

מכינה במתמטיקה

פרק 38 - חשבון דיפרנציאלי - מהי פונקציה

תוכן העניינים

1. מושג הפונקציה	(ללא ספר)
2. הפונקציה הליינרית	(ללא ספר)
3. הפונקציה הריבועית	(ללא ספר)
4. הפונקציה המעריכית והלוגריתמית	(ללא ספר)
5. הירות ושיוקפים של פונקציות	(ללא ספר)
6. תרגול נוסף בתחום הגדרה	(ללא ספר)
7. קבוצות ופונקציות - מבט עמוק	(ללא ספר)
8. פתרון תרגילי הפרק	1

הfonקציה הממשית

שאלות:

1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

$$y = \frac{1}{x^2 - 4} \quad \text{ב.}$$

$$y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad \text{א.}$$

$$y = \frac{1}{x^3 - x} \quad \text{ד.}$$

$$y = \frac{4x+1}{x^2 + 1} \quad \text{ג.}$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad \text{נ.}$$

$$y = \frac{x^2}{x^2 - x - 2} \quad \text{ה.}$$

$$y = \sqrt[3]{x^2 + x - 1} \quad \text{ו.}$$

$$y = \sqrt{x^2 + x - 2} \quad \text{ז.}$$

$$y = \ln(x^2 + x - 2) \quad \text{ז'}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad \text{ט.}$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad \text{יב.}$$

$$y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad \text{יא.}$$

$$y = \tan(10x) \quad \text{ד'}$$

$$y = \log_x(x+4) \quad \text{יג.}$$

$$y = \arctan(x+4) \quad \text{טו.}$$

$$y = \cot(4x) \quad \text{יז.}$$

$$y = \arccos(x+1) \quad \text{יח.}$$

$$y = \arcsin(x-4) \quad \text{יז'}$$

2) נתונות הפונקציות הבאות : $h(x) = \frac{4}{x}$, $g(x) = x^2$, $f(x) = x-4$

חשב את הפונקציות המורכבות הבאות :

$$f(g(x)) \quad \text{ג.}$$

$$h(g(f(5))) \quad \text{ב.}$$

$$f(g(1)) \quad \text{א.}$$

$$h(h(x)) \quad \text{נ.}$$

$$h(f(x)) \quad \text{ה.}$$

$$h(f(x)) \quad \text{ט.}$$

3) נתון : $x=3$ חשב $f(f(x))$ עבור $f(x) = \frac{x-2}{x-1}$

4) נתון: $f(x) = \frac{x-3}{x+2}$. $g(x) = \frac{5-x}{x-7}$. חשב $f(g(x)) + g(f(x))$ עבור $x=8$

5) נתון: $f(x) = x^2 - 7x$. $g(x) = \ln x$. חשב $f(g(x))$ עבור $x=e^2$

6) נתון: $f(x) = e^{2x}$. $g(x) = \ln x$. חשב $f(g(x))$ עבור $x=2$

7) נתון: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} x+3 & x > 4 \\ 3x & x \leq 4 \end{cases}$. חשב $f(g(x)), g(f(x))$

8) בתרגילים הבאים הוכיח שהפונקציה הנתונה היא חד"ע בתחום הגדרתה ומצא את הפונקציה ההפוכה לה. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \frac{x+1}{x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{x-1}{3} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = x^2 - 4, \quad x \geq 0 \quad \text{ד.} \quad f(x) = \frac{3x-2}{x-2} \quad \text{ג.}$$

9) בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חד"ע. בנוסף, מצא את התמונה של הפונקציה:

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad \text{ג.} \quad f(x) = x^2 - x \quad \text{ב.} \quad f(x) = x + \frac{1}{x} \quad \text{א.}$$

10) בתרגילים הבאים, בדוק האם הפונקציה היא חד"ע, אם כן, מצא את הפונקציה ההפוכה ואת התמונה של הפונקציה.

$$f(x) = \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^3 \quad \text{ג.} \quad y = \frac{x^2+3}{2x-1} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{א.}$$

11) נתונה $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$. האם הפונקציה היא חד"ע? מצא את התמונה של הפונקציה.

12) מצא איזה מבין הפונקציות הבאות חן אי זוגיות ואייזה זוגיות:

ג. $y = 1$

ב. $y = x^4 + x^{10}$

א. $y = 4x^3$

ג. $y = 2^x$

ה. $y = x^2 + \sin^2 x$

ד. $y = \frac{1}{x}$

ט. $y = \sin x \cdot \cos x$

ז. $y = \ln x + x^2$

13) מצא את המחזור של כל אחת מן הפונקציות הבאות:

ב. $y = 5 + 3\sin(4x+1)$

א. $y = 2\sin x$

ט. $y = \sin^2 x$

ג. $y = \tan \frac{x}{3}$

14) רשום כל אחת מהפונקציות הבאות כפונקציה מפוצלת¹ וشرطט את גרף הפונקציה:

ב. $y = 3|x+1|$

א. $y = |x-2|$

ט. $y = \frac{|x|}{x}$

ג. $y = x^2 + 2|x-1|$

תשובות סופיות:

- | | | | |
|------------------------|----------------------------|--|-------------------------|
| $x \neq 0, 1, -1$. ט. | ג. כל x . | $x \neq \pm 2$. | א. כל x . |
| ח. כל x . | $x \leq -2, x \geq 1$. | ו. $x \geq 4$. | ה. $x \neq 2, -1$. |
| יב. כל x . | $x > 0, x \neq 1$. | ז. $x < -2, x > 1$. | ט. $-1 < x < 1$. |
| טו. כל x . | $x \neq \frac{\pi k}{4}$. | $x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi k}{10}$. | יג. $x > 0, x \neq 1$. |
| | | $-2 < x < 0$. | ז. $3 < x < 5$. |

¹ נקראת גם: פונקציה "مفוצלת", "מושטלאת", "פונקציית "תפר" או פונקציה "לפי מקרים".

$$x \cdot 1 \quad x-8 \cdot 2 \quad \frac{4}{x-4} \cdot 3 \quad x^2-4 \cdot 2. \quad 4 \cdot 2 \quad -3 \text{ א. } (2)$$

$$4 \cdot 6 \quad -10 \cdot 5 \quad \frac{69}{13} \cdot 4 \quad 3 \cdot 3$$

$$f(g(x)) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & x > 4 \\ \frac{1}{3x} & 0 < x \leq 4 \\ (3x)^2 & x \leq 0 \end{cases}, g(f(x)) = \begin{cases} x^2 + 3 & x < 2 \\ 3x^2 & -2 \leq x \leq 0 \\ \frac{1}{x} + 3 & 0 < x < \frac{1}{4} \\ 3\frac{1}{x} & x \geq \frac{1}{4} \end{cases} \quad (7)$$

$$y \neq 1, f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1} \cdot 2. \quad \text{א. } f^{-1}(x) = 3x+1 \cdot 8$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x+4} \quad , y \geq -4 \cdot 7 \quad f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-3} \quad , y \neq 3 \cdot 2$$

$$y - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{x + \frac{1}{4}} \quad , x + \frac{1}{4} \geq 0 \cdot 2. \quad \text{ב. לא. } y \geq 2 \text{ או } y \leq -2 \cdot 9$$

$$\text{ג. לא. } 0 \leq y \leq 1.$$

$$y \leq -1.3 \text{ או } y \geq 2.3 \cdot 2. \quad f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \quad x > 0, \quad y > 0 \cdot 10$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{1 - \sqrt[3]{x}} - \frac{1}{2} \quad , y \neq 1 \cdot 2$$

$$y \geq \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot 11 \quad \text{לא.}$$

$$\text{.6,7 א. זוגית : 1,4 ב. כלויות : 2,3,5,8 .2,3,5,8 : 12}$$

$$\pi \cdot 2. \quad 3\pi \cdot 2. \quad \frac{\pi}{2} \cdot 2 \quad 2\pi \cdot 2 \cdot 13$$

$$y = \begin{cases} 3x+3 & x \geq -1 \\ -3x-3 & x < -1 \end{cases} \cdot 2. \quad y = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ 2-x & x < 2 \end{cases} \cdot 2 \cdot 14$$

$$y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \cdot 7 \quad y = \begin{cases} x^2 + 2x - 2 & x \geq 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x < 1 \end{cases} \cdot 2 \cdot 1$$