

# משוואות דיפרנציאליות

## פרק 7 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

### תוכן העניינים

1	. בעיות גדילה ודעיכה.
3	. בעיות בגיאומטריה אנליטית.
5	. עקומות אורתוגונליות.
6	. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום.
7	. בעיות שונות.

## בעיות גדילה ודעיכה

### שאלות

- (1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.  
 ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.
- כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?
  - כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?
  - באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?
- \*הניחס שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שככל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).
- (2) האוכלוסייה בעיר מסויימת גדלה מעריכית.  
 בשנה מסויימת היו בעיר 400 אלף תושבים,  
 ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.
- מצאו את אחוז הגידול השנתי.
  - מצאו בעבר כמה שנים (החל מהשנה המסויימת),  
 היו בעיר 550 אלף תושבים.
- (3) אדם הפיק סכום כסף בבנק בריבית דרייבית של 4%.  
 בעבר 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש"ח.
- כמה כסף הפיק האדם?
  - בעבר כמה שנים היו לאדם 7,000 ש"ח?
- (4) מספר חיים הבר בעין גדי גדול בצורה מעריכית.  
 בספירה הראשונית היו 1,000 חיים.  
 בספירה השנייה שנעשתה, בעבר 20 חודשים, היו 1,400 חיים.  
 מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה,  
 היו בשמורה 2,000 חיים בר.
- (5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים.  
 ידוע כי קצב ההתרפרקות הרגעי של היסוד,  
 פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו רגע.
- כמה גרים של יסוד זה ישרוו אחרי 1,000 שנים,  
 מכמות התחלתית של 100 גרם?
  - בעבר כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם,  
 מכמות התחלתית של 100 גרם?

- 6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, ובכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע. בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, ובכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.
- בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה שווה?
  - בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכך?

### תשובות סופיות

- |                |                 |                  |     |
|----------------|-----------------|------------------|-----|
| ג. בשנת 2,106. | ב. 3.54.        | א. 7.28 מיליארד. | (1) |
|                | ב. 15.92 שנים.  | א. 2%.           | (2) |
|                | ב. 41 שנים.     | א. 4093.65 ט.    | (3) |
|                | ב. 13.41 שנים.  | א. 40.77 חודשים. | (4) |
|                | ב. 19,188 שנים. | א. 88.69 גרם.    | (5) |
|                | ב. 14.6 שבועות. | א. 3.04 שבועות.  | (6) |

## בעיות גיאומטריות

### שאלות

**1)** על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה  $(x, y)$  על העקום,

$$\text{שווה ל } -\frac{x}{y}.$$

מצאו את משוואת העקום.

**2)** מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

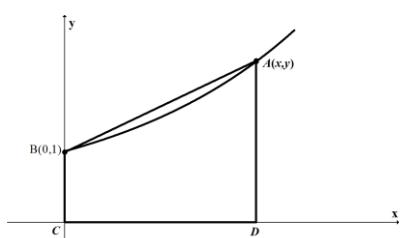
**3)** מצאו את משוואת העקום, שהשיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

**4)** תרגמו את התייאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:  
נתון עקום בربיע הראשון, העובר בנקודה  $(2,4)$ .

נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה  $(x, y)$  מעליו, ובין שיפוע הישיר המחבר את  $A$  עם ראשית הצירים, שווה לשיעור  $\frac{y}{x}$  של הנקודה  $A$ .

**5)** מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה  $(3,4)$ , אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

**6)** קטע הנורמל לעקום בנקודה  $(x, y)$  שבין נקודה זו לציר ה- $x$ , נחצה על ידי ציר ה- $y$ .  
מצאו את משוואת עקום זה.



**7)** נתון עקום העובר בנקודה  $B(0,1)$ .  
בכל נקודה  $A$  שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז  $ABCD$ , הנראה בציור.  
מהי משוואת העקום?

**8)** נתון עקום, בربיע הראשון, העובר בנקודה  $(1,3)$ , וSHIPOU המשיק אליו בנקודה  $(x, y)$  שווה ל- $-\left(1 + \frac{y}{x}\right)$ .  
מצאו את משוואת העקום.

**9)** מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(1,2)$ ,

$$\cdot \frac{2xy}{y^2 - x^2}$$

ושבכל נקודה  $(x, y)$  שעליו שיפוע הנורמל הוא

**10)** מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה  $(0,1)$ , כך שהמשולש המוגבל על ידי ציר  $h-y$ , המשיק לעקום בנקודה כלשהו שעליו  $(x, y)$  וחותם OM, מהראשית O ל-M, הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN

(כאשר N היא הנקודה בה המשיק הניל חותך את ציר  $h-y$ ).

צירזו ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

### תשובות סופיות

$$x^2 + y^2 = k \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = k \quad (2)$$

$$y^2 = ax \quad (3)$$

$$y = 2xe^{x-2} \quad (4)$$

$$y = 4 \pm \sqrt{25 - (x-3)^2} \quad (5)$$

$$2x^2 + y^2 = k \quad (6)$$

$$y = 2e^{x^2/4} - 1 \quad (7)$$

$$2xy + x^2 = 7 \quad (8)$$

$$x^3 - 3y^2x = 11 \quad (9)$$

$$2 = y + \sqrt{y^2 + x^2} \quad (10)$$

## עקומות אורתוגונליות

### שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות 1-4:

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$xy = c \quad (2)$$

$$x^2 + 2y^2 = c . \quad (3)$$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה  $x^2 + 2y^2 = 9$   
בנקודה  $(1,2)$  שעליה.

$$x^2 + y^2 = cx \quad (4)$$

5) מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של  $45^\circ$

$$\text{עם משפחת המעגלים } x^2 + y^2 = c$$

### תשובות סופיות

$$2 \ln x + \ln y = c \quad (1)$$

$$y^2 - x^2 = k \quad (2)$$

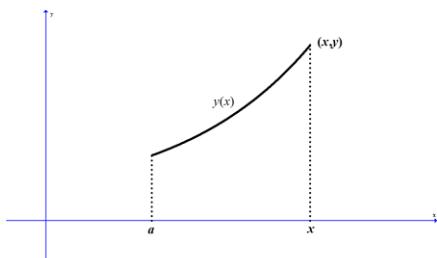
$$y = ax^2 , \quad y = 2x^2 \quad (3)$$

$$y = m(x-c)^2 \quad y > 0 \quad (4)$$

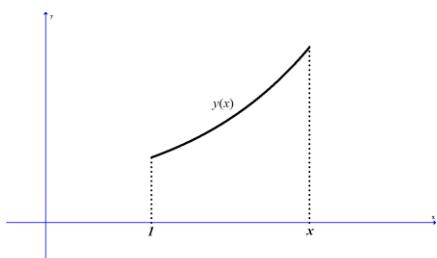
$$\ln|x| + \frac{1}{2} \ln \left( \left( \frac{y}{x} \right)^2 + 1 \right) = -\arctan \left( \frac{y}{x} \right) + c \quad (5)$$

## בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

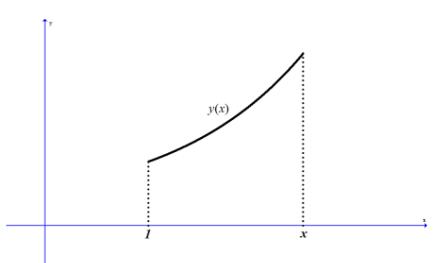
### שאלות



- (1) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = a$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי השטח  $S$  פרופורציונלי לאורך הקשת בין הנקודות  $(x, y(x))$  ו- $(a, y(a))$ . מצאו את משוואת העקום.



- (2) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיימים עקומים כזה, כך ששטחם של  $S$  שווה ל- $2y(x)$ ?



- (3) שטח  $S$  מוגבל על ידי עקום  $y = y(x)$ , ציר ה- $x$ ,  $x = 1$ , ו- $x$  משתנה (ראו ציור). ידוע כי  $y(1) = 2$ . האם קיימים עקומים כזה, כך שהשטח של  $S$  שווה ל- $2 - y(x)$ ?

### תשובות סופיות

$$y = k \cosh\left(\pm \frac{1}{k}x + C\right) \quad (1)$$

(2) לא.

(3) כן.

## בעיות שונות

### שאלות

- 1)** בזמן  $t = 0$ , יש במיכל 4 ק"ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים. נניח שמי מלח, בריכוזו של 0.2 ק"ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזות החוצה מן המיכל באותו קצב.
- חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.
  - תוקן כמה זמן תהייה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?
- 2)** סירה נגררת בקצב של 12 קמ"ש. ברגע  $t = 0$ , כשהסירה מנוטה, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחזור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה. משקל החותר והסירה הוא 500 ק"ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל-  $2v$ , כאשר  $v$  נמדדת במטר/שנייה.
- מצאו את מהירות הסירה מעבר חצי דקה.
  - מצאו מעבר כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.
  - מצאו את המהירות הסופית.
- 3)** חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גופם מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה. חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר חצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.
- מהי טמפרטורת החומר לאחר לשעה?
  - כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?
- 4)** נתון מיכל בצורת גליל, שרדיו בסיסו 1 ס"מ וגובהו 4 ס"מ. הגליל מלא במים. ברגע מסוים פותחים ברז בתחום הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם. נסמן ב-  $(t)$   $h$  את גובה פני המים, וב-  $k$  את קבוע הפרופורציה.
- רשמו מד"ר עבור גובה פני המים, וב-  $k$  את קבוע הפרופורציה.
  - מהו תנאי ההתחלתה של הבעיה?
  - ידוע כי  $\pi = 2\pi$ .
  - פתרו את המד"ר.
  - תוקן כמה זמן תישאר בגליל ממחצית מכמות המים ההתחלתית?

5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי  $4\text{ ס"מ}$ , נמס, כך שהקცב שבו רדיוסו קטן – פרופורציוני לשטח פניו.

לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל- $3\text{ ס"מ}$ .

א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן  $t$ .

ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג  $\frac{1}{64}$  מינוחו ההתחלתי?

6) מבлон מלא אויר, שרדיוסו  $R$ , מתחילה לצאת אויר.

קצב יציאת האויר הוא  $(t) = 3V$ , כאשר  $V$  הוא נפח הבלון בזמן  $t$ .

הוכיחו כי כעבור  $2\pi t$  שנים נפח הבלון יקטן לכדי שמיינית מינוחו ההתחלתי.

הערה: בשאלות 5 ו-6 נדרש ידוע בהפרצת משתנים.

### תשובות סופיות

1) א.  $26.75 \text{ ק"ג}$ .      ב.  $0.942 \text{ דקotas}$ .

2) א.  $4.09 \text{ מטר/שניה}$ .      ב.  $72 \text{ שניות}$ .

3) א.  $43\frac{1}{3}^\circ$ .      ב.  $1.13 \text{ שעות}$ .

4) א.  $h(0) = 4$ ;  $\pi h'(t) = k\sqrt{h(t)}$ .  

$$h(t) = \left(\frac{k}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}} t^{\frac{3}{2}} + C$$

5) א.  $R(t) = \frac{12}{2t+3}$ .  

$$R'(t) = \frac{-24}{(2t+3)^2}$$

6) שאלת הוכחה.