

סטטיסטיקה ב

פרק 10 - אמידה נקודתית

תוכן העניינים

1	1. אומד חסר הטייה
8	MSE .2

אומד חסר הטיה:

רקע:

. $E(\hat{\theta}) = \theta$ יהיה אומד חסר הטיה ל- θ , אם התוחלת של $\hat{\theta}$ תהיה שווה ל- θ :

דוגמה (פתרון בהקלטה):

המשתנה X הוא בעל פונקציית ההסתברות הבאה :

3	2	1	X
4θ	$1 - 60\theta$	2θ	הסתברות

מעוניינים לאמוד את θ על סמך שתי תצפויות מההתפלגות : X_1 ו- X_2 .

א. הראו שהאומד : $T_1 = \frac{2X_1 + X_2}{2}$, הוא אומד מוטה ל- θ .

הטיה של אומד היא : $E(\hat{\theta}) - \theta$. כМОובן של אומד חסר הטיה אינו הטיה.

ב. מהי ההטיה של האומד T_1 ?

ג. תקנו את T_1 , כך שיהיה אומד חסר הטיה.

אם יש שני אומדים חסרי הטיה עדיף זה עם השונות היותר קטנה.

ד. מוצא האומד הבא : $T_3 = 1.5X_1 - X_2 - 1$.

האם הוא עדיף על האומד שהצעת בסעיף ג'?

אם $\hat{\theta}$ אומד חסר הטיה ל- θ , אז $(\hat{\theta})g(\theta)$ יהיה אומד חסר הטיה עבור $(\theta)g(\theta)$. רק אם g תהיה לינארית.

ה. מצאו אומד חסר הטיה ל- $P(X=3)$.

. $S^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}$ אומד חסר הטיה לשונות האוכלוסייה σ^2 :

ו. מצאו אומד חסר הטיה לשונות של X .

תזכורות חשובות:

אם $\sigma_Y = |a| \sigma_x$, $V(Y) = a^2 \cdot V(X)$, $E(Y) = aE(X) + b$ אז, $Y = aX + b$:

אם X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים, אז:

$$E(T) = E(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_n)$$

אם X_1, X_2, \dots, X_n משתנים מקריים בלתי תלויים בזוגות, אז:

$$V(T) = V(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_n)$$

שאלות:

- 1) הצביעו במחון מסוים של תלמידי כיתה ח' הנו משתנה מקרי בעל תוחלת μ וסטיית תקן 10. כדי לאמוד את התוחלת μ , נלקח מוגם של 5 ציונים: X_1, \dots, X_5 . שלושה חוקרים הציעו אומדיים לתוחלת על סמך מוגם זה:

$$\text{חוקר א' הצע: } T_1 = \frac{X_1 + \dots + X_5}{5}$$

$$\text{חוקר ב' הצע: } T_2 = \frac{2X_1 - X_3 + X_4}{2}$$

$$\text{חוקר ג' הצע: } T_3 = \frac{2X_1 + X_3}{2}$$

- א. איזה מן האומדיים הוא חסר הטיה?
 ב. הציעו תיקון לאומד המוטה כך שייהיה חסר הטיה.
 ג. במדגם התקבלו הציונים הבאים: 100, 82, 58, 78, 65. חשבו את האומדיים המתכבלים עבור האומדיים חסרי ההטיה.
 ד. איזה מבין שני האומדיים חסרי ההטיה עדיף? נמקו.

- 2) כדי לאמוד את המשקל הממוצע של הנשים בארץ"ב, נבחר מוגם של $n=2$ נשים. נסמן את שונות הגובה ב- σ^2 . הוצעו שני אומדיים לממוצע המשקל על סמך מוגם

$$\text{זה: } T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, T_2 = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$$

- א. בדקו לגבי כל אומד אם הוא בלתי מוטה.
 ב. איזה אומד עדיף? נמקו.

- 3) $X \sim B(n, p)$. ככלומר, X הינו משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטר P (סיכוי להצלחה בניסויו בודד) במדגם בגודל n .

- א. פתחו אומד חסר הטיה ל- P .
 ב. מהו אומד חסר הטיה לסיכוי לכישלון בניסויו בודד?
 ג. מהו אומד חסר הטיה ל- $E(X)$?
 ד. מצאו אומד חסר הטיה ל- $E(X^2)$.

4) בתיק מנויות שתי מנויות. מספר המנויות שיעלו ביום מסויים הוא משתנה מקרי ה תלוי בפרמטר לא ידוע: θ , $0 \leq \theta \leq 2$.

פונקציית ההסתברות של X - מספר המנויות שיעלו ביום מסויים :

$$P(X=0) = 1 - \frac{\theta}{2}, \quad P(X=1) = \frac{\theta}{3}, \quad P(X=2) = \frac{\theta}{6}$$

א. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ , שמתבסס על מספר המנויות שיעלו ביום מסויים.

ב. מצאו אומד בלתי מוטה ל- θ , שמתבסס על מספר המנויות שעלו ביום,

במשך שלושה ימים - X_1, X_2, X_3 (לכל אחד מהם אותה התפלגות כנ"ל והם בלתי תלויים).

5) בקרב המטפלות בת"א, מספר התינוקות שבטיפולן הוא משתנה מקרי בעל התפלגות הantine בפרמטר θ באופן הבא :

הسيוכי שמטפלת לטפל בתינוק אחד בלבד הוא 3θ

הסיוכי שמטפלת לטפל ב-2 תינוקות הוא $4\theta - 1$,

הסיוכי שמטפלת לטפל ב-3 תינוקות הוא θ .

במדגם מקרי של 4 מטפלות מות"א, נמצא כי שתיים מהם מטפלות בתינוק אחד בלבד, אחת מהן בשנים ואחת השלושה תינוקות.

א. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת.

ב. מצאו אומד חסר הטיה לפרמטר θ על סמך 4 תצפיות.

ג. מהו האומדן לפרמטר θ על סמך תוצאות המדגם.

ד. מצאו אומד חסר הטיה לסיוכי שלמטפלת בת"א לטפל בתינוק בודד אחד.

ה. מצאו אומדיים חסרי הטיה לתוחלת ולשונות של מספר התינוקות בטיפול אצל מטפלת מות"א. חשבו אומדיים.

6) קבעו אילו מהטענות הבאות נכונות :

א. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ , אז $5T$ אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר 5θ .

ב. אם T הוא אומד בלתי מוטה עבור פרמטר θ , אז T^2 אומד בלתי מוטה עבור הפרמטר θ^2 .

7) בפעול שתי מכונות המייצרות מוצר. במכונה הראשונה ההסתברות שמכשיר תקין היא p . במכונה השנייה הסתברות שמכשיר תקין היא $2p$. דוגמיהם 20 מכשירים מהייצור של כל מכונה. נסמן ב- X את מספר המכשירים התקיניים שיוצרו על ידי המכונה הראשונה, וב- Y את מספר המכשירים התקיניים שיוצרו על ידי המכונה השנייה. איזה מבין האומדיים הבאים אינו אומד חסר הטיה ל- p ?

א. $\frac{X}{20}$

ב. $\frac{Y}{20}$

ג. $\frac{X+Y}{60}$

ד. $\frac{2X+Y}{80}$

8) יהיו T_1 ו- T_2 אומדיים חסרי הטיה ובלתי תלויים לפרמטר θ .

- מצאו אומד חסר הטיה ל- θ^2 , המבוסס על T_1 ו- T_2 .
- מצאו אומד חסר הטיה ל- $(\theta - 1)$, המבוסס על T_1 ו- T_2 .

9) נתון ש- X הינו משתנה מקרי עם תוחלת μ ושונות σ^2 .

נדגמו n תצפיות בלתי תלויים מאותה אוכלוסייה.

א. הראו ש- $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ אומד חסר הטיה ל- μ , כאשר:

ב. נתבונן במכפלת שתי התצפיות הראשונות: $X_1 \cdot X_2$.

הראו שהוא אומד חסרי הטיה ל- μ^2 .

10) נתון שהתצפיות הינו בלתי תלויות זו בזו. מצאו אומד חסר הטיה ל- μ^2 .

11) נתונות n תצפויות בלתי תלויות מتوزע התפלגות בעלת הצפיפות הבאה :

$$\cdot f(x) = \begin{cases} \frac{1+\beta x}{2} & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- א. הראו כי האומד \bar{X}_3 הנז אומד בלתי מוטה ל- β .
- ב. מצאו את השונות של האומד מהסעיף הקודם.

12) הינם משתנים מקרים רציפים בלתי תלויים בעלי פונקציית

$$\cdot f(x) = \begin{cases} X \cdot A & 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{אחר} \end{cases} \quad \text{הצפיפות הבאה :}$$

- א. בטוו את ערכו של A באמצעות θ , כדי שפונקציית הצפיפות תהיה לגיטימית.
- ב. מצאו אומד חסר הטיה ל- θ , על סמך n התצפויות.

תשובות סופיות:

. T_1 . ת . $T_2 = 110$, $T_1 = 76.6$ ג . ב . $\frac{2}{3}T_3$. א . T_1 ו T_2 . (1)

. T_2 . ב . א . ראו בווידאו. (2)

. θ . ת . X . ג . ב . $1 - \frac{x}{n}$. א . $\frac{x}{n}$. (3)

. $\frac{3\bar{x}}{2}$. ב . א . $\frac{3x}{2}$. (4)

. $3\left(1 - \frac{1}{2}\bar{x}\right)$. ת . 0.125 . ג . ב . $1 - \frac{1}{2}\bar{x}$. א . $1 - \frac{x}{2}$. (5)

ה . לשונות 0.917.

ב . לא נכון. (6)

כ . (7)

. $T_1 - T_1 \cdot T_2$. ב . א . $T_1 \cdot T_2$. (8)

ב . שאלת הוכחה. (9)

. $\bar{X}^2 - \frac{1}{n}$ (10)

. $V(3\bar{X}) = \frac{3 - \beta^2}{n}$. ב . א . שאלת הוכחה. (11)

. $\theta = \frac{3 - \bar{X}}{2}$. ב . א . $A = \frac{2}{\theta^2}$. א . (12)

קriterיון MSE – תוחלת ריבוע הטעות:

רקע:

הקריטריון הנפוץ ביותר כדי לבדוק את טיב האומד הוא קriterיון MSE :

$$\text{MSE}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$$

כאשר : $V(\hat{\theta})$ - הינה שונות האומד.

$E(\hat{\theta}) - \theta$ - הינה ההטיה של האומד.

אם T_1 ו- T_2 הינם אומדים לפרמטר θ , האומד העדיף יהיה זה עם MSE קטן יותר.

כלומר, אם : T_1 עדיף על T_2 , אז $MSE(T_1) > MSE(T_2)$

דוגמה (הפתרון בהקלטה):

נתון משתנה X המתפלג אחיד רציף באופן הבא : $X \sim U(3, \theta)$.

מוצעים שני אומדים לפרמטר θ על סמך תצפית בודדת : $T_1 = 2X - 3$ ו- $T_2 = \frac{3X - 3}{2}$

איזה אומד עדיף לאמידת הפרמטר θ ?

שאלות:

- 1)** מעוניינים לאמוד את התוחלת של התפלגות מסוימת. מוצעים שני אומדיים אפשריים ממוצע של שתי תצפויות וממוצע של שלוש תצפויות. לפי קритריון תוחלת ריבוע הטעות (MSE), איזה אומד עדיף? הסבירו.
- 2)** בעיר מסוימת בשוויצ' בכל θ דקוטר רכבת מגיעה לתחנה מסוימת. דוד מגיע לתחנה בזמן אקראי ומודד את זמן ההמתנה לרכבת - X .
- הצע אומד חסר הטיה $-\theta$, על סמך X .
 - סטטיטיκאי הציע לאמוד את θ על סמך האומד: $X \cdot 1.5$.
 - האם האומד הנ"ל מوطה?
 - איזה אומד מבין האומדיים בסעיפים א' ו-ב' עדיף?
- 3)** חוקר מעוניין לאמוד את הסיכוי לחולות השפעת בחורף (להלן: הפרמטר P). הוא דוגם חמישה אנשים בריאים, ומתבונן בסטטיסטי X - מספר האנשים שחלו בשפעת בחורף. הוא מתלבט בין שני אומדיים:
- $$T_2 = \frac{X+1}{7} \text{ ו- } T_1 = \frac{X}{5}$$
- מי מבין האומדיים הללו הוא חסר הטיה?
 - מי מבין האומדיים עדיף אם $P = 0.5$?
 - מי מבין האומדיים עדיף אם $P = 0.1$?
- 4)** מספר השירות המתרחשות בארץ בחודש אוקטובר מתפלג פואסונית עם תוחלת λ . נלקח מוגם של 10 חודשים אוקטובר. להלן שני אומדיים אפשריים:
- $$\hat{\lambda}_2 = \frac{2 \cdot \sum_{i=1}^5 X_i + 2 \cdot \sum_{i=6}^{10} X_i}{10} \text{ ו- } \hat{\lambda}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} X_i}{10}.$$
- כאשר: X_i = מספר השירות בחודש אוקטובר ה- i .
איזה מהאומדיים עדיף, לצורך אמידת הפרמטר λ ?
- 5)** הוכח ש: $E(\hat{\theta} - \theta)^2 = V(\hat{\theta}) + (E(\hat{\theta}) - \theta)^2$

תשובות סופיות:

- (1) שלוש תצפיות.
(2) א. $2x$.
 ב. אומד מوطה.
 ג. סעיף ב.
(3) א. T_1 .
 ב. T_2 .
 ג. T_1 .
(4) $\hat{\lambda}_1$.
(5) שאלת הוכחה.