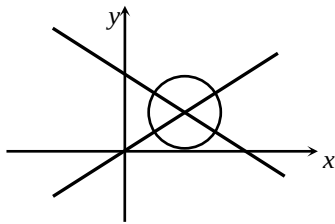
א. (i) מצא את שיעור ה- y של הנקודה A.

(ii) המרחק בין הנקודות A ו-M הוא $\sqrt{32}$.

מצא את שיעורי הנקודה M אם ידוע כי: $x_M < x_A$.

ב. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M ומשיק לצירים.

ג. קבע ע"י חישוב האם הנקודה A נמצאת על המעגל או לא.



33. א. מצא את נקודת החיתוך של הישרים הבאים: $y = \frac{1}{2}x$ ו- $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

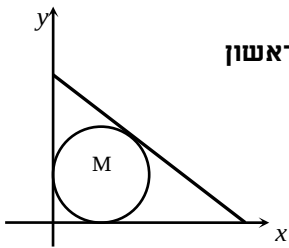
ב. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודת החיתוך שמצאת אשר משיק לציר ה- x .

ג. כתוב את משוואת המשיק למעגל המקביל לציר ה- x .

ד. (i) הראה כי המשיק שמצאת בסעיף ג' חותך את הישר: $y = -\frac{1}{2}x + 4$

על ציר ה- y .

(ii) חשב את שטח המשולש הנוצר בין שני הישרים מסעיף א' וציר ה- y .



34. א. כתוב את משוואת המעגל שמרכזו בנקודה M והוא משיק לצירים בריבוע הראשון

אם ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה M הוא 5.

ב. כתוב את משוואת המשיק למעגל המתואר באיור בנקודה שבה: $x = 8$.

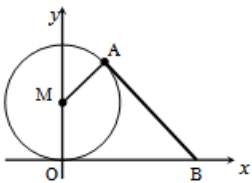
ג. חשב את שטח המשולש שיוצר משיק זה עם הצירים.

35. באיור שלפניך מתואר מעגל שמרכזו M נמצא על ציר ה- y בנקודה שבה: $y = 5$

והוא משיק לציר ה- x . מעבירים משיק למעגל דרך הנקודה A הנמצאת בריבוע הראשון.

א. כתוב את משוואת המעגל.

ב. כתוב את משוואת המשיק אם ידוע כי שיעור ה- x של הנקודה A הוא 4.



המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B. מעבירים את הרדיוס MA.

ג. חשב את היקף הדלתון OMAB (O – ראשית הצירים).

36. א. כתוב את משוואת הישר ששיפועו 2- ועובר דרך הנקודה $(9, 7)$.

הישר הנ"ל חותך ישר נוסף המאונך לו בנקודה $(5, 15)$ (ראה איור).

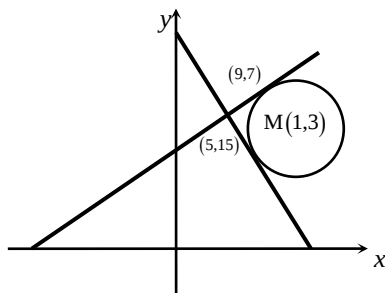
ב. כתוב את משוואת הישר הנוסף.

מעגל שמרכזו בנקודה $(1, 3)$ משיק לשני הישרים הללו כמתואר באיור.

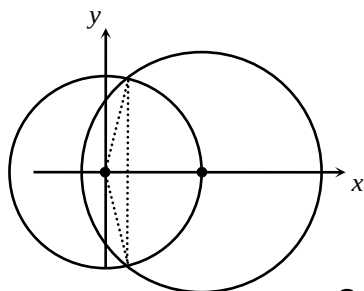
ידוע כי המעגל משיק לישר הראשון בנקודה $(9, 7)$.

ג. (i) כתוב את משוואת המעגל.

(ii) מצא את נקודת ההשקה של המעגל עם הישר השני.



תרגילים עם שני מעגלים:



37. נתון המעגל הקנוני: $x^2 + y^2 = 81$.

נקודת החיתוך החיובית של המעגל עם ציר ה- x

היא נקודת מרכזו של מעגל נוסף אשר רדיוסו הוא: $R=12$.

א. כתוב את משוואת המעגל הנוסף.

ב. המעגלים נחתכים בנקודות A ו-B. מצא את שיעוריהן.

ג. חשב את שטח המשולש הנוצר בין הנקודות A, B וראשית הצירים - O.

38. המעגל: $(x+a)^2 + (y-1)^2 = a+4$, $a > 0$ חותך את ציר ה- x בנקודה שבה: $x=1$.

א. מצא את a .

ב. מצא את נקודות החיתוך של המעגל הנתון עם המעגל: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.

ג. כתוב את משוואת הישר העובר דרך נקודות החיתוך של שני המעגלים.

ד. חשב את שטח המשולש שיוצר הישר שמצאת בסעיף הקודם עם הצירים.

39. נתונים שני המעגלים הבאים: $(x-6)^2 + (y-16)^2 = 36$ ו- $(x+6)^2 + (y-16)^2 = 36$.

א. הראה כי המעגלים משיקים זה לזה בנקודה הנמצאת על ציר ה- y .

ב. הראה כי המעגלים אינם חותכים את ציר ה- x .

ג. לפיך שתי נקודות: $(-12, 16)$, $(0, 4)$.

קבע לגבי כל אחת מהנקודות האם היא נמצאת מחוץ, בתוך או על המעגל: $(x+6)^2 + (y-16)^2 = 36$.

ד. הראה כי המרחק שבין כל נקודה לבין נקודת ההשקה של המעגלים זהה.

40. באיור שלפניך מתוארים המעגלים: $(x-10)^2 + y^2 = 40$ ברביע הראשון

ו- $(x+a)^2 + y^2 = 10$ ברביע השני.

מעבירים ישר בעל שיפוע שלילי המשיק למעגלים בנקודות A ו-B ועובר בראשית הצירים.

ידוע כי הישר הנ"ל משיק למעגל הראשון בנקודה שבה $x=8$.

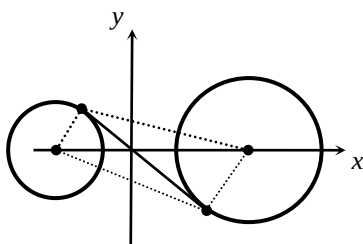
א. כתוב את משוואת הישר.

ב. הישר חותך את המעגל השני בנקודה שבה: $y=3$.

נסמן את מרכזי המעגלים ב-C ו-D כמתואר באיור.

מצא את a אם ידוע כי המרובע ABCD הוא מרפז ($AD \parallel BC$).

ג. הראה כי המרפז הוא שווה שוקיים. (ז"א: $AC = BD$).



תשובות סופיות:

1. א. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 34$ ב. $(0,0)$, $(6,0)$, $(0,10)$ ג. $S = 30$
2. א. $(3,6)$, $(-3,-2)$ ב. $d = 10$ ג. $a = 8$ ד. $4y + 3x = 56$ ה. $d = 13$
3. א. $y = 2x - 2$, $y = 8x - 2$ ב. $(-24,16)$ ג. $x^2 + (y+2)^2 = 900$
4. א. ריבוע. ב. $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 9$
5. א. $(2,8)$ ב. $(x+9)^2 + (y-1)^2 = 170$ ג. $(4,2)$
6. א. $y = -8$ ב. $D(-15,-8)$, $A(17,0)$, $B(-17,0)$ ג. $S = 136$
7. א. $y = -x + 4$, $y = -4x + 13$ ב. $CM = 3$, $M(3,1)$ ג. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 9$
8. א. $R = 10$ ב. $C(1,12)$, $B(1,-4)$ ג. $d = 16$ (ii) $S = 128$
9. א. (i). $d = 15$ (ii). $x = 18$ ב. $(x-9)^2 + (y-12)^2 = 81$
10. המעגל אינו חותך את ציר ה- x - כאשר מציבים ב- y אפס מתקבלת משוואה ריבועית ללא פתרון.
המעגל חותך את ציר ה- x בנקודה אחת - $(12,0)$
11. א. $A(9,6)$, $B(9,-6)$ ב. $y = \frac{2}{3}x$ ג. $S = 54$
12. א. $A(3,6)$ ב. $x^2 + (y-6)^2 = 9$ ג. $(0,3)$, $(0,9)$
13. א. $O(0,0)$, $A(0,6)$, $B(8,0)$ ב. $C(8,6)$ ג. $P = 28$
14. א. $A(3,2)$, $B(11,2)$, $C(11,8)$, $D(3,8)$ ב. $d = 10$ ג. $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 25$ ד. כן - $(7,0)$
15. א. $(-2,1)$ ב. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ ג. הנקודה C. מתקיים: $1^2 + 1^2 < 10$
16. א. $y = x$ ב. $A(10,10)$, $B(2,2)$ ג. $S = 48$ ד. $S = 48$
17. א. $A(4,1)$, $B(8,-1)$ ב. $d = \sqrt{17}$ ג. $S = 3$
18. א. $R = \sqrt{29}$ ב. $(-5,2)$ ג. $d = \sqrt{98}$
19. א. $m = 2$ ב. $(-3,-6)$ ג. המרחק בין שתי הנקודות הוא: $d = \sqrt{180}$ והוא פעמיים רדיוס המעגל: $\sqrt{45}$
20. א. $P(6,5)$ ב. $y = -0.5x + 8$ ג. $d = 5$
21. א. $(x-10)^2 + (y-10)^2 = 100$ ב. $C(16,18)$ ג. $AB \cdot AC \cdot BC = 4800$, $AB = \sqrt{200}$, $AC = \sqrt{360}$, $BC = \sqrt{320}$
22. א. $A(5,3)$, $B(-1,-15)$, $M(2,-6)$ ב. $(x-2)^2 + (y+6)^2 = 90$ ג. (i). $y = -3x + 30$ (ii). $(7,9)$
23. א. $R = 26$, $(x+4)^2 + y^2 = 676$ ב. $C(-14,-24)$, $B(18,19)$ ג. $\frac{AB}{AC} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$
24. א. $(x-4)^2 + (y+5)^2 = 41$ ב. $(8,0)$ ג. $5y + 4x = 32$
25. א. $y = 2$ ב. $y = \frac{3}{4}x - 3$ ג. $A(4,0)$, $B(-4,-6)$
26. א. (i) $m_{AB} = -1$, $m_{AC} = 1$ (ii) $y = -x + 24$, $y = x + 24$ ב. $(-6,18)$
27. א. $(x-15)^2 + (y-12)^2 = 225$ ב. $C(24,0)$, $D(24,24)$ ג. $y = -\frac{3}{4}x + 42$
28. א. $A(12,5)$, $B(-12,5)$ ב. $5y + 12x = 169$, $5y = 12x + 169$ ג. $C(0,33.8)$
29. א. $R = \sqrt{45}$ ב. $y = 2x - 2$ ג. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
30. א. (i). $B(12,10)$ (ii). $A(22,0)$ ב. $(x-22)^2 + (y-10)^2 = 100$
31. א. $\sqrt{72}$ ב. $(x-6)^2 + (y-6)^2 = 72$ ג. $y = x - 12$

32. א. (i) $y = 8$ (ii) $M(4, 4)$ ב. $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 16$ ג. לא. א.
33. א. $(4, 2)$ ב. $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$ ג. $y = 4$ ד. (i) $(0, 4)$ (ii) $S = 8$ א.
34. א. $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$ ב. $y = -0.75x + 15$ ג. $S = 150$ א.
35. א. $x^2 + (y-5)^2 = 25$ ב. $3y + 4x = 40$ ג. $P = 30$ א.
36. א. $y = -2x + 25$ ב. $2y = x + 25$ ג. (i) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 80$ (ii) $(-3, 11)$ א.
37. א. $(x-9)^2 + y^2 = 144$ ב. $(1, -\sqrt{80})$, $(1, \sqrt{80})$ ג. $S = \sqrt{80}$ א.
38. א. $a = 1$ ב. $(-2, 3)$, $(0, -1)$ ג. $y = -2x - 1$ ד. $S = \frac{1}{4}$ א.
39. א. $(0, 16)$ ג. $(-12, 16)$ - על המעגל. $(0, 4)$ מחוץ למעגל. ד. $d = 12$ א.
40. א. $y = -\frac{3}{4}x$ ב. $a = 5$ ג. מחקבל: $AC = BD = \sqrt{205}$ א.

פרק 7 - הסתברות קלאסית

7.1 – הגדרות ומונחים:

ההסתברות להתרחשות מאורע A : $P(A) = \frac{\text{מספר האפשרויות הרצוי}}{\text{מספר האפשרויות הכולל}}$

המאורע המשלים: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

חיתוך ואיחוד מאורעות: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

מאורעות זרים: מאורעות זרים הם מאורעות שלא יכולים להתקיים בו זמנית.

עבור מאורעות זרים מתקיים: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, $P(A \cap B) = 0$

מאורעות בלתי תלויים: מאורעות בלתי תלויים הם מאורעות שקיום האחד מהם לא משפיע

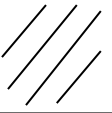
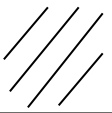
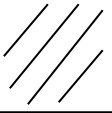
על ההסתברות לקיומו של השני.

עבור מאורעות בלתי תלויים מתקיים: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

אם מתקיים: $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ המאורעות תלויים.

הסתברות מותנית: $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

טבלת הסתברויות

	$\bar{A}$	A	
$P(B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	B
$P(\bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$\bar{B}$
1	$P(\bar{A})$	$P(A)$	

התפלגות בינומית: $P_n(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

לפניך טבלת הסרמונים בפרק זה. דף התרגילים מופיע מיד לאחר הטבלה.

מס' סידורי	מספר תרגיל בדף התרגילים	תוכן הסרמון
סרמון 1		רקע, מהו מאורע, הסתברות של מאורע
סרמון 2	תרגיל 1	
סרמון 3		המאורע המשלים
סרמון 4	תרגיל 2	
סרמון 5	תרגיל 3	
סרמון 6		חיתוך ואיחוד מאורעות
סרמון 7		מאורעות זרים
סרמון 8		מאורעות בלתי תלויים
סרמון 9	תרגיל 4	
סרמון 10	תרגיל 5	
סרמון 11	תרגיל 6	
סרמון 12	תרגיל 7	
סרמון 13	תרגיל 8	כולל הסבר על בניית עץ הסתברויות
סרמון 14	תרגיל 9	
סרמון 15	תרגיל 10	
סרמון 16	תרגיל 11	
סרמון 17	תרגיל 12	
סרמון 18		הסתברות מותנית
סרמון 19	תרגיל 13	
סרמון 20	תרגיל 14	
סרמון 21	תרגיל 15	
סרמון 22	תרגיל 16	
סרמון 23	תרגיל 17	
סרמון 24	תרגיל 17	המשך שאלה מסרמון קודם
סרמון 25	תרגיל 18	
סרמון 26	תרגיל 19	
סרמון 27		טבלת הסתברויות
סרמון 28	תרגיל 20	
סרמון 29	תרגיל 21	
סרמון 30	תרגיל 22	
סרמון 31	תרגיל 23	
סרמון 32	תרגיל 24	
סרמון 33	תרגיל 25	
סרמון 34	תרגיל 26 א'	
סרמון 35	תרגיל 26 ב'	
סרמון 36		התפלגות בינומית א'
סרמון 37		התפלגות בינומית ב'
סרמון 38	תרגיל 27	
סרמון 39	תרגיל 28	
סרמון 40	תרגיל 29	
סרמון 41	תרגיל 30	
סרמון 42	תרגיל 31	
סרמון 43	תרגיל 32	
סרמון 44	תרגיל 33	
סרמון 45	תרגיל 34	
סרמון 46	תרגיל 35	
סרמון 47	תרגיל 36	
סרמון 48	תרגיל 37	
סרמון 49	תרגיל 38	

תרגילים

1. בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים לבנים. מה ההסתברות להוצאת כדור כחול בהוצאה אקראית של כדור מהכד?
2. בכד 2 כדורים כחולים, 3 כדורים אדומים ו-7 כדורים לבנים. מה ההסתברות שבהוצאה אקראית של כדור מהכד לא ייצא כדור אדום?
3. מהי ההסתברות שבסיבוב סביבון לא יתקבל "נס"?
4. עבור שני מאורעות, A ו- B נתון: $P(A) = 0.6$, $P(\bar{B}) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.4$. מצא את $P(A \cup B)$.
5. עבור שני מאורעות, A ו- B נתון: $P(\bar{A}) = 0.2$, $P(\bar{B}) = 0.5$, $P(A \cup B) = 0.95$. מצא את $P(A \cap B)$.
6. עבור שני מאורעות, A ו- B נתון: $P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.25$, $P(A \cup B) = 0.65$. קבע האם המאורעות:
א. זרים.
ב. תלויים.
7. נתון כי שני מאורעות, A ו- B בלתי תלויים. בנוסף נתון: $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.4$. מצא את $P(A \cup B)$.
8. בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות שעשני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות שעשני הכדורים באותו צבע?
ג. מה ההסתברות שעשני הכדורים אינם באותו צבע?
9. בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
א. מה ההסתברות שעשני הכדורים כחולים?
ב. מה ההסתברות שעשני הכדורים באותו צבע?
ג. מה ההסתברות שעשני הכדורים אינם באותו צבע?
10. בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (ללא החזרה). מה ההסתברות שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים?

11. נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?
12. ליואב יש בכיסו הימני 3 גולות כחולות ו-5 שחורות ובכיסו השמאלי 4 גולות כחולות ו-4 שחורות. יואב מוציא גולה מכיסו הימני. אם היא כחולה הוא מחזיר אותה לכיס הימני ואם היא שחורה הוא מעביר אותה לכיס השמאלי. אחר כך מוציא גולה מכיסו השמאלי. מה ההסתברות שעשתי הגולות שהוציא באותו צבע?
13. בכד 3 כדורים כחולים ו-7 כדורים אדומים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, ולאחריו מוציא עוד כדור.
- א. מה ההסתברות שעשתי הכדורים כחולים?
 - ב. מה ההסתברות שעשתי הכדורים באותו צבע?
 - ג. ידוע שעשתי הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות שעשתיים כחולים?
14. בכד 3 כדורים כחולים, 2 כדורים אדומים ו-5 כדורים ירוקים. אדם מוציא באקראי כדור מהכד, מחזיר אותו לכד ואז מוציא עוד כדור.
- א. מה ההסתברות שעשתי הכדורים כחולים?
 - ב. מה ההסתברות שעשתי הכדורים באותו צבע?
 - ג. ידוע שעשתי הכדורים באותו צבע. מה ההסתברות שעשתיים כחולים?
15. בחדר 4 גברים ו-5 נשים. מוציאים באקראי שלושה אנשים מהחדר (ללא החזרה). ידוע שמתוך השלושה יש יותר גברים מנשים. מה ההסתברות שכולם גברים?
16. נתונים שני כדים: בכד א' שלושה כדורים כחולים ואחד לבן ובכד ב' שני כדורים כחולים ושלושה לבנים. לואיזה מטילה מטבע לא הוגנת שבה הסיכוי לקבלת "עץ" כפול מהסיכוי לקבלת "פלי". אם יוצא "עץ" היא מוציאה כדור מכד א' ואם יוצא "פלי" היא מוציאה שני כדורים מכד ב'.
- א. מה ההסתברות שלא ייצא ללואיזה אף כדור לבן?
 - ב. ידוע שללואיזה לא יצא אף כדור לבן, מה ההסתברות שבהטלת המטבע יצא "עץ"?
17. במשחק מזל הסיכוי להרוויח 10 ₪ הוא 0.3 והסיכוי להרוויח 20 ₪ הוא 0.2. ישנו סיכוי של 0.5 לא להרוויח כלל. אדם עיחק במשחק פעמיים וידוע שהרוויח יותר מ-20 ₪. מה הסיכוי שהרוויח 40 ₪?
18. בכד מספר מסוים של כדורים. 3 כחולים והשאר אדומים. הסיכוי להוציא שני כדורים אדומים מהכד (ללא החזרה) הוא $\frac{5}{14}$. כמה כדורים בכד?

19. ההסתברות של צלף לפגוע במטרה בירייה הראשונה היא p והיא גדולה מההסתברות שלו להחמיא. אם הוא פוגע, עולה ההסתברות שלו לפגוע בירייה הבאה ב-0.1 ואם הוא מחמיא היא יורדת ב-0.1. הצלף ירה למטרה פעמיים. ההסתברות שפגע במטרה בדיוק בירייה אחת היא 0.38.

א. מצא את p .

ב. מה ההסתברות שהצלף פגע פעמיים במטרה אם ידוע שהוא פגע בה לפחות פעם אחת?

20. 70% מאוהדי מכבי ת"א הם גברים והשאר נשים. 40% מהאוהדים מעשנים. נתון כי 45% מהאוהדים הם גברים שאינם מעשנים.

א. מהו אחוז הנשים המעשנות מבין אוהדי מכבי?

ב. בוחרים באקראי אוהד מכבי. מה ההסתברות שהוא גבר או שהוא מעשן?

ג. בוחרים באקראי אישה שאוהדת מכבי. מה ההסתברות שהיא מעשנת?

ד. האם מין האוהד והעובדה שהוא מעשן הם מאורעות תלויים?

21. 65% מהפחיות המיוצרות במפעל משקאות הן רגילות והשאר דיאט. 80% מהפחיות המיוצרות תקינות והשאר פגומות. נתון כי 7% מהפחיות הן פחיות דיאט פגומות.

א. בוחרים באקראי פחית. מה ההסתברות שהיא פחית רגילה ותקינה?

ב. בוחרים באקראי פחית דיאט. מה ההסתברות שהיא פגומה?

ג. בוחרים באקראי פחית פגומה. מה ההסתברות שהיא דיאט?

ד. האם סוג הפחית ותקינותה הם מאורעות תלויים?

22. 80% מהתלמידים בכיתה עברו את המבחן בתנ"ך ו-70% עברו את המבחן בהיסטוריה. 75% מבין התלמידים שעברו את המבחן בתנ"ך עברו גם את המבחן בהיסטוריה.

א. בוחרים באקראי תלמיד. מה ההסתברות שהוא נכשל בשתי הבחינות?

ב. תלמיד נכשל במבחן בהיסטוריה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן בתנ"ך?

ג. ידוע שתלמיד עבר בדיוק מבחן אחד. מה ההסתברות שזה המבחן בתנ"ך?

23. בעיר גדולה ל-80% מהתושבים יש רישיון נהיגה. מבין בעלי רישיון הנהיגה 30% הם גברים. 60% מהגברים הם בעלי רישיון נהיגה. בחרו באקראי שתי נשים מהעיר. מה ההסתברות שלשתיהן אין רישיון נהיגה?

24. 10% מהאנשים באוכלוסייה עיוורי צבעים. קיימת בדיקה הבוחנת אם אדם הוא עיוור צבעים. אם עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 80% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. אם אדם שאינו עיוור צבעים ניגש לבדיקה ישנו סיכוי של 5% שהבדיקה תקבע שהוא עיוור צבעים. מהם אחוזי האמינות של הבדיקה (אחוז המקרים בהם הבדיקה מאבחנת נכונה את הנבדק)?

25. בסניף "תנו לחיות לחיות" בירושלים יש כלבים וחתולים בלבד, בעלי פרווה כהה או פרווה בהירה. 55% מהחיות בסניף הם כלבים. אחוז החתולים בעלי הפרווה הכהה גדול פי 3 מאחוז הכלבים בעלי הפרווה הבהירה. מבין בעלי הפרווה הכהה 60% הם כלבים. בוחרים באקראי חתול מהסניף. מה ההסתברות שהוא בהיר פרווה?
26. בית ספר תיכון מציע לתלמידיו 3 מגמות ריאליות לבחירה: פיזיקה, כימיה ומחשבים. 40% מתלמידי מגמות אלה הם בנים. הבנים מהווים $\frac{2}{5}$ מתלמידי הפיזיקה, $\frac{5}{12}$ מתלמידי הכימיה ו- $\frac{1}{3}$ מתלמידי המחשבים. $\frac{1}{4}$ מהבנים הם תלמידי פיזיקה.
- א. האם יש תלות בין העובדה שתלמיד לומד פיזיקה לבין מין התלמיד?
 ב. מהו אחוז לומדי המחשבים מקרב הבנים?
27. אדם מסובב חמש פעמים סביבון. מה ההסתברות שיקבל פעמיים "נס"?
28. מה ההסתברות לקבלת 5 פעמים "נס" בשמונה סיבובי סביבון?
29. הסיכוי לעבור את מבחן התיאוריה הוא 0.7. עשרה אנשים ניגשים למבחן התיאוריה. מהי ההסתברות שבדיוק שישנה מהם יעברו?
30. בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. מה ההסתברות שמתוך חמשת הכדורים הוציא:
- א. בדיוק ארבע יהיו כחולים?
 ב. חמישה יהיו כחולים?
 ג. לפחות ארבעה יהיו כחולים?
 ד. הרוב יהיו כחולים?
 ה. לפחות אחד יהיה כחול?
 ו. הראשון והאחרון בלבד יהיו כחולים?
31. בכד 6 כדורים כחולים ו-4 לבנים. אדם מוציא מהכד כדור, מסתכל על צבעו ומחזיר אותו לכד. הוא חוזר על הפעולה 4 פעמים נוספות. ידוע שרוב הכדורים שהוציא כחולים. מה ההסתברות שכולם כחולים?
32. יערה מצליה לקלוע לסל בלושה מכל ארבעה ניסיונות. כדי להתקבל לנבחרת הכדורסל של בית הספר עליה להצליח לקלוע ברוב הפעמים מתוך 6 ניסיונות קליעה לסל. ידוע שיערה התקבלה לנבחרת הכדורסל. מה ההסתברות שהצליחה לקלוע את כל הקליעות?
33. בוחרים שלושה גברים באקראי מעיר גדולה. ההסתברות שכולם מעשנים היא 0.027. מה ההסתברות שרובם מעשנים?

34. בוחרים שלוש נשים מעיר גדולה. ההסתברות ששתיים מהן מעשנות קמנה פי 4 מההסתברות ששתיים מהן לא מעשנות. מה ההסתברות שכולן מעשנות?
35. בכד 10 כדורים, חלקם לבנים והשאר שחורים. נמרוד מוציא 9 פעמים כדור מהכד (עם החזרה). הסיכוי שיצאו פי 2 כדורים שחורים מלבנים גדול פי $3\frac{3}{8}$ מהסיכוי שיצאו פי 2 כדורים לבנים משחורים. מצא כמה כדורים מכל צבע בכד.
36. בחדר x גברים ו- $3x$ נשים. מוציאים באקראי שני אנשים מהחדר. ההסתברות שהם יהיו מאותו מין היא 0.6.
א. מצא את גודלו של x .
ב. חוזרים על התהליך 4 פעמים. מה הסיכוי שבשלוש מתוך 4 הפעמים ייצאו מהחדר שתי נשים?
37. במבחן רב ברירה עם 5 שאלות שוות ניקוד, לכל שאלה יש n תשובות מהן רק אחת נכונה. ישנו סיכוי של 50% שעשי יידע את התשובה הנכונה לשאלה במבחן. אם שני לא יודע את התשובה לשאלה הוא מנחש. ההסתברות שעשי יקבל במבחן 60 גדולה פי $1\frac{1}{3}$ מההסתברות שיקבל 80. מצא את ערכו של n .
38. על מנת להתקבל לקורס טיס יש לעבור גיבוש וראיון. כל המועמדים ניגשים גם לראיון וגם לגיבוש. 40% מהניגשים לגיבוש עוברים אותו ו-35% מהניגשים לראיון עוברים אותו. מאלה שלא התקבלו לקורס טיס לא התקבלו בגלל הריאיון בלבד. 3 חברים ניסו להתקבל לקורס טיס. ידוע שרובם התקבלו. מה ההסתברות שכולם התקבלו?

פתרונות:

1. $\frac{3}{10}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. $P(A \cup B) = 0.9$ 5. $P(A \cap B) = 0.35$ 6. א. לא זרים.
- ב. תלויים. 7. $P(A \cup B) = 0.85$ 8. א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{7}{15}$ 9. א. $\frac{9}{100}$ ב. $\frac{19}{50}$
- ג. $\frac{31}{50}$ 10. $\frac{17}{42}$ 11. $\frac{8}{15}$ 12. $\frac{77}{144}$ 13. א. $\frac{1}{15}$ ב. $\frac{8}{15}$ ג. $\frac{1}{8}$ 14. א. $\frac{9}{100}$
- ב. $\frac{38}{100}$ ג. $\frac{9}{38}$ 15. $\frac{2}{17}$ 16. א. $\frac{8}{15}$ ב. $\frac{15}{16}$ 17. $\frac{1}{4}$ 18. 8 כדורים.
19. א. $p = 0.6$ ב. $\frac{21}{40}$ 20. א. 15% ב. 0.85 ג. 0.5 ד. כן. 21. א. 0.52
- ב. 0.2 ג. 0.35 ד. בלתי תלויים. 22. א. 0.1 ב. $\frac{2}{3}$ ג. $\frac{2}{3}$ 23. $\frac{1}{225}$
24. 93.5% 25. $\frac{1}{3}$ 26. א. בלתי תלויים. ב. 12.5% 27. 0.264 28. 0.023
29. 0.2001 30. א. 0.259 ב. 0.078 ג. 0.337 ד. 0.683 ה. 0.98976
- ו. 0.023 31. 0.114 32. 0.214 33. 0.216 34. 0.0787 35. 4 לבנים, 6 שחורים. 36. א. $x = 4$ ב. 0.299 37. $n = 5$ 38. $\frac{5}{90}$

7.2 - שאלות מסכמות – הסתברות:

1. בבתי הספר בעיר נערכו שני מבחנים. 80% מתלמידי העיר עברו את המבחן הראשון.
 $\frac{1}{4}$ מבין התלמידים שעברו את המבחן הראשון עברו גם את השני ו- $\frac{1}{2}$ מהתלמידים שנכשלו במבחן הראשון נכשלו גם בשני.
א. בוחרים באקראי תלמיד. מה הסתברות שהוא עבר את אחד המבחנים?
ב. בוחרים באקראי 4 תלמידים. מה ההסתברות שבדיוק אחד מהם עבר את אחד המבחנים?
ג. איזה חלק מבין התלמידים שנכשלו במבחן השני מהווה קבוצת התלמידים שנכשלו גם במבחן הראשון?
ד. בוחרים 5 תלמידים. ידוע כי כולם עברו את המבחן הראשון. מה ההסתברות ש-4 מהם נכשלו במבחן השני?
2. במדינה מסוימת $\frac{19}{60}$ מהאזרחים הם גברים ו- $\frac{41}{60}$ הן נשים. 30% מבין מרכיבי המשקפיים במדינה זו הם גברים ו-40% מבין אלו שלא מרכיבים משקפיים הם גברים.
א. מה ההסתברות למצוא אישה במדינה זו שלא מרכיבה משקפיים?
ב. בוחרים 4 אנשים. מה ההסתברות שבדיוק שניים מהם הם נשים שלא מרכיבות משקפיים?
ג. בוחרים אורח. ידוע כי הוא גבר. מה ההסתברות שהוא מרכיב משקפיים?
ד. מה ההסתברות לבחור 5 גברים שוודאי לא כולם מרכיבים משקפיים?
3. בבית ספר מסוים ישנם תלמידים המרכיבים משקפיים.
ידוע כי אם בוחרים 3 תלמידים אז ההסתברות שעלושתם מרכיבים משקפיים היא 0.027.
א. מצא את אחוז מרכיבי המשקפיים בבית הספר.
בבית הספר ההסתברות להיתקל בתלמיד גדולה ב-0.1 מההסתברות להיתקל בתלמידה ואחוז הבנים שמרכיבים משקפיים זהה לאחוז הבנות שמרכיבות משקפיים.
ב. מה ההסתברות להיתקל בחצר בית הספר בתלמיד שאינו מרכיב משקפיים?
ג. איזה חלק מכלל הבנות בבית הספר מהוות הבנות שלא מרכיבות משקפיים?
ד. בוחרים 4 תלמידים. ידוע כי כולן בנות. מה ההסתברות כי אחת מהן תרכיב משקפיים?
4. בכד ישנם 12 כדורים, חלקם לבנים וחלקם שחורים.
אם מוציאים עם החזרה שני כדורים מהכד ההסתברות ששניהם יהיו בעלי אותו הצבע היא $\frac{13}{18}$.
א. מה ההסתברות להוציא כדור שחור מהכד אם ידוע כי יש יותר כדורים שחורים?
על 40% מהכדורים השחורים רשום מספר ועל מחצית הכדורים הלבנים לא רשום כלום.
ב. מה ההסתברות להוציא מהכד כדור שחור שרשום עליו מספר?
ג. איזה חלק מבין הכדורים שרשום עליהם מספר מהווים הכדורים הלבנים?
ד. מוציאים עם החזרה 4 כדורים. ידוע כי על כל הכדורים הללו היה רשום מספר.
מה ההסתברות שבדיוק כדור אחד יהיה לבן?

5. מפעל מייצר שולחנות וכיסאות. בוחרים 4 רהיטים. ידוע כי ההסתברות שכולם יהיו כיסאות זהה להסתברות שיהיה שולחן אחד בדיוק בניהם. א. מצא את ההסתברות לבחור כיסא. במפעל צובעים את הרהיטים בשחור או לבן. רבע מהשולחנות נצבעים בשחור ורבע מהכיסאות נצבעים בלבן. ב. מה ההסתברות לבחור כיסא שחור? ג. איזה חלק מבין הרהיטים הלבנים מהווים השולחנות? ד. בוחרים 3 רהיטים לבנים. מה ההסתברות כי לפחות אחד מהם יהיה שולחן?
6. במפעל לייצור ברגים פועלים שני פסי ייצור – פס ייצור א' ופס ייצור ב'. ידוע כי אם בוחרים 5 ברגים אז ההסתברות שעלושה מהם מיוצרים ע"י פס הייצור השני גדולה פי 4.5 מההסתברות שאחד מהם מיוצר ע"י פס הייצור הנ"ל. א. מצא את ההסתברות לבחור בורג המיוצר ע"י פס הייצור הראשון. מתוך כל 100 ברגים שהמפעל מייצר 7 פגומים. ומתוך כל 10 ברגים היוצאים מפס הייצור הראשון אחד הוא פגום. ב. מהו אחוז הברגים התקינים שמיוצרים ע"י פס הייצור השני? ג. איזה חלק מבין הברגים הפגומים מהווים אלו שיוצאים מפס הייצור הראשון? ד. מה ההסתברות שמתוך הוצאת 3 ברגים פגומים שניים יהיו מפס הייצור הראשון?
7. בעיר מסוימת נערכו בחירות מקומיות. ידוע כי אם בוחרים באקראי 4 אורחים ההסתברות שתמצא אישה אחת בניהם קטנה פי 16 מההסתברות להיתקל באישה באופן אקראי. א. מה הוא אחוז הגברים בעיר? בעיר עלושה מועמדים. $\frac{1}{11}$ מהמצביעים למועמד א' הם גברים, 60% מהמצביעים למועמד ב' הם גברים ו-25% מהמצביעים למועמד ג' הם גברים. אחוז המצביעים למועמד ג' הוא 20%. ב. איזה מועמד קיבל את רוב הקולות? ג. איזה חלק מבין כל הנשים מהווה קבוצת הנשים שהצביעו למועמד המנצח? ד. בוחרים באקראי 4 נשים. מה ההסתברות שעלושה מהן הצביעו למועמד המנצח?
8. חלק מהסטודנטים באוניברסיטה נעזרים בספרי לימוד חיצוניים. ידוע כי ההסתברות לבחור 2 סטודנטים הנעזרים בספרי לימוד חיצוניים קטנה ב-0.1 מההסתברות לבחור שני סטודנטים שלא נעזרים בספרי לימוד חיצוניים. א. מהו אחוז הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים? האוניברסיטה מוכרת ספרי לימוד ב-3 מקצועות לכלל הסטודנטים. כל סטודנט יכול לקנות רק ספר אחד. ידוע כי כמות הסטודנטים שקנו את ספר א' וכמות הסטודנטים שקנו את ספר ג' זהות. כמובן, $\frac{6}{7}$ מאלו שקנו את ספר ג' נעזרים גם בספרים חיצוניים. $\frac{1}{3}$ מהסטודנטים שקנו את ספר ב' נעזרים בספרי לימוד חיצוניים וכמות הסטודנטים שקנו את ספר א' ונעזרים בספרי לימוד חיצוניים מהווים $\frac{1}{9}$ מכלל הסטודנטים שנעזרים בספרי לימוד חיצוניים. ב. מהו אחוז הסטודנטים שקנו את ספר ב' ולא נעזרים בספרי לימוד חיצוניים? ג. איזה חלק מהווים הסטודנטים שקנו את ספר ג' מכלל הסטודנטים שלא נעזרים בספרי לימוד חיצוניים? ד. בוחרים 4 סטודנטים שלא נעזרים בספרי לימוד חיצוניים. מה ההסתברות שאחד מהם קנה את ספר ג'?

9. במפעל גדול ההסתברות שמתוך 4 עובדים לפחות אחד ירכיב משקפיים היא 0.5904.

א. מה ההסתברות לבחור עובד שלא מרכיב משקפיים?

ידוע כי 40% מהפועלים שמרכיבים משקפיים הם מעשנים ו-20% מבין העובדים המעשנים הם מרכיבים משקפיים.

ב. מה ההסתברות לבחור עובד שמרכיב משקפיים בלבד או מעשן בלבד?

ג. בוחרים באקראי 4 עובדים. מה ההסתברות שעשניים מהם או מרכיבים משקפיים או מעשנים?

ד. בוחרים באקראי 5 עובדים. מה ההסתברות שרוב העובדים שנבחרו הם מעשנים?

10. בעיר מסוימת נערכות בחירות. ידוע כי אם בוחרים 4 תושבים אז ההסתברות שלפחות אחד

מהם יצביע למועמד ב' היא $\frac{65}{81}$.

א. איזה חלק מהתושבים הצביעו למועמד א'?

בעיר זו יש תושבים מבוגרים וצעירים.

ידוע כי $\frac{2}{3}$ מהצעירים הצביעו למועמד א' וכי ההסתברות לבחור מבוגר שהצביע למועמד ב' היא $\frac{2}{15}$.

ב. מהו אחוז התושבים הצעירים שהצביעו למועמד ב'?

ג. איזה אחוז מהוויים התושבים הצעירים מבין אלו שהצביעו למועמד א'?

ד. בוחרים באקראי 5 תושבים שהצביעו למועמד א'. מה ההסתברות שרובם יהיו צעירים?

11. כדי להתקבל לחברת היי-טק יש לעבור ראיונות משלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: מהנדס ראשי,

אחראי משמרת ומנכ"ל החברה. כל אחד מבעלי התפקידים נותן חוות דעת חיובית או שלילית על

המועמד לעבודה. מועמד שמתקבל לחברה חייב לקבל חוות דעת חיובית משלושת בעלי התפקידים.

ידוע כי המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{3}{5}$ מהמועמדים.

אחראי המשמרת קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וב- $\frac{1}{6}$ מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה

מזו של המהנדס הראשי. מנכ"ל החברה קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב- $\frac{7}{10}$ נותן חוות

דעת זהה לשלו.

א. (i) מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת חיובית מאחראי המשמרת?

(ii) ידוע כי אחראי המשמרת נתן חוות חיובית. מה ההסתברות שהמהנדס הראשי

ייתן חוות דעת שלילית?

ב. מה ההסתברות שמועמד יקבל עבודה בחברה?

ג. מה ההסתברות שמועמד יקבל חוות דעת שלילית מהמנכ"ל?

לאחר העדר עובדים שינתה החברה את מדיניותה וקבעה כי כדי להתקבל לעבודה יש לעבור לפחות

שני ראיונות בהצלחה אך חוות הדעת של המנכ"ל חייבת להיות חיובית.

ה. מה ההסתברות כעת לקבל עבודה בחברה?

12. כדי להתקבל לעבודה בחברת "קוקה-קולה" יש לעבור שלושה ראיונות ע"י שלושה בעלי תפקידים בסדר הבא: אחראי משמרת, מנהל ראשי ומנכ"ל החברה. כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. כדי שמועמד יקבל עבודה בחברה עליו לעבור בהצלחה לפחות את אחד מהראיונות עם אחראי המשמרת והמנהל הראשי אך הראיון עם המנכ"ל חייב לעבור בהצלחה (כדי שמועמד יקבל עבודה המנכ"ל צריך לתת לו חוות דעת חיובית) ידוע כי אחראי המשמרת נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{1}{6}$ מהמועמדים. המנהל הראשי קורא את חוות הדעת של אחראי המשמרת וב- $\frac{2}{3}$ מהמקרים נותן חוות דעת הפוכה מזו של אחראי המשמרת. מנכ"ל החברה נותן חוות דעת חיובית ל-80% מהמועמדים ללא קשר לחוות הדעת הקודמות.
- א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנהל הראשי?
 ב. ידוע כי המנהל הראשי נתן חוות דעת חיובית, מה ההסתברות שגם אחראי המשמרת נתן חוות דעת חיובית?
 ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?
 ד. במהלך שעות הקבלה ביום מסוים הגיעו 5 מועמדים, מה ההסתברות שלפחות אחד מהם יקבל עבודה?
13. כדי להתקבל לעבוד בחברת ההיי-טק Techno יש לעבור שני ראיונות משני בעלי מקצוע, תחילה ע"י המהנדס הראשי ואחריו ע"י מנכ"ל החברה. כל בעל מקצוע נותן חוות דעת חיובית, שלילית או שנמנע מלקבוע. כדי שמועמד יתקבל לחברה עליו לעבור לפחות ראיון אחד עם חוות דעת חיובית. ידוע כי המהנדס הראשי נותן חוות דעת חיובית ל- $\frac{1}{5}$ מהמועמדים ו- $\frac{2}{7}$ מהם הוא משאיר ללא קביעה. המנכ"ל קורא את חוות הדעת של המהנדס הראשי וקובע את חוות הדעת שלו בצורה הבאה:
 אם המהנדס נתן חוות דעת חיובית או המנכ"ל ייתן גם חוות דעת חיובית ב-60% מהמקרים.
 אם המהנדס נתן חוות דעת שלילית או המנכ"ל נמנע מלקבוע ב-60% מהמקרים ובשאר המקרים הוא נותן חוות דעת חיובית. אם המהנדס נמנע מלקבוע או המנכ"ל ייתן חוות דעת חיובית או שלילית בלבד. הסיכוי שהמנכ"ל ייתן במקרה זה חוות דעת חיובית גדול פי 3 מהסיכוי שייתן חוות דעת שלילית.
 א. מה ההסתברות לקבל חוות דעת חיובית מהמנכ"ל?
 ב. ידוע כי המנכ"ל נתן חוות דעת חיובית, מה ההסתברות שגם המהנדס נתן חוות דעת חיובית?
 ג. מה ההסתברות להתקבל לחברה?
 ד. ביום מסוים הגיעו 5 מועמדים. מה ההסתברות שבדיוק 3 מהם קיבלו עבודה באותו היום?
14. לכבוד חנוכה קנתה סבתא תקווה לשתי נכדותיה, שני ושרון, סביבונים עם סוכריות בתוכם. בכל סביבון יש 7 סוכריות שוקולד ו-4 סוכריות מנטה. שרון לקחה את סביבון אחד והוציאה ממנו באקראי (ללא החזרה) 4 סוכריות.
 א. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציאה שרון הן סוכריות מנטה?
 ב. שני לקחה 4 סביבונים והוציאה באקראי מכל סביבון סוכרייה אחת.
 ג. האם ההסתברות שעשני תוציא 4 סוכריות מנטה גבוהה יותר או נמוכה יותר מההסתברות שחשבת בסעיף א' נמק.
 ג. שני הוציאה באקראי סוכרייה אחת מכל סביבון מתוך ארבעת הסביבונים שברשותה.
 ידוע שבין הסוכריות שבידה יש יותר סוכריות מנטה. מה ההסתברות שכל הסוכריות שיש לשני ביד יהיו בטעם מנטה?

15. רפי וציון קנו במכולת חבילות של מסטיק מנומס צבעוני. ציון קנה 3 חבילות ורפי קנה רק חבילה אחת. בכל חבילה יש 10 סוכריות, חלקן ורודות וחלקן צהובות. רפי מוציא באקראי (ללא החזרה) שתי סוכריות מהחבילה שקנה. ידוע כי ההסתברות ששתייהן תהיינה ורודות קטנה פי 4 מההסתברות להוציא סוכרייה ורודה וסוכרייה צהובה. א. כמה סוכריות מכל צבע יש בכל חבילה?

רפי מחזיר את הסוכריות בחזרה לחבילה ולאחר מכן מוציא באקראי 3 סוכריות נוספות (ללא החזרה). ב. מה ההסתברות שכל הסוכריות שהוציא רפי הן צהובות? ג. ציון מוציא באקראי סוכרייה מכל חבילה. האם ההסתברות של ציון להוציא 3 סוכריות צהובות גבוהה או נמוכה מזו של רפי? ד. ציון מוציא מכל חבילה שתי סוכריות. מה ההסתברות שלו להוציא מכל חבילה סוכרייה אחת ורודה ואחת צהובה?

16. בחדר יש x גברים ו- $3x$ נשים. משחקים את המשחק הבא: בוחרים באקראי שני אנשים מהחדר

בוה אחר זה (ללא החזרה). ידוע כי ההסתברות לבחור שני אנשים מאותו המין היא $\frac{13}{22}$.

א. מצא כמה נשים יש בחדר. ב. ידוע כי האדם השני שנבחר הוא גבר, מה ההסתברות שגם הראשון שנבחר הוא גבר? ג. משחקים את המשחק 4 פעמים. ידוע כי בכל הפעמים נבחר גבר בפעם השנייה, מה ההסתברות שבדיוק ב-3 פעמים יבחר גבר גם בפעם הראשונה? ד. ידוע כי מתוך 4 הפעמים שמשחקים את המשחק (ונבחר גבר בפעם השנייה) נבחר גבר גם בפעם הראשונה ברוב המקרים. מה ההסתברות שיבחר גבר בפעם הראשונה ב-3 פעמים בדיוק.

17. בכד יש פי 5 כדורים כחולים מאדומים. מוציאים מהכד כדור.

אם הוא כחול אז משאירים אותו בחוץ ואם הוא אדום אז מחזירים אותו לכד. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף מהכד.

ידוע כי ההסתברות להוציא שני כדורים בצבעים שונים היא: $\frac{175}{612}$.

א. כמה כדורים מכל צבע יש בכד? ב. ידוע כי הכדור השני שנבחר הוא כחול, מה ההסתברות שהכדור הראשון שנבחר היה אדום? ג. חוזרים על התהליך 5 פעמים. ידוע כי בכל חמשת הפעמים הכדור השני שהוצא הוא כחול, מה ההסתברות שברוב הפעמים הכדור הראשון שיצא הוא אדום?

18. בסימונאות מזון ידוע כי 40% מבין הסכו"ם החד-פעמי הוא תוצרת חו"ל והשאר תוצרת הארץ.

40% מבין הסכו"ם המיובא מחו"ל הם צבעוניים והשאר שקופים.

א. מה ההסתברות לבחור בסימונאות המזון סכו"ם שקוף המיובא מחו"ל?

ב. (i) בוחרים 5 כלים בחנות באופן אקראי. מה ההסתברות שלכל היותר כלי אחד הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל?

(ii) מה ההסתברות שבדיוק אחד מחמשת הכלים הוא כלי שקוף תוצרת חו"ל אם ידוע כי לכל היותר כלי אחד הוא שקוף תוצרת חו"ל?

ג. בוחרים שני כלים באופן אקראי וידוע כי ההסתברות ששניהם שקופים היא 0.4096.

איזה חלק מהווים כלי הסכו"ם השקופים מבין כלי הסכו"ם תוצרת הארץ?

19. בכד יש 9 כדורים, חלקם כחולים והשאר לבנים. מוציאים כדור מהכד, אם הוא כחול אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים לבנים ואם הוא לבן אז מחזירים אותו לכד ומוסיפים 4 כדורים כחולים. לאחר מכן מוציאים כדור נוסף. נתון שההסתברות שהכדור הראשון שיצא הוא כחול אם ידוע כי

$$\frac{6}{11}.$$

- א. מצא כמה כדורים כחולים יש בכד.
 ב. חוזרים על התהליך 6 פעמים. מצא את ההסתברות שלפחות פעם אחת יבחרו שני כדורים כחולים בזה אחר זה.
 ג. מה ההסתברות שמתוך 6 פעמים שחוזרים על התהליך יבחר בדיוק 3 פעמים כדור כחול בשתי ההוצאות אם ידוע כי לפחות פעם אחת (מתוך ה-6) נבחרו שני כדורים בזה אחר זה ?

20. בחדר x גברים ו- $x+2$ נשים. זורקים קוביית משחק מאוזנת. אם מתקבל מספר הגדול מ-4 אז מוסיפים לחדר x גברים ואם מתקבל מספר הקטן או שווה ל-4 אז מוסיפים לחדר x נשים. לאחר מכן מוציאים אדם מהחדר.

א. מצא כמה נשים יש בחדר אם ידוע כי ההסתברות לבחור אישה היא $\frac{21}{33}$.

ב. מה ההסתברות שתצא אישה מהחדר לאחר שנוספו לחדר נשים אם ידוע כי וודאי יצאה אישה מהחדר?

אנשי החדר לובשים חולצות אדומות או לבנות בלבד. ידוע כי החלק היחסי של האנשים הלובשים חולצות לבנות בחדר גדול פי 16 מהחלק היחסי של הגברים הלובשים חולצות אדומות. כמובן ההסתברות של הגברים מבין כל אלו שלובשים חולצות אדומות היא 0.25.

- ג. מצא מה ההסתברות לבחור גבר הלובש חולצה אדומה בחדר.
 ד. (i) בוחרים 5 אנשים מהחדר (ללא הוצאה) וידוע כי כולם לובשים חולצות אדומות. מה ההסתברות שרובם נשים?

- (ii) מה ההסתברות שכל הנשים לובשות חולצות אדומות אם ידוע כי רוב הנשים לובשות חולצות אדומות?

תשובות סופיות:

1. א. $P = 0.7$ ב. $P = \frac{189}{2500}$ ג. $\frac{1}{7}$ ד. $P = \frac{405}{1024}$
2. א. $P = 0.1$ ב. $P = 0.0486$ ג. $\frac{15}{19}$ ד. $P = 0.69331$
3. א. 30% ב. $P = 0.4$ ג. $\frac{1}{3}$ ד. $P = \frac{32}{81}$
4. א. $P = \frac{5}{6}$ ב. $P = \frac{1}{3}$ ג. $\frac{1}{5}$ ד. $P = 0.4096$
5. א. $P = 0.8$ ב. $P = 0.6$ ג. $\frac{3}{7}$ ד. $P = \frac{279}{343}$
6. א. $P = 0.4$ ב. 57% ג. $\frac{4}{7}$ ד. $\frac{144}{343}$
7. א. 25% ב. מועמד א' ג. $\frac{10}{11}$ ד. $P = 0.2732$

8. א. 45% ב. 20% ג. $\frac{1}{11}$ ד. $P = 0.2732$.
9. א. $P = 0.8$ ב. $P = 0.44$ ג. $P = 0.36427$ ד. $P = 0.31744$.
10. א. $\frac{2}{3}$ ב. 20% ג. 60% ד. $P = 0.68256$.
11. א. (i) $\frac{17}{30}$ (ii) $\frac{2}{17}$ ב. $\frac{7}{20}$ ג. $\frac{71}{150}$ ד. $\frac{32}{75}$.
12. א. $\frac{11}{18}$ ב. $\frac{1}{11}$ ג. $\frac{26}{45}$ ד. $P = 0.98658$.
13. א. $\frac{27}{50}$ ב. $\frac{2}{9}$ ג. $\frac{31}{50}$ ד. $P = 0.34414$.
14. א. $\frac{1}{330}$ ב. גבוהה יותר $\left(\frac{256}{14641} > \frac{1}{330} \right)$ ג. $\frac{1}{8}$ ד. $P = 0.0189$.
15. א. 4 ורודות ו-6 צהובות. ב. $\frac{1}{6}$ ג. גבוהה $\left(\frac{27}{125} > \frac{1}{6} \right)$ ד. $P = 0.0189$.
16. א. 9 נשים. ב. $\frac{2}{11}$ ג. 0.0196 ד. $\frac{18}{19}$ 17. א. 15 כחולים ו-3 אדומים. ב. $\frac{17}{101}$ ג. 0.03645.
18. א. 0.24 ב. (i) 0.65389 (ii) $\frac{30}{49} \sim 0.61224$ ג. $\frac{2}{3}$.
19. א. 6 כדורים כחולים. ב. 0.88989 ג. 0.21723.
20. א. 5 נשים. ב. $\frac{16}{21}$ ג. 0.05 ד. (i) $\frac{459}{512}$ (ii) $\frac{9}{34}$.

פרק 8 – בעיות מילוליות

8.1 – בעיות תנועה:

בעיות ללא אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

1. מכונית נוסעת מ-A ל-B במהירות של 90 קמ"ש. בדרך חזרה נסעה המכונית במהירות של 60 קמ"ש.
בסה"כ נמשכה הנסיעה הלוך וחזור 20 שעות.
א. כמה שעות נסעה המכונית לכל כיוון?
ב. מה הדרך שעברה המכונית?
2. רוכב אופניים נוסע מעיר א' לעיר ב' במהירות של 20 קמ"ש.
שלוש שעות אחריו יוצא מאותו מקום רוכב אופנוע במהירות של 80 קמ"ש.
רוכב האופנוע הגיע לעיר ב' שלוש שעות לפני רוכב האופניים.
א. כמה שעות נסע רוכב האופניים?
ב. מה המרחק בין שני הערים?
3. גלעד ורוני יוצאים בו זמנית משני ישובים A ו-B בהתאמה והולכים זה לקראת זה במהירות קבועה.
מהירות ההליכה של גלעד היא 4 קמ"ש ומהירותו של רוני היא 6 קמ"ש.
ידוע כי רוני היא ליישוב A 4 שעות לפני שגלעד הגיע ליישוב B.
א. מה המרחק בין שני היישובים?
ב. כמה זמן הלך כל אחד מהם?
4. אוטובוס ומשאית יוצאים בו זמנית משני יישובים A ו-B בהתאמה.
מהירות האוטובוס היא 60 קמ"ש ומהירות המשאית היא 80 קמ"ש.
האוטובוס הגיע ליישוב B שעה ו-40 דקות מאוחר יותר מהזמן שלקח למשאית להגיע ליישוב A.
א. כמה זמן נסע האוטובוס וכמה זמן נסעה המשאית?
ב. מה המרחק בין שני הערים?
5. שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית משני יישובים A ו-B זה לקראת זה.
מהירות רוכב אחד גדולה ב-10 קמ"ש ממהירותו של הרוכב השני.
הרוכב המהיר הגיע ליעדו לאחר 3 שעות בעוד שהרוכב השני הגיע רק אחרי 5 שעות.
א. מה המהירויות של שני רוכבי האופניים?
ב. מה המרחק שנסעו?
6. הולכת רגל יצאה למיזל במהירות מסוימת.
לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיה מאותו מקום הולך רגל נוסף במהירות הגדולה
ממהירותה ב-4.5 קמ"ש. הולך הרגל השיג את הולכת הרגל שעה לאחר שיצא לדרכו.
א. מהי מהירות ההליכה של הולכת הרגל?
ב. מה המרחק שעברו עד שנפגשו?
7. שני רוכבי אופניים יוצאים בו זמנית מעיר א' לעיר ב'. הרוכב הראשון נוסע במהירות קבועה
ומגיע לעיר ב' לאחר 5 שעות. הרוכב השני נוסע במשך השעתיים הראשונות במהירות הקטנה ב-2
קמ"ש ממהירות הרוכב הראשון. לאחר מכן הוא מגביר את מהירותו ב-14 קמ"ש
ומגיע לעיר ב' שעה ו-20 דקות לפני הרוכב הראשון.

- א. באיזה מהירות נסע הרכב הראשון?
ב. איזו דרך עבר הרכב השני בכל חלק?

8. שתי מכוניות נסעו יחד למיזל מהעיר לכפר. המכונית הראשונה נסעה במהירות קבועה והגיעה לכפר לאחר 8 שעות. המכונית השנייה נסעה במשך שעותיים במהירות הקמנה ממהירות המכונית הראשונה ב-10 קמ"ש, לאחר מכן היא עצרה להתרענות במשך 40 דקות וחזרה לנסיעה במהירות הגדולה ב-54 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה. המכונית השנייה הגיעה לכפר שעותיים לפני המכונית הראשונה.

- א. באיזה מהירות נסעה המכונית הראשונה?
ב. מה המרחק בין העיר לכפר?

9. שני רוכבי אופניים המרוחקים זה מזה 80 ק"מ יצאו בו זמנית זה לקראת זה. מהירות רוכב אחד גדולה ב-2 קמ"ש ממהירות הרכב השני. לאחר שעותיים של רכיבה המרחק בניהם היה 12 ק"מ.
א. באיזו מהירות רכב כל רוכב?
ב. האם לאחר עוד 20 דקות הם ייפגשו או שלא?

10. שתי מכוניות הנמצאות במרחק של 700 ק"מ יצאו בו זמנית זו לקראת זו. מכונית אחת מהירה מהשנייה ב-15 קמ"ש. לאחר שלוש שעות היה מרחק בניהן 325 ק"מ.
א. באיזו מהירות נסעו שתי המכוניות?
ב. האם לאחר עוד 20 דקות שתי המכוניות תפגשנה או שלא?

11. רוכב אופניים והולך רגל יצאו ב-10:00 מנקודה A לנקודה B. מהירות ההליכה של הולך הרגל היא 7 קמ"ש ומהירותו של רוכב האופניים היא 16 קמ"ש. רוכב האופניים הגיע לנקודה B לאחר שלוש וחצי שעות מזמן יציאתם.
א. באיזה שעה היה המרחק בניהם 27 ק"מ?
ב. מה המרחק בין A ל-B.
ג. לאחר כמה זמן הגיע הולך הרגל לנקודה B ?

12. אופנוע יוצא מעיר א' לכיוון מערב במהירות של 50 קמ"ש. לאחר שעותיים יוצאת מכונית מעיר ב' הממוקמת מזרחה מעיר א' במרחק של 40 ק"מ אחרי האופנוע. מהירות המכונית הוא 120 קמ"ש.
א. לאחר כמה זמן השיגה המכונית את רוכב האופנוע מזמן יציאתה?
ב. איזה מרחק נסע רוכב האופנוע עד שהשיגה אותו המכונית?

13. מטוס מס מידי שבוע מיער א' ליעד ב' המרוחק ממנו 5,000 ק"מ במהירות קבועה. שבוע אחד מס המטוס במשך שעותיים במהירות הרגילה. לאחר מכן האט את מהירותו ב-300 קמ"ש ולאחר כשעותיים האץ בחזרה והגביר את מהירותו ב-700 קמ"ש. המטוס הגיע ליעד ב' 15 דקות מוקדם יותר מאשר הגיע בכל שבוע. באיזו מהירות מס המטוס בכל שבוע?

14. שתי מכוניות יוצאות מעיר א' לכיוון עיר ב' הנמצאת במרחק של 560 ק"מ ממנה. מכונית אחת נסעה במהירות קבועה במשך כל הדרך. המכונית השנייה נסעה במהירות הגדולה ב-10 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה במשך שעתיים וחצי. לאחר מכן היא עצרה למשך חצי שעה ואז המשיכה בנסיעתה במהירות הגדולה ב-10 קמ"ש ממהירותה הקודמת. בסה"כ הגיעה המכונית השנייה לעיר ב' שעה לפני שהגיעה המכונית הראשונה. א. באיזו מהירות נסעה המכונית הראשונה? ב. כמה זמן נסעה המכונית השנייה מעיר א' לעיר ב'?
15. משאית נוסעת מרחק של 245 ק"מ בכל יום במהירות קבועה. יום אחד נסעה המשאית במשך שעתיים וחצי במהירות הרגילה, לאחר מכן עצרה לתדלוק במשך 24 דקות ואז המשיכה בנסיעה במהירות הגדולה ב-70 קמ"ש ממהירותה הקודמת. המשאית הגיעה ליעדה שעה לפני שהיא מגיעה בכל יום. א. באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום? ב. כמה זמן לוקח למשאית להגיע ליעדה בכל יום?
16. מכונית נסעה מעיר א' לעיר ב' המרוחקת ממנה 760 ק"מ במהירות מסוימת. בדרכה חוזר היא נסעה במשך שעתיים במהירות זו, לאחר מכן עצרה לתדלוק וארוחת צהריים במשך שעה ואז המשיכה בדרכה במהירות הגדולה ממהירותה הקודמת ב-19 קמ"ש. בסה"כ המכונית הגיעה לעיר א' באותו הזמן שהגיעה לעיר ב'. א. באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א' לעיר ב'? ב. כמה זמן נסעה המכונית מעיר לעיר?
17. רוכב אופניים יצא לדרך במהירות קבועה. לאחר שעה וחצי יצא בעקבותיו ומאותה הנקודה רוכב אופניים נוסף שמהירותו גדולה ממהירות הרוכב הראשון ב-6 קמ"ש. הרוכב השני השיג את הראשון במרחק של 70 ק"מ מנקודת המוצא שלהם. א. באיזה מהירות נסעו שני רוכבי האופניים? ב. כמה זמן היה הרוכב הראשון על הדרך עד שהשיגו הרוכב השני?
18. מכונית יוצאת מעיר א' לעיר ב' המרוחקת ממנה 360 ק"מ. לאחר שעתיים יוצאת מכונית נוספת בעקבותיה. מהירות המכונית השנייה גדול ב-30 קמ"ש ממהירות המכונית הראשונה. שתי המכוניות הגיעו לעיר ב' יחד. א. באיזה מהירות נסעה המכונית הראשונה? ב. כמה זמן הייתה על הדרך המכונית השנייה?
19. המרחק בין שתי ערים הוא 800 ק"מ. בשעה 8:00 יצאה מכונית מעיר אחת לכיוון השנייה. לאחר כשעה יצאה מהעיר השנייה מכונית נוספת כלפי המכונית הראשונה במהירות הגדולה ב-20 קמ"ש ממהירותה. המכוניות נפגשו באמצע הדרך. א. באיזה שעה נפגשו המכוניות? ב. באיזו מהירות נסעה כל מכונית?
20. המרחק בין שתי ערים הוא 920 ק"מ. בשעה 6:00 יוצאת משאית סחורה מעיר א' לכיוון עיר ב'. לאחר 46 דקות יוצא אוטובוס מעיר ב' לכיוון עיר א'. מהירות האוטובוס גדולה ב-20 קמ"ש ממהירות המשאית. שני הרכבים נפגשו באמצע הדרך. א. באיזו שעה נפגשו האוטובוס והמשאית? ב. באיזו מהירות נסע האוטובוס?

21. מכונית ומשאית יוצאות בו זמנית משני מקומות שהמרחק ביניהם הוא 570 ק"מ. המכונית והמשאית נפגשו לאחר 3 שלוש. ידוע כי בזמן שהמכונית עוברת מרחק של 300 ק"מ, המשאית עוברת מרחק של 270 ק"מ.
- א. באיזו מהירות נסעה המכונית?
- ב. איזה מרחק נסעה המשאית עד לנקודת פגישתם?
22. שתי מכוניות נוסעות זו לקראת זו משני קצוות של כביש שאורכו הוא 880 ק"מ.
- ידוע כי בזמן שמכונית אחת עוברת מרחק של 264 ק"מ, המכונית השנייה עוברת 528 ק"מ.
- המכונית המהירה הגיעה לקצה הכביש 5 שעות לפני שהמכונית השנייה הגיעה לקצה הכביש השני.
- א. באיזו מהירויות נסעו שתי המכוניות?
- ב. כמה זמן נסעה המכונית האיטית עד שהגיעה לקצה הכביש?
23. אופנוע ומשאית יצאו יחד מעיר א' לכיוון עיר ב' הרחוקה ממנה 240 ק"מ.
- מהירות האופנוע גדולה ב-15 קמ"ש ממהירות המשאית.
- במהלך הדרך האופנוע עצר ל-48 דקות של התרענונות ולכן הגיע יחד עם המשאית לעיר ב'.
- א. באיזו מהירות נסע האופנוע?
- ב. כמה זמן לקח למשאית להגיע לעיר ב'?
24. אוטובוס נוסע מעיר א' לעיר ב' הרחוקה ממנה 800 ק"מ. לאחר שעבר האוטובוס 135 ק"מ במהירות קבועה הוא עצר להתרענונות במשך חצי שעה. לאחר מכן המשיך האוטובוס את נסיעתו במהירות הגדולה ב-43 קמ"ש ממהירותו הקודמת עד לעיר ב'. סך כל הזמן שהיה האוטובוס על הדרך הוא 7 שעות.
- א. מה הייתה המהירות ההתחלתית של האוטובוס?
- ב. מה היה המרחק שעבר האוטובוס אחרי ההתרענונות עד לעיר ב'?

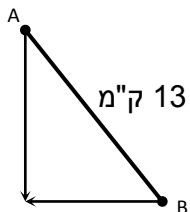
בעיות תנועה עם אחוזים:

25. מכונית נוסעת מעיר A לעיר C מרחק של 360 ק"מ ועוברת דרך עיר B הנמצאת בין שתי הערים.
- המכונית נוסעת במהירות קבועה מעיר A עד לעיר B ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-20% וממשיכה עד שמגיעה לעיר C. ידוע כי זמן הנסיעה של המכונית מעיר A ל-B הוא 3 שעות וזמן הנסיעה מעיר B ל-C הוא שעתיים וחצי.
- א. מצא את המהירות של המכונית בשני חלקי הדרך.
- ב. הראה כי העיר B נמצאת בדיוק באמצע הדרך שבין שתי הערים A ו-C.
26. מכונית נוסעת מעיר א' לעיר ב' מרחק של 480 ק"מ במהירות קבועה.
- בדרכה חזרה נסעה המכונית במשך שעה במהירות הקבועה. לאחר מכן עצרה להתרענונות של 36 דקות ואז הגבירה את מהירותה ב-25% ממהירותה הקודמת והגיעה בחזרה לעיר א' 24 דקות פחות מהזמן שלקח לה להגיע לעיר ב'. באיזו מהירות נסעה המכונית מעיר א' לעיר ב'?
27. משאית מביאה סחורה מידי יום מיישוב א' ליישוב ב' המרוחק ממנו 630 ק"מ. המשאית נוסעת במהירות קבועה בכל יום. יום אחד נסעה המשאית במהירות הנמוכה ממהירותה הרגילה ב-20%.
- לאחר 3 שעות ראה נהג המשאית כי הוא עומד לאחר ולכן הגביר את מהירותו ב-21 קמ"ש ממהירותו הנוכחית. המשאית הגיעה ליעדה בדיוק באותו הזמן שהיא מגיעה בכל יום.
- באיזו מהירות נוסעת המשאית בכל יום?

28. רכבת משא ורכבת נוסעים יוצאות מיער א' לעיר ב' מרחק של 360 ק"מ. מהירות רכבת הנוסעים גדולה ב-20% ממהירות רכבת המשא. רכבת הנוסעים התעכבה 40 דקות בתחנה ולכן יצאה באיחור מהתחנה של עיר א'. יחד עם זאת היא הגיעה לעיר ב' 20 דקות לפני רכבת המשא. א. מה הן המהירויות של שתי הרכבות? ב. כמה זמן נסעה רכבת הנוסעים מעיר א' לעיר ב'?
29. מכונית ומונית נוסעות מנקודה A לנקודה B. המכונית נוסעת במהירות קבועה ומגיעה לנקודה B כעבור 4 שעות. המונית נוסעת במשך 3 שעות המהירות הקטנה ב-10 קמ"ש ממהירות המכונית ולאחר מכן מגבירה את מהירותה ב-50% ומגיעה לנקודה B יחד עם המכונית. א. מהי מהירות המכונית? ב. מה המרחק בין הנקודה A לנקודה B?

בעיות תנועה עם משפט פיתגורס:

30. רוכב אופניים הנמצא במרחק של 140 ק"מ מזרחה מהעיר יוצא בשעה 9:00 לכיוון העיר. לאחר 45 דקות יוצא מהעיר רוכב אופניים נוסף שמהירותו קטנה ממהירות הרוכב הראשון ב-20 קמ"ש ונוסע לכיוון דרום. כעבור שעתיים נוספות היה המרחק בין שני רוכבי האופניים 50 ק"מ. א. מצא את מהירות רוכב האופניים הראשון אם ידוע כי היא קטנה מ-40.1 קמ"ש. ב. באיזה מרחק היה רוכב האופניים השני מהעיר כאשר הגיע הרוכב הראשון לעיר?
31. שתי מכוניות יצאו מהעיר, האחת לכיוון מזרח והשנייה לכיוון צפון. לאחר שלוש שעות המרחק בין שתי המכוניות היה 300 ק"מ. מהירות מכונית אחת הגדול ב-20 קמ"ש ממהירות המכונית השנייה. א. באיזה מהירויות נסעו שתי המכוניות? ב. מה היה המרחק של כל מכונית מהעיר לאחר שלוש שעות?
32. אופנוע יוצא מהעיר בשעה 7:00 דרומה. לאחר שעה יוצאת מכונית מעיר לכיוון מזרח. מהירות האופנוע היא 50 קמ"ש ומהירות המכונית היא 100 קמ"ש. לאחר פרק זמן מסוים המרחק בין המכונית לאופנוע הוא 250 ק"מ. א. באיזו שעה המרחק בין המכונית והאופנוע הוא 250 ק"מ? ב. באיזה מרחק הייתה המכונית מהעיר כאשר היא הייתה במרחק של 250 ק"מ מהאופנוע?
33. שני הולכי רגל יוצאים משני יישובים A ו-B המרוחקים זה מזה 13 ק"מ. היישוב A ממוקם בצפון מערב ביחס ליישוב B כמתואר באיור ממול. הולך הרגל מיישוב A הולך דרומה והולך הרגל מיישוב B הולך מזרחה. הולך הרגל מיישוב A יוצא שעתיים לפני הולך הרגל השני. לאחר שלוש שעות מציאתו נפגשו שני הולכי הרגל. מהירות הולך הרגל מיישוב B גדולה ב-25% ממהירות הולך הרגל השני. באיזו מהירות הלך כל אחד משני הולכי הרגל?



בעיות תנועה – מהירות מושפעת מזרמים:

34. סירה שטה בנהר שבו מהירות הזרם היא 3 קמ"ש עם כיוון זרם המים.
לאחר חצי שעה החליטו אנשי הסירה לשנות את כיוונם וחזרו במשך שעתיים לנקודת המוצא שלהם.
מהירות הסירה במים עומדים קבועה במשך כל השייט.
א. מצא את מהירות הסירה.
ב. מה המרחק הכולל שעטה הסירה?
35. מהירות סירה במים עומדים גדולה פי 4 ממהירות זרם הנהר. סירה שטה בנהר שאורכו 30 ק"מ מתחילתו ועד סופו. הסירה שטה את כל הנהר הלך וחזר במשך 8 שעות.
א. באיזו מהירות תשוט הסירה במים עומדים?
ב. כמה זמן שטה הסירה בכל כיוון?
36. שתי סירות שמהירותן במים עומדים זהה יוצאות מאותה נקודה בנהר, האחת לכיוון צפון והשנייה לכיוון דרום. מהירות הזרם בנהר היא 20 קמ"ש לכיוון צפון.
לאחר 4 שעות היה המרחק בין שתי הסירות 240 ק"מ.
א. באיזו מהירות שטות הסירות במים עומדים?
ב. פי כמה היה גדול המרחק של הסירה שעטה צפונה מהמרחק של הסירה השנייה לאחר 4 שעות?
37. שלושה נערים יצאו לשייט בסירת מנוע בעלת מהירות קבועה. במשך שעה הם שטו בנהר שקט.
לאחר מכן עקב רוחות חזקות נוצר זרם בנהר שמהירותו היא 2 קמ"ש לכיוון המסלול של הנערים.
לאחר שעה נוספת השתנו הרוחות והמהירות הזרם נשארה 2 קמ"ש אך נגד כיוון השייט שלהם.
הנערים שטו בתנאים אלו במשך שעה. בסה"כ עברו הנערים בשלוש שעות אלו מרחק של 18 ק"מ.
א. באיזו מהירות משיט המנוע את הסירה במים עומדים?
ב. מה המרחק שעברה הסירה בכל שעה?

בעיות תנועה – מהירות ממוצעת:

38. מכונית נוסעת במהירות ממוצעת של 84 קמ"ש.
את נסיעתה התחילה במהירות מסוימת ולאחר שלוש שעות האיצה ב-20 קמ"ש והמשיכה כך במשך עוד 7 שעות.
א. באיזו מהירות נסעה המכונית בהתחלה?
ב. איזה מרחק עברה המכונית?
39. מכונית נוסעת במהירות ממוצעת של 80 קמ"ש מרחק של 480 ק"מ.
את החלק הראשון של הנסיעה היא נסעה במהירות מסוימת ולאחר 4 שעות האטה את מהירותה ב-30 קמ"ש.
א. באיזו מהירות נסעה המכונית בכל חלק את הנסיעה?
ב. פי כמה גדולה הדרך שעברה המכונית ב-4 השעות הראשונות לעומת שאר הדרך הנוותרת? פי 3
40. אופנוע עובר מרחק של 200 ק"מ במהירות מסוימת. לאחר מכן מאיץ האופנוע ומגדיל את מהירותו ב-40%. הוא נוסע במהירות זו ועובר מרחק של 280 ק"מ. המהירות הממוצעת של האופנוע היא 96 קמ"ש.
א. כמה זמן נסע האופנוע?
ב. באיזו מהירות התחיל האופנוע את נסיעתו?

41. אופנוע עובר במשך 5 שעות מרחק של 350 ק"מ.
לאחר מכן מגביר נהג האופנוע את מהירותו ונוסע במשך פרק זמן מסוים מרחק של 450 ק"מ.
המהירות הממוצעת של האופנוע בכל זמן נסיעתו היא 80 קמ"ש.
א. כמה זמן נסע האופנוע לאחר שהגביר את מהירותו?
ב. בכמה קמ"ש הגביר נהג האופנוע את מהירותו?

תשובות סופיות:

1. א. 8 שעות הלך ו-12 שעות חזור. ב. 720 ק"מ.
2. א. 8 שעות. ב. 160 ק"מ.
3. א. 48 ק"מ. ב. גלעד- 12 שעות ורוני- 8 שעות.
4. א. אומבוס - 6 שעות ו-40 דקות. משאית - 5 שעות. ב. 400 ק"מ.
5. א. 15 קמ"ש ו-25 קמ"ש. ב. 75 ק"מ.
6. א. 3 קמ"ש. ב. 7.5 קמ"ש.
7. א. 12 קמ"ש. ב. 20 ק"מ ו-40 ק"מ.
8. א. 60 קמ"ש. ב. 480 ק"מ.
9. א. 16 קמ"ש ו-18 קמ"ש. ב. לא.
10. א. 55 קמ"ש ו-70 קמ"ש. ב. לא.
11. א. 13:00. ב. 56 ק"מ ג. 8 שעות.
12. א. שעתיים. ב. 200 ק"מ. 13. 800 קמ"ש.
14. א. 70 קמ"ש. ב. 7 שעות.
15. א. 50 קמ"ש. ב. 4 שעות ו-54 דקות.
16. א. 95 קמ"ש. ב. 8 שעות.
17. א. 14 קמ"ש ו-20 קמ"ש. ב. 5 שעות.
18. א. 60 קמ"ש. ב. 4 שעות.
19. א. 13:00. ב. 80 קמ"ש ו-100 קמ"ש.
20. א. 10:36. ב. 120 קמ"ש.
21. א. 100 קמ"ש. ב. 270 ק"מ.
22. א. 88 קמ"ש ו-176 קמ"ש. ב. 10 שעות.
23. א. 75 קמ"ש. ב. 4 שעות.
24. א. 90 קמ"ש. ב. 665 ק"מ.
25. א. 60 קמ"ש ו-72 קמ"ש.
26. א. 80 קמ"ש. 27. 70 קמ"ש.
28. א. 60 קמ"ש ו-72 קמ"ש. ב. 5 שעות.
29. א. 90 קמ"ש. ב. 360 ק"מ.
30. א. 40 קמ"ש. ב. 55 ק"מ.
31. א. 60 קמ"ש ו-80 קמ"ש. ב. 180 ק"מ ו-240 ק"מ.
32. א. 10:00. ב. 200 ק"מ.
33. א. 4 קמ"ש ו-5 קמ"ש.
34. א. 5 קמ"ש. ב. 8 ק"מ.
35. א. 8 קמ"ש. ב. 3 שעות ו-5 שעות.
36. א. 30 קמ"ש. ב. פי 5.
37. א. 6 קמ"ש. ב. 6 ק"מ , 4 ק"מ ו-8 ק"מ
38. א. 70 קמ"ש. ב. 840 ק"מ.
39. א. 90 קמ"ש ו-60 קמ"ש. ב. פי 3.
40. א. 5 שעות. ב. 80 קמ"ש. 41. א. 5 שעות. ב. 20 קמ"ש.

8.2 – בעיות קנייה ומכירה:

בעיות קנייה ללא אחוזים עם נעלם אחד ושניים:

1. מחיר של עט גדול ב-2 שקלים ממחיר של עפרון. ידוע כי המחיר של שני עפרונות ושלושה עטים הוא 26 שקלים. כמה עולה עט וכמה עולה עפרון?
2. מחיר כניסה למוזיאון המדע עבור מבוגר גדול ב-15 ₪ ממחיר הכניסה עבור ילד. יוסי נסע עם אשתו ושבעת ילדיו ליום כיף במוזיאון המדע ושילם עבור הכניסה סכום כולל של 210 שקלים. מה המחיר עבור ילד ומה המחיר עבור מבוגר?
3. מחיר כניסה לפארק המים עבור ילד קטן פי 2 ממחיר הכניסה עבור מבוגר. דור נסע עם שלושת ילדיו לפארק המים ושילם סה"כ 200 שקלים. מצא את מחיר הכניסה עבור ילד.
4. מחיר מחשב גדול פי 5 מהמחיר של מדפסת. חברת S&S Production קנתה 40 מחשבים ו-8 מדפסות במחיר כולל של 16,640 ₪. מה המחיר של מחשב ומה המחיר של מדפסת?
5. המחיר של 5 ק"ג תפוחים גדול ב-34 שקלים מהמחיר של 3 ק"ג ענבים. רפי קנה 10 ק"ג מכל סוג ושילם סה"כ סכום כולל של 260 שקלים. מה המחיר של 1 ק"ג ענבים ושל 1 ק"ג תפוחים?
6. המחיר של 3 ק"ג אגסים גדול ב-3 שקלים מהמחיר של 2 ק"ג תפוחים. שרון קנתה 4 ק"ג אגסים ו-5 ק"ג תפוחים ושילמה סכום כולל של 73 שקלים. מה המחיר של 1 ק"ג מכל סוג?
7. המחיר של שלושה עטים קטן ב-5 שקלים מהמחיר של 8 עפרונות. שני קנתה 10 עפרונות ו-4 עטים ונכחה לראות כי המחיר של כל העפרונות גדול ב-4 שקלים מהמחיר של כל העטים שקנתה. מה המחיר של עט אחד ועפרון אחד?
8. המחיר של 7 חתיכות פוליגל שווה למחיר של 9 משמחי בריסטול. חנה הגנת קנתה לגן שלה 5 משמחי פוליגל ו-3 משמחי בריסטול ושילמה סכום כולל של 66 שקלים. כמה עולה משמח בריסטול?
9. דן קנה מחברות בסכום כולל של 224 שקלים. אם ירד סכום המחברות ב-10 שקלים יוכל דן לקנות עוד 40 מחברות באותו הסכום. כמה מחברות קנה דן ומה המחיר של כל מחברת?
10. סוחר קנה מלוויזיות ומכשירי DVD. המחיר שעילם הסוחר עבור מלוויזיה גדול ב-500 שקלים מהמחיר שעילם עבור מכשיר DVD. כמות מכשירי ה-DVD שקנה הסוחר גדולה ב-6 מכמות המלוויזיות שהוא קנה. הסוחר שילם עבור כל המלוויזיות 9,600 שקלים ועבור כל מכשירי ה-DVD 5,400 שקלים. א. כמה שילם הסוחר עבור מלוויזיה ועבור DVD. ב. כמה מלוויזיות קנה הסוחר?

11. סוחר קנה מחשבים ומדפסות. המחיר שעילים הסוחר עבור מדפסת קטן ב-2,400 שקלים מהמחיר שעילים עבור מחשב. הסוחר קנה 7 מדפסות יותר מאשר המחשבים. הסוחר שילם עבור כל המחשבים סכום כולל של 18,000 שקלים ועבור כל המדפסות 7,800 שקלים. א. כמה שילם הסוחר עבור מחשב? ב. כמה מדפסות קנה הסוחר?

בעיות קנייה עם אחוזים בנעלם אחד ושניים:

12. מחיר כסא נמוך ב-300 שקלים ממחיר שולחן. אם מחיר הכיסא יזול ב-20% ומחיר השולחן יתייקר ב-20% אז המחיר של פינת אוכל המכילה שולחן ו-6 כיסאות יהיה 1560 שקלים. מה המחיר של כסא ומה המחיר של שולחן?
13. משכורתו של אלון גדולה ב-200 שקלים ממשכורתו של רן. אם אלון יקבל תוספת של 16% למשכורתו ורן יקבל תוספת של 30% למשכורתו אז המשכורת של רן תהיה גדולה משל אלון ב-300 שקלים. מהי המשכורת של כל אחד מהם?
14. עקב ביקוש רב, מחירו של מקרר "אמנה" עלה ב-5%. לאחר שנה ירד הביקוש למקרר "אמנה" ולכן הוזל מחירו ב-10%. מחיר המקרר הסופי הוא 1,323 ₪. א. מה היה מחיר המקרר ההתחלתי? ב. כמה אחוזים ממחיר המקרר המקורי מהווה מחיר המקרר הסופי?
15. א. מחירו של מוצר עלה ב-20% ולאחר שנתיים עלה שוב בעוד 20%. האם ניתן לומר שמחיר המוצר עלה בשנתיים ב-40%? ב. מכונת כביסה עולה 4,000 ₪. לאחר שנה עלה מחיר מכונת הכביסה ב-20% ועוד שנה לאחר מכן שוב עלה מחירה בעוד 20%. (i) מה מחיר מכונת הכביסה לאחר שנתיים? (ii) בכמה אחוזים מהמחיר המקורי התייקרה מכונת הכביסה?
16. משכורתה של סיון נמוכה ב-5% ממשכורתה של גלית. אם שתיהן תקבלנה העלאה של 20% למשכורתן אז גלית תשתכר ב-330 ₪ יותר מסיון. בכמה שקלים משתכרות גלית וסיון?
17. מחירו של מוצר א' גדול ב-20 שקלים ממחירו של מוצר ב'. מוצר א' התייקר ב-5% ומוצר ב' התייקר ב-50%. המחיר הכולל של שני המוצרים לאחר ההתייקרות גדול ב-25% מהמחיר המקורי של שני המוצרים. מה המחיר של כל מוצר?
18. א. מחיר מוצר א' גדול ב-40% מהמחיר של מוצר ב'. מוצר א' התייקר ב-30%. בכמה אחוזים מוצר ב' צריך להתייקר על מנת שמחיריהם יהיו זהים? ב. מחיר כובע גדול ב-40% מהמחיר של זוג כפפות. מחיר הכובע התייקר ב-30% וכעת מחירו הוא 91 ₪. (i) בכמה אחוזים יש לייקר את עלות הכפפות על מנת שהם יהיו זהים למחיר הכובע החדש? (ii) מה היה מחיר הכובע המקורי?

19. המחיר של ק"ג בננות ו-2 ק"ג אפרסקים הוא ₪ 28. עקב בצורת קשה התייקרו המחירים של כל הפירות ב-40% וכעת מחיר של ק"ג אפרסקים גדול ב-2.8 שקלים מהמחיר של ק"ג בננות. מה המחיר של ק"ג בננות ושל ק"ג אפרסקים?

20. המחיר של שמיכה וזוג כריות הוא 380 ₪. לאחר שנה מחיר השמיכה הוזל ב-20% אך מחיר הכריות התייקר ב-20%. כעת המחיר של 5 כריות ו-2 שמיכות הוא 888 ₪.
א. מה היה המחיר הראשוני של כרית?
ב. כמה עולה שמיכה לאחר ההוזלה?

21. המחיר של 3 מקלדת ו-5 עכברים הוא 490 ₪.
לאחר חצי שנה חנות המחשבים יצאה למבצע והכריזה כי כל המקלדות בהנחה מיוחדת של 50% וכל העכברים בהנחה של 10%. כעת ניתן לקנות 4 עכברים ו-8 מקלדות במחיר של 500 ₪.
א. מה היו המחירים של מקלדת ושל עכבר לפני ההנחה?
ב. מה הם המחירים של מקלדת ושל עכבר לאחר ההנחה?
ג. בכמה אחוזים גדול המחיר הראשוני של מקלדת מהמחיר הראשוני של עכבר?

22. המחיר של 6 שרפרפים גדול ב-20 שקלים מהמחיר של כסא.
לאחר שמחיר השרפרפים התייקר ב-35% ומחיר הכסא הוזל ב-19%, המחיר של 3 שרפרפים היה זהה למחיר של כסא אחד.
א. מה המחיר של כסא והמחיר של שרפרף לפני ההוזלה וההתייקרות?
ב. פי כמה גדול המחיר המקורי של הכסא מהמחיר המקורי של השרפרף?

בעיות קנייה ומכירה ללא אחוזים:

23. סוחר קנה 70 ק"ג עגבניות במחיר של 3 ₪ לק"ג. 15 ק"ג התקלקלו לו ולכן לא יכל למכור אותם. את שאר העגבניות הוא מכר במחיר של 5 ₪ לק"ג.
א. האם הסוחר הרוויח או הפסיד בעסקה?
ב. כמה הרוויח הסוחר בעסקה?

24. סוחר קנה 60 כיסאות זהים במחיר זהה לכסא.
5 כיסאות נשברו לו ואת שאר הכיסאות הוא מכר במחיר הגדול ב-40 ₪ מהמחיר שקנה אותם. בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1950 ₪.
באיזה מחיר קנה הסוחר כל כסא?

25. סוחר קנה 80 תמונות. 20 תמונות הוא מכר ברווח של 30 ₪ לתמונה ואת שאר התמונות הוא מכר ב-30 ₪ לתמונה. בסה"כ הסוחר לא הרוויח ולא הפסיד בעסקה.
א. באיזה מחיר קנה הסוחר את התמונות?
ב. כמה שילם הסוחר על כל התמונות?

26. סוחר קנה 120 ק"ג שוקולד.
10 ק"ג נהרסו לסוחר מיד עם קנייתו, 40 ק"ג הוא מכר ברווח של 3 ₪ לק"ג ואת שאר הכמות הוא מכר בהפסד של 2 ₪ לק"ג. בסה"כ הפסיד הסוחר בעסקה 60 ₪.
כמה שילם הסוחר עבור ק"ג שוקולד?

27. סוחר קנה ספרים במחיר של 60 ₪ לספר.

40 מהספרים הוא מכר במחיר של 100 ₪ לספר ואת השאר הוא מכר בהפסד של 5 ₪ לספר.
בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 1300 ₪.
כמה ספרים קנה הסוחר?

28. סוחר קנה דבש במחיר של 3 ₪ לק"ג.

30 ק"ג מהדבש הוא מכר ברווח של שקל אחד לק"ג ואת השאר הוא מכר בהפסד של שקל אחד לק"ג.
בסה"כ הסוחר לא הרוויח ולא הפסיד בעסקה.
כמה ק"ג דבש קנה הסוחר?

29. סוחר קנה כיסאות ב-7,200 ₪. הסוחר העקיע 1,000 ₪ בשיפוץ כל הכיסאות ואז מכר אותם.

20 כיסאות הוא מכר ברווח של 70 ₪ לכיסא.
את שאר הכיסאות הוא מכר בהפסד של 15 ₪ לכיסא. הסוחר הפסיד בעסקה 650 ₪.
א. כמה כיסאות קנה הסוחר?
ב. כמה שילם הסוחר עבור כל כיסא?

30. חנווני קנה בקבוקי חלב ב-300 ₪. 4 בקבוקי חלב נשפכו לו.
את שאר הבקבוקים מכר החנווני ברווח של שקל אחד לבקבוק.
בסה"כ הרוויח החנווני 36 שקלים.
כמה בקבוקים קנה החנווני וכמה שילם עבור כל בקבוק?

31. סוחר קנה עציצים ב-800 ₪. תוך שבוע 8 מהעציצים נבלו והסוחר לא מכר אותם.
את שאר העציצים מכר הסוחר ברווח של 10 ₪ לעציץ.
סה"כ הפסיד הסוחר 200 ₪ בעסקה.
כמה עציצים קנה הסוחר וכמה הוא שילם על כל עציץ?

32. סוחר קנה נורות בסכום כולל של 4,000 ₪.
26 מהנורות מכר הסוחר ברווח של 20 ₪ לנורה ואת השאר הוא מכר בהפסד של 5 ₪ לנורה.
בסה"כ הרוויח הסוחר בעסקה 400 ₪.
כמה נורות קנה הסוחר ובאיזה מחיר לנורה?

בעיות קנייה ומכירה עם אחוזים:

33. סוחר קנה 450 תיקים. הוא מכר 150 מהם ברווח של 15% ואת השאר בהפסד של 5 שקלים.
בסה"כ הפסיד הסוחר בעסקה 600 ₪.
א. בכמה כסף קנה הסוחר כל תיק?
ב. אם הסוחר היה מוכר את שאר התיקים בהפסד של 2 שקלים במקום 5 שקלים, האם עדיין הוא היה מפסיד מהעסקה?

34. חוואי קנה 15 סוסים. הוא מכר 3 סוסים ברווח של 35%. שני סוסים מתו לו ממחלה נדירה ואת שאר הסוסים הוא מכר ללא רווח. סה"כ הפסיד החוואי 1710 ₪.
א. כמה שילם החוואי עבור כל סוס?
ב. אם רק סוס אחד היה מת לחוואי והוא היה נמכר ללא רווח, האם החוואי היה מרוויח מהעסקה?

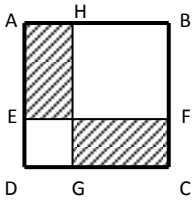
35. סוחר קנה מחשב ומדפסת ושילם עבורם סכום כולל של 3,600 ₪. הסוחר מכר את המדפסת בהפסד של 10% אך מכר את המחשב ברווח של 40%. הסוחר מכר את שניהם במחיר כולל של 4,440 ₪. בכמה כסף קנה הסוחר את המחשב?
36. סוחר קנה שני סוגי בד במחיר כולל של 900 ₪. את הבד מהסוג הראשון הוא מכר בהצלחה רבה ברווח של 72% אך את הבד השני הוא מכר בהפסד של 15%. הסוחר מכר את הבדים במחיר כולל של 1,113 ₪. כמה שילם הסוחר עבור שני סוגי הבדים?
37. קבלן קנה בלמות ב-22,000 ₪. 16 בלמות נשברו בהובלה ולכן לא נמכרו. 180 בלמות מכר הקבלן ב-30% יותר ממחיר הקנייה שלהם ואת שאר הבלמות הוא מכר במחיר הקנייה המקורי שלהן. סה"כ הרוויח הקבלן בעסקה 3,800 ₪. א. כמה בלמות קנה הקבלן? ב. כמה כסף שילם הקבלן עבור כל בלמה?
38. סוחר קנה שולחנות במחיר כולל של 18,000 ₪. 10 שולחנות הוא מכר ברווח של 60% לשולחן, 20 שולחנות הוא מכר ללא רווח ואת שאר השולחנות הוא מכר בהפסד של 15% לשולחן. סה"כ הרוויח הסוחר בעסקאות אלו 450 ₪. א. כמה שולחנות קנה הסוחר? ב. מה המחיר שעשים הסוחר עבור כל שולחן?
39. בעל חנות כלי נגינה קנה גיטרות ב-50,000 ₪, מחיר כל הגיטרות זהה. בשבוע הראשון מכר בעל החנות 3 גיטרות ברווח של 85%. בשבוע השני מכר בעל החנות גיטרה אחת במחיר שקנה אותה ובשבוע השלישי והרביעי מכר בעל החנות את שאר הגיטרות בהפסד של 5%. סה"כ הרוויח בעל החנות מעסקי הגיטרות 11,250 ₪. כמה גיטרות קנה בעל החנות ובאיזה מחיר לגיטרה?
40. סוכן של חברת IKEA קנה מיטות במחיר כולל של 60,000 ₪. רבע מכמות המיטות שקנה הוא מכר ברווח של 80%. 4 מיטות הוא מכר ללא רווח כלל ואת שאר המיטות הוא מכר בהפסד של 10% למיטה. בסה"כ הרוויח הסוכן 9,500 ₪. א. כמה מיטות קנה הסוכן? ב. כמה שילם הסוכן עבור כל מיטה?

תשובות סופיות:

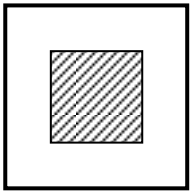
1. 4 נה 6-1 נה.
2. 20 נה 35-1 נה.
3. 40 נה.
4. 400 נה 80-1 נה.
5. 12 נה 14-1 נה.
6. 7 נה 9-1 נה.
7. 4 נה 9-1 נה.
8. 7 נה.
9. 16 ב-14 נה.
10. א. 800 נה 300-1 נה ב. 12.
11. א. 3,000 נה ב. 13.
12. 200 נה 500 – נה.
13. 4000 נה 3800 – נה.
14. א. 1,400 נה. ב. 94.5%
15. א. לא. ב. (i) 5,760 נה. (ii) ב-44%
16. 5500 נה 5225 – נה.
17. 100 נה 80 – נה.
18. א. 82% ב. (i) 82% (ii) 70 נה.
19. 8 נה 10-1 נה.
20. א. 100 נה. ב. 144 נה.
21. א. 80 נה 50-1 נה ב. 40 נה 45-1 נה ג. 60%.
22. א. 100 נה 20-1 נה. ב. פי 5.
23. א. הרוויח ב. 65 נה.
24. 50 נה.
25. א. 40 נה ב. 3200 נה.
26. 4 נה.
27. 100.
28. 60 ק"ג.
29. א. 90 ב 80 נה.
30. 60 ב-5 נה.
31. 20 נעיצים. 40 נה לעצין.
32. 50 נורות ב-80 נה לנורה.
33. א. 40 נה. ב. לא.
34. א. 1,800 נה. ב. כן.
35. 2,400 נה.
36. 400 נה 500 – נה.
37. א. 220 ב. 100 נה.
38. א. 60 ב. 300 נה.
39. 10 גימרות ב-5,000 נה.
40. א. 12 מימות. ב. 5,000 נה.

8.3 – בעיות גיאומטריות – הנדסת המישור:

תרגילים הכוללים סרטוט:



1. המרובע ABCD הוא ריבוע (ראה איור).
הקטע EF מקביל לצלעות הריבוע ומחלק את הצלעות AD ו-BC באופן כזה
כך ש-DE ו-CF מהוות 30% מצלע הריבוע.
הקטע GH מקביל לצלעות AD ו-BC ומרחקו מהצלע AD הוא 2 ס"מ.
ידוע שסכום השטחים של המלבנים המקווקים מהווה 50% מסכום שטחי המלבנים הלבנים.
מצא את אורך צלע הריבוע.

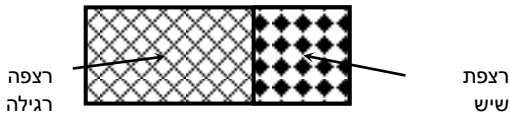


2. היקף חלקה מלבנית הוא 30 ק"מ.
רוצים לבנות בניין מלבני (המקווקו באיור) במרכז החלקה ששטחו הכולל
הוא 10 קמ"ר. ידוע ששטח הבניין מהווה 20% משטח החלקה.
מצא את מידות החלקה.

3. לרפי מטבח מלבני שמידותיו הם: 12×18 מטרים.

רפי מחלק את המטבח לשני מלבנים כך ששטח אחד גדול פי 2 מהשטח של השני.
רפי רוצה לרצף את השטח הקטן ברצפת שיש יוקרתית (השטח הימני) לעומת השטח הגדול שאותו
ירצף רפי ברצפה רגילה (השטח השמאלי). ידוע שהמחיר של מ"ר אחד מהרצפה הרגילה הוא 60%
מהמחיר של מ"ר אחד מרצפת השיש היוקרתית.

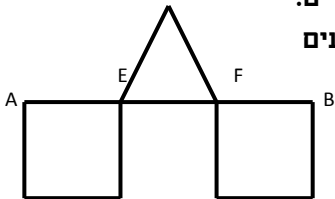
רפי השקיע בריצוף המבטח סכום כולל של 3168 ₪.
כמה עולה מ"ר מכל סוג?



בעיות במרובעים ובמשולשים ללא מ.פיתגורס:

4. על הקטע AB מקצים את הנקודות E ו-F כך ששלושת הקטעים AE, EF ו-BF שווים.

על הקטעים BF ו-AE בונים ריבועים ועל הקטע EF בונים משולש שווה שוקיים.
ידוע כי הגובה במשולש שווה לאורך הבסיס EF וכי סכום שטחי שני המרובעים
והמשולש הוא 90 סמ"ר.
מצא את אורך צלע הריבוע.



5. נתון ריבוע ABCD. בונים משולש ישר זווית EFC כך ש-E ו-F הן נקודות

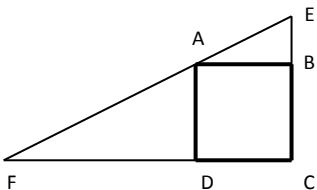
על המשכי הצלעות BC ו-DC של הריבוע בהתאמה.

הנקודה A נמצאת על יתר המשולש EFC.

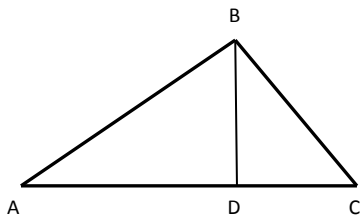
הקטע BE מהווה 50% מצלע הריבוע והקטע DF גדול פי 2 מצלע הריבוע.

ידוע כי שטח המשולש EFC הוא 81 סמ"ר.

מצא את אורך צלע הריבוע.

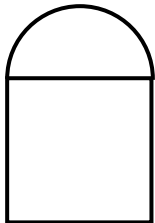


בעיות במרובעים ובמשולשים כולל מ.פיתגורס:

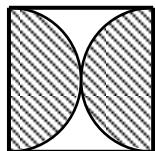


6. BD הוא גובה ליתר במשולש ישר זווית ABC, ($\angle B = 90^\circ$).
 היתר AC גדול ב-25% מהניצב AB. ידוע כי אורך הניצב BC הוא 18 ס"מ.
 א. מצא את אורכי הניצב AB והיתר AC.
 ב. מהם האורכים AD ו-DC?

בעיות במעגל – ללא אחוזים ללא מ.פיתגורס:

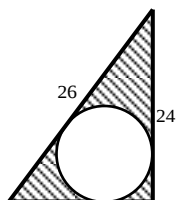


7. בבניין של רפי השכן יש חלון מרכזי המורכב ממלבן וחצי עיגול.
 ידוע כי בסיס החלון קטן פי 2 מגובה המלבן.
 שטח החלון הכולל הוא $200 + 12.5\pi$.
 א. מצא את מידות המלבן.
 ב. מצא את היקף החלון.



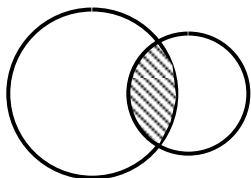
8. בריבוע שלפניך חסומים שני חצאי עיגולים הפוכים זה לזה.
 ידוע כי סכום ההיקפים של שני החצאים יחדיו הוא 10π .
 א. מצא את אורך צלע הריבוע.
 ב. (i) מצא את סכום השטחים של שני חצאי העיגולים (השטח המקווקו).
 (ii) מצא את השטח הכלוא בין העיגולים והריבוע (השטח הלבן).

בעיות במעגל – ללא אחוזים וכולל מ.פיתגורס:



9. באיור שלפניך מתואר משולש ישר זווית שבתוכו כלוא עיגול.
 ידוע כי אורך היתר במשולש הוא 26 ס"מ וכי אורך הניצב האנכי הוא 24 ס"מ.
 א. מצא את אורך הניצב השני.
 ב. שטח המעגל הוא 25π . מצא את רדיוס המעגל.
 ג. מצא את השטח הכלוא בין המשולש למעגל (השטח המקווקו).

בעיות במעגל – כולל אחוזים:

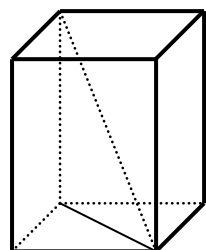


10. באיור שלפניך נתונים שני עיגולים החותכים זה את זה כך שנוצר שטח המשותף להם.
 ידוע כי גודל השטח הנ"ל הוא 17π (השטח המקווקו) ושטח כל הצורה הוא 100π . כמו כן, ידוע כי רדיוס העיגול השמאלי (הגדול) גדול ב-50% מרדיוס העיגול הימני (הקטן).
 א. מצא את הרדיוסים של שני העיגולים.
 ב. פי כמה יהיה גודל שטח העיגול הגדול משטח העיגול הקטן?

פתרונות:

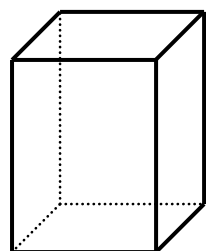
1. 24 ס"מ. 2. 10 ס"מ ו-5 ס"מ. 3. 20 ו-12 נ"ח. 4. 6 ס"מ. 5. 6 ס"מ. 6. א. 24 ס"מ
 30-1 ס"מ. ב. 19.2 ס"מ ו-10.8 ס"מ. 7. א. 10 ס"מ ו-20 ס"מ. ב. $P = 50 + 5\pi = 65.7$.
 8. א. 10 ס"מ. ב. (i) $S = 25\pi$. (ii) $S = 100 - 25 = 75$. 9. א. 10 ס"מ. ב. 5 ס"מ.
 10. $S = 120 - 25\pi = 41.4$. 10. 9 ס"מ ו-6 ס"מ. ב. פי 2.25.

8.4 – בעיות גיאומטריות – הנדסת המרחב:



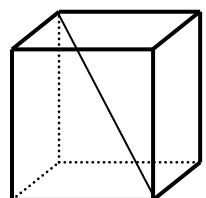
1. נתונה תיבה שבסיסה מלבן.

- ידוע כי אורך צלע אחת של בסיס התיבה קמנה ב- 25% מהצלע הסמוכה לה וכי גובה התיבה גדול פי 3 מהצלע הגדולה.
- אורך אלכסון הבסיס הוא 10 ס"מ.
- א. מצא את מידות בסיס התיבה.
- ב. מצא את נפח התיבה.
- ג. חשב את אורך אלכסון התיבה.



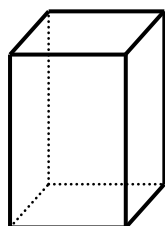
2. נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן וגובהה הוא 10 ס"מ.

- ידוע כי נפח התיבה הוא 280 סמ"ק וכי שטח הפנים שלה הוא 276 סמ"ר.
- א. מצא את מידות בסיס התיבה.
- ב. מה יהיה אורך אלכסון התיבה?



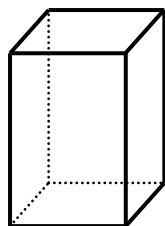
3. נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן שבו צלע אחת גדולה ב-3 ס"מ מהצלע השנייה.

- ידוע כי גובה התיבה שווה באורכו לצלע הבסיס הגדולה.
- אורך אלכסון התיבה הוא 9 ס"מ.
- א. מצא את מידות התיבה.
- ב. חשב את נפח התיבה.
- ג. חשב את שטח הפנים של התיבה.



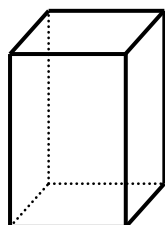
4. נתונה תיבה שבסיסה הוא ריבוע.

- גובה התיבה גדול פי 3 מאורך צלע הריבוע של הבסיס.
- ידוע כי שטח המעמפת של התיבה הוא 192 סמ"ר.
- א. מצא את אורך צלע הריבוע של בסיס התיבה.
- ב. חשב את נפח התיבה.



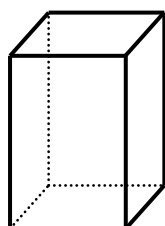
5. גזרו 6 חתיכות קרטון והרכיבו מהם תיבה שבסיסה הוא ריבוע.

- ידוע כי השטח של כל אחת מארבעת החתיכות המשמשות כפאות התיבה גדול ב-20% מהשטח של כל אחת משתי החתיכות המשמשות כבסיסי התיבה.
- גובה התיבה הנ"ל גדול בס"מ אחד מאורכי צלעות ריבוע הבסיס.
- א. מצא את המידות התיבה.
- ב. חשב את נפח התיבה.



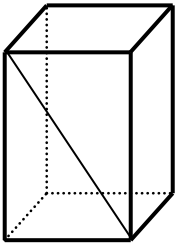
6. בתיבה שבסיסה ריבוע נתון כי אורך הצלע של הריבוע קמנה ב-40% מגובה התיבה.

- כמוכן ידוע כי שטח פאה צדדית גדול ב-24 סמ"ר משטח בסיס התיבה.
- א. מצא את מידות התיבה.
- ב. הראה כי אלכסון התיבה גדול מ-13 ס"מ.
- ג. חשב את נפח התיבה.



7. נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן. ידוע כי צלע אחת של המלבן גדול ב-50% מהצלע הסמוכה לה.

- כמוכן גובה המלבן גדול ב-50% מצלע המלבן הגדולה.
- סכום ארבעת הגבהים של המלבן גדול ב-32 ס"מ מהיקף בסיס המלבן.
- א. מצא את מידות המלבן.
- ב. חשב את שטח המעמפת של התיבה.
- ג. חשב את נפח התיבה.

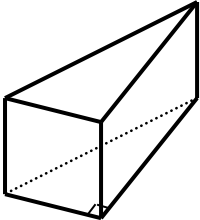


8. נתונה תיבה שבסיסה הוא מלבן. מעבירים אלכסון באחת מהפאות צדדיות של התיבה כמתואר באיור. ידוע כי אורך אלכסון זה הוא 17 ס"מ וכי גובה התיבה גדול ב-7 ס"מ מבסיס התיבה של פאה זו.
נפח התיבה הוא 720 סמ"ק.

א. מצא את גובה התיבה.

ב. מצא את מידות בסיס התיבה

ג. האם ישר שאורכו 18 ס"מ יכול להיכנס בתוך תיבה זו? (העזר באלכסון התיבה).

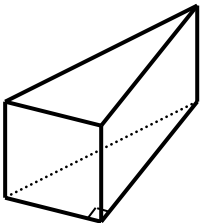


9. נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית.

ידוע כי אורך היתר במשולש הבסיס הוא 17 ס"מ. גובה המנסרה שווה לאורך ניצב המשולש הקטן. ניצב השני של המשולש גדול ב-7 ס"מ מהניצב השני.

א. חשב אורכי הניצבים ואת גובה המנסרה.

ב. חשב את נפח המנסרה.



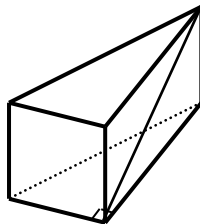
10. נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית.

ידוע כי שטח הפאה הבנויה על היתר גדול ב-25% משטח הפאה הבנויה על הניצב הגדול. הניצב הגדול, גדול ב-4 ס"מ מהניצב קטן, וקטן ב-4 ס"מ מאורך היתר. נפח המנסרה הוא 2880 סמ"ק.

א. מצא את מידות משולש הבסיס.

ב. מצא את גובה המנסרה.

ג. מצא את שטח המעטפת של המנסרה.



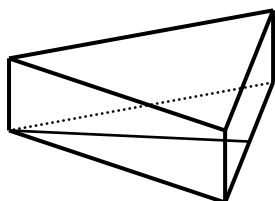
11. נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש ישר זווית.

מעבירים אלכסון בפאה שבנויה על הניצב הגדול שאורכו הוא 13 ס"מ. אורך היתר במשולש הבסיס גדול ב-6 ס"מ מהניצב הקטן שלו. גובה המנסרה הוא 5 ס"מ.

א. מצא את אורך הניצב הגדול של משולש הבסיס.

ב. מצא את הניצב השני ואת היתר במשולש הבסיס.

ג. חשב את נפח המנסרה.



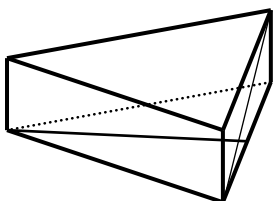
12. נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים בעל אורך שוק של 26 ס"מ. הגובה לבסיס בתוך משולש זה הוא 24 ס"מ.

שטח הפנים של המנסרה הוא 912 סמ"ר.

א. מצא את אורך מקצוע הבסיס של המשולש השווה שוקיים.

ב. מצא את גובה המנסרה.

ג. מה יהיה נפח המנסרה?

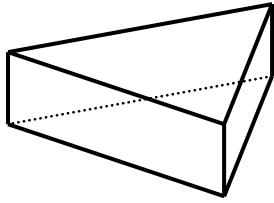


13. סכום כל המקצועות של מנסרה משולשת שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים הוא 41 ס"מ. גובה המנסרה הוא 3 ס"מ. ידוע כי אורך מקצוע הבסיס במשולש הבסיס קטן ב-2 ס"מ מאורך שוק המשולש.

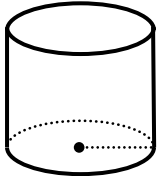
א. מצא את אורכי הצלעות של משולש הבסיס של המנסרה.

ב. חשב את אורך האלכסון העובר בפאה הבנויה על מקצוע הבסיס של המשולש השווה שוקיים.

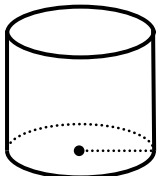
ג. חשב את שטח המעטפת של המנסרה.



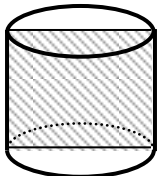
14. נתונה מנסרה שבסיסה הוא משולש שווה שוקיים.
 ידוע כי שטח הפאה הבנויה על מקצוע הבסיס של המשולש מהווה 80% משטח הפאה הסמוכה לה. כמובן ידוע כי אורך השוק במשולש בסיס גדול ב-4 ס"מ מאורך הבסיס במשולש זה.
 אורך גובה המנסרה הוא 4 ס"מ.
 א. מצא את מידות משולש הבסיס.
 ב. מה יהיה שטח המעטפת של המנסרה?
 ג. מה יהיה סכום כל מקצועות המנסרה?



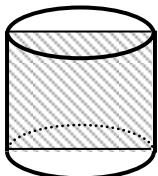
15. רדיוס גליל מסוים גדול ב-25% מגובהו. נפח הגליל הוא 800π .
 א. מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.
 ב. חשב את שטח המעטפת של הגליל.
 ג. (i) חשב את שטח עיגול הבסיס של הגליל.
 (ii) חשב את שטח הפנים של הגליל.



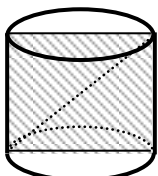
16. נתון גליל שרדיוסו r וגובהו h . שטח עיגול הבסיס קטן ב-60% משטח המעטפת.
 ידוע גם כי רדיוס הגליל קטן ב-4 ס"מ מגובהו.
 א. מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.
 ב. חשב את שטח הפנים של הגליל.
 ג. חשב את נפח הגליל.



17. שטח החתך הצירי של גליל הוא 30 סמ"ר. רדיוס הגליל וגובהו מקיימים: $2h - 3r = 1$.
 א. מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.
 ב. חשב את שטח עיגול הבסיס של הגליל.
 ג. חשב את נפח הגליל.



18. נתון גליל שרדיוסו הוא 4 ס"מ. מעבירים חתך צירי בגליל.
 ידוע כי היקף המלבן של החתך הצירי גדול פי 4 מאורך גובה הגליל.
 א. (i) מצא את גובה הגליל.
 (ii) איזה מרובע הוא המלבן של החתך הצירי?
 ב. חשב את שטח הפנים של הגליל.
 ג. חשב את נפח הגליל.



19. נתון גליל שרדיוסו מהווה אחוז מסוים מגובהו.
 החתך הצירי של הגליל הוא מלבן שבו מעבירים אלכסון שאורכו הוא 25 ס"מ.
 ידוע כי קוטר הגליל גדול ב-17 ס"מ מגובהו.
 א. (i) מצא את רדיוס הגליל ואת גובהו.
 (ii) איזה אחוז מהווה אורך גובה הגליל מרדיוסו? (עגל עד לשתי ספרות אחרי הנקודה).
 ב. חשב את שטח הפנים של הגליל.
 ג. חשב את נפח הגליל.

תשובות סופיות:

1. א. 6 ס"מ ו-8 ס"מ. ב. $V = 1152$. ג. 26 ס"מ.
2. א. 4 ס"מ ו-7 ס"מ. ב. $\sqrt{165} = 12.49$. ג. 165 ס"מ.
3. א. $3 \times 6 \times 6$ ס"מ. ב. $V = 108$. ג. $S = 144$.
4. א. 4 ס"מ. ב. $V = 192$.
5. א. $6 \times 5 \times 5$ ס"מ. ב. $V = 150$.
6. א. $10 \times 6 \times 6$ ס"מ. ג. $V = 360$.
7. א. $8 \times 12 \times 18$ ס"מ. ב. $S = 720$. ג. $V = 1728$.
8. א. 15 ס"מ. ב. 8 ס"מ ו-6 ס"מ. ג. כן.
9. א. 8 ס"מ, 8 ס"מ ו-15 ס"מ. ב. $V = 480$.
10. א. 12 ס"מ, 16 ס"מ ו-20 ס"מ. ב. 30 ס"מ. ג. $S = 1440$.
11. א. 12 ס"מ. ב. 9 ס"מ ו-15 ס"מ. ג. $V = 270$.
12. א. 20 ס"מ. ב. 6 ס"מ. ג. $V = 1440$.
13. א. 4 ס"מ ו-6 ס"מ. ב. 5 ס"מ. ג. $S = 48$.
14. א. 16 ס"מ ו-20 ס"מ. ב. $S = 224$. ג. 124 ס"מ.
15. א. 10 ס"מ ו-8 ס"מ. ב. $S = 160\pi$. ג. (i) $S = 100\pi$ (ii) $S = 360\pi$.
16. א. $r = 16$, $h = 20$. ב. $S = 1152\pi$. ג. $V = 5120\pi$.
17. א. $r = 3$, $h = 5$. ב. $S = 9\pi$. ג. $V = 45\pi$.
18. א. (i) 8 ס"מ (ii) ריבוע. ב. $S = 96\pi$. ג. $V = 128\pi$.
19. א. (i) 24 ס"מ ו-7 ס"מ. (ii) 14.58%. ב. ג. $V = 294\pi$.

נספח – משפטים בגיאומטריה

רשימת משפטים בגיאומטריה שניתן לצטט בבחינת הבגרות ללא הוכחה¹

הערות:

1. בשאלות בגיאומטריה (שאלון 005) יש לנמק כל שלב בפתרון על ידי כתיבת המשפט הגיאומטרי המתאים. משפטים ידועים ניתנים לציטוט על ידי ציון שמם. את כל יתר המשפטים יש לנסח במדויק. המשפטים שאותם ניתן לרשום על ידי ציון שמם הם:
משפט פיתגורס, משפט תאלס, המשפט ההפוך למשפט תאלס, משפט תאלס המורחב, משפט חוצה הזווית, ארבעה משפטי החפיפה: צ.ז.ז., צ.ז.צ., צ.צ.ז., צ.צ.צ., צלע וזווית מול הצלע הגדולה (ורק משפטים אלה), משפטי הדמיון, צ.ז.צ., צ.ז.ז., צ.צ.צ., זווית בין משיק ומיתר.
2. סדר המשפטים המופיע ברשימה זו אינו לפי סדר הוכחתם.
3. במהלך פתרון שאלה בבחינת הבגרות, אין צורך להוכיח את המשפטים ברשימה, אלא אם יש בשאלה דרישה מפורשת לכך.
4. אין לחפוף משולשים על ידי צ.ז.ז. אלא להראות שוויון הזווית השלישית ולהשתמש במשפט ז.צ.ז.
5. ניתן להשתמש בנוסחאות הבאות לחישוב שטחים:
א. שטח מקבילית שווה למכפלת צלע המקבילית בגובה לצלע זו.
ב. שטח משולש שווה למחצית מכפלת צלע בגובה לצלע זו.
ג. שטח מעוין שווה למחצית מכפלת האלכסונים.
ד. שטח טרפז שווה למכפלת הגובה במחצית סכום הבסיסים.
ה. שטח עיגול שרדיוסו r שווה ל- πr^2 .

המשפטים

1. זוויות צמודות משלימות זו את זו ל- 180° .
2. זוויות קודקודיות שוות זו לזו.
3. במשולש, מול זוויות שוות מונחות צלעות שוות.
4. במשולש שווה שוקיים, זוויות הבסיס שוות זו לזו.
5. סכום כל שתי צלעות במשולש גדול מהצלע השלישית.
6. במשולש שווה שוקיים, חוצה זווית הראש, התיכון לבסיס והגובה לבסיס מתלכדים.
7. אם במשולש חוצה זווית הוא גובה, אז המשולש הוא שווה שוקיים.

¹ אין צורך להוכיח את המשפטים בבחינה, אלא אם יש דרישה מפורשת לכך בשאלה.

8. אם במשולש חוצה זווית הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
9. אם במשולש גובה הוא תיכון, אז המשולש הוא שווה שוקיים.
10. במשולש (שאינו שווה צלעות), מול הצלע הגדולה יותר מונחת זווית גדולה יותר.
11. במשולש (שאינו שווה זוויות), מול הזווית הגדולה יותר מונחת צלע גדולה יותר.
12. סכום הזוויות של משולש הוא 180° .
13. זווית חיצונית למשולש שווה לסכום שתי הזוויות הפנימיות שאינן צמודות לה.
14. קטע אמצעים במשולש מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה.
15. ישר החוצה צלע אחת במשולש ומקביל לצלע שנייה, חוצה את הצלע השלישית.
16. קטע שקצותיו על שתי צלעות משולש, מקביל לצלע השלישית ושווה למחציתה הוא קטע אמצעים.
17. משפט חפיפה ז.ז.צ.
18. משפט חפיפה ז.צ.ז.
19. משפט חפיפה צ.צ.צ.
20. משפט חפיפה שתי צלעות והזווית שמול הצלע הגדולה מבין השתיים.
21. האלכסון הראשי בדלתון חוצה את זוויות הראש, חוצה את האלכסון השני ומאונך לו.
22. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתאימות שוות, אז שני הישרים מקבילים.
23. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם יש זוג זוויות מתחלפות שוות אז שני הישרים מקבילים.
24. שני ישרים נחתכים על ידי ישר שלישי. אם סכום זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180° אז שני הישרים מקבילים.
25. אם שני ישרים מקבילים נחתכים על ידי ישר שלישי אז:
 - א. כל שתי זוויות מתאימות שוות זו לזו.
 - ב. כל שתי זוויות מתחלפות שוות זו לזו.
 - ג. סכום כל זוג זוויות חד-צדדיות הוא 180° .
26. במקבילית כל שתי זוויות נגדיות שוות זו לזו.
27. במקבילית כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו.
28. במקבילית האלכסונים חוצים זה את זה.
29. מרובע שבו כל זוג זוויות נגדיות שוות הוא מקבילית.
30. מרובע שבו כל שתי צלעות נגדיות שוות זו לזו הוא מקבילית.
31. מרובע שבו זוג צלעות מקבילות ושוות הוא מקבילית.
32. מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה הוא מקבילית.
33. במעוין האלכסונים חוצים את הזוויות.
34. מקבילית שבה אלכסון הוא חוצה זווית היא מעוין.
35. במעוין האלכסונים מאונכים זה לזה.
36. מקבילית שבה האלכסונים מאונכים זה לזה היא מעוין.
37. אלכסוני המלבן שווים זה לזה.

38. מקבילית שבה האלכסונים שווים זה לזה היא מלבן.
39. במרפז שווה שוקיים הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו.
40. מרפז בו הזוויות שליד אותו בסיס שוות זו לזו הוא מרפז שווה שוקיים.
41. במרפז שווה שוקיים האלכסונים שווים זה לזה.
42. מרפז בו האלכסונים שווים זה לזה הוא מרפז שווה שוקיים.
43. קטע האמצעים במרפז מקביל לבסיסים ושווה למחצית סכומם.
44. במרפז, ישר החוצה שוק אחת ומקביל לבסיסים, חוצה את השוק השנייה.
45. שלושת התיכונים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
46. נקודת חיתוך התיכונים מחלקת כל תיכון ביחס 2:1.
(החלק הקרוב לקדקוד הוא פי 2 מהחלק האחר).
47. כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחקים שווים משוקי זווית זו.
48. אם נקודה נמצאת במרחקים שווים משני שוקי זווית, אז היא נמצאת על חוצה הזווית.
49. שלושת חוצי הזוויות של משולש נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החסום במשולש.
50. בכל משולש אפשר לחסום מעגל.
51. כל נקודה הנמצאת על האנך האמצעי של קטע, נמצאת במרחקים שווים מקצות הקטע.
52. כל נקודה הנמצאת במרחקים שווים מקצות קטע, נמצאת על האנך האמצעי לקטע.
53. כל משולש ניתן לחסום במעגל.
54. במשולש, שלושת האנכים האמצעיים נחתכים בנקודה אחת, שהיא מרכז המעגל החוסם את המשולש.
55. שלושת הגבהים במשולש נחתכים בנקודה אחת.
56. ניתן לחסום מרובע במעגל אם ורק אם סכום זוג זוויות נגדיות שווה ל- 180° .
57. מרובע קמור חוסם מעגל אם ורק אם סכום שתי צלעות נגדיות שווה לסכום שתי הצלעות הנגדיות האחרות.
58. כל מצולע משוכלל אפשר לחסום במעגל.
59. בכל מצולע משוכלל אפשר לחסום מעגל.
60. דרך כל שלוש נקודות שאינן על ישר אחד עובר מעגל אחד ויחיד.
61. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להן שוות זו לזו.
62. במעגל, שתי זוויות מרכזיות שוות זו לזו אם ורק אם שני המיתרים המתאימים להן שווים זה לזה.
63. במעגל, מיתרים שווים זה לזה אם ורק אם שתי הקשתות המתאימות להם שוות זו לזו.
64. מיתרים השווים זה לזה נמצאים במרחקים שווים ממרכז המעגל.
65. מיתרים במעגל אחד הנמצאים במרחקים שווים ממרכזו שווים זה לזה.
66. במעגל, אם מרחקו של מיתר ממרכז המעגל קטן יותר ממרחקו של מיתר אחר, אז מיתר זה ארוך יותר מהמיתר האחר.
67. האנך ממרכז המעגל למיתר חוצה את המיתר, חוצה את הזווית המרכזית המתאימה למיתר וחוצה את הקשת המתאימה למיתר.

68. קטע ממרכז המעגל החוצה את המיתר מאונך למיתר.
69. במעגל, זווית היקפית שווה למחצית הזווית המרכזית הנשענת על אותה הקשת.
70. במעגל, לזוויות היקפיות שוות קשתות שוות ומיתרים שווים.
71. במעגל, לקשתות שוות מתאימות זוויות היקפיות שוות.
72. במעגל, כל הזוויות ההיקפיות הנשענות על מיתר מאותו צד של המיתר שוות זו לזו.
73. זווית היקפית הנשענת על קוטר היא זווית ישרה (90°).
74. זווית היקפית בת 90° נשענת על קוטר.
75. במעגל, זווית פנימית שווה למחצית סכום שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.
76. במעגל, זווית חיצונית שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית ובין המשכיהן.
77. המשיק למעגל מאונך לרדיוס בנקודת ההשקה.
78. ישר המאונך לרדיוס בקצהו הוא משיק למעגל.
79. זווית בין משיק ומיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על מיתר זה מצידו השני.
80. שני משיקים למעגל היוצאים מאותה נקודה שווים זה לזה.
81. קטע המחבר את מרכז המעגל לנקודה ממנה יוצאים שני משיקים למעגל, חוצה את הזווית שבין המשיקים.
82. קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים, חוצה את המיתר המשותף ומאונך לו.
83. נקודת ההשקה של שני מעגלים המשיקים זה לזה, נמצאת על קטע המרכזים או על המשכו.
84. משפט פיתגורס: במשולש ישר זווית, סכום ריבועי הניצבים שווה לריבוע היתר.
85. משפט פיתגורס ההפוך: משולש בו סכום ריבועי שתי צלעות שווה לריבוע הצלע השלישית הוא ישר זווית.
86. במשולש ישר זווית התיכון ליתר שווה למחצית היתר.
87. משולש בו התיכון שווה למחצית הצלע אותה הוא חוצה הוא משולש ישר זווית.
88. אם במשולש ישר זווית, זווית חדה של 30° , אז הניצב מול זווית זו שווה למחצית היתר.
89. אם במשולש ישר זווית ניצב שווה למחצית היתר, אז מול ניצב זה זווית שגודלה 30° .
90. משפט תאלס: שני ישרים מקבילים החותכים שוקי זווית, מקצים עליהם קטעים פרופורציוניים.
91. משפט תאלס המורחב: ישר המקביל לאחת מצלעות המשולש חותך את שתי הצלעות האחרות או את המשכיהן בקטעים פרופורציוניים.
92. משפט הפוך למשפט תאלס: שני ישרים המקצים על שוקי זווית ארבעה קטעים פרופורציוניים הם ישרים מקבילים.
93. חוצה זווית פנימית במשולש מחלק את הצלע שמול הזווית לשני קטעים אשר היחס ביניהם שווה ליחס הצלעות הכולאות את הזווית בהתאמה.
94. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה פנימית, ביחס של שתי הצלעות האחרות (בהתאמה) הוא חוצה את זווית המשולש שדרך קדקודה הוא עובר.
95. חוצה זווית חיצונית במשולש, שאינו מקביל לצלע המשולש, מחלק את הצלע שמול הזווית הצמודה לה חלוקה חיצונית ביחס של שתי הצלעות הכולאות את הזווית הפנימית הצמודה לה.

96. ישר העובר דרך קדקוד משולש ומחלק את הצלע שמול קדקוד זה חלוקה חיצונית כיחס הצלעות האחרות (בהתאמה) הוא חוצה את הזווית החיצונית שדרך קדקודה הוא עובר.
97. משפט דמיון צ.ז.צ.
98. משפט דמיון ז.ז.
99. משפט דמיון צ.צ.צ.
100. במשולשים דומים:
- א. יחס גבהים מתאימים שווה ליחס הדמיון.
 - ב. יחס חוצי זוויות מתאימות שווה ליחס הדמיון.
 - ג. יחס תיכונים מתאימים שווה ליחס הדמיון.
 - ד. יחס ההיקפים שווה ליחס הדמיון.
 - ה. יחס הרדיוסים של המעגלים החוסמים שווה ליחס הדמיון.
 - ו. יחס הרדיוסים של המעגלים החסומים שווה ליחס הדמיון.
 - ז. יחס השטחים שווה לריבוע יחס הדמיון.
101. אם במעגל שני מיתרים נחתכים, אז מכפלת קטעי מיתר אחד שווה למכפלת קטעי המיתר השני.
102. אם מנקודה מחוץ למעגל יוצאים שני חותכים, אז מכפלת חותך אחד בחלקו החיצוני שווה למכפלת החותך השני בחלקו החיצוני.
103. אם מנקודה שמחוץ למעגל יוצאים חותך ומשיק, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק.
104. במשולש ישר זווית, הניצב הוא ממוצע הנדסי של היתר והיטל ניצב זה על היתר.
105. הגובה ליתר במשולש ישר זווית הוא ממוצע הנדסי של היטלי הניצבים על היתר.
106. סכום הזוויות הפנימיות של מצולע קמור הוא $180^\circ(n-2)$.