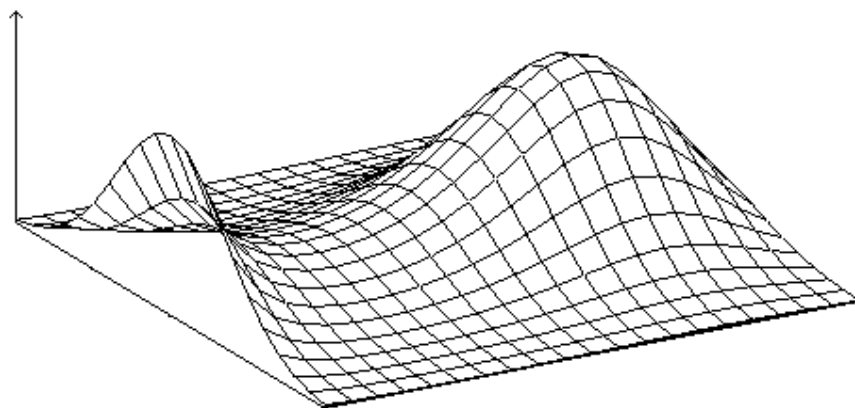


אנליזה וקטורית



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באנליזה וקטורית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva2.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

פרק 1 - אינטגרלים קויים ושימושיהם (אורך ומסה של עקום, עבודה).....	4
פרק 2 - אי תלות במסלול, שדות משמרים.....	8
פרק 3 - משפט גרין.....	11
פרק 4 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם.....	13
פרק 5 - משפט הדיברגנץ (גאוס).....	15
פרק 6 - משפט סטוקס (משפט גרין במרחב).....	17
נספח - משטחים ממעלה שנייה.....	19
נספח נוסחאות.....	22
נספח נוסחאות.....	26

פרק 1 - אינטגרלים קויים ושימושיהם (אורך ומסה של עקום, עבודה)

* מומלץ בחום לעיין בנספח "הצגות פרמטריות של עקומים חשובים" שבעמ' 70.

I אינטגרל קוי מסוג I

$$(1) \text{ חשב } \int_C f(x, y) ds$$

א. $C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$; $f(x, y) = 1 - x^2$

ב. $C: x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, 0 \leq t \leq \pi$; $f(x, y) = x$

ג. C קטע של ישר המחבר את $O(0,0)$ עם $A(1,2)$; $f(x, y) = x + y$

ד. C היקפו של ΔOAB של $O(0,0), A(0,1), B(1,0)$; $f(x, y) = x + y^2$

$$(2) \text{ חשב } \int_C f(x, y, z) ds$$

א. $C: x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq \pi$; $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

ב. $C: x = t, y = \frac{1}{\sqrt{2}}t^2, z = \frac{1}{3}t^3, 0 \leq t \leq 3$; $f(x, y, z) = x^3 + 3z$

(3) חשב את אורך העקום $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

(4) סליל עשוי תיל דק מיוצג על ידי $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t$ ($0 \leq t \leq \pi$)

חשב את מסת הסליל אם פונקציית הצפיפות היא $\delta(x, y, z) = kz$ ($k > 0$)

II אינטגרל קוי מסוג II

(5) חשב:

א. $C: x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi/2$; $\int_C 2xy dx + (x^2 + y^2) dy$

ב. $C: x = t, y = t^2, 0 \leq t \leq 1$; $\int_C (2x + y) dx + (x^2 - y) dy$

(6) חשב $\int_C y dx + x^2 dy$ כאשר C המסלול מנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,4)$

ו- C נתון ע"י המשוואה: א. $y = 2x$ ב. $y = x^2$

(7) חשב $\int_{(1,1)}^{(4,2)} (x+y)dx + (y-x)dy$ אם העקום נתון על ידי :

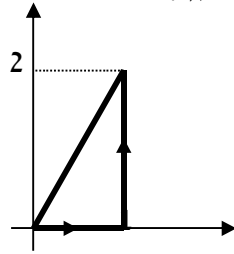
א. הפרבולה $y^2 = x$.

ב. קו ישר.

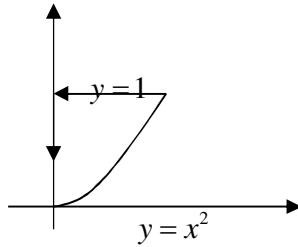
ג. הקווים הישרים מ- $(1,1)$ ל- $(1,2)$ ומשם ל- $(4,2)$.

ד. העקום: $x = 2t^2 + t + 1$, $y = t^2 + 1$.

(8) חשב $\int_C x^2 y dx + x dy$ כאשר המסלול C מתואר בציור:



(9) חשב $\int_C (x - y^2) dx + dy$ כאשר המסלול C מתואר בציור:



(10) אם $\mathbf{F}(x, y, z) = (3x^2 - 6yz)\mathbf{i} + (2y + 3xz)\mathbf{j} + (1 - 4xyz^2)\mathbf{k}$

חשב את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ מ- $(0,0,0)$ ל- $(1,1,1)$ לאורך המסלולים:

א. $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$.

ב. הקווים הישרים מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,0,1)$, משם ל- $(0,1,1)$ ומשם ל- $(1,1,1)$.

ג. הישר המחבר את $(0,0,0)$ ו- $(1,1,1)$.

(11) חשב את האינטגרל הקווי $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, כאשר :

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2 y^3, -y\sqrt{x}), \quad \mathbf{r}(t) = (t^2, -t^3), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{א.}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin x, \cos y, xz), \quad \mathbf{r}(t) = (t^3, -t^2, t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad \text{ב.}$$

(12) א. חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y) = x^3 y \mathbf{i} + (x - y) \mathbf{j}$

על חלקיק שנע על הפרבולה $y = x^2$ מ- $(-2, 4)$ עד $(1, 1)$.

ב. כיצד הייתה משתנה תשובתך אילו החלקיק היה נע מ- $(1, 1)$ עד $(-2, 4)$.

(13) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}$

על חלקיק הנע לאורך העיקול $\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$ ($0 \leq t \leq 1$).

הערת סימון

אינטגרל קווי מסוג II בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (f, g, h) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C f dx + g dy + h dz$$

$$\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \int_C (A_1, A_2, A_3) \cdot (dx, dy, dz) = \int_C A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

פתרונות

$$(1) \quad \pi \quad \text{ב.} \quad \frac{16}{3} \quad \text{ג.} \quad \frac{3\sqrt{5}}{2} \quad \text{ד.} \quad \frac{5}{6}(\sqrt{2}+1)$$

$$(2) \quad \sqrt{2}\pi(1+\frac{\pi^2}{3}) \quad \text{ב.} \quad \frac{567}{2}$$

$$(3) \quad 6$$

$$(4) \quad \sqrt{5}k\pi^2$$

$$(5) \quad \frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad \frac{4}{3}$$

$$(6) \quad \frac{28}{3} \quad \text{ב.} \quad \frac{32}{3}$$

$$(7) \quad \frac{34}{3} \quad \text{ב.} \quad 11 \quad \text{ג.} \quad 14 \quad \text{ד.} \quad \frac{32}{3}$$

$$(8) \quad \frac{1}{2}$$

$$(9) \quad \frac{4}{5}$$

$$(10) \quad 2 \quad \text{א.} \quad -3 \quad \text{ב.} \quad \frac{6}{5} \quad \text{ג.}$$

$$(11) \quad -\frac{59}{105} \quad \text{א.} \quad -\frac{6}{5} - \sin 1 - \cos 1 \quad \text{ב.}$$

$$(12) \quad 3 \quad \text{א.} \quad -3 \quad \text{ב.}$$

$$(13) \quad 1$$

פרק 2 - אי תלות במסלול, שדות משמרים

(1) קבע האם F הוא שדה משמר. אם כן, מצא פונקציה ϕ כך ש- $\nabla \phi = F$.

א. $F(x, y) = (6x + 5y, 5x + 4y)$

ב. $F(x, y) = xe^y \mathbf{i} + ye^x \mathbf{j}$

ג. $F(x, y) = (2x \cos y - y \cos x, -x^2 \sin y - \sin x)$

ד. $F(x, y, z) = z^2 \mathbf{i} + e^{-y} \mathbf{j} + 2xz \mathbf{k}$

ה. $F(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + (xy + 3z^2) \mathbf{k}$

ו. $F(x, y, z) = (z, 2yz, y^2)$

(2) נתון האינטגרל $\int_{(1,2)}^{(3,4)} (6xy^2 - y^3)dx + (6x^2y - 3xy^2)dy$

א. הוכח שהאינטגרל אינו תלוי במסלול המחבר את $(1, 2)$ ו- $(3, 4)$.

ב. חשב את האינטגרל בשתי דרכים שונות.

(3) חשב את האינטגרל $\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2 y^2) dy$

(4) חשב את האינטגרל $\int_{(1,0)}^{(2,1)} (2xy - y^4 + 3) dx + (x^2 - 4xy^3) dy$

(5) יהי $F(x, y) = e^y \mathbf{i} + xe^y \mathbf{j}$. מצא את העבודה שמבצע השדה על חלקיק הנע

על $y = \sqrt{1-x^2}$ מ- $(1, 0)$ ל- $(-1, 0)$.

(6) חשב את האינטגרל $\int_{(1,-1,1)}^{(2,1,-1)} (2xz^3 + 6y) dx + (6x - 2yz) dy + (3x^2 z^2 - y^2) dz$

תן מובן פיסיקאלי לתוצאה.

(7) נתון שדה וקטורי $\mathbf{F} = \frac{x^2 + y^2 - y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$ ונתונים 3 מסלולים :

$$L_1 : x^2 + y^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$L_2 : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{בכיוון השלילי (עם כיוון השעון).}$$

$$L_3 : (x-10)^2 + (y-7)^2 = 1 \quad \text{בכיוון החיובי (נגד כיוון השעון).}$$

$$\text{חשב: א. } \oint_{L_1} \mathbf{F} dr \quad \text{ב. } \oint_{L_2} \mathbf{F} dr \quad \text{ג. } \oint_{L_3} \mathbf{F} dr$$

$$(8) \text{ נתון שדה וקטורי } \mathbf{F} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \cdot \mathbf{j}$$

ונתונים 2 מסלולים מ- $(2,0)$ ל- $(-2,0)$:

$$L_1 : x^2 + y^2 = 4, y \geq 0 \quad L_2 : x^2 + y^2 = 4, y \leq 0$$

$$\text{א. חשב: } \oint_{L_2} \mathbf{F} dr, \oint_{L_1} \mathbf{F} dr$$

ב. הוכח כי $\mathbf{F}$ משמר בחצי הטבעת $D = \{(x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}$.

הערת סימון

שדה וקטורי בסימונים שונים בספרות המקצועית :

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\hat{x} + g(x, y, z)\hat{y} + h(x, y, z)\hat{z}$$

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

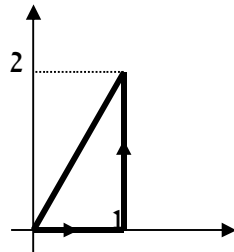
פתרונות

- (1) א. $\phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 2y^2$. ב. השדה אינו משמר.
- ג. $\phi(x, y) = x^2 \cos y - y \sin x$. ד. $\phi(x, y, z) = xz^2 - e^{-y}$.
- ה. $\phi(x, y, z) = xyz + z^3$. ו. השדה אינו משמר.
- (2) ב. 236
- (3) -58
- (4) 5
- (5) -2
- (6) $= 15$ עבודה שנעשית בהזזת גוף מ- $(1, -1, 1)$ ל- $(2, 1, -1)$ לאורך C .
- (7) א. 2π . ב. -2π . ג. 0.
- (8) א. $L_1 : \pi$, $L_2 : -\pi$

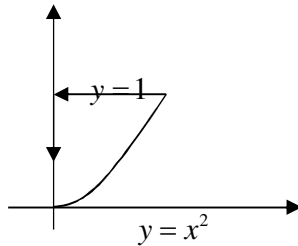
פרק 3 - משפט גרין

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט גרין, כלומר חשב את האינטגרל $\oint_C f dx + g dy$ ואת האינטגרל $\iint_R (g_x - f_y) dA$ והראה שהם שווים זה לזה.

(1) $\oint_C x^2 y dx + x dy$; המסלול C מתואר בציור :



(2) $\oint_C (x - y^2) dx + dy$; המסלול C מתואר בציור :



(3) $\oint_C (x^2 - xy^3) dx + (y^2 - 2xy) dy$;

C הוא ריבוע שקודקודיו: $(0,0), (2,0), (2,2), (0,2)$ בכיוון החיובי. ריקי

(4) חשב את העבודה שמבצע שדה הכוח $\mathbf{F}(x, y) = (e^x - y^3)\mathbf{i} + (\cos y + x^3)\mathbf{j}$ על חלקיק הנע על מעגל היחידה $x^2 + y^2 = 1$, בכיוון הפוך לכיוון השעון

ומשלים הקפה אחת.

(5) חשב את האינטגרל $\int_C \left(e^y - \tan \frac{x}{2} \right) dx + \left(x e^y + y \cos y^2 \right) dy$ כאשר C הוא

האיחוד של העקומים $y = 8 - x^2$, $y = x^2$ ברביע הראשון, עם כיוון השעון.

(6) חשב את האינטגרל $\int_C -2e^{2x-y} \cos y dx + \left(e^{2x-y} (\sin y + \cos y) + 2xy \right) dy$

כאשר C הוא חצי האליפסה $\{x^2 + 4y^2 = 4, y \geq 0\}$ מהנקודה $(2, 0)$ לנקודה

$(-2, 0)$.

(7) א. הוכח שהשטח החסום על ידי עקום סגור פשוט C נתון ע"י: $\frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx$.

ב. חשב את שטח האליפסה $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

פתרונות

(1) הערך המשותף הוא 0.5

(2) הערך המשותף הוא 0.8

(3) הערך המשותף הוא 8

(4) 1.5π

(5) $0.5 \sin 64$

(6) $\frac{8}{3} + e^4 - \frac{1}{e^4}$

(7) ב. πab

פרק 4 - אינטגרלים משטחיים ושימושיהם

I אינטגרל משטחי מסוג I

בכל אחד מהתרגילים (1)-(5) חשב את האינטגרל המשטחי.

$$(1) \iint_S x^2 yz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = 1 + 2x + 3y \text{ מעל המלבן } R = [0, 3] \times [0, 2]$$

$$(2) \iint_S x dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המשטח } y = x^2 + 4z \text{ , } 0 \leq x \leq 2 \text{ , } 0 \leq z \leq 2$$

$$(3) \iint_S yz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא המישור } z = y + 3 \text{ שכלוא בתוך הגליל } x^2 + y^2 = 1$$

$$(4) \iint_S (x^2 z + y^2 z) dS \text{ כאשר } S \text{ הוא חצי הכדור } x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ , } z \geq 0$$

$$(5) \iint_S xyz dS \text{ כאשר } S \text{ הוא חלק החרוט } \mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 3u \mathbf{k}$$

$$\text{המקיים } 1 \leq u \leq 2 \text{ , } 0 \leq v \leq \pi/2$$

$$(6) \text{ חשב את שטח הפנים של כדור בעל רדיוס } R$$

$$(7) \text{ היריעה הדקה } S \text{ היא חלק הפרבולואיד } z = x^2 + y^2 \text{ שמתחת למישור } z = 1$$

$$\text{וצפיפותה } \delta(x, y, z) = \delta_0 \text{ קבועה. חשב את מסת היריעה.}$$

II אינטגרל משטחי מסוג II

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds \text{ חשב את האינטגרל (8)-(12)}$$

ובניסוח אחר :

$$\text{בכל אחד מהתרגילים (8)-(12) חשב את השטף של שדה הזרימה } \mathbf{F} \text{ דרך } S.$$

($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S).

$$(8) \quad S \text{ ; } \mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k} \text{ הוא פני הקובייה הנקבעת ע"י}$$

$$\text{המישורים : } x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1.$$

$$(9) \quad S \text{ ; } \mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k} \text{ הוא פני הכדור, } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

$$(10) \quad S \text{ ; } \mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k} \text{ הוא פני הפירמידה הנקבעת ע"י}$$

$$\text{המישורים : } 2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0.$$

$$(11) \quad S \text{ ; } \mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ חלק הפרבולואיד } z = 4 - x^2 - y^2 \text{ שבו } z \geq 0.$$

$$(12) \quad \mathbf{F} = 0\mathbf{i} - 2z\mathbf{j} + (-3y - 1)\mathbf{k}$$

S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

פתרונות

$$\pi\sqrt{2}/4 \quad (3) \qquad \frac{33\sqrt{33} - 17\sqrt{17}}{6} \quad (2) \qquad 171\sqrt{14} \quad (1)$$

$$4\pi R^2 \quad (6) \qquad 93/\sqrt{10} \quad (5) \qquad 16\pi \quad (4)$$

$$\frac{8\pi}{3} \quad (9) \qquad \frac{11}{6} \quad (8) \qquad \frac{\pi\delta_0}{6}(5\sqrt{5} - 1) \quad (7)$$

$$-16\pi \quad (12) \qquad 12\pi \quad (11) \qquad 27 \quad (10)$$

פרק 5 - משפט הדיברגנץ (גאוס)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) אשר את משפט הדיברגנץ, כלומר חשב את האינטגרל $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ ואת האינטגרל $\iiint_G \text{div} \mathbf{F} dV$ והראה שהם שווים זה לזה. ($\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S). (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F} = (2x - z)\mathbf{i} + x^2 y\mathbf{j} - xz^2\mathbf{k}$; S הוא פני הקובייה G הנקבעת ע"י

המישורים: $x=0, x=1, y=0, y=1, z=0, z=1$.

(2) $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הכדור G , $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(3) $\mathbf{F} = (2xy + z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} - (x + 3y)\mathbf{k}$; S הוא פני הפירמידה G הנקבעת ע"י

המישורים: $2x + 2y + z = 6, x=0, y=0, z=0$.

(4) יהי S פני הגוף הכלוא בגליל $x^2 + y^2 = 9$ בין המישורים $z=0$ ו- $z=2$.

חשב את השטף של השדה הוקטורי $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ דרך S .

כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

(5) חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$\mathbf{F} = (z^2 - x)\mathbf{i} - xy\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$; S הוא פני הגוף החסום על ידי:

$x=0, x=3, z=4-y^2, z=0$.

(6) חשב את $\iint_S xz^2 dydz + (x^2 y - z^3) xydzdx + (2xy + y^2 z) dx dy$

כאשר S הוא פני הגוף החסום על ידי: $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, z=0$.

(7) יהי S משטח פתוח $x^2 + z^2 = 16$, $0 \leq y \leq 4$ (גליל ללא הבסיסים).

חשב את השטף דרך S של השדה הוקטורי $\mathbf{F} = z^2\mathbf{i} + 5y\mathbf{j} + x^5\mathbf{k}$.

כלומר, חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

(8) חשב את $\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds$ כאשר $\mathbf{n}$ הוא נורמל חיצוני של S .

$$\mathbf{F} = \left(\frac{x^2 y}{1+y^2} + 6yz^2 \right) \mathbf{i} + 2x \arctan y \mathbf{j} - \frac{2xz(1+y) + 1+y^2}{1+y^2} \mathbf{k}$$

S הוא חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$ שבו $z \geq 0$ (המשטח פתוח).

הערת סימון

לפי משפט הדיברגנץ, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F} = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$

$$\iiint_G \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים}$$

ניסוחים נוספים של משפט הדיברגנץ:

$$\begin{aligned} \iiint_G \nabla \cdot \mathbf{F} dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ \iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV &= \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ \iiint_G (f_x + g_y + h_z) dV &= \iint_S f dydz + g dzdx + h dx dy \end{aligned}$$

פתרונות

$$(1) \frac{11}{6} \text{ הערך המשותף הוא } \frac{11}{6}$$

$$(2) \frac{8}{3}\pi \text{ הערך המשותף הוא } \frac{8}{3}\pi$$

$$(3) \text{ הערך המשותף הוא } 27$$

$$(4) 279\pi$$

$$(5) 16$$

$$(6) \frac{2\pi a^5}{5}$$

$$(7) 0$$

$$(8) -4\pi$$

פרק 6 - משפט סטוקס (משפט גרין במרחב)

בכל אחד מהתרגילים (1)-(3) בדוק שמשפט סטוקס אכן מתקיים, כלומר חשב את האינטגרל $\iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} ds$ ואת האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ והראה שהם שווים זה לזה (ראה הערת סימון בסוף הסעיף).

(1) $\mathbf{F} = 2xz\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + 5y\mathbf{k}$; חלק הפרבולואיד $z = 4 - x^2 - y^2$ שבו $z \geq 0$.

$$\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + (-3xy)\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k} \quad (2)$$

S הוא חצי הכדור שמרכזו בראשית, רדיוסו 4 והוא נמצא מעל המישור xy .

(3) $\mathbf{F} = (y + z)\mathbf{i} - xz\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$; S הוא משטח התחום בשמינית הראשונה

החסום על ידי המישורים $y = 2$, $2x + z = 6$, ושאינו כלול

א. במישור xy .

ב. במישור $y = 2$.

ג. במישור $2x + z = 6$.

(4) חשב את האינטגרל $\oint_C x^2 dx + 4xy^3 dy + y^2 x dz$ כאשר C העקומה בצורת

מלבן מ- $(0,0,0)$ ל- $(0,3,3)$, משם ל- $(1,3,3)$ ומשם ל- $(1,0,0)$.

(5) חשב את האינטגרל $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ כאשר $\mathbf{F} = (x + y^2)\mathbf{i} + (y + z^2)\mathbf{j} + (z + x^2)\mathbf{k}$

ו- C היא שפת המשולש שקודקודיו הם $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ וכיוונה

הפוך לכיוון השעון (במבט מלמעלה מהכיוון החיובי של ציר ה- z).

(6) חשב את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ כאשר $\mathbf{F} = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

ו- S הוא החלק של הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ הכלוא בתוך הגליל $x^2 + y^2 = 1$

ומעל למישור xy .

(7) חשב את $\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$ כאשר $\mathbf{F} = (x - z)\mathbf{i} + (x^3 + yz)\mathbf{j} - 3xy^2\mathbf{k}$

ו- S הוא משטח החרוט $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ מעל למישור xy .

הערת סימון

לפי סטוקס, בהינתן שדה וקטורי $\mathbf{F}(x, y, z) = f(x, y, z)\mathbf{i} + g(x, y, z)\mathbf{j} + h(x, y, z)\mathbf{k}$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS \quad \text{מתקיים}$$

ניסוחים נוספים של משפט סטוקס :

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\text{Rot} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

$$\oint_C f dx + g dy + h dz = \iint_S \left((h_y - g_z)\mathbf{i} + (f_z - h_x)\mathbf{j} + (g_x - f_y)\mathbf{k} \right) \cdot \mathbf{n} dS$$

פתרונות

(2) הערך המשותף הוא -16π

(4) -90

(6) 0

(1) הערך המשותף הוא 12π

(3) הערך המשותף הוא א) -6 ב) -9 ג) -18

(5) -1

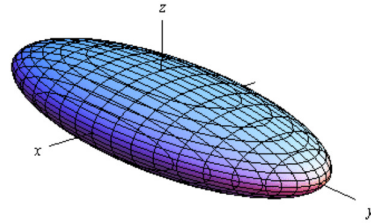
(7) 12π

נספח - משטחים ממעלה שנייה

אליפסואיד

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

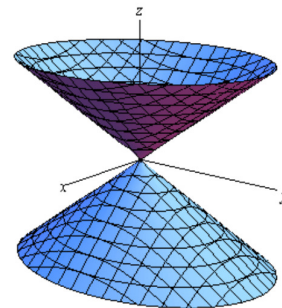
תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a = b = c$ נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.



חרוט אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

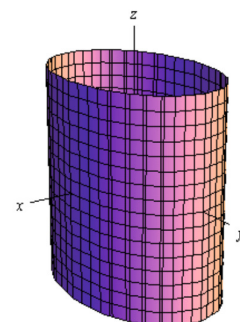
תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות. * מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.



גליל אליפטי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2 + y^2 = r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים. * מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

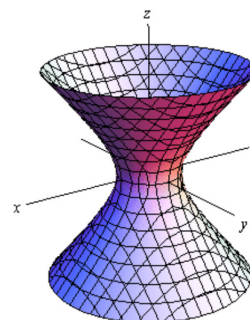


היפרבולואיד חד-יריעתי

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy . החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

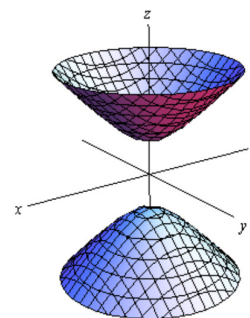
* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

**היפרבולואיד דו-יריעתי**

$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

תיאור: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החתכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

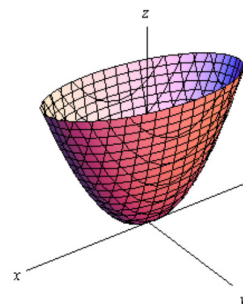
**פרבולואיד אליפטי**

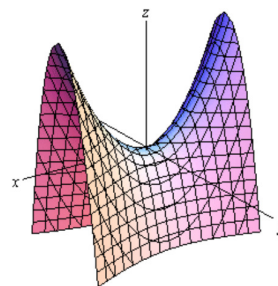
$$\text{משוואה: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.



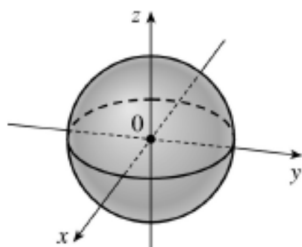
פרבולואיד היפרבולי

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c} : \text{משוואה}$$

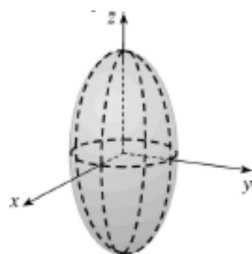
תיאור: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x . החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

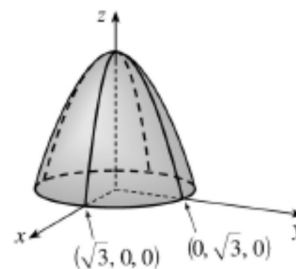
* אם $c > 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c < 0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

דוגמאות שונות

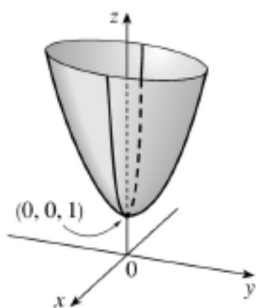
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



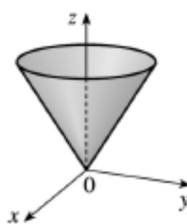
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1$$



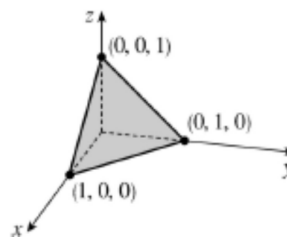
$$z = 3 - x^2 - y^2$$



$$z = 4x^2 + y^2 + 1$$



$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$x + y + z = 1$$

נספח נוסחאות

הצגות פרמטריות של עקומים חשובים

דוגמה	הצגה פרמטרית	עקום
$y = x^2 \ (1 \leq x \leq 2)$ $\Downarrow$ $x = t, y = t^2 \ (1 \leq t \leq 2)$	$x = t, y = f(t) \ (a \leq t \leq b)$	$y = f(x) \ (a \leq x \leq b)$
$x = y^2 \ (1 \leq y \leq 2)$ $\Downarrow$ $y = t, x = t^2 \ (1 \leq t \leq 2)$	$y = t, x = f(t) \ (a \leq t \leq b)$	$x = f(y) \ (a \leq y \leq b)$
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = r \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$x^2 + y^2 = 4$ $\Downarrow$ $x = 2 \cos t, y = -2 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = r \cos t, y = -r \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$x^2 + y^2 = r^2$ מעגל
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = 5 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = b \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ נגד כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
$\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ $\Downarrow$ $x = 3 \cos t, y = -5 \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$	$x = a \cos t, y = -b \sin t \ (0 \leq t \leq 2\pi)$ עם כיוון השעון	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ אליפסה
ישר פרמטרי מהנק' $(1, 2)$ לנק' $(3, 4)$ $x = 1 + 2t$ $y = 2 + 2t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במישור מהנק' (x_0, y_0) לנק' (x_1, y_1)
ישר פרמטרי מ- $(1, 2, 3)$ ל- $(4, 7, 9)$ $x = 1 + 3t$ $y = 2 + 5t$ $z = 3 + 6t$ $(0 \leq t \leq 1)$	$x = x_0 + t(x_1 - x_0)$ $y = y_0 + t(y_1 - y_0)$ $z = z_0 + t(z_1 - z_0)$ $(0 \leq t \leq 1)$	ישר פרמטרי במרחב מהנק' (x_0, y_0, z_0) לנק' (x_1, y_1, z_1)

נוסחאות - גיאומטריה אנליטית במישור ובמרחב (וקטורים)

במישור

מרחק בין 2 נקודות במישור (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

שיפוע ישר העובר דרך 2 נקודות (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

ישר דרך (x_1, y_1) ששיפועו m : $y - y_1 = m(x - x_1)$

ישר דרך (x_1, y_1) ו- (x_2, y_2) : $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

תנאי שהישר $y = m_1x + n_1$ יהיה מאונך לישר $y = m_2x + n_2$: $m_1 \cdot m_2 = -1$

תנאי שהישר $y = m_1x + n_1$ יהיה מקביל לישר $y = m_2x + n_2$: $m_1 = m_2$

מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$: $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

הזווית החדה α בין הישר $y = m_1x + n_1$ לישר $y = m_2x + n_2$: $\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$

מעגל שמרכזו בנקודה (a, b) ורדיוסו R : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

משוואת אליפסה קנונית : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ כאשר a ו- b חוצי הצירים של האליפסה.

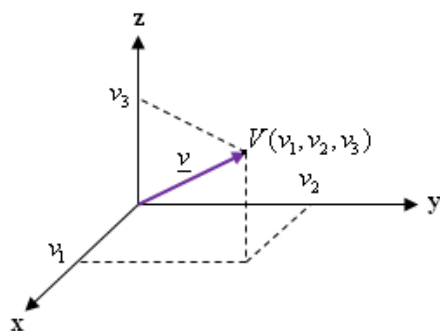
משוואת היפרבולה קנונית : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ כאשר a הוא חצי הציר הממשי.

משוואת פרבולה קנונית : $y^2 = 2px$

במרחב (וקטורים)

מרחק בין 2 נקודות (x_1, y_1, z_1) ו- (x_2, y_2, z_2) : $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

ההצגה האלגברית של וקטור



על כל נקודה $V(v_1, v_2, v_3)$ במרחב התלת-ממדי

ניתן להסתכל כעל חץ שמוצאו בראשית הצירים

$O(0, 0, 0)$ וסופו בנקודה V . חץ זה נקרא וקטור

ומסומן $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

* מקובל לרשום $\vec{v}$ או $\mathbf{v}$ במקום $\underline{v}$.

ההצגה האלגברית של וקטור בעזרת וקטורי הצירים

וקטורי הצירים הם הוקטורים: $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$

המסומנים גם כך $\hat{i} = (1, 0, 0)$, $\hat{j} = (0, 1, 0)$, $\hat{k} = (0, 0, 1)$

או כך $\hat{x} = (1, 0, 0)$, $\hat{y} = (0, 1, 0)$, $\hat{z} = (0, 0, 1)$

או כך $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$

ההצגה של וקטור $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ בעזרת וקטורי הצירים היא $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$

פעולות בין וקטורים:

נתונים שני וקטורים: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

כפל וקטור בסקלר: $k \cdot \vec{a} = k(a_1, a_2, a_3) = (ka_1, ka_2, ka_3)$

חיבור וקטורים: $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ $(\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b})$

מכפלה וקטורית של וקטורים: $\vec{a} \times \vec{b} = ((a_2b_3 - a_3b_2), -(a_1b_3 - a_3b_1), (a_1b_2 - a_2b_1))$

גודל וקטור $\vec{a}$ (אורך הוקטור): $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

הנירמול של וקטור $\vec{a}$: $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(a_1, a_2, a_3)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$

כיוון וקטור במרחב

יהיו α, β, γ שלוש הזוויות שיוצר הוקטור $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ עם הצירים x, y, z בהתאמה.

$$1. a_1 = |\vec{a}| \cos \alpha, a_2 = |\vec{a}| \cos \beta, a_3 = |\vec{a}| \cos \gamma$$

$$2. \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$3. \text{הוקטור } \hat{a} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) \text{ הוא וקטור יחידה בכיוון } \vec{a}.$$

משוואת ישר פרמטרי במישור דרך $A(x_1, y_1)$ ו- $B(x_2, y_2)$:

$$\underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u} \quad (\underline{a} = A, \underline{u} = B - A)$$

or

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

or

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), y = y_1 + t(y_2 - y_1)$$

משוואת ישר פרמטרי במרחב דרך $A(x_1, y_1, z_1)$ ו- $B(x_2, y_2, z_2)$:

$$\underline{x} = \underline{a} + t \cdot \underline{u} \quad (\underline{a} = A, \underline{u} = B - A)$$

or

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

or

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1), y = y_1 + t(y_2 - y_1), z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

זווית בין שני ישרים

נתונים שני ישרים : $L_1 : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ ו- $L_2 : \underline{x} = \underline{b} + s\underline{v}$

$$\cos \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|}{|\underline{u}| |\underline{v}|} : \text{הזווית } \alpha \text{ בין הישרים מקיימת}$$

משוואת מישור : $ax + by + cz + d = 0$ כאשר $\vec{v} = (a, b, c)$ וקטור נורמל (מאונך) למישור.

משוואת מישור דרך 3 נקודות : $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$:

$$\det \begin{pmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} = 0$$

מרחק נקודה ממישור

$$\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} : \text{מרחק הנקודה } (x_0, y_0, z_0) \text{ מהמישור } ax + by + cz + d = 0$$

זווית בין ישר ומישור

נתונים : ישר $L : \underline{x} = \underline{r} + t\underline{u}$ ומישור $ax + by + cz + d = 0$.

$$\sin \alpha = \frac{|\underline{u} \cdot \underline{v}|}{|\underline{u}| |\underline{v}|} : \text{הזווית } \alpha \text{ בין הישר למישור מקיימת} \quad \underline{v} = (a, b, c) \text{ כאשר}$$

הערה :

הישר $\underline{x} = t(a, b, c)$ מאונך למישור $ax + by + cz + d = 0$.

לפיכך, אם הישר $L : \underline{x} = \underline{r} + t \cdot \underline{u}$ מקביל למישור אז $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0$.

זווית בין שני מישורים

נתונים שני מישורים : $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$,

$$\cos \alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} : \text{הזווית } \alpha \text{ שבין המישורים מקיימת}$$

נספח נוסחאות**גבולות**

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

נוסחאות - נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \coth f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות - אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות - טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases}$$

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

נוסחאות - אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורןתחום התכנסות

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$-1 \leq x \leq 1 \quad (m > 0)$
 $-1 < x \leq 1 \quad (-1 < m < 0)$
 $-1 < x < 1 \quad (m \leq -1)$
 $m \neq 0, 1, 2, 3, \dots$