

חדוֹא 2ה

פרק 9 - פונקציות סודות - שימושים גיאומטריים

תוכן העניינים

1	. פונקציות סודות - הפנ התאורטי
8	. פונקציות סודות - הפנ הטכני
11	. שימושים גיאומטריים.....

פונקציות סתומות – הפן התאורטי

שאלות

1) נתונה המשוואה $y^5 + y^3 + y = x^2 - 1$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(2,1)$, שבה המשוואה מדירה

פונקציה $y = f(x)$.

ב. חשבו את $(2)'$.

ג. בדקו האם מתקיימים תנאי מ.פ.ס. בנקודה $(-2,1)$.

ד. הוכיחו שהמשוואה מדירה פונקציה $y = f(x)$ לכל x ממשי.

2) נתונה המשוואה $x^2 + y + e^y = 17$.

א. הוכיחו שקיימת סביבה של הנקודה $(4,0)$, שבה המשוואה מדירה

פונקציה $y = g(x)$.

ב. בדקו האם העוקם המתאר את המשוואה עולה או יורדת בנקודה בה

$x = 4$.

ג. הוכיחו ש-מ.פ.ס. מתקיים עבור כל נקודה שמקיימת את המשוואה.

ד. הוכיחו שהמשוואה מדירה פונקציה $y = h(x)$ לכל x ממשי.

ה. השוו בין תוצאות סעיף ג' ותוצאות סעיף ד'.

3) נתונה המשוואה $y^3 - x^3 - 3y^2 + 6x^2 + 3y - 12x + 7 = 0$.

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה בנקודה $(2,1)$.

ב. האם המשוואה מדירה את y כפונקציה של x בסביבת הנקודה?

ג. האם התשובה לסעיף ב' עומדת בסתריה לתשובה בסעיף א'?

4) לגבי כל אחת מהמשוואות הבאות הגדרו פונקציה $F(x, y)$ מתאימה,

ובדקו האם קיימת נקודה (x_0, y_0) , כך שמתקיים תנאי מ.פ.ס.

בדקו בכל מקרה מה ניתן להסיק מהמשפט.

א. $x^2 + y^2 + 4 = 0$

ב. $xy - 40x = 100$

ג. $x^2 - y^2 = 3$

5) נתונה המשוואה $0 = 2x^3 + y^3 - 6xy$.

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסטומה.
- חשבו את y עבור נקודות אלה.
- מה תוכלם לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
- השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .

6) נתונה המשוואה הבאה : $0 = x^3 + y^3 - 3axy$ ($a > 0$).

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסטומה.
- חשבו את y עבור נקודות אלה.

7) נתונה המשוואה $R^2 = x^2 + y^2$.

- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסטומה.
- בנקודות בהן לא מתקיים משפט הפונקציות הסטומות,קבעו האם קיימת סביבה של הנקודה בה המשוואה מתארת פונקציה ($y = f(x)$)
עשוי זו את בשתי דרכים :

 - על ידי תיאור גרפי של העוקם.
 - על ידי חישוב.

8) נתונה המשוואה $0 = xy - ax^4 + y^4$, כאשר a קבוע ממשי.

- ידוע שהנקודה $(x_0, 0.5)$ מקיימת את המשוואה, אך לא מקיימת את תנאי משפט הפונקציה הסטומה.
- מצאו את x_0 ואת הקבוע a .
 - האם קיימות נקודות נוספות, שמקיימות את המשוואה הנתונה אך לא מקיימות את מ.פ.ס? אם כן, מצאו אותן.
 - השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y הוא פונקציה של x .
 - הוכיחו, ללא שימוש בתוכנה גרפית, שעבור הנקודה החיובית שלא מקיימת את מ.פ.ס, לא קיימת סביבה שבה המשוואה מגדרה את y כפונקציה של x .

- 9) נתונה המשוואה** $xy = \ln y - \ln x + 1$.
- מצאו את כל הנקודות עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתומה.
 - חשבו את y' עבור נקודות אלה.
 - מה תוכלם לומר בשלב זה על הנקודות בהן לא מתקיים מ.פ.ס?
 - השתמשו בתוכנה גרפית לשרטוט המשוואה, וקבעו, על סמך השרטוט, האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים, קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה y' הוא פונקציה של x .
 - לא שימוש בתוכנה גרפית,קבעו האם בנקודות בהן מ.פ.ס לא מתקיים קיימת סביבה המכילה את הנקודה ובה המשוואה מתארת פונקציה.
- 10) נתונה המשוואה** $(e-2)\ln x + \ln y = y - 1$.
- בדקו האם מ.פ.ס מתקיים עבור הנקודה (e, e) .
 - כמה נקודות על העקום הנתון מקיימות $e = x$?
 - האם התשובה בסעיף ב' עומדת בסתירה לתשובה בסעיף א'?
 - מצאו את כל הנקודות המקיימות את מ.פ.ס.
 - חשבו את הנגורות בנקודות הניל.
 - השתמשו בתוכנה גרפית על מנת לקבוע, האם בנקודות בהן לא מתקיים המשפט, ניתן למצוא סביבה שבה המשוואה מגדרה פונקציה $f(x) = y$.
 - חזרו על סעיף ו', רק הפעם תננו הוכחה ללא איור.
- 11) נתונה המשוואה** $-8 = y^3 + 6x \sin y$, ונמצא נקודה $(0, -2)$.
- הוכיחו שהמשוואה מגדרה פונקציה $y(x)$ בסביבת הנקודה.
 - פתחו את $y(x)$ לטור מקלורן מסדר 2.
- 12) ענו על הסעיפים הבאים:**
- נסחו את משפט הפונקציות הסתווגות עבור $x = g(y)$.
 - נתונה המשוואה $x = \ln(x^2 + y^2)$.
- הוכיחו כי קיימת סביבה של הנקודה $(0, 1)$, שבה המשוואה מגדרה את $x = g(y)$, $y > 0$.
- חשבו את $(1)'g$.

13) נתונה המשוואה $xy = \ln y - \ln x + 1$.

א. הראו כי קיימת סביבה של הנקודה $(1,1)$, שבה המשוואה מגדירה את x

$$\text{כפונקציה של } y, \quad x = g(y).$$

ב. הוכחו שהנקודה $(1,1)$ היא נקודת מקסימום מקומי של $g(y)$.

14) בסעיפים א-ב, האם המשוואה $z = 3x^2y - yz^2 - 4xz = 7$?

א. מגדירה פונקציה סתווגה $z = g(x,y)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ב. מגדירה פונקציה סתווגה $z = h(x,y)$ בסביבת הנקודה $(-1,1,2)$?

ג. הוכחו שהפונקציה $z = h(x,y)$ דיפרנציאבילית בנקודה $(-1,2)$.

15) נתונה המשוואה $z = 3x^3 - y^3 - z^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 3z^2 = 1$.

בסעיפים א-ב, על סמך מ.פ.ס, האם המשוואה:

א. מגדירה פונקציה סתווגה $z = g(x,y)$ בסביבת הנקודה $(1,2,0)$?

ב. מגדירה פונקציה סתווגה $z = h(x,y)$ בסביבת הנקודה $(4,4,1)$?

ג. הוכחו, ללא שימוש במ.פ.ס, שהמשוואה מגדירה פונקציה סתווגה $z = h(x,y)$, בסביבת הנקודה $(4,4,1)$.

16) נתונה המשוואה $\sin(x+y) + \sin(y+z) = 1$.

מצאו נקודת שבסביבה שלה המשוואה מגדירה פונקציה

ומצאו את הנגזרות החלקיים של הפונקציה המתאימה.

17) נתונה מערכת המשוואות:

$$1) \ x = u + v, \quad 2) \ y = u^2 + v^2, \quad 3) \ w = u^3 + v^3$$

א. בדקו האם מתקיים תנאי משפט הפונקציה הסתווגה עבור $w = w(x,y)$ בנקודה $(x,y,u,v,w) = (1,1,0,1,1)$.

במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y .

ב. חזו על סעיף א', עבור הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$.

ג. האם קיימת סביבה של הנקודה $(x,y,u,v,w) = (2,2,1,1,2)$, שבה מערכת המשוואות מגדירה פונקציה $w = w(x,y)$?

במידה שכן, חשבו בנקודה את w_x, w_y .

ד. מצאו את כל הנקודות במישור, עבורן מתקיים משפט הפונקציה הסתווגה עבור $w = w(x,y)$.

18) נתונה מערכת המשוואות :

1) $x = a \cos \phi \cos \theta, \quad 2) \quad y = b \sin \phi \cos \theta, \quad 3) \quad z = c \sin \theta \quad (a, b, c > 0)$

א. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $\phi = \phi(x, y)$

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את ϕ_x, ϕ_y .

בדקו את התשובה על ידי חישוב ישיר.

ב. בדקו האם מתקיימים תנאי משפט הפונקציה הסתומה עבור $z = z(\phi, x)$

$$\text{בנקודה } P_0, \text{ המתאימה לערכים } \phi_0 = \theta_0 = \frac{\pi}{6}$$

במידה שכן, חשבו בנקודה את z_ϕ, z_x .

תשובות סופיות

- 1) א. הוכחה. ב. $\frac{4}{9}$. ג. כן. ד. הוכחה.
- 2) א. הוכחה. ב. העקום יורץ. ג. הוכחה. ד. הוכחה. ה. מוצאת סעיף ד' טוביה יותר.
- 3) א. לא מתקיים. ב. כן. ג. לא.
- 4) א. לא קיימת. ב. הנקודה (1,140) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס. ג. הנקודה (2,1) למשל, מקיימת את תנאי מ.פ.ס.
- 5) א. כל נקודה (x, y) שעלה המשווה, ואשר **שונה** מהנקודות $(0,0), (2,2)$.
- 6) א. כל נקודה על העקום הנתון אשר **שונה** מהנקודות $(0,0), (\sqrt[3]{4}a, \sqrt[3]{2}a)$
- $$y'' = -\frac{\left[2x - a\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right)\right](y^2 - ax) - \left[2y\left(-\frac{x^2 - ay}{y^2 - ax}\right) - a\right](x^2 - ay)}{(y^2 - ax)^2}$$
- 7) א. כל הנקודות על המנגנון אשר **שונות** מהנקודות $(R,0), (-R,0)$.
ב. לא קיימת סביבה כנדירש.
- 8) א. $(0,0), (-0.5, -0.5)$. ב. כן, $a = \frac{1}{2}$. ג. לא. ד. שאלת הוכחה.
- 9) א. כל נקודה (x, y) שעלה $xy = \ln y - \ln x + 1$, ואשר **שונה** מהנקודה $(1,1)$.
ב. לא קיימת. ג. כלום! ד. לא.
- 10) א. כן. ב. שתי נקודות. ג. לא. ד. כל נקודה על העקום אשר **שונה** מהנקודה $(1,1)$.
ה. $x > 0, y > 0, (x, y) \neq (1,1)$ $y'(x) = \frac{(2-e)y}{x(1-y)}$
ו. לא ניתן. ז. שאלת הוכחה.
- 11) א. שאלת הוכחה. ב. x^2 . ג. ראה סרטון.
- 12) א. ראה סרטון. ב. שאלת הוכחה.
- 13) א. הוכחה. ב. שאלת הוכחה.
- 14) א. לא. ב. כן. ג. שאלת הוכחה.
- 15) א. כן. ב. לא ניתן לדעת. ג. שאלת הוכחה.
- 16) הנקודה היא $(\pi, 0, 0, 0.5\pi)$ והגזרות הן: $y_x(0,0,0.5\pi) = -1$, $y_z(0,0,0.5\pi) = 0$

ב. לא מתקיים.

$$\frac{\partial w}{\partial y}(1,1) = \frac{3}{2}, \frac{\partial w}{\partial x}(1,1) = 0 \text{ . נ. } \text{ (17)}$$

$$D = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid y > \frac{1}{2}x^2 \right\} . \text{נ.}$$

$$w_x(2,2) = -3, w_y(2,2) = 3. \text{ג.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2c}{a}, \frac{\partial z}{\partial \phi} = -c \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ב.}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{b}{a\sqrt{3}}, \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{b}. \text{נ. } \text{ (18)}$$

פונקציות סתומות – הפן הטכני

שאלות

1) מצאו את y , כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$
וחשבו את $y'(0)$.

2) מצאו את y' , כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$

3) מצאו את $y''(e)$, $y'(e)$, $y''(e)$, כאשר $2\ln x + \ln y = 1$

4) נתון $z = z(x, y) \geq 0$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = 0$
חשבו את $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0), \frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$

5) נתון $y = y(x, z) \geq 0$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y)\sin z = -e^4$
חשבו את $y_x(0,0), y_z(0,0)$

6) נתונה המשוואה $x - y = x \cdot y \cdot f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{z}\right)$
 $x^2 \cdot z_x + y^2 \cdot z_y = z^2$
הוכיחו כי

7) נתון $z = z(x, y) \geq 0$ $z^3 - 2xz + y = 0$
מצאו $z_{xx}(1,1)$

8) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$. מצאו את:
א. $z_{xx}(2,1)$
ב. $z_{xy}(2,1)$
ג. $z_{yy}(2,1)$

9) נתונה מערכת משוואות : $\begin{cases} u^2 - v = 3x + y \\ u - 2v^2 = x - 2y \end{cases}$

א. חשבו את u_x, v_x, u_y, v_y .

ב. הראו כי $u_{xy} = u_{yx}$.

*הערה : בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנзорות המעוובות.

10) נתונה מערכת משוואות : $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2 \\ w = u^3 + v^3 \end{cases}$

א. חשבו את w_x, w_y .

ב. חשבו y_x, y_w .

11) נתונה מערכת משוואות : $\begin{cases} xyz = 4 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$
הוכיחו כי $z''(x) + y''(x) = 0$.

12) נתונה המערכת : $\begin{cases} x \cos u + y \sin u + \ln z = f(u) \\ -x \sin u + y \cos u = f'(u) \end{cases}$

הוכיחו כי :

$(z_x)^2 + (z_y)^2 = z^2$. א.

$z_{xy} = z_{yx}$. ב.

*הערה : בסעיף ב' אין להסתמך על משפט הנзорות המעוובות.

תשובות סופיות

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, \quad y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0,0) = z_y(0,0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0,0) = 0, \quad y_z(0,0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

6. שאלת הוכחה.

$$z_x(1,1) = -16 \quad (7)$$

$$z_{xx}(2,1) = z_{xy}(2,1) = 1, \quad z_{yy}(2,1) = 4 \quad (8)$$

$$u_x = \frac{12v-1}{8uv-1}, \quad u_y = \frac{4v+2}{8uv-1}, \quad v_x = \frac{3-2u}{8uv-1}, \quad v_y = \frac{4u+1}{8uv-1} \quad \left(uv \neq \frac{1}{8} \right) \quad (9)$$

ב. שאלת הוכחה.

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -3uv, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{3}{2}(v+u) \quad (u \neq v) \quad (10)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{2uv}{v+u}, \quad \frac{\partial y}{\partial w} = \frac{2}{3(v+u)} \quad (u \neq \pm v) \quad (b)$$

11. שאלת הוכחה.

12. שאלת הוכחה.

שימושים גאומטריים

שאלות

1) נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + 3$ מהי המשוואת מישור משיק למשטח בנקודה P , בה $x = -2, y = 1$?

2) מצאו משווה של מישור משיק למשטח $z = xy$ בנקודה $(-2, 2, -2)$, וכן משווה של הישר הפרטורי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

3) מצאו מישור המשיק למשטח $z = 21 - 27x^2 - 27y^2$.
המקביל למישור $z = 8x + 8y + 18$.

4) למשטח \sqrt{a} העבירו מישור המשיק בנקודה כלשהי.
מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C , בהתאם.
נסמן: $O = (0, 0, 0)$.

הוכחו $a = OA + OB + OC$.
(למעשה נוכיח שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודות ההשקה)

5) נתון המשטח $z = 8xz^2 - 2x^2yz + 3y^2$, ונתונה הנקודה $(1, 2, -1)$.
הישר הנורמלי למשטח בנקודה הנתונה, חותך את המישור $x + 3y - 2z = 10$ בנקודה Q .
מצאו את הנקודה Q .

6) הראו שהמשטח $z = 4 - x^2 - 2yz + y^3$ מאונך לכל אחד מחברי משפחת
המשטחים $x^2 + 1 = (2 - 4a)y^2 + az^2$, בנקודת החיתוך $(1, -1, 2)$.

7) מצאו משווה של הישר המשיק לעקום $C: x = 6\sin t, y = 4\cos 3t, z = 2\sin 5t$ בנקודה בה $t = \frac{1}{4}\pi$

(8) ענו על הסעיפים הבאים :

א. נתון עקום $C: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ במשוואת העקום.
ונתונה נקודה $P(x_0, y_0, z_0)$, המתקבלת מהצבת $t = t_0$ בעקום.

הוכיחו כי משוואת המשור הנורמל לעקום היא
 $x'(t_0) \cdot (x - x_0) + y'(t_0) \cdot (y - y_0) + z'(t_0) \cdot (z - z_0) = 0$

ב. מצאו את משוואת המשור הנורמל לעקום
 $C: x = 6 \sin t, y = 4 \cos 3t, z = 2 \sin 5t$
בנקודה בה $t = 0.25\pi$

(9) נתונות שתי עקומות
 $C_1: x = 2t + 1 \quad y = t^2 - 1 \quad z = t^2 + t$
 $C_2: x = s^2 \quad y = -s \quad z = s - 1$

ונתנו כי שתי העקומות נמצאות על משטח S , וכי שתיהן נחתכות בנקודה
הנמצאת במשור xy .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. מצאו את משוואת המשור המשיק לשתי העקומות בנקודת החיתוך
שבין שתי העקומות.

$$C_1: x = 2t + 1, \quad y = t^2 - 1, \quad z = t^2 + t$$

$$C_2: x = s^2, \quad y = -s, \quad z = s - 1$$

$$C_3: x = u + 2, \quad y = u, \quad z = u^2 - 1$$

ונתנו כי שלוש העקומות נמצאות על משטח S , וכי שלושתן נחתכות בנקודה
הנמצאת במשור xy .

א. מצאו את נקודת החיתוך בין שתי העקומות.

ב. האם בנקודה הניל ניתן להעביר מישור משיק למשטח S ? נמקו!

(11) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שמשוואת הישר המשיק לעקום
 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$:

בנקודה P שעליו, היא $\ell: P + t \cdot \vec{\nabla F}(P) \times \vec{\nabla G}(P)$

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת הישר המשיק לעקום :

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

12) ענו על הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו שמשוואת המישור הנורמלי לעקום
 $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$

בנקודה P שעליו, היא $0 = a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0)$ כאשר $(a, b, c) = \vec{\nabla F}(P) \times \vec{\nabla G}(P)$.

ב. בנקודה $(1, -1, 1)$, מצאו את משוואת המישור הנורמלי לעקום :

$$\begin{cases} 2xz - x^2y = 3 \\ 3x^2y + y^2z = -2 \end{cases}$$

13) נתונה הפונקציה $x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u^2 + v^2$, על ידי $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

מהו הנקודות שעבורן קיימים מישור משיק?

מצאו את משוואת המישור המשיק, בנקודה $(u, v) = (1, 0)$.

14) מצאו ביטוי לווקטור היחידה, המאונך למשטח

$$x = \sin u \cos v, \quad y = \sin u \sin v, \quad z = \cos u$$

$$u \in [0, 2\pi], \quad v \in [0, \pi]$$

באיזה משטח מדובר?

תשובות סופיות

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (1)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (2)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (3)$$

שאלה הוכחה. (4)

$$Q(7, -9, -15) \quad (5)$$

שאלה הוכחה. (6)

$$\ell: (x, y, z) = (3\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -\sqrt{2}) + s(3\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, -5\sqrt{2}) \quad (7)$$

$$3x - 6y - 5z = 26\sqrt{2} \quad \text{ב.} \quad (8)$$

$$x - 2z = 1 \quad \text{ב.} \quad P(1, -1, 0) \quad (9)$$

(10) א. קיבל שנקודות החיתוך היא $P(1, -1, 0)$. ב. לא.

(11) א. שאלה הוכחה. ב. $(x, y, z) = (1, -1, 1) + t(3, 16, 2)$.

(12) א. שאלה הוכחה. ב. $3x + 16y + 2z = -11$.

(13) כל נקודה, למעט $(0, 0, 0)$.

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (14)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$