

כליים מתמטיים

פרק 1 - מבוא מתמטי לקורס

תוכן העניינים

1	מבוא לתורת הקבוצות.....
7	המספרים האי-רציונליים.....

מבוא לתורת הקבוצות

שאלות

1) רשמו את הטענות הבאות במילים ובדקו האם הן נכונות:

א. $\forall x \forall y : (x+y)^2 > 0$

ב. $\forall x \exists y : (x+y)^2 > 0$

ג. $\forall x \forall y \forall z : xz = \frac{y}{4}$

ד. $\forall x > 0, \forall y > 0, \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

ה. $\exists k, n^3 - n = 6k \quad \forall (k, n \text{ טבעיות}).$

הערה: בסעיף זה הטעויות כוללים את 0.

2) רשמו כל אחת מהטענות הבאות בסימנים לוגיים:

א. פתרוון אי השוויון $x^2 > 4$, הוא $x > 2$ או $x < -2$.

ב. אי השוויון $x^2 + 4 > 0$, מתקיים לכל x .

ג. לכל מספר טבעי n , המספר $n^3 - n$ מחלק ב-6.

ד. עברו כל מספר x , $|x| < 1$ אם ורק אם $-1 < x < 1$.

3) רשמו במפורש את הקבוצות הבאות על ידי צומדיים או באמצעות קטעים, ואת מספר איברי הקבוצה:

א. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 16\}$

ב. $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 16\}$

ג. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 16\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid (x+4)(x-1) < 0\}$

ה. $E = \{x \in \mathbb{N} \mid x^3 + x^2 - 2x = 0\}$

ו. $F = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 4\}$

4) הגדרו את הקבוצות הבאות על ידי פירוט כל איבריהן או על ידי רישום בצורה:

$A = \{x \mid \text{קיימים תכונה מסוימת}$

א. קבוצת המספרים השלמים החיוביים האיזוגיים.

ב. קבוצת המספרים הראשוניים בין 10 ל-20.

ג. קבוצת הנקודות במישור הנמצאות על מעגל שמרכזו בראשית ורדיוסו 4.

ד. קבוצת ריבועי המספרים 1, 2, 3, 4.

5) ציינו אילו מן הקבוצות הבאות שווות זו לזו :

א. $A = \{11, 13, 17, 19\}$

ב. $B = \{x \mid 10 < x < 20, x \text{ מספר ראשוני}\}$

ג. $C = \{11, 11, 17, 13, 19\}$

ד. $D = \{x \mid x = 4k, k \in \mathbb{Z}\}$

ה. $E = \{x \mid x = 2m, m \text{ שלם זוגי}\}$

6) נתונה הקבוצה הבאה . $A = \{1, 2, \{2\}, \{2, 5\}, 4, \{2, 4\}\}$

מי מבין הטענות הבאות נכונה :

$\{2\} \in A$ א.

$2 \in A$ ב.

$5 \in A$ ג.

$\emptyset \in A$ ד.

$\{\{2\}\} \subseteq A$ ה.

$\{2\} \subseteq A$ ט.

$\{2, 4\} \subseteq A$ ו.

$\{2, \{2\}\} \subseteq A$ ח.

$\emptyset \subseteq A$ י.

$\{2, 5\} \subseteq A$ יב.

$\{\{2, 4\}\} \in A$ יא.

$\{2, 4\} \in A$ יג.

$\{1, 4\} \in A$ יד.

$\{2, 5\} \in A$ יג.

7) מצאו שתי קבוצות, A ו- B , המקיים :

א. $A \in B$

ב. $A \subseteq B$

8) נתונות הקבוצות הבאות :

$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{4, 6, 8, 10\}$, $C = \{3, 5, 7, 9\}$, $D = \{6, 7, 8\}$, $E = \{7, 8\}$

קבעו איזה מbyn הקבוצות לעיל יכולה להיות הקבוצה X :

א. $X \not\subseteq D$ וגם $X \subseteq A$

ב. $X \not\subseteq C$ וגם $X \subseteq D$

ג. $X \not\subseteq A$ וגם $X \subseteq E$

9) הוכחו : $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

10) נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, B = \{4, 6, 8, 10\}, C = \{3, 5, 7, 9\}, D = \{6, 7, 8\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

11) נתונות הקבוצות הבאות :

$$A = [1, 4], B = (-2, 1), C = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}, D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^x = 0\}$$

רשמו את :

א. $A \cup B$

ב. $A \cap B$

ג. $(A \cup B) \cap C$

ד. $(B \cup C) \cap (B \cup D)$

ה. $(B \cap C) \cup (B \cap D)$

12) נתונות 3 קבוצות :

$$A = \{4, 5, 6, 7, 8\}, B = \{5, 6, 7, 8, 9\}, C = \{4, 5, 6, 10\}$$

א. חשבו את $(A - B) - C$

ב. חשבו את $A - (B - C)$

13) נתון : $U = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18\}, A = \{12, 15, 18\}, B = \{13, 15, 17\}$

$$\text{הציגו את כלל דה מORGAN: } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$\text{14) הוכחו את כלל דה MORGAN הראשון: } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

15) מצאו את הקבוצה המשלימה, ביחס ל- \mathbb{R} , של הקבוצות הבאות :

א. $A = [1, \infty)$

ב. $B = (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$

ג. $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 5x + 4 > 0\}$

ד. $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| < 2 \vee x > 4\}$

16) הציגו באמצעות דיאגרמת ון את הקבוצות הבאות:

- | | | | |
|----|-------------------------------|----|-------------------------------|
| ב. | $A \cup B$ | א. | $A \cap B$ |
| ד. | $A \cap B^c$ | ג. | A^c |
| ו. | $A \cup B^c$ | ח. | $A^c \cap B$ |
| ט. | $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ | ז. | $A^c \cup B$ |
| | | ט. | $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ |

17) ענו על השעיפים הבאים:

- א. הוכיחו כי $A \setminus B = A \cap B^c$.
- הראו זאת גם בעזרת דיאגרמת ון.
- ב. נסמן: $X = C \setminus (A \cap B)$, $Y = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$.
הוכיחו כי $Y = X$.
- ג. נסמן: $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
הוכיחו כי $Y = X$.

18) תהינה X, Y, Z קבוצות כלשהן.

טענה א': $X \cap Y \cap Z = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z) \cup (Z \setminus X)$

טענה ב': $((X \cap Y) \cup Z)^c = (X^c \cup Y^c) \cap Z^c$

טענה ג': $Z \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus Z)$

איזה טענה נכונה לכל בחירה של X, Y, Z ?

19) הוכיחו כי אם הנקודה x_1 שייכת ל סביבת ε של הנקודה x_0 , אז קיימת סביבת δ של x_1 שمولכת בסביבת ε של הנקודה x_0 .

20) הוכיחו שלכל שתי נקודות שונות קיימות סביבות זרות.

21) הוכיחו כי אם x_0 לא שייכת לקטע הסגור $[a, b]$, אז קיימת סביבה של הנקודה x_0 אשר לא מכילה שום נקודה מהקטע $[a, b]$.

22) הוכיחו כי אם $|xy - x_0y_0| < \varepsilon(|x_0| + |y_0| + \varepsilon)$, אז $|x - x_0| < \varepsilon$, $|y - y_0| < \varepsilon$.

תשובות סופיות1) א. לכל x ולכל y מתקיים $(x+y)^2 > 0$. הטענו אינה נכונה.ב. לכל x קיים y , כך ש- $0 < (x+y)^2$. הטענו אינה נכונה.ג. לכל x ולכל y קיים z כך ש- $\frac{y}{4} = zx$. הטענו אינה נכונה.ד. לכל x חיובי ולכל y חיובי מתקיים $\sqrt{\frac{x+y}{2}} \leq \sqrt{xy}$. הטענו נכון.ה. לכל n טבעי המספר $n^3 - n$ מתחלק ב-6. הטענו נכון.

(2) א. $\forall x: x^2 + 4 > 4 \Rightarrow x > 2 \vee x < -2$ ב. $x^2 > 4 \Rightarrow x > 2 \wedge x < -2$

ג. $\forall x: |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$ ד. $\exists n \in \mathbb{Z} : n^3 - n = 6k$

3) א. בקבוצת אינסוף איברים.

ב. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, בקבוצת 7 איברים.ג. $C = \{1, 2, 3\}$, בקבוצת 3 איברים. ד. $D = \{-3, -2, -1, 0\}$, בקבוצת 4 איברים.ה. $E = \{0, 1\}$, בקבוצת 2 איברים.ו. $F = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

B = \{11, 13, 17, 19\} A = \{x | x = 2n - 1, n \in \mathbb{N}\} א.

D = \{1, 4, 9, 16\} ז. C = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 4^2, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} ג.

5) הקבוצות A , B ו- C שוות זו לזו, והקבוצות D ו- E שוות זו לזו.

6) א. לא נכון. ב. נכון. ג. נכון. ד. נכון. ה. נכון.

ו. לא נכון. ז. נכון. ח. נכון. ט. נכון. י. נכון.

יא. לא נכון. יב. לא נכון. יג. נכון. יד. לא נכון.

A = \{1, 2\} B = \{\{1, 2\}, 1, 2\} 7

8) א. לא קיימת קבוצה כזו.

ב. E, D ג. A, C

9) שאלת הוכחה.

3) $(A \cup B) \cap C = \{3, 5, 7, 9\}$, 2) $A \cap B = \{4, 6, 8\}$, 1) $A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (10

5) $(B \cap C) \cup (B \cap D) = \{6, 8\}$, 4) $(B \cup C) \cap (B \cup D) = \{4, 6, 7, 8, 10\}$

, 3) $(A \cup B) \cap C = (0, 4)$, 2) $A \cap B = \emptyset$, 1) $A \cup B = (-2, 4)$ (11

5) $(B \cap C) \cup (B \cap D) = [0, 1)$, 4) $(B \cup C) \cap (B \cup D) = (-2, 1)$

12) א. ϕ ב. $\{4,5,6\}$

13) ללא פתרון.

14) שאלת הוכחה.

$$C^c = [1, 4] \quad \text{ג.} \quad B^c = [1, 4] \quad \text{ב.} \quad A^c = (-\infty, 1) \quad \text{א.} \quad 15$$

$$D^c = (-\infty, 1] \cup [3, 4] \quad \text{ד.}$$

16) ראו בסרטון.

17) שאלת הוכחה.

18) טענו ב.

19) שאלת הוכחה.

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

המספרים האי-רציונליים

שאלות

- (1) א. ידוע כי מספר טבעי בריבוע הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
 ב. הוכיחו כי $\sqrt{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (2) א. ידוע כי מספר בריבוע מחלק ב-3. הוכיחו שהמספר מחלק ב-3.
 ב. הוכיחו כי $\sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (3) א. ידוע כי מספר בשלישית הוא זוגי. הוכיחו שהמספר זוגי.
 ב. הוכיחו כי $\sqrt[3]{2}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (4) הוכיחו כי \sqrt{a} הוא מספר אי-רציונלי (בנחתה ש- a טבעי שאינו ריבוע של מספר).
- (5) הוכיחו או הפריכו:
 א. מכפלת מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
 ב. סכום מספרים אי-רציונליים הוא מספר אי-רציונלי.
 ג. מנת של שני מספרים אי-רציונליים היא מספר אי-רציונלי.
 ד. סכום של מספר רציוני ומספר אי-רציונלי הוא מספר אי-רציונלי.
- (6) א. הוכיחו כי $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.
 ב. הוכיחו כי $\sqrt{5} + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.
 ג. הוכיחו כי $\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ הוא מספר אי-רציונלי.
- (7) א. יהיו p מספר ראשוני ויהיו a, k מספרים טבעיים.
 הוכיחו כי $p | a^k \Leftrightarrow p | a$.
 ב. הוכיחו: אם $N^k \neq n$, אז $\sqrt[k]{n}$ הוא מספר אי-רציונלי ($N \in \mathbb{N}$).

הurret סימון: אם מספר a מחלק במספר b נסמן $a | b$,
 ונאמר גם " b מחלק את a ".

תשובות לכל שאלות ההוכחה מופיעות באתר GooL.co.il