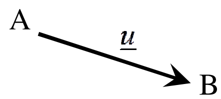
תוכן העניינים:

פרק ווקטורים:

ווקטורים גיאומטריים:



הגדרה כללית:

להלן תיאור של ווקטור גיאומטרי:

ווקטור שמוצאו בנקודה A ומסתיים בנקודה B יסומן באופן הבא: $\overrightarrow{AB}$.

ניתן לסמן ווקטור באות קטנה באופן הבא: $\underline{u}$ (אותיות מקובלות לסימון הן: $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$).

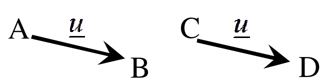
מהאיור לעיל מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$.

קשרים בין ווקטורים:

1. ווקטורים שווים: שני ווקטורים נקראים שווים אם הם זהים בגודלם ובכיוונם.

דוגמא לווקטורים מקבילים:

מתקיים: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

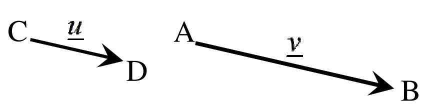


2. ווקטורים מקבילים: שני ווקטורים שכיוונם זהה נקראים מקבילים.
   - ניתן להביע את האחד באמצעות השני ע״י כפל בסקלר.
   - ווקטורים מקבילים נקראים גם ״ווקטורים תלויים ליניארית״.

דוגמא לתלות בין ווקטורים מקבילים:

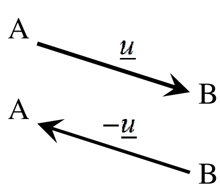
עבור $\alpha > 1$ מתקיים: $\underline{v} = \alpha \underline{u}$,

או: $\overrightarrow{AB} = \alpha \cdot \overrightarrow{CD}$.



3. אם זוג ווקטורים במרחב: $\overrightarrow{AB} = \alpha \underline{u} + \beta \underline{v} + \gamma \underline{w}$ ו- $\overrightarrow{CD} = a\underline{u} + b\underline{v} + c\underline{w}$ מקבילים

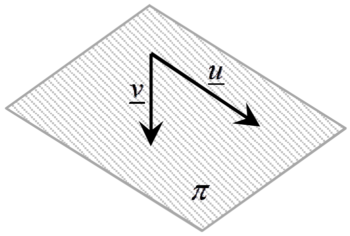
אז מתקיים: $\frac{\alpha}{a} = \frac{\beta}{b} = \frac{\gamma}{c}$.



ווקטור המסומן $\overrightarrow{BA}$ הוא בעל **גודל** זהה לווקטור $\overrightarrow{AB}$ וכיוון הפוך לו. במקרה זה מתקיים: $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$.

וקטורים הפורשים מישור:

כל שני וקטורים שאינם מקבילים, כלומר, בלתי תלויים זה בזה, פורשים מישור.



דוגמא:
הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ בעלי כוונים שונים ולכן פורשים
את המישור π.

קומבינציה לינארית של וקטורים:

1. כל וקטור שנמצא במישור (או מקביל למישור זה) ניתן להצגה ע"י קומבינציה ליניארית של שני וקטורים הפורשים את המישור.
2. כל וקטור שהוא שקומבינציה ליניארית של שני וקטורים הפורשים את המישור, מקביל למישור.
3. אם ניתן להביע וקטור שקומבינציה לינארית של שני וקטורים אחרים (או יותר) אז שלושת הווקטורים נקראים **תלויים ליניארית** (ניתן לבטא כל וקטור באמצעות האחרים).

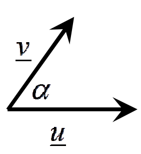
דוגמא:
עבור המישור הנפרש לעיל, ניתן להציג כל וקטור $\underline{w}$ המוכל, או מקביל למישור π באופן הבא: $\underline{w}=\alpha\cdot\underline{u}+\beta\cdot\underline{v}$ כאשר: α,β מספרים ממשיים כלשהם.
במקרה זה שלושת הווקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ ו-$\underline{w}$ נקראים תלויים ליניארית.

המכפלה הסקלרית וגודל של וקטור:

מכפלה סקלרית של שני וקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

כאשר: α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים כמתואר באיור.

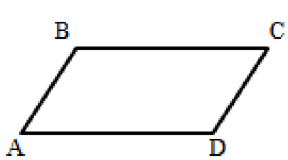


ניתן למצוא את הזווית שבין שני וקטורים ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.

גודל של וקטור נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}$, או: $|\underline{u}|^2=\underline{u}^2$.

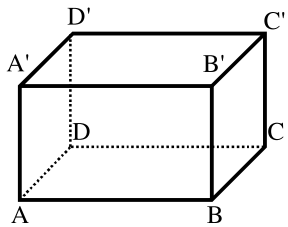
***הערה:**
המכפלה הסקלרית $\underline{u}\cdot\underline{v}$ בין שני וקטורים מקבלת ערך מספרי בלבד! היא יכולה להיות חיובית, שלילית או אפס כפי שנראה בהמשך.

<u>שאלות:</u>

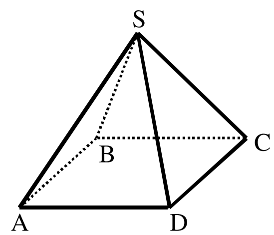


1) במקבילית ABCD נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$
מצא את כל הווקטורים במקבילית ששווים
ל- $\underline{u}$ או $\underline{v}$.

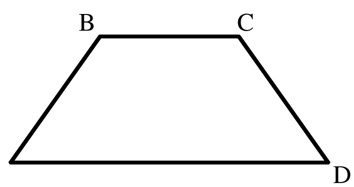
2) בתיבה ABCDA'B'C'D'
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$.
מצא את כל הווקטורים בתיבה
ששווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



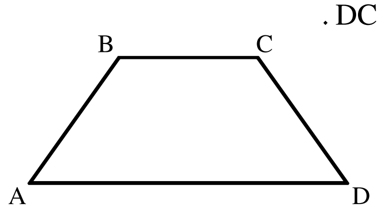
3) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
מצא את כל הווקטורים שבפירמידה
השווים ל- $\underline{u}$, $\underline{v}$ או $\underline{w}$.



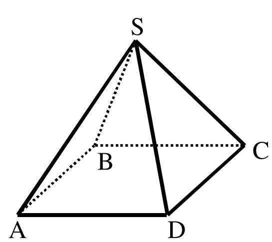
4) בטרפז $ABCD$ שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$.
מצא את כל הווקטורים בטרפז שניתן
להביעם באמצעות $\underline{u}$ או $\underline{v}$.



5) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$.
א. הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{DC}$.
ב. הנקודה E היא אמצע הצלע AD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{BE}$.
ג. הנקודה F היא אמצע הצלע CD.
הבע באמצעות $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.



6) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע
נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$.
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את
הווקטורים $\overrightarrow{AC}$ ו- $\overrightarrow{SC}$.
ב. הנקודה N היא אמצע המקצוע SD.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- $\underline{w}$ את הווקטור $\overrightarrow{BN}$.



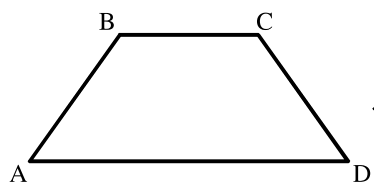
7) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=2:3$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

8) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $AP:PB=3:5$. נתון: $\overrightarrow{AP}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{PB}$ ו- $\overrightarrow{AB}$.

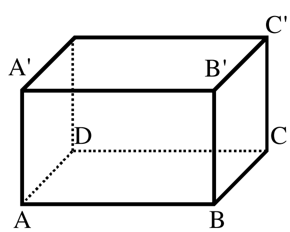
9) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{AB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

10) הנקודה P נמצאת על הקטע AB כך ש: $\frac{AP}{PB}=\alpha$. נתון: $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הבע באמצעות $\underline{u}$ את הווקטורים $\overrightarrow{AP}$ ו- $\overrightarrow{PB}$.

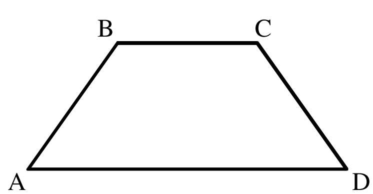
11) בטרפז ABCD שבשרטוט
נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה F נמצאת על הצלע CD ומקיימת: $\frac{DF}{FC}=\beta$.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$ ו- β את הווקטור $\overrightarrow{AF}$.



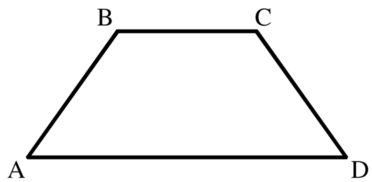
12) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'}=\alpha$
והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'}=\beta$.
הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור: $\overrightarrow{PQ}$.



13) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$, $\overrightarrow{AD}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.
הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD}=\alpha$.
מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים $\overrightarrow{FE}\parallel\overrightarrow{AB}$.



14) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD = 3BC$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$.

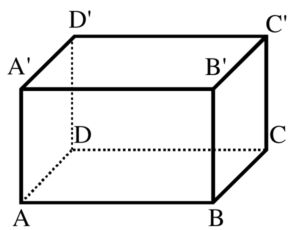


הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD.

הנקודה F נמצאת על הצלע AD ומקיימת: $\frac{AF}{FD} = \alpha$.

מצא את ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\overrightarrow{FE} \parallel \overrightarrow{AC}$.

15) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

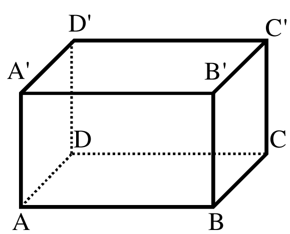
והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. האם קיימים ערכי α ו- β שבעבורם $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{AC}$? נמק.

ג. הנקודה E היא מפגש אלכסוני הפאה ABB'A'.
מצא את ערכי α ו- β אם נתון כי $\overrightarrow{PQ} \parallel \overrightarrow{EC}$.

16) בתיבה ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.



הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

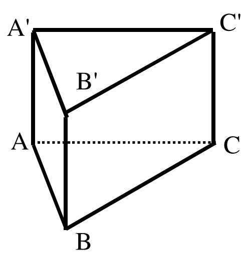
והנקודה Q נמצאת על המקצוע CC' ומקיימת: $\frac{CQ}{QC'} = \beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{PQ}$.

ב. מהו ערכו של α שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לפאה ADD'A'?

ג. האם קיים ערך של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ מקביל לבסיס ABCD?

17) נתונה מנסרה משולשת ABCA'B'C'
ובה נתון: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.



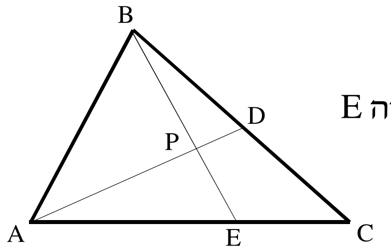
הנקודה M נמצאת על המקצוע A'C' ומקיימת: $\frac{A'M}{MC'} = \alpha$

והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $\frac{BN}{BC} = \beta$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$, α ו- β את הווקטור $\overrightarrow{NM}$.

ב. מהו ערכו של β שבעבורו הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ACC'A'?

ג. נתון כי הווקטור $\overrightarrow{NM}$ מקביל לפאה ABB'A'. הבע את α באמצעות β .



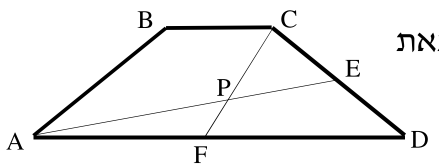
18) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע BC והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\frac{AE}{CE}=2$.

הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.

נגדיר: $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, וכן: $\overrightarrow{AP}=t\cdot\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BP}=s\cdot\overrightarrow{BE}$.

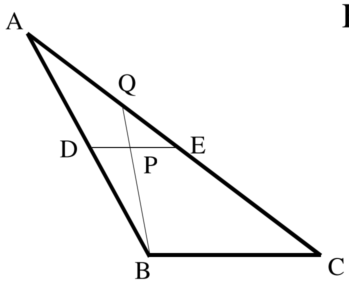
א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, t ו- s את הווקטור $\overrightarrow{AP}$ בשתי דרכים שונות.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AD ואת הקטע BE.



19) בטרפז ABCD שבשרטוט נתון: $AD=3BC$.

הנקודה E נמצאת באמצע הצלע CD והנקודה F נמצאת באמצע הצלע AD. הנקודה P היא מפגש הקטעים AE ו-CF. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את הקטע AE ואת הקטע CF.



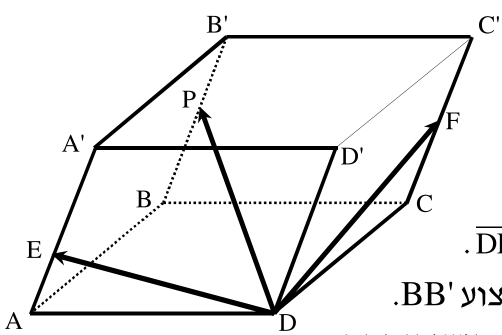
20) במשולש ABC הנקודה D היא אמצע הצלע AB והנקודה E נמצאת על הצלע AC כך שמתקיים: $\overrightarrow{DE}\parallel\overrightarrow{BC}$.

הנקודה P היא אמצע הקטע DE והמשך הקטע BP חותך את הצלע AC בנקודה Q.

א. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה Q את הצלע AC.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_{\triangle QPE}}{S_{\triangle DPB}}$.

21) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתון: $\overrightarrow{DD'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{DC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{DA}=\underline{u}$.



הנקודה F נמצאת באמצע המקצוע 'CC,

הנקודה E נמצאת על המקצוע 'AA

ומקיימת: $A'E=2AE$ והנקודה P נמצאת

על המקצוע 'BB ומקיימת: $\overrightarrow{B'P}=k\cdot\overrightarrow{B'B}$.

נתון: $\overrightarrow{DP}=t\cdot\overrightarrow{DE}+s\cdot\overrightarrow{DF}$.

א. הבע באמצעות $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$ ו- k את הווקטור $\overrightarrow{DP}$.

ב. מצא באיזה יחס מחלקת הנקודה P את המקצוע 'BB.

ג. האם הנקודות D , E, F ו-P נמצאות על אותו מישור? נמק.

22) חשב את המכפלה הסקלרית של הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והזווית שביניהם:

א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=2$, $\alpha=60^o$ ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=120^o$

ג. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\alpha=30^o$ ד. $|\underline{u}|=8$, $|\underline{v}|=3$, $\alpha=180^o$

ה. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=5$, $\alpha=0^o$ ו. $|\underline{u}|=7$, $|\underline{v}|=4$, $\alpha=90^o$

23) חשב את הזווית בין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ על פי הנתונים על גודלם והמכפלה הסקלרית שלהם:

א. $|\underline{u}|=3$, $|\underline{v}|=4$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=6$ ב. $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=2$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=-4\sqrt{3}$

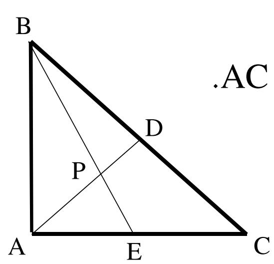
ג. $|\underline{u}|=9$, $|\underline{v}|=5$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=0$ ד. $|\underline{u}|=2$, $|\underline{v}|=6$, $\underline{u}\cdot\underline{v}=12$

24) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120^o.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{PQ}$ שמוגדר: $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

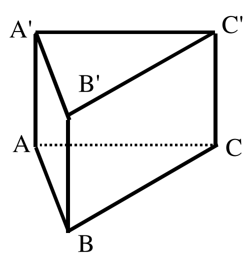
25) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ המאונכים זה לזה שאורכם: $|\underline{u}|=4$, $|\underline{v}|=5$.
חשב את גודלו של הווקטור $\overrightarrow{MN}$ שמוגדר: $\overrightarrow{MN}=0.5\underline{u}-\underline{v}$.

26) נתונים שני וקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ שאורכם: $|\underline{u}|=6$, $|\underline{v}|=3$. הזווית ביניהם היא 120^o.
חשב את גודל הזווית $\measuredangle QPM$ אם נתון: $\overrightarrow{PM}=4\underline{u}+\underline{v}$, $\overrightarrow{PQ}=2\underline{u}-3\underline{v}$.

27) המשולש ABC הוא משולש ישר זווית ($\measuredangle BAC=90^o$).
הנקודה D היא אמצע היתר BC והנקודה E נמצאת על הניצב AC.
הנקודה P היא מפגש הקטעים AD ו-BE.
נתון: $\frac{AP}{PD}=3$, $AB=8$, $AC=12$.
חשב את גודל הזווית $\measuredangle DPC$.

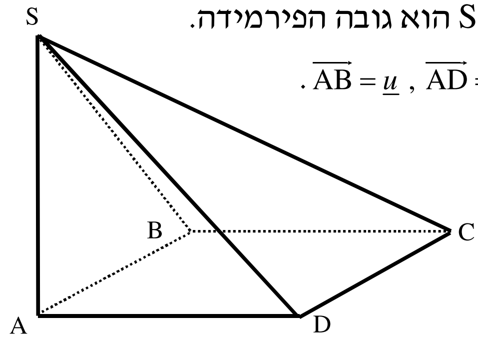


28) נתונה מנסרה משולשת וישרה ABCA'B'C' שבסיסה משולש שווה צלעות שאורך כל אחת מצלעותיו הוא 6. גובה המנסרה הוא 8.
הנקודה M היא אמצע המקצוע A'C' והנקודה N נמצאת על המקצוע BC ומקיימת: $BN=2CN$.
נסמן: $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.
חשב את גודל הזווית: $\measuredangle MAN$.



29) בפירמידה SABCD שבסיסה ריבוע המקצוע SA הוא גובה הפירמידה.

נתון: $AB = AD = \frac{1}{2}AS = k$. נסמן: $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AS} = \underline{w}$.

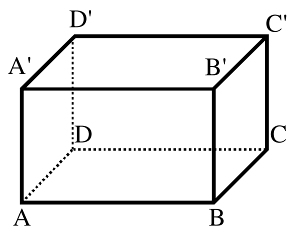


הנקודה Q היא אמצע המקצוע SC

והנקודה P היא אמצע המקצוע SB.

חשב את גודל הזווית: $\measuredangle PAQ$.

30) בתיבה ABCDA'B'C'D'



נתון: $AB = \frac{1}{\sqrt{2}}AD = AA'$, $\overrightarrow{AB} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \underline{w}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע A'B' ומקיימת: $\frac{A'P}{A'B'} = \alpha$

והנקודה Q היא אמצע המקצוע DD'.

א. מהו ערכו של α שבעבורו מתקיים: $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \frac{5}{6}\left|\overrightarrow{AQ}\right|$?

ב. הבע באמצעות α את $\cos\measuredangle PAQ$ והראה כי לכל ערך של α הזווית $\measuredangle PAQ$ חדה.

ג. מהו ערכו של α שבעבורו הזווית $\measuredangle PAQ$ מקיימת: $\cos\measuredangle PAQ = \frac{2}{3\sqrt{5}}$?

31) הוכח כי בכל מרובע ABCD מתקיים: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$.

32) נתון מלבן ABCD. הוכח כי לכל נקודה כלשהי P מתקיים: $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}$.

33) נתון ריבוע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע BC והנקודה Q היא אמצע הצלע CD. הוכח כי מתקיים: $S_{ABCD} = \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$.

34) נתון מרובע ABCD. הנקודה P היא אמצע הצלע AB והנקודה Q היא אמצע הצלע CD. הוכח כי מתקיים: $\overrightarrow{PQ} = \frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$.

35) נתונה פירמידה משולשת SABC שבה $\overrightarrow{AS}\perp\overrightarrow{BC}$ ו- $\overrightarrow{BS}\perp\overrightarrow{AC}$.

הוכח: $\overrightarrow{CS}\perp\overrightarrow{AB}$.

36) הוכח: וקטור המאונך לשני וקטורים בלתי תלויים במישור מאונך לכל הווקטורים שבמישור.

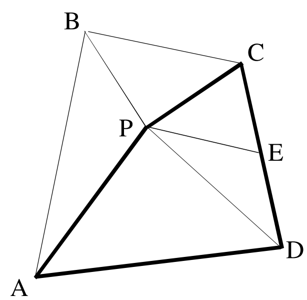
37) א. הנקודה M היא מפגש התיכונים במשולש ABC. הוכח: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=0$.

ב. נתונה פירמידה משולשת SABC.

הנקודה P היא מפגש התיכונים בפאה SBC. הוכח: $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)$.

ג. נתון בנוסף כי $\overrightarrow{AS}$ ו- $\overrightarrow{AP}$ מאונכים ל- $\overrightarrow{BC}$.

הוכח כי $AB=AC$. (הדרכה: סמן $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$).



38) הנקודה P נמצאת בתוך מרובע כלשהו ABCD

כך שהמשולשים APD ו-BPC הם משולשים

ישרי זווית ושו"ש ($BP=PC$, $AP=PD$).

הנקודה E היא אמצע הצלע CD. הוכח: $\overrightarrow{PE}\perp\overrightarrow{AB}$.

(הדרכה: סמן $\overrightarrow{PD}=\underline{d}$, $\overrightarrow{PA}=\underline{c}$, $\overrightarrow{PC}=\underline{b}$, $\overrightarrow{PB}=\underline{a}$).

39) בטטראדר SABC נתון: $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$.

הנקודה P נמצאת על המקצוע AS ומקיימת: $\overrightarrow{AP}=\alpha\cdot\overrightarrow{AS}$.

הנקודה Q נמצאת על הפאה SBC ומקיימת: $\overrightarrow{SQ}=\beta\left(\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}\right)$.

א. מצא את הקשר בין α ו- β שבעבורו $\overrightarrow{PQ}$ מקביל למישור ABC.

ב. נתון: $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$, $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{BC}$. הוכח: $AB=AC$.

40) נתונה פירמידה שבסיסה מלבן.

הוכח כי אם שלושה המקצועות הצדדיים שבה שווים,

אז גם המקצוע הצדדי הרביעי שווה להם.

תשובות סופיות:

1) $\underline{u}=\overrightarrow{DC}$, $\underline{v}=\overrightarrow{BC}$.

2) $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{A'D'}=\overrightarrow{B'C'}$, $\underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{w}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{BB'}$.

3) $\underline{u}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, $\underline{v}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$, $\underline{w}=\overrightarrow{AS}$.

4) $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\underline{v}$.

5) א. $\overrightarrow{AC}=\underline{u}+\frac{1}{3}\underline{v}$, $\overrightarrow{DC}=\underline{u}-\frac{2}{3}\underline{v}$. ב. $\overrightarrow{BE}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}$. ג. $\overrightarrow{AF}=\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{u}$.

6) א. $\overrightarrow{SC}=\underline{u}+\underline{v}-\underline{w}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}+\underline{u}$. ב. $\overrightarrow{BN}=-\underline{u}+\frac{1}{2}\underline{v}+\frac{1}{2}\underline{w}$.

7) $\overrightarrow{BP}=\frac{3}{5}\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\underline{u}$.

8) $\overrightarrow{PB}=\frac{5}{3}\underline{u}$, $\overrightarrow{AB}=\frac{8}{3}\underline{u}$.

9) $\overrightarrow{PB}=(1-\alpha)\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\alpha\underline{u}$.

10) $\overrightarrow{PB}=\frac{1}{1+\alpha}\underline{u}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{\alpha}{1+\alpha}\underline{u}$.

11) $\overrightarrow{AF}=\frac{\beta}{1+\beta}\underline{u}+\frac{3+\beta}{3+3\beta}\underline{v}$.

12) $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}+\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$.

13) $\alpha=2$.

14) $\alpha=1$.

15) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$. ב. לא. ג. $\beta=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$.

16) א. $\overrightarrow{PQ}=(1-\alpha)\underline{u}+\underline{v}-\frac{1}{1+\beta}\underline{w}$. ב. $\alpha=1$. ג. לא.

17) א. $\overrightarrow{NM}=(\beta-1)\underline{u}+(\frac{\alpha}{\alpha+1}-\beta)\underline{v}+\underline{w}$. ב. $\beta=1$. ג. $\alpha=\frac{\beta}{1-\beta}$.

18) א. $\overrightarrow{AP}=(1-s)\underline{u}+\frac{2}{3}s\underline{v}$, $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}t\underline{u}+\frac{1}{2}t\underline{v}$. ב. $AP:PD=4:1$.

19) $CF:PF=2:1$.

20) א. $AQ:QC=1:2$. ב. $\frac{S_{QPE}}{S_{DPB}}=\frac{1}{3}$.

21) א. $\overrightarrow{DP}=\underline{u}+\underline{v}+(1-k)\underline{w}$. ב. $B'P:PB=1:5$. ג. כן.

22) א. 3 . ב. -10 . ג. $6\sqrt{3}$. ד. -24 . ה. 15 . ו. 0 .

23) א. $60°$. ב. $150°$. ג. $90°$. ד. $0°$.

24) $\overrightarrow{PQ}=18.248$.

25) $\overrightarrow{MN}=\sqrt{29}$.

26) $31.87°$.

27) $55.49°$.

28) $70.623°$.

29) $24.095°$.

30) א. $\alpha=\frac{3}{4}$. ב. $\cos(PAQ)=\frac{\frac{1}{2}}{1\frac{1}{2}\sqrt{1+\alpha^2}}$. ג. $\alpha=\frac{1}{2}$.

39) א. $\alpha+2\beta=1$.

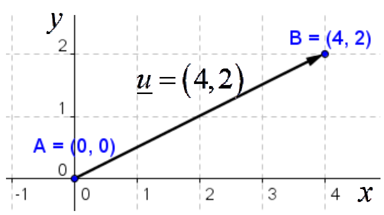
וקטורים אלגבריים:

הגדרה כללית:

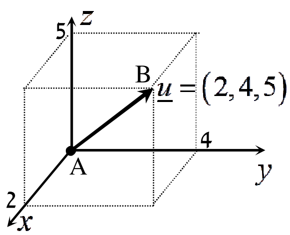
וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:

הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$,
מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



הווקטור: $\underline{u}=(2,4,5)$ נמצא במרחב הקרטזי.
מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$
וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.



וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים:

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא:

$$\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון:

1. אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$
   הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2},\ y_M=\frac{y_1+y_2}{2},\ z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
2. שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם:
   $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}\ ;\ y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}\ ;\ z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של ווקטור בהצגה אלגברית:

מכפלה סקלרית של שני ווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$$

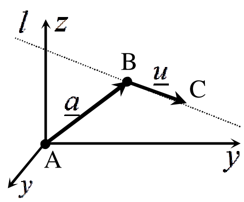
כאשר: α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

גודלו של וקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר:

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ נקרא **וקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.



הווקטור $\underline{u}$ נקרא **וקטור הכיוון של הישר.**
זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.

הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell:\ \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו-$\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

דוגמא:
עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו-$C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים:

$$\underline{a}=\overrightarrow{AB}=B-A=(5,3,1)\ ;\ \underline{u}=\overrightarrow{BC}=C-B=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.

***הערות:**

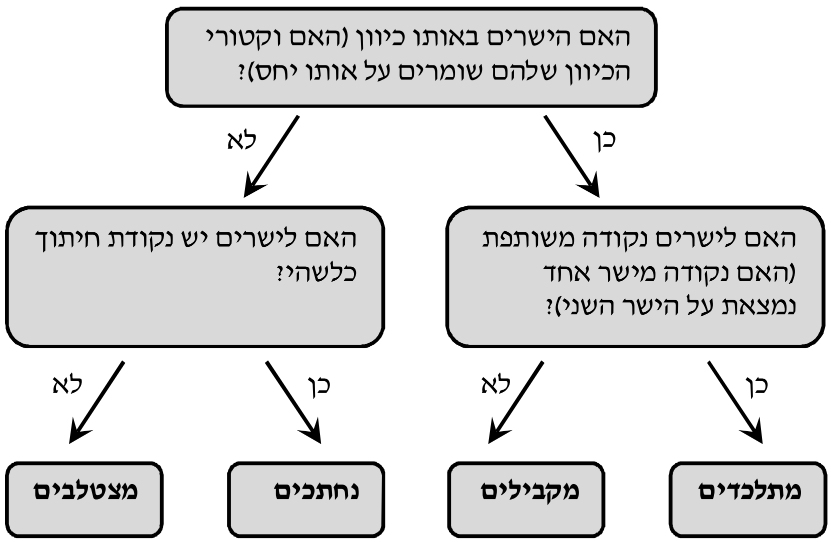
1. לישר יש אינסוף הצגות פרמטרים הנבדלות זו מזו בבחירת וקטור ההעתקה ווקטור הכיוון. ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא:
$$l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$$
2. הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של ישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
3. הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$. כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
4. הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני וקטורים גיאומטריים במרחב הנתון ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים:

ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

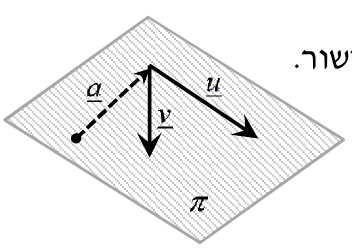
כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור:

מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.

הווקטור $\underline{a}$ הוא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.



הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi:\ \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}+s\underline{v}$
כאשר t,s הם מספרים ממשיים כלשהם ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על המישור π.

משוואת מישור:

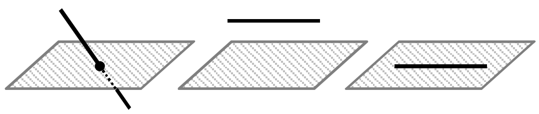
ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$,

כאשר: (x,y,z) היא נקודה על המישור והמקדמים a,b,c הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h}=(a,b,c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור:

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.



כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים:

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$
נקבע את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

מתלכדים	מקבילים	נחתכים
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$	כל מצב אחר

חישובי זוויות ונוסחאות:

1. זווית α בין שני וקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha = \frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.
2. זווית חדה α בין שני ישרים $l_1 = \underline{a}_1 + t\underline{u}_1$ ו- $l_2 = \underline{a}_2 + s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha = \left|\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2}{|\underline{u}_1|\cdot|\underline{u}_2|}\right|$.
3. זווית חדה α בין ישר $l = \underline{a} + t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$
תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha = \left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
4. זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$
ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע"י: $\cos\alpha = \left|\frac{\underline{h}_1\cdot\underline{h}_2}{|\underline{h}_1|\cdot|\underline{h}_2|}\right|$.

חישובי מרחקים ונוסחאות:

1. מרחק בין שתי נקודות $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ ו- $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא:
$d_{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.
2. מרחק בין נקודה $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l:\underline{x} = \underline{a} + t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא תא נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.
3. מרחק בין נקודה $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$ למישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י:
$d = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.
4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.
5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.
6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:
   - שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.
   - שימוש בנוסחה: $d = \left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.
7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

שאלות:

1) שרטט את הווקטורים הבאים:

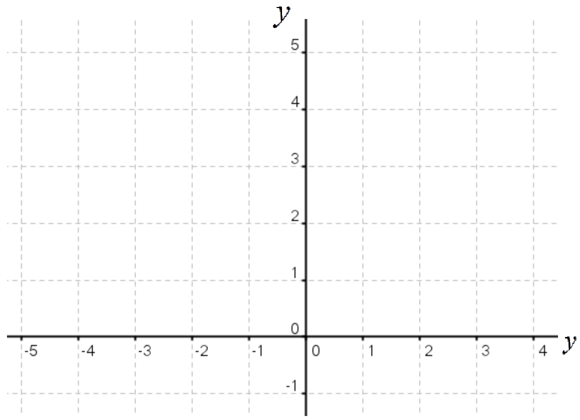
א. $\underline{u}=(4,2)$

ב. $\underline{v}=(-5,1)$

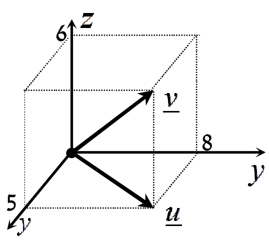
ג. $\underline{w}=(3,-4)$

ד. $\underline{a}=(0,3)$

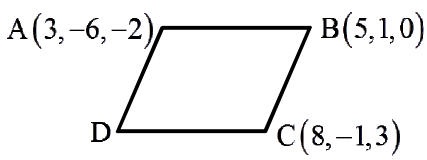
ה. $\underline{b}=(-5,0)$



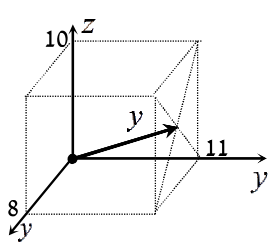
2) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$ על פי השרטוט:



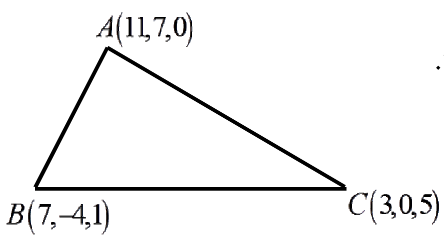
3) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים (ראה איור).
מצא את שיעורי הקדקוד D.



4) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט:



5) בשרטוט נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצא את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



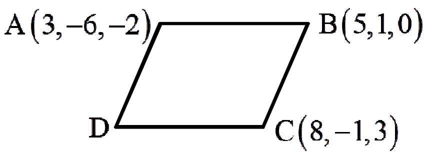
6) א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{AB}$ אם נתונות הנקודות $A(-3,5)$ ו-$B(6,1)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה Q אם נתונה הנקודה $P(8,11)$ והווקטור $\overrightarrow{PQ}=(4,-3)$.

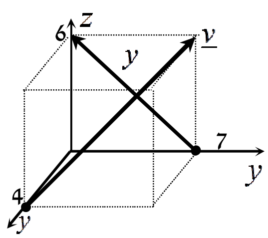
7) א. מצא את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצא את שיעורי הנקודה N אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

8) בשרטוט נתונה מקבילית ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצא את שיעורי הקדקוד D.



9) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$:



10) נתונים שני וקטורים: $\underline{v}=(2,-3,5)$, $\underline{u}=(3,7,1)$. חשב:

א. $\underline{u}+\underline{v}=$ ב. $\underline{u}-\underline{v}=$ ג. $2\underline{u}=$ ד. $3\underline{u}-\underline{v}=$ ה. $\underline{u}\cdot\underline{v}=$

11) חשב את גודלו של הווקטור $\underline{u}=(1,-2,4)$.

12) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכח כי המרובע הוא מקבילית.

13) נתונים ארבעת קודקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכח כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

14) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}=(3,7,1)$ ו- $\underline{v}=(2,-3,5)$:

15) חשב את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{v}=(4,0,1)$, $\underline{u}=(-2,2,5)$

ב. $\underline{v}=(2,5,3)$, $\underline{u}=(6,-3,1)$

ג. $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{u}=(-2,1,3)$

16) מצא את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם: $A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

17) נתונים הווקטורים : $\underline{v}=(5,0,3)$, $\underline{u}=(2,-1,0)$.
מצא וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0 אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

18) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell:\ \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

19) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell:\ \underline{x}=t(2,-1,5)$?

20) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

21) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

22) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell:\ \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

23) מצא את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

24) מצא את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- z.

25) מצא את נקודת החיתוך של הישר $\ell:\ \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

26) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1:\ \underline{x}=(2,-3,0)+t(5,-1,2)$, $\ell_2:\ \underline{x}=(12,-5,4)+s(-10,2,-4)$.

27) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3:\ \underline{x}=(0,1,-7)+t(-2,1,1)$, $\ell_4:\ \underline{x}=(2,0,-6)+s(6,-3,-3)$.

28) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_6:\ \underline{x}=(-1,7,4)+s(-1,1,2)$, $\ell_5:\ \underline{x}=(-3,5,1)+t(4,0,-1)$.

29) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_8:\ \underline{x}=(0,1,-5)+s(3,1,-2)$, $\ell_7:\ \underline{x}=(3,0,0)+t(2,-2,5)$.

30) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{10}: \ \underline{x}=s(6,0,-2) \quad , \quad \ell_9: \ \underline{x}=(-4,1,-1)+t(3,0,-1)$.

31) מצא את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים מצא גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11}: \ \underline{x}=(2,8,-1)+t(1,0,0) \quad , \quad \ell_{12}: \ \underline{x}=(-5,8,2)+s(2,0,-1)$

32) מצא את ערכו של הפרמטר k שבעבורו הישרים הבאים:
$\ell_1: \ \underline{x}=(k+1,1-k,6)+t(1,-2,2) \ , \ \ell_2: \ \underline{x}=(k-1,7,-k)+s(1-k^2,k^2+2,-6)$
א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

33) נתונות הנקודות: $D(-2,3,k)$, $C(-6,3,-1)$, $B(k,-1,3)$, $A(3,-1,5)$.
הראה כי לכל ערך של k הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

34) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבא:
$A(1,-4,0)$, $B(3,6,2)$, $C(0,-3,1)$.

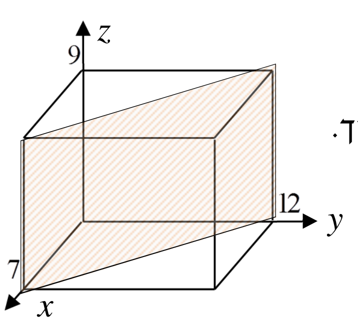
35) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell: \ \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)$.

36) נתונים שני ישרים: $\ell_1: \ \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3) \ , \ \ell_2: \ \underline{x}=(2,16,11)+s(0,1,-6)$.
הראה שהישרים נחתכים ומצא הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

37) מצא את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$
ומכיל את ציר ה- x .

38) מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

39) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצא את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו



40) קבע האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi:\ 2x-y+3z-6=0$:

א. $D(5,7,1)$.   ב. $E(2,-1,1)$.

41) מצא את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על

המישור: $\pi:\ kx-2y+(k+1)z+7=0$.

42) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 3x+2y-z-9=0$.

מצא את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

43) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 4x+y-2z+8=0$.

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

44) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ x+4y-z+8=0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

45) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 2x+3z-12=0$. כתוב הצגה פרמטרית של המישור.

46) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi:\ \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.

מצא את משוואת המישור.

47) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi:\ \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.

מצא את משוואת המישור.

48) המישור π עובר בנקודות: $A(1,0,-3)$, $B(2,0,0)$, $C(4,-1,0)$.

מצא את משוואת המישור.

49) נתונים שני ישרים: $\ell_1:\ \underline{x}=(5,-4,1)+t(0,2,-1)$, $\ell_2:\ \underline{x}=(0,-6,2)+s(0,-2,1)$.

הראה שהישרים מקבילים ומצא את משוואת המישור המכיל אותם.

50) נתונים שני ישרים: $\ell_1:\ \underline{x}=(-1,1,3)+t(3,-2,4)$, $\ell_2:\ \underline{x}=(-7,1,0)+s(4,-3,0)$.

הראה שהישרים מצטלבים ומצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1

ומקביל לישר ℓ_2.

51) מצא משוואת מישור שעובר בנקודה $A(6,0,-1)$ ומכיל את ציר ה- z.

52) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.

לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

53) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0$, $y=0$, $z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$. מצא את נפח הטטראדר.

54) נתונים הישר והמישור הבאים :
$\ell:\ \underline{x}=(5,0,1)+t(4,1,-2)$, $\pi:\ 2x-y-3z+6=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

55) נתונים הישר והמישור הבאים :
$\ell:\ \underline{x}=(2,-1,6)+t(-1,1,2)$, $\pi:\ x-3y+2z-11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

56) נתונים הישר והמישור הבאים :
$\ell:\ \underline{x}=(-6,1,0)+t(3,0,-1)$, $\pi:\ 2x+y+6z+11=0$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

57) נתונים הישר והמישור הבאים :
$\ell:\ \underline{x}=(0,3,-2)+t(1,-1,2)$, $\pi:\ \underline{x}=(-1,0,2)+s(1,0,-2)+r(3,0,-1)$.
קבע את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצא גם את נקודת החיתוך.

58) נתונים הישר והמישור הבאים :
$\ell:\ \underline{x}=(1,a,3)+t(4,1-b,0)$, $\pi:\ 2x-y+z-4=0$.
מצא את ערכי a ו- b בעבורם הישר מוכל במישור.

59) נתונים שני המישורים הבאים : $\pi_1:\ x-3y+2z-1=0$, $\pi_2:\ 4x+y-z-6=0$.
מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

60) נתונים שני מישורים. קבע את המצב ההדדי ביניהם :
א. $\pi_1:\ 2x-y+4z-5=0$, $\pi_2:\ 4x-2y+8z-10=0$.
ב. $\pi_3:\ x+3y-z+1=0$, $\pi_4:\ 3x+9y-3z-8=0$.
ג. $\pi_5:\ 5x-2y-z+3=0$, $\pi_6:\ 2x+3y+z-5=0$.

61) נתונים שני המישורים הבאים:

$\pi_2:\ 4x+12y-4z+k^2-2=0 \quad , \quad \pi_1:\ 2x+(k^2+k)y-2z+1=0$.

מצא את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים   ב. מקבילים   ג. מתלכדים

62) במקבילון ABCDA'B'C'D' נתונים שלוש הקדקודים הבאים:

$A(1,-1,4)$, $B(9,0,2)$, $C(5,2,-2)$.

מצא את משוואת המישור עליו מונחת הפאה A'B'C'D' אם ידוע שהנקודה $(2,-1,0)$ נמצאת עליו.

63) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1:\ 4x+y-2z+2=0$, $\pi_2:\ 2x-y+z+10=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

64) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3:\ 8x+2y-3z+2=0$, $\pi_4:\ 2x-3y+z+4=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

65) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5:\ 3x-3y+z+2=0$, $\pi_6:\ 5x-2z+20=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

66) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7:\ x-2y-z+6=0$, $\pi_8:\ z-2=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

67) מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi:\ 6x-5y+z+18=0$ עם המישור $[xz]$.

68) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ x-3y+2z-1=0$, $\pi_2:\ 4x+y-z-6=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

69) המישורים π_1 ו- π_2 מאונכים זה לזה.

הישר $\ell:\ \underline{x}=(4,1,-1)+t(2,-1,1)$ הוא ישר החיתוך שבין המישורים.

מצא את משוואות המישורים אם ידוע שהמישור π_1 עובר בראשית.

70) נתונים ישר ומישור: $\ell:\ \underline{x}=(-2,0,5)+t(3,1,-1)$, $\pi:\ 4x-2y-3z-6=0$.

מצא הצגה פרמטרית של הישר שהוא היטלו של הישר ℓ על המישור.

71) מצא את הזווית שבין הישרים הבאים:

$\ell_1:\ \underline{x}=(3,-11,2)+t(2,4,-1)$, $\ell_2:\ \underline{x}=(7,0,-1)+s(0,5,-1)$

72) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\pi:\ 2x-y-3z+5=0 \quad , \quad \ell:\ \underline{x}=(1,0,3)+t(-3,1,-5)$

73) מצא את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\pi:\ 3x-2y+2z+9=0 \quad , \quad \ell:\ \underline{x}=(-2,0,5)+t(-2,1,2)$

74) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים:
$\pi_2:\ 5x-y-z+10=0 \quad , \quad \pi_1:\ 3x+2y-z-8=0$

75) מצא את הזווית שבין המישורים הבאים:
$\pi_2:\ 4x-7y+5z+3=0 \quad , \quad \pi_1:\ 4x+3y+z-12=0$

76) מצא את המרחק שבין הנקודות $A(-1,3,2)$ ו- $B(9,1,0)$.

77) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(-4,12,-5)$ לישר $\ell:\ \underline{x}=(1,1,-4)+t(3,-1,2)$.

78) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell:\ \underline{x}=t(2,0,-7)$.

79) נתונות הנקודות: $A(1,6,-1)$, $B(2,-1,0)$, $C(6,-4,0)$.
חשב את שטח המשולש ABC.

80) על הישר $\ell:\ \underline{x}=(5,-2,0)+t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצא את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

81) מצא את המרחק שבין הנקודה $A(5,3,-1)$ למישור $x-2y+2z-12=0$.

82) מצא את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

83) מצא משוואת מישור המאונך לישר $\ell:\ \underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

84) נתונים ישר ומישור: $\ell:\ \underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$, $\pi:\ 2x+4y-4z+15=0$.
מצא את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

85) חשב את נפחה של פירמידה משולשת SABC שקדקודיה הם:
$A(1,6,-1)$, $B(2,-1,0)$, $C(6,-4,0)$, $S(11,-2,4)$.

86) בפירמידה משולשת SABC המקצועות SA, SB ו-SC מאונכים זה לזה.
נתון: $SA=6$, $SB=8$, $SC=12$.
חשב את אורכו של גובה הפירמידה היורד מהקדקוד S לבסיסABC.

87) נתונים שני ישרים: $\ell_1:\ \underline{x}=(-4,6,4)+t(2,3,0)$, $\ell_2:\ \underline{x}=(1,7,1)+s(2,3,0)$.
הראה שהישרים מקבילים ומצא את המרחק ביניהם.

88) נתונים ישר ומישור: $\ell:\ \underline{x}=(2,-4,1)+t(-5,1,-4)$, $\pi:\ 2x+6y-z+6=0$.
הראה שהישר מקביל למישור ומצא את המרחק שבין הישר למישור.

89) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ 2x+2y-z+7=0$, $\pi_2:\ 2x+2y-z-5=0$.
הראה שהמישורים מקבילים ומצא את המרחק שביניהם.

90) נתונה משוואת מישור: $\pi:\ 3x-4y+5z-10=0$.
מצא משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

91) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1:\ x-2y-2z+6=0$, $\pi_2:\ x-2y-2z-12=0$.
מצא את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

92) נתונים שני הישרים הבאים:
$l_2:\underline{x}=(0,2,-7)+s(1,0,-1)$, $l_1:\underline{x}=(-3,2,6)+t(-4,1,2)$.
הראה שהישרים מצטלבים ומצא את המרחק שביניהם.

93) נתונים שני הישרים המצטלבים הבאים:
$\ell_3:\ \underline{x}=(-1,0,5)+t(1,1,-2)$, $\ell_4:\ \underline{x}=(2,-1,9)+s(6,-1,0)$.
מצא את המרחק שביניהם:

94) מצא את מרחק הישר $\ell:\ \underline{x}=(4,-2,-1)+t(-1,1,6)$ מציר ה- z.

95) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D' שנפחה הוא 8. משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא: $\pi_1: \ 4x+y+3z-28=0$.

משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא: $\pi_2: \ x+2y-2z+6=0$.

מצא הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

96) נתונים שני ישרים: $\ell_1: \ \underline{x}=(-2,1,5)+t(5,-4,2)$, $\ell_2: \ \underline{x}=(-7,3,-1)+s(-5,4,-2)$.

א. מצא את המצב ההדדי שבין הישרים.

ב. המישור π_1 מכיל את שני הישרים והמישור π_2 נמצא בין שני הישרים במרחק שווה מכל אחד מהם, מקביל לשני הישרים ומאונך למישור π_1.
מצא את משוואות המישורים π_1 ו- π_2.

97) נתונים שני מישורים: $\pi_1: \ 2x-y+4z-8=0$, $\pi_2: \ x-y+2z-4=0$.

המישור π_3 מכיל את ישר החיתוך של שני המישורים וחותך את ציר ה- y בנקודה A כך שמתקיים $OA=m$ (O ראשית הצירים).

הזווית שבין המישור π_2 למישור π_3 היא α ונתון כי: $\cos\alpha=\frac{2}{3}$.

מצא את הערכים האפשריים של הפרמטר m.

98) נתונות שלוש נקודות: $A(3,-1,1)$, $B(2,-1,0)$, $O(3,1,0)$.

הנקודות A ו-B נמצאות על היקפו של מעגל שהנקודה O היא מרכזו.

מצא הצגה פרמטרית של הישר המשיק למעגל בנקודה A
(הישר נמצא במישור המעגל).

99) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור שמרכזו $O(1,1,2)$.

מצא את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

100) נתונים מישור וישר: $\pi: \ 2x-y+2z+1=0$, $\ell: \ \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.

מצא נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

101) נתונים שני מישורים: $\pi_1: \ 2x-4y+4z-5=0$, $\pi_2: \ 4x-2y+4z-1=0$.

מצא הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצא הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

102) נתונים ישר ומישור: $\ell_1:\ \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$, $\pi:\ 6x+2y-z+5=0$.

ישר נוסף, ℓ_2, המקביל למישור π, עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π, הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.

מצא את שטח המלבן PQQ'P'.

(הדרכה: הבע באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2).

103) נתונים שני מישורים: $\pi_1:\ 2x+y+z-5=0$, $\pi_2:\ 3x+y+2z+11=0$.

ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.

המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של 60^o עם הישר $\ell_2:\ \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.

מצא את משוואת המישור π_3 .

תשובות סופיות:

2) $\underline{u}=(5,8,0)$, $\underline{v}=(5,8,6)$. **3)** $D(6,-8,1)$. **4)** $\underline{u}=(4,11,5)$. **5)** $(7,1,2)$.

6) א. $\overrightarrow{AB}=(9,-4)$. ב. $Q=(12,8)$. **7)** א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$. ב. $N(-1,-5,10)$.

8) $D(6,-8,1)$. **9)** $\underline{u}=(0,-7,6)$, $\underline{v}=(-4,7,6)$.

10) א. $(5,4,6)$. ב. $(1,10,-4)$. ג. $(6,14,2)$. ד. $(7,24,-2)$. ה. -10. **11)** $\sqrt{21}$.

13) ב. כן. **14)** 102.19°. **15)** א. 97.277°. ב. 90°. ג. 180°. **16)** 10.173 יח"ש.

17) $\underline{w}=(3,6,-5)$ או $\underline{w}=(-3,-6,5)$. **18)** כן. **19)** לא. **20)** $l:\underline{x}=(-5,-2)+t(6,8)$.

21) $l:\underline{x}=(4,1,1)+t(1,1,3)$ **22)** $l:\underline{x}=(2,-7,1)+s(-4,2,1)$. **23)** $l:\underline{x}=t(0,1,0)$.

24) $l:\underline{x}=(3,-1,4)+t(0,0,1)$. **25)** $(7,-5,0)$. **26)** מתלכדים. **27)** מקבילים.

28) נחתכים, $(1,5,0)$. **29)** מצטלבים. **30)** מקבילים. **31)** נחתכים, $(1,8,-1)$.

32) א. $k=2$. ב. $k=-2$. **34)** $\pi:\underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$.

35) $\pi:\underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$. **37)** $\pi:\underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$.

38) $\pi:\underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$. **39)** $\pi:\underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,1)+s(-7,12,0)$.

40) א. על המישור. ב. לא על המישור. **41)** $k=3$. **42)** $(0,0-9)$, $(0,4\frac{1}{2},0)$, $(3,0,0)$.

43) $l:\underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$. **44)** $\pi:\underline{x}=(0,0,8)+t(0,-2,-8)+s(-8,0,-8)$.

45) $\pi:\underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$. **46)** $\pi:-2x+3y+z+19=0$.

47) $\pi:x-3y+8z=0$. **48)** $\pi:3x+6y-z-6=0$. **51)** $\pi:y=0$. **52)** $k=3$.

53) 6 יח"נ. **54)** הישר חותך, $(1,-1,3)$. **55)** מקבילים. **56)** הישר מוכל.

57) הישר חותך, $(3,0,4)$ **58)** $a=1$, $b=-7$. **59)** $l:\underline{x}=t(1,9,13)$.

60) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים. **61)** א. $k\neq 2,-3$. ב. $k=-3$. ג. $k=2$.

62) $\pi_{A'B'C'D'}:2y+z+2=0$. **63)** $l:\underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$.

64) $l:\underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$. **65)** $l:\underline{x}=(0,4,10)+t(4,7\frac{1}{3},10)$.

66) $l:\underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$. **67)** $l:\underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$. **68)** $l:\underline{x}=t(1,9,13)$.

69) $\pi_1:y+z=0$, $\pi_2:x+y-z-6=0$. **70)** $l':\underline{x}=(-5,-13,0)+t(7,11,2)$.

71) 26.01°. **72)** 21.19°. **73)** 18.87°. **74)** 43.94°. **75)** 90°. **76)** $\sqrt{108}$.

77) $\sqrt{91}$ **78)** $\sqrt{54}$. **79)** 12.75 יח"ש. **80)** $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$. **81)** 5. **82)** $2\frac{1}{2}$.

83) $\pi:3x-2y+z+21=0$ או $\pi:3x-2y+z-7=0$. **84)** $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

85) 20.5 יח"נ. **86)** 4.46 יחידות אורך. **87)** $\sqrt{22}$. **88)** $\frac{15}{\sqrt{41}}$. **89)** 4.

90) $\pi_1':3x-4y+5z+10=0$, $\pi_2':3x-4y+5z-30=0$. **91)** $\pi_3:x-2y-2z-3=0$.

92) $\frac{4}{\sqrt{6}}$. **93)** 1.567. **94)** $\sqrt{2}$.

95) $\pi_{DCC'D'}:x+2y-2z=0$ או $\pi_{DCC'D'}:x+2y-2z+12=0$.

96) א. מקבילים. ב. $\pi_1: 2x+2y-z+7=0$, $\pi_2: y+2z-6=0$.   **97)** $m=4,-\frac{4}{7}$.

98) $l: \underline{x}=(3,-1,1)+k(-5,-2,-4)$.   **99)** $\pi: -3x+y+3z+15=0$.

100) $(0,0,4)$ או $(0,0,14\frac{4}{5})$.   **101)** $l: \underline{x}=(0,-14,-15\frac{3}{4})+t(-14,14,21)$.

102) 10.476 יח״ש.   **103)** $\pi_3: x+2y-z-58=0$ או $\pi_3: 2x+y+z-5=0$.