

סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מבוא לסטטיסטיקה והסתברות א'.
הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה,
המועבר ברשת האינטרנט On-line.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את
התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

**הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם
רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי
שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה [לחצו כאן](#).**

את הקורס בנה מר ברק קנדל, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים
שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים
להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם
לחויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר
www.gool.co.il.



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

תוכן

3.....	פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית - סיווג משתנים וסולמות מדידה
8.....	פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים
16.....	פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית - גבולות מדומים וגבולות אמתיים
18.....	פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - סכימה
21.....	פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי
30.....	פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור: הטווח, השונות וסטיית התקן
35.....	פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין-רבעוני
38.....	פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן
41.....	פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים במחלקות
46.....	פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים בטבלת שכיחויות בדידה
49.....	פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית
52.....	פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות
61.....	פרק 13 - מדדי קשר - מדד הקשר הלינארי (פירסון)
70.....	פרק 14 - מדדי קשר - רגרסיה לינארית
73.....	פרק 15 - בעיות בסיסיות בהסתברות
78.....	פרק 16 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים
89.....	פרק 17 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה
93.....	פרק 18 - קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה
97.....	פרק 19 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה
100.....	פרק 20 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה
104.....	פרק 21 - הסתברות מותנית - במרחב מדגם אחיד
107.....	פרק 22 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד
111.....	פרק 23 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה
117.....	פרק 24 - תלות ואי תלות בין מאורעות
121.....	פרק 25 - שאלות מסכמות בהסתברות

פרק 1 - סטטיסטיקה תיאורית - סיווג משתנים וסולמות מדידה

רקע:

סטטיסטיקה תיאורית הוא ענף בו לומדים כיצד לאסוף נתונים, להציג אותם ולנתח אותם. בסטטיסטיקה תיאורית אנו פונים לקבוצה מסוימת. באותה קבוצה אנו אוספים נתונים על הישגיות באותה קבוצה.

משתנה – תכונה שיכולה לקבל מספר ערכים : דעה פוליטית, מקום מגורים, גובה של אדם וכדומה.

חלוקה אחת של המשתנים הנמדדים היא לפי סולמות מדידה :

מיון משתנים לפי סולמות המדידה :

1. **סולם שמי** (נומינאלי) – משתנה שלערכיו יש משמעות רק מבחינת הזהות ואין עניין של יותר או פחות לדוגמה : מצב משפחתי רווק/נשוי/אלמן/גרוש ; אזור מגורים. משתנה דיכוטומי (הינו מסולם שמי) אותם משתנים שיש להם רק שני ערכים אפשריות זכר/נקבה. מעשן/לא מעשן.
2. **סולם סדר (אורדינאלי)** – כאשר לערכים של המשתנה בנוסף לשם ישנה גם משמעות לסדר אבל אין משמעות לגודל ההפרש. למשל, דרגה בצבא.
3. **סולם רווחים (אינטרוואלי)** – משתנה שלערכים שלו בנוסף לשם ולסדר בניהם יש משמעות לרווחים בין הערכים אבל אין משמעות ליחס בין הערכים. למשל, קומה בבניין. סולם לא כל כך פופולרי.
4. **סולם מנה/יחס** – משתנה שלערכיו בנוסף לשם, לסדר ולרווח יש משמעות גם ליחס בין הערכים. למשל, מספר מכוניות למשפחה, משקל אדם בק"ג. הדרך הקלה ביותר כדי לזהות עם הסולם הוא סולם מנה היא על ידי מבחן האפס. בסולם מנה האפס הוא מוחלט, אבסולוטי, ומייצג אין.

סוגי משתנים :

נבצע סיווג של המשתנים :

משתנה איכותי הוא משתנה שלערכיו אין משמעות של יותר או פחות , אין עניין כמותי לערכים המתקבלים.

כמו : מקום מגורים של אדם (רעננה, תל אביב, אשדוד..) ,
מין האדם (זכר, נקבה)
מצב משפחתי (רווק, נשוי, גרוש, אלמן)

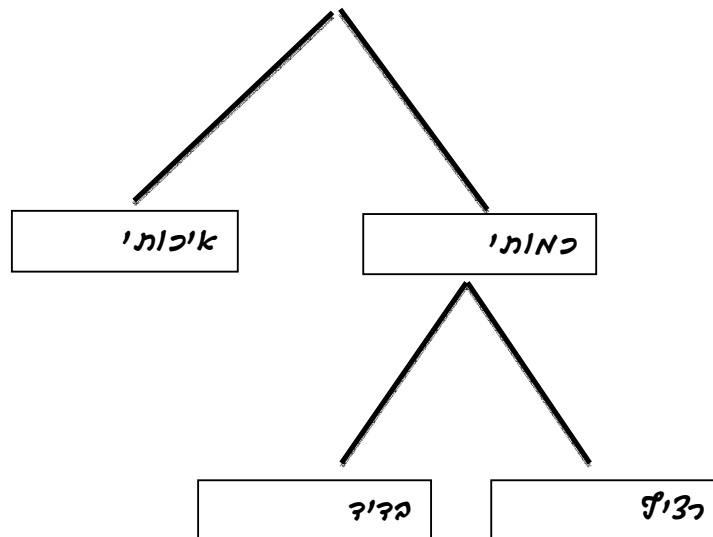
משתנה כמותי הוא משתנה שערכיו הם מספרים להם יש משמעות כמותית כמו : גובה אדם בס"מ, ציון בבחינה וכדומה.

את המשתנה הכמותי נסווג לשני סוגים :

משתנה בדיד : משתנה שערכיו מתקבלים מתוך סידרה של ערכים אפשריים. כמו : מספר ילדים למשפחה (1,2,3..) ,
ציון בבחינה (מ 0 ועד 100 בקפיצות של 1)

משתנה רציף : משתנה שערכיו מתקבלים מתוך אינסוף ערכים בתחום מסוים , הערכים מתקבלים ברצף וללא קפיצות של ערכים .

כמו : גובה בס"מ – אם למשל, הגובה הנמוך ביותר הוא 150 ועד 190 ס"מ בקבוצה הגבהים הם ברצף. גם בין 160 ל 161 ס"מ יש רצף אינסופי של ערכים אפשריים לגובה (16.233 ס"מ הוא גם גובה אפשרי)
משקל בק"ג , מהירות בקמ"ש וכולי.



תרגילים:

1. לפניכם רשימה של משתנים :
- א. גובה אדם בס"מ.
 - ב. מספר ילדים למשפחה.
 - ג. מידת חרדה לפני מבחן .
 - ד. שביעות רצון משירות לקוחות בסקלה מ 1 עד 7 (1 כלל לא מרוצה עד 7 מרוצה מאד)
 - ה. השכלה .
 - ו. מספר אוטובוס.
 - ז. מקום מגורים.
 - ח. מין (1=גבר ו-2=אישה).
 - ט. מידת נעליים.

ציינו באיזה סולם מדידה המשתנה הנחקר (שמי , סדר , רווחים או מנה)

2. להלן התפלגות מספר האיחורים לעבודה בחודש של העובדים בחברת "סטאר".
בחברה 200 עובדים.

מספר העובדים	מספר האיחורים
17	0
23	1
85	2
50	3
25	4

- א. מהו המשתנה הנחקר כאן?
- ב. האם מדובר במשתנה איכותי או כמותי ? אם הוא כמותי האם הוא בדיד או רציף?
באיזה סולם מדידה המשתנה?

3. לפניכם רשימה של משתנים כמותיים . ציין ליד כל משתנה אם הוא רציף או בדיד.

- א. שכר עובד בש"ח.
- ב. ציון בחינת בגרות.
- ג. תוצאה בהטלת קובייה.
- ד. מהירות ריצה בתחרות.
- ה. שיעור התמיכה בממשלה.

1. איזו טרנספורמציה שומרת על סולם מספרי האוטובוסים של "אגד" ?
- א. טרנספורמציה שומרת סדר.
 - ב. טרנספורמציה לינארית חיובית.
 - ג. טרנספורמציה שומרת יחס.
 - ד. כל התשובות נכונות.

פתרונות:

ד.2

ג.3

ד.4

פרק 2 - סטטיסטיקה תיאורית - הצגה של נתונים

רקע:

דרכים להצגת נתונים שנאספו :

א. רשימה של תצפיות:

התצפית היא הערך שנצפה עבור ישות מסוימת בקבוצה. רושמים את התצפיות שהתקבלו כרשומה, יעיל שיש מספר מועט של תצפיות. ההצגה הזו רלבנטית לכל סוגי המשתנים.

למשל, להלן מספר החדרים בבניין בן 5 דירות :

3 4 3 5 4

ב. טבלת שכיחויות בדידה :

שם המשתנה X -	שכיחות $f(X)$ -	שכיחות יחסית באחוזים
X_1	f_1	$\frac{f_1}{N} \times 100$
X_2	f_2	$\frac{f_2}{N} \times 100$
X_3	f_3	$\frac{f_3}{N} \times 100$
\vdots	\vdots	\vdots
X_k	f_k	$\frac{f_k}{N} \times 100$
סה"כ	$N = \sum_{i=1}^k f_i$	100%

רושמים את התצפיות בטבלה שבה עמודה אחת מבטאת את ערכי המשתנה והשנייה את השכיחות. יעיל עבור משתנה איכותי וכמותי בדיד וכשיש מספר רב של תצפיות. לא יעיל למשתנה כמותי רציף.

למשל, להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת:

$\frac{f_i}{n}$	F_i	מספר התלמידים – השכיחות-f	הציון X-
$0.08=2/25$	2	2	5
$0.16=4/25$	6	4	6
$0.32=8/25$	14	8	7
$0.2=5/25$	19	5	8
$0.16=4/25$	23	4	9
$0.08=2/25$	25	2	10

שכיחות מצטברת – צבירה של השכיחותות: F_i - השכיחות המצטברת נותנת כמה תצפיות קטנות או שוות לערך.

שכיחות יחסית (פרופורציה) – השכיחות מחולקת לכמות התצפיות הכללי: $\frac{f_i}{n}$ - איזה חלק מהתצפיות בקבוצה שוות לערך.

ג. **טבלת שכיחותות במחלקות:**

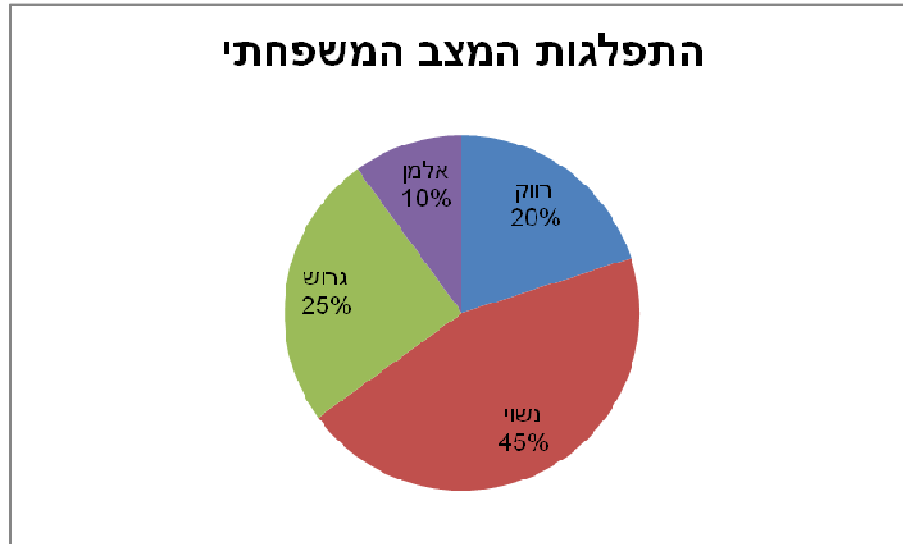
משתמשים שהמשתנה כמותי רציף או כאשר יש מספר ערכים רב במשתנה הבדיד וטבלת שכיחותות תהיה ארוכה מידי.

למשל, נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

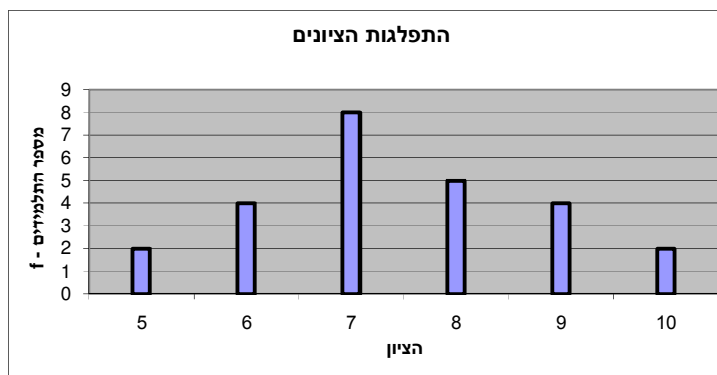
ד. דיאגרמת עוגה :

זהו התיאור הגרפי של משתנה איכותי. בדיאגרמת עוגה כל ערך במשתנה מקבל "נתח" יחסי מהעוגה. הנתח בעוגה פרופורציוני לשכיחות היחסית של ערך המשתנה בנתונים.



ה. דיאגרמת מקלות :

הציר האופקי הוא הציר של המשתנה הצייר האנכי של השכיחות – הגובה של המקל מעיד על השכיחות. רלבנטי למשתנה כמותי בדיד. לא נהוג להשתמש בתיאור למשתנה איכותי וכמו כן לא למשתנה כמותי רציף. כמו כן בסולמות מדידה עבור משתנה מסולם סדר.

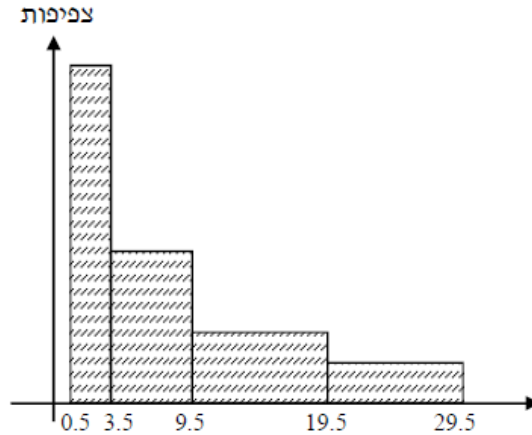


1. **היסטוגרמה:**

ההיסטוגרמה היא הדרך הגרפית כדי לתאר טבלת שכיחויות במחלקות. רלבנטית למשתנה כמותי רציף.

בהיסטוגרמה ציר האופקי הוא הציר של המשתנה וציר האנכי הוא הציר של הצפיפות. הצפיפות מחושבת בכל מחלקה על ידי חלוקת השכיחות ברוחב של כל המחלקה והיא נותנת את מספר התצפיות הממוצע בכל מחלקה ליחידה. אם המחלקות הן שוות ברוחב, ניתן לשרטט את ההיסטוגרמה לפי השכיחות ואין צורך בצפיפות.

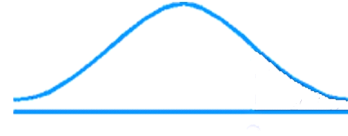
צפיפות	מצטברת	שכיחות	רוחב		X
			אמצע	רוחב	
6.6667	20	20	2	3	0.5 - 3.5
3	38	18	6.5	6	3.5 - 9.5
1.4	52	14	14.5	10	9.5 - 19.5
0.8	60	8	24.5	10	19.5 - 29.5



פוליגון-מצולעון: אם נחבר את אמצע קצה כל מלבן בקווים ישרים. נותן מראה חזותי לצורה של התפלגות המשתנה.

צורות התפלגות נפוצות

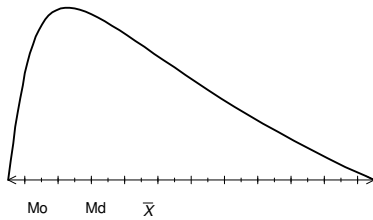
התפלגות סימטרית פעמונית- רוב התצפיות במרכז וככל שנתרחק מהמרכז יהיו פחות תצפיות באופן סימטרי. למשל, ציוני IQ.



ישנן התפלגויות סימטריות שאינן פעמוניות:

התפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) –רוב התצפיות מקבלות ערכים נמוכים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים גבוהים קיצוניים. למשל, שכר במשק.

התפלגות א-סימטרית ימנית או חיובית



התפלגות אסימטרית שמאלית (שלילית) רוב התצפיות מקבלות ערכים גבוהים ויש מיעוט הולך וקטן של תצפיות שמקבלות ערכים נמוכים קיצוניים. למשל, אורך חיים.

התפלגות א-סימטרית שמאלית או שלילית



תרגילים:

1. בסקר צפייה בטלוויזיה התקבלו התוצאות הבאות: 25 צפו בערוץ הראשון, 25 צפו בערוץ 10, 75 צפו בערוץ השני, 50 צפו באחד מערוצי הכבלים ו - 25 לא צפו בטלוויזיה בזמן הסקר.
 א. רשמו את טבלת השכיחות ואת השכיחות היחסית.
 ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.

2. להלן נתונים על התפלגות המקצוע המועדף של תלמידי שכבה ו' בבית הספר "מעוף":

מספר התלמידים	המקצוע
44	מתמטיקה
20	תנ"ך
12	אנגלית
26	היסטוריה

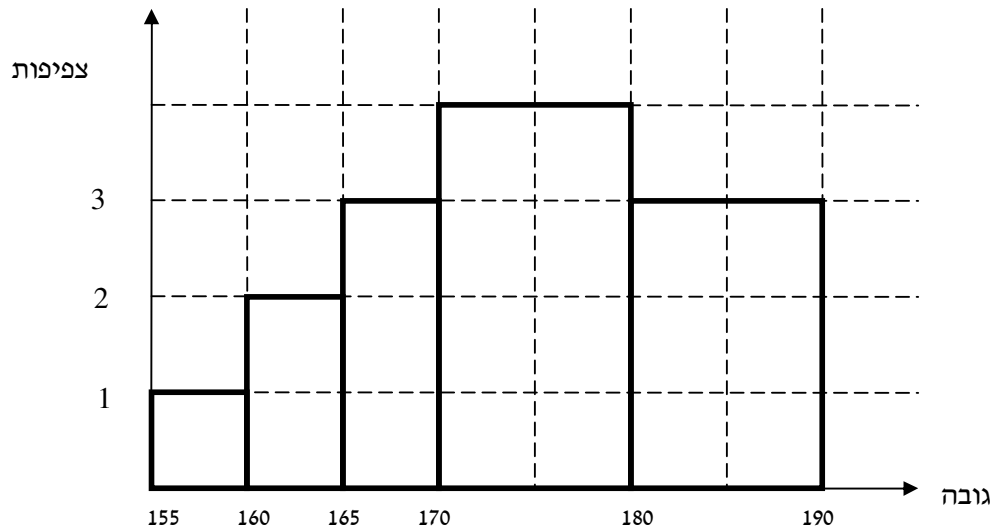
- א. מהו המשתנה הנחקר?
 ב. מהי פרופורציית התלמידים שמעדיפים תנ"ך?
 3. להלן התפלגות ההשכלה במקום עבודה מסוים:

מספר העובדים	השכלה
60	נמוכה
120	תיכונית
20	אקדמאית

- א. מהו המשתנה הנחקר? מאיזה סולם הוא?
 ב. תארו את הנתונים באופן גרפי.
 4. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
 7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6

- א. מהו המשתנה? האם הוא בדיד או רציף?
 ב. תאר את הרשימה בטבלת שכיחות.
 ג. הוסף שכיחות יחסיות לטבלה.
 ד. תאר את הנתונים באופן גרפי.

5. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



- מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
- תאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות.
- הוסף שכיחות יחסית לטבלה.
- הוסף את הצפיפות של כל מחלקה לטבלה.
- מהי צורת ההתפלגות של הגבהים?

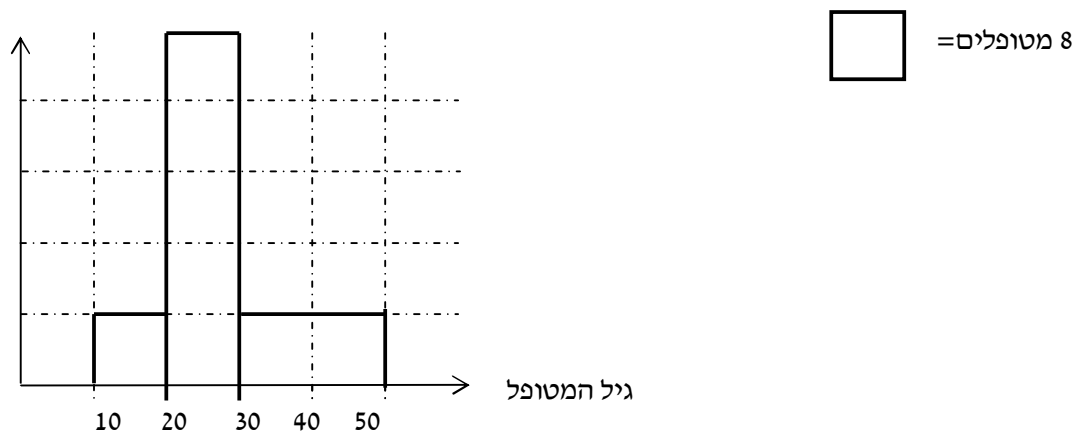
6. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

- תאר את ההתפלגות באופן גרפי.
- מה ניתן להגיד על צורת ההתפלגות?

7. להלן גיל המטופלים של ד"ר שוורץ בשנים :

קנה מידה :



א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?

ב. מהי הקבוצה הנחקרת?

ג. תרגמו את ההסיטוגרמה לטבלת שכיחות.

ד. מהי הפרופורציה של המטופלים של ד"ר שוורץ בגילאים 20-30?

פרק 3 - סטטיסטיקה תיאורית - גבולות מדומים וגבולות אמתיים

רקע:

עבור משתנה רציף נהוג לתאר את הנתונים בטבלת שכיחויות במחלקות. הנתונים שנאספים הם ברמת דיוק מסוימת. לדוגמא משקל של בני אדם או משקל של יהלומים ישקלו ברמת דיוק שונה. **גבולות מדומים:** כאשר גבול עליון של מחלקה אחת שונה מגבול תחתון של המחלקה הבאה אז הגבולות הם גבולות מדומים. כשהגבולות מדומים ההפרש בין גבול תחתון של מחלקה לבין גבול עליון של המחלקה הקודמת יהיה רמת הדיוק. **רמת הדיוק חייבת להיות קבועה** אין אפשרות שחלק מהאנשים נדייק ברמה אחת ואת השאר ברמה אחרת. בגלל שהמשתנה הוא משתנה רציף כשננתח את הנתונים נעבור מגבולות מדומים לגבולות אמתיים. אם הנתונים יינתנו בגבולות מדומים נהפוך אותם תמיד לגבולות אמתיים. כיצד עוברים מגבולות מדומים לגבולות אמתיים? לוקחים את רמת הדיוק ומחלקים אותה ב-2 את התוצאה המתקבלת מוסיפים לגבולות העליונים ומפחיתים מהגבולות התחתונים. אם יתנו נתונים בגבולות מדומים אנחנו מוכרחים לעבור לגבולות אמתיים על מנת להמשיך ולנתח, אך אם הנתונים כבר יינתנו בגבולות אמתיים נשאיר אותם כמו שהם.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

להלן התפלגות הגבהים בס"מ של תלמידי כיתה ח'. יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים.

$f(x)$	X
20	130-139
25	140-149
30	150-159
20	160-169
10	170-189

תרגילים:

1. להלן התפלגות של משתנה בהצגה של מחלקות. יש להעביר את הנתונים לגבולות אמתיים:

f(x)	X
542	500-590
32	600-690
154	700-790
254	800-890

2. להלן התפלגות המשקלים בק"ג של קבוצת אנשים מסוימת. יש לרשום את הנתונים בגבולות אמתיים.

משקל בק"ג	מספר אנשים
60-64	18
65-69	24
70-79	52
80-89	19

פרק 4 - סטטיסטיקה תיאורית - סכימה

רקע:

בסטטיסטיקה ישנה צורת רישום מקובלת כדי לרשום סכום של תצפיות:

$$\sum_{i=1}^n X_i$$

נסביר את צורת הרישום על ידי הדוגמה הבאה:

i	X_i
1	5
2	0
3	1
4	3
5	2

תרגילים:

1. בבניין 5 דירות, לכל דירה רשמו את מספר החדרים שיש בדירה (X) ומספר הנפשות החיות בדירה (Y).

מספר דירה	X	Y
1	2	1
2	3	1
3	2	2
4	4	3
5	3	2

חשבו:

$$\sum_{i=1}^3 X_i$$

$$\sum_{i=1}^5 Y_i$$

$$\sum_{i=1}^4 X_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^4 X_i\right)^2$$

$$\sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i$$

$$\sum(X_i) \sum(Y_i)$$

2. נתון לוח ערכי המשתנים x_i ו- y_i כאשר: $i=1,2,\dots,6$

i	1	2	3	4	5	6
x_i	3	2	4	-2	1	4
y_i	2	0	0	1	-5	2

ונתונים הקבועים: $b=5$ $a=2$ חשבו את הנוסחאות הבאות:

א. $\sum_{i=1}^4 y_i$

ב. $\sum_{i=1}^6 a$

ג. $\sum_{i=1}^6 x_i y_i$

ד. $\sum_{i=1}^6 (x_i + y_i)$

ה. $\sum_{i=1}^6 x_i + a$

3. קבע לכל זהות אם היא נכונה:

א. $\sum_{i=1}^n bX_i = b \cdot \sum_{i=1}^n X_i$

ב. $\sum_{i=1}^n a = a \cdot n$

ג. $(\sum_{i=1}^n X_i)^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$

פרק 5 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום מרכזי

רקע:

המטרה במדדי המיקום המרכזי למדוד את מרכז ההתפלגות של התצפיות.

השכיח – MODE

השכיח הוא הערך הנפוץ ביותר בהתפלגות.

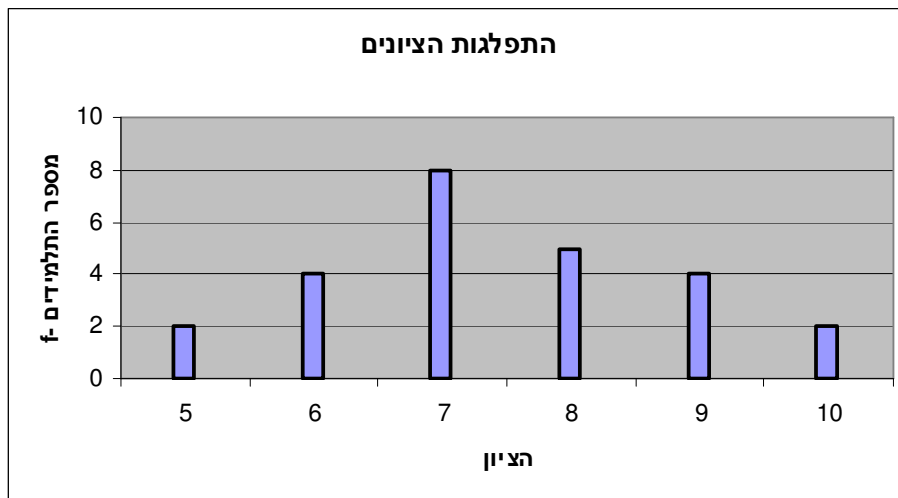
ברשימה : הערך החוזר על עצמו הכי הרבה פעמים .

7 9 4 8 4 10 6

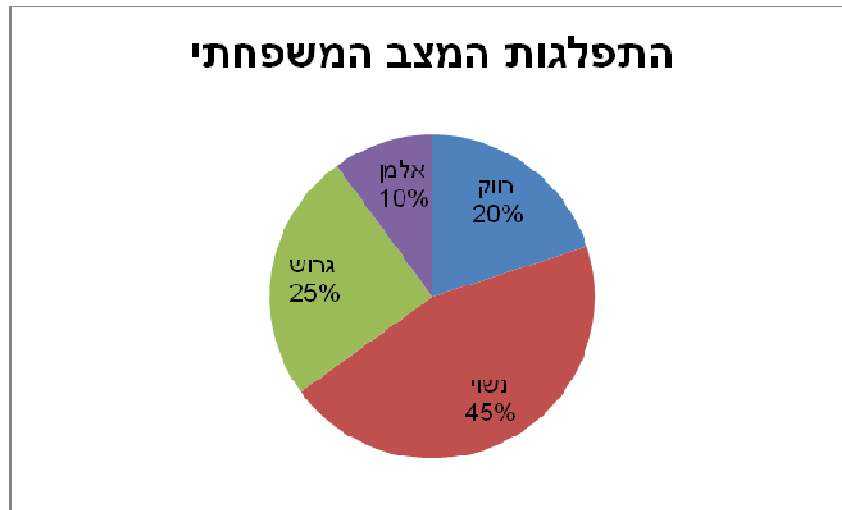
בטבלת שכיחויות בדידה : הערך שהשכיחות שלו היא הגבוהה ביותר.

$f(x)$	# תכניות החיסכון
100	0
75	1
25	2
25	3
25	4

בדיאגרמת מקלות : שיעור ה- X של המקל הגבוה ביותר.



בעוגה: הערך של הפלח הגדול ביותר.

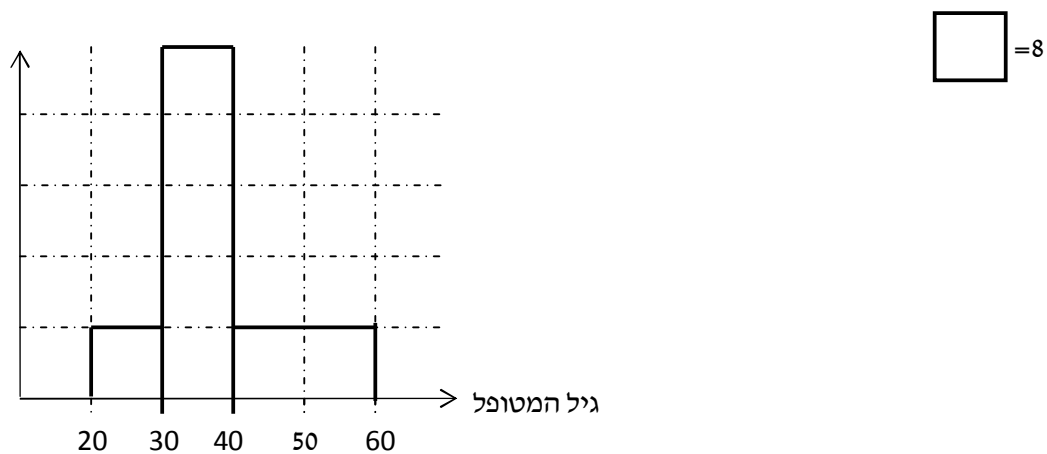


בטבלת שכיחויות במחלקות: אמצע המחלקה עם הצפיפות הגבוהה ביותר. התפלגות הציונים בכיתה.

$f(x)$	X
20	0-60
10	60-70
18	70-80
15	80-90
15	90-100

בהיסטוגרמה: שיעור ה- X של אמצע המחלקה הגבוהה ביותר.

להלן גיל המטופלים של דייר שוורץ בשנים:



כללי: יתכן שהתפלגות יותר משכיח אחד. השכיח הוא מדד הרלבנטי לכל סוגי המשתנים.

MIDRANGE – (טווח)

הממוצע בין התצפית הגבוהה ביותר לתצפית הנמוכה ביותר.

$$MR = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$$

MEDIAN - החציון

החציון הוא ערך שמחצית מהתצפיות קטנות או שוות לו ומחצית מהתצפיות גדולות או שוות לו. ברשימה: נסדר את התצפיות בסדר עולה.

אם יש מספר אי-זוגי של איברים מקומו של החציון יהיה התצפית שמיקומה: $\frac{n+1}{2}$

אם יש מספר זוגי של איברים החציון יהיה הממוצע של האיבר ה- $\frac{n}{2}$ והאיבר ה- $\frac{n}{2}+1$

כלומר שיש מספר אי-זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = X_{\frac{n+1}{2}}$

ויש מספר זוגי של תצפיות החציון יהיה: $md = \frac{X_{\frac{n}{2}} + X_{\frac{n}{2}+1}}{2}$

בטבלת שכיחויות בדידה: נעשה תהליך דומה אך נעזר בשכיחות המצטברת.
דיאגרמת מקלות: נמיר לטבלת שכיחויות בדידה במטרה למצוא את החציון.
בטבלת שכיחויות במחלקות:

שלב א: נימצא את המחלקה החציונית שמיקומה יהיה $\frac{n}{2}$.

שלב ב: נציב בנוסחה הבאה: $Md = L_0 + \frac{\frac{n}{2} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה החציונית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה החציונית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

היסטוגרמה: החציון הוא הערך על ציר ה-X שמחלק את ההיסטוגרמה לשני חלקים שווים בשטח.

כללי: החציון אינו רלבנטי למשתנה מסולם שמי ולא רלבנטי למשתנה איכותי.

הממוצע:

הנו מרכז הכובד של ההתפלגות.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} : \text{ברשימה}$$

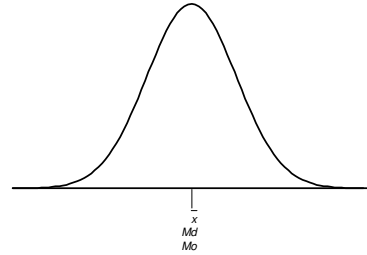
$$\bar{x} = \frac{\sum x \cdot f}{n} : \text{בטבלת שכיחויות}$$

במחלקות: נשתמש באותה נוסחה רק נתייחס לאמצע המחלקה בתור ה X . הממוצע הזה יהיה ממוצע מקורב.

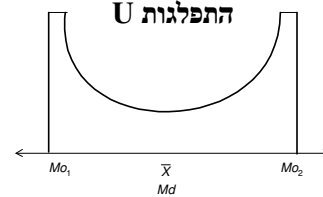
כללי: הממוצע רלבנטי רק למשתנה כמותי.

מדדי המיקום המרכזי בהתפלגויות המיוחדות:

בהתפלגות סימטרית פעמונית כל מדדי המרכז שווים זה לזה:

התפלגות סימטרית

בהתפלגות סימטרית השכיח לא חייב להיות במרכז:

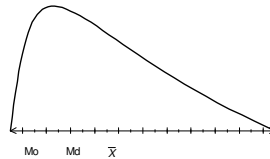
התפלגות U

בהתפלגות אסימטרית

התפלגות
א-סימטרית
שמאלית או
שלילית



התפלגות א-סימטרית
ימנית או חיובית



תרגילים:

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:
7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6
חשב את החציון, השכיח, והממוצע של הציונים.

2. בדקו את מספר החדרים לדירה בבניין בן 5 דירות והתקבל ממוצע 3.8
לגבי 4 דירות נמצא מספר חדרים: 4, 3, 4, 5.
א. כמה חדרים יש בדירה החמישית?
ב. מהו השכיח ומהו החציון?

3. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר מקלטים	מספר משפחות
0	22
1	28
2	18
3	22
4	10

ג. חשב את הממוצע, החציון והשכיח של ההתפלגות.
ד. הסבר ללא חישוב כיצד כל מדד שחישבת בסעיף א' היה משתנה אם חלק מהמשפחות (לא כולן) שלא היה להם עד היום טלוויזיה היו רוכשים מקלט אחד.

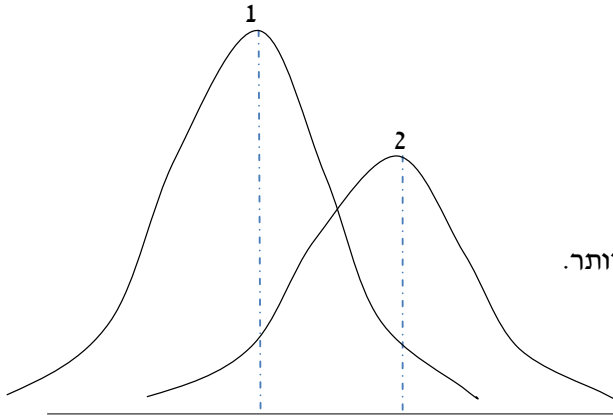
4. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. כמה משפחות יש בישוב?
ב. מה אחוז המשפחות בישוב עם לכל היותר 2 מכוניות?
ג. חשבו את הממוצע, החציון והשכיח.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

5. מורה לימד 2 כיתות, הוא תיאר באותה מערכת צירים את התפלגות הציונים בכל כיתה. בחר בתשובה הנכונה:



- בכיתה 1 השכיח גבוה יותר מכיתה 2.
- בכיתה 2 השכיח גבוה יותר מכיתה 1.
- בשתי הכיתות אותו שכיח.
- לא ניתן לדעת באיזו כיתה השכיח גדול יותר.

6. ביישוב מסוים בדקו לכל משפחה את מספר הטלויזיות שיש לה בבית. ביישוב גרות 200 משפחות. בממוצע יש למשפחה 1.5 טלויזיות.

מספר משפחות	מספר טלויזיות
28	0
62	1
	2
	3

- השלימו את הטבלה.
- מהו השכיח, אמצע טווח והחציון.
- חלק מהמשפחות להן הייתה טלויזיה אחת בדיוק הוציאו את הטלויזיה מביתם, כיצד כל מדד ישתנה (יגדל, יקטן או לא ישתנה) הסבירו ללא חישוב.

7. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

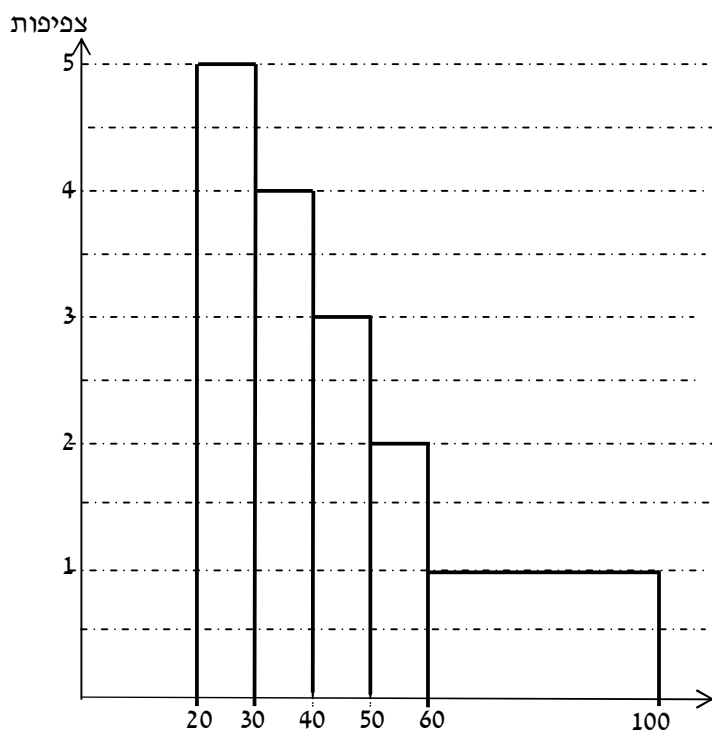
מה הממוצע והחציון של ההתפלגות?

8. להלן התפלגות הגבהים בס"מ בקבוצה מסוימת.

גובה בס"מ	שכיחות
150-160	30
160-170	40
170-175	60
175-180	70
180-190	40

חשב את הממוצע, החציון והשכיח של הגבהים בקבוצה זו.

9. בפקולטה מסוימת בדקו לסטודנטים העובדים בה את השכר לשעת עבודה. להלן התוצאות:



א. מצא את השכיח בהתפלגות.

ב. מצא את החציון בהתפלגות.

ג. הסבירו ללא חישוב האם הממוצע גדול/קטן/שווה לחציון.

ד. הסתבר שיש להוציא מספר תלמידים במחלקה בין 20-30 שקלים כיצד הדבר ישפיע על הממוצע, החציון והשכיח? הסבירו ללא חישוב.

פתרונות:**שאלה 1:**

החציון: 7

השכיח: 6

הממוצע: 6.9

שאלה 2:

א. 3

ב. שכיח: 3,4 חציון: 4

שאלה 3:

א. הממוצע: 1.7

החציון: 1.5

השכיח: 1

ב. הממוצע יגדל ויתר המדדים לא ישתנו.

שאלה 4:

א. 630

ב. 34.13%

ג. שכיח וחציון: 3

ממוצע: 2.952

שאלה 5:

תשובה ב:

שאלה 6:

ב חציון: 2 שכיח: 2 אמצע טווח: 1.5

שאלה 7:

חציון וממוצע: 55

פרק 6 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור : הטווח, השונות וסטיית התקן

רקע:

המטרה : למדוד את הפיזור של הנתונים כלומר כמה הם רחוקים זה מזה ושונים זה מזה.

הטווחותחום RANGE:

ההפרש בין התצפית הגבוהה ביותר לנמוכה ביותר : $R = X_{\max} - X_{\min}$

שונות וסטיית תקן:

השונות היא ממוצע ריבועי הסטיות מהממוצע וסטיית התקן היא שורש של השונות.

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור סדרת נתונים :}$$

דוגמה : נחשב את השונות של סדרת המספרים הבאה : 5,4,9

$$s_x^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2 f}{n} = \frac{\sum x^2 \cdot f}{n} - \bar{x}^2 \quad \text{עבור טבלת שכיחויות :}$$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת בה ממוצע הציונים הוא 7.44

$x^2 \cdot f$	השכיחות-f	הציון X-
50	2	5
144	4	6
392	8	7
320	5	8
324	4	9
200	2	10
1430	סה"כ	

$$s_x^2 = \frac{\sum x^2 f(x)}{n} - \bar{x}^2 = \frac{1430}{25} - 7.44^2 = 1.8464$$

$$s = \sqrt{s_x^2} = \sqrt{1.8464} = 1.3588$$

כשיש מחלקות נעזר באמצע המחלקה כדי לחשב את השונות.

תרגילים:

1. להלן רשימת הציונים של 20 תלמידים שנבחנו במבחן הבנת הנקרא:

7, 6, 8, 9, 10, 6, 4, 5, 8, 7, 6, 7, 6, 8, 9, 6, 7, 8, 5, 6
 חשבו את השונות, סטיית התקן והטווח של הציונים.

2. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ב"הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

א. חשבו סטיית התקן.

ב. חשבו את הטווח של הנתונים.

הקפידו להסביר לגבי כל סעיף מה משמעות התוצאה שקיבלתם!

3. בחברה העוסקת בטלמרקטינג בדקו עבור כל עובד את מספר שנות הוותק שלו. התקבל שממוצע שנות הוותק הוא 4 שנים וסטיית התקן היא שנתיים.

א. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני עובדים עם וותק של 4 שנים להתפלגות?

ב. האם הממוצע יגדל/יקטן/לא ישתנה וסטיית התקן תגדל/תקטן/לא תשנה כאשר יתווספו שני

עובדים אשר אחד עם וותק של 0 שנים והשני עם וותק של 8 שנים להתפלגות?

4. נתונה רשימה של 5 תצפיות, אך רק עבור 4 מהן נרשמו הסטיות שלהן מהממוצע:

2, 3, 2, -1. חשב את השונות של חמש התצפיות.

5. בשכונה בדקו בכל דירה את מספר החדרים לדירה. בשכונה 200 דירות.

מספר חדרים	פרופורציה
1	0.1
2	0.2
3	0.4
4	0.15
5	

א. מה הממוצע של מספר החדרים לשכונה בדירה?

ב. חשבו את סטיית התקן של מספר החדרים לדירה.

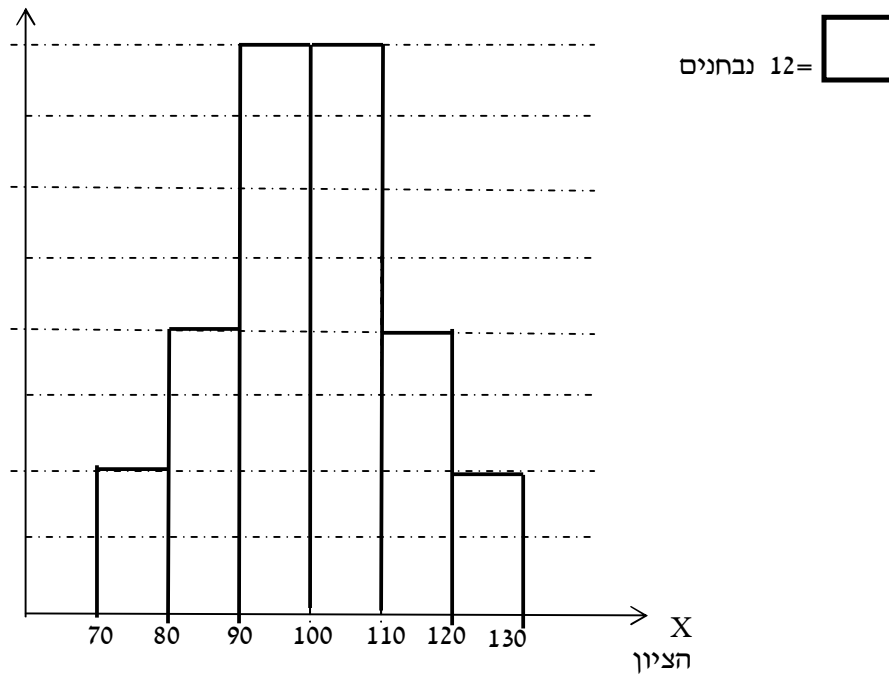
ג. חלק מבעלי הדירות בנות 2 החדרים הפכו את דירתם לדירת חדר. כיצד הדבר ישפיע (יקטין, יגדל, לא ישנה) כל מדד שחישבתם בסעיפים הקודמים.

6. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

מספר מקרים	משקל
10	40-45
20	45-50
30	50-60
20	60-65
10	65-70

מהי סטיית התקן של התפלגות המשקל?

7. להלן התפלגות הציונים במבחן אינטליגנציה:



- א. מה הממוצע ומה החציון של ההתפלגות?
- ב. חשבו את סטיית התקן של הציונים.
- ג. מסתבר שיש להוסיף 20 תצפיות לכל אחת משתי המחלקות 90-100 ו-110-100. כיצד הדבר ישתנה את כל אחד מהמדדים של הסעיפים הקודמים?

פתרונות :**שאלה 1:**

השונות : 2.19

סטיית תקן : 1.48

טווח : 6

שאלה 2:

א. סטיית תקן : 1.106

ב. טווח 4

שאלה 3:

א. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תקטן.

ב. ממוצע לא ישתנה, סטיית התקן תגדל.

שאלה 4:

10.8

שאלה 5:

א. 3.05

ב. 1.16

שאלה 6:

7.73

שאלה 7:

א. 100

ב. 12.96

פרק 7 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי פיזור - טווח בין-רבעוני

רקע:

הטווח הבין-רבעוני נותן את הטווח בין הרבעונים בו נמצאים 50% מהתצפיות המרכזיות.

שלב א: במציאת טווח בין-רבעוני במחלקות:

F	f מספר עובדים (שכירות)	$L_1 - L_0$ רוחב	מספר שנות ותק
56	56	4	0.5 – 4.5
106	50	5	4.5 – 9.5
154	48	2	9.5 – 11.5
190	36	3	11.5 – 14.5
200	10	5	14.5 – 19.5

שלב א: נימצא את הרבעון התחתון (האחוזון ה-25) והרבעון העליון (האחוזון ה-75).

מיקום הרבעון התחתון יהיה: $\frac{n}{4}$

מיקום הרבעון העליון יהיה: $\frac{3n}{4}$

נוסחאות הרבעונים יהיו:

$$Q_1 = L_0 + \frac{\frac{n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0) \quad ; \quad Q_3 = L_0 + \frac{\frac{3n}{4} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0)$$

שלב ב: נחסר את הרבעונים:

$$IQR = Q_3 - Q_1$$

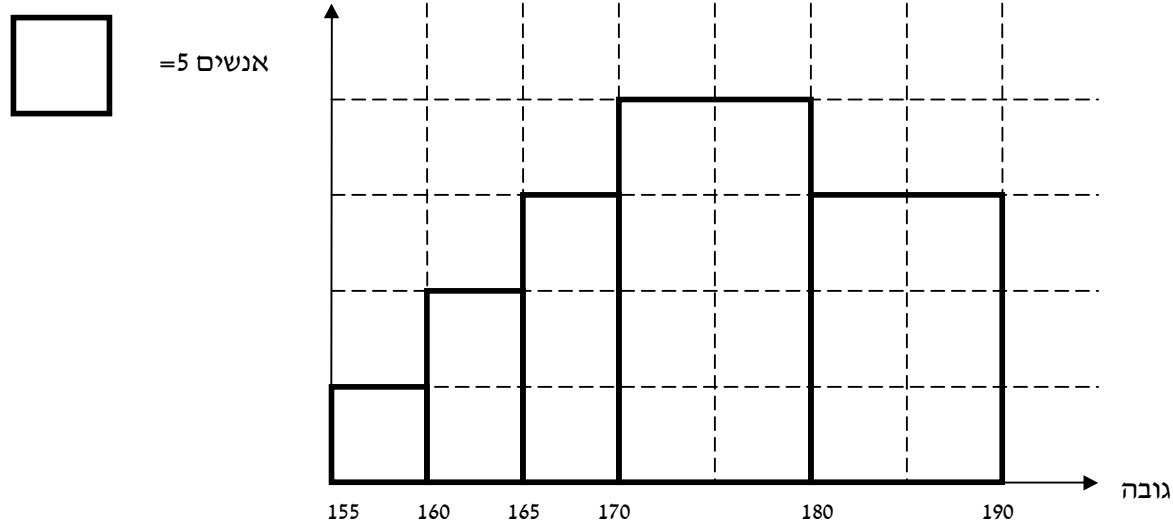
תרגילים:

1. להלן התפלגות המשקל של קבוצה מסוימת בק"ג:

משקל	מספר מקרים
40-45	10
45-50	20
50-60	30
60-65	20
65-70	10

מצא את הטווח הבין-רבעוני.

2. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



מצא את הטווח הבין-רבעוני.

פתרונות:

שאלה 1:

13.75

שאלה 2:

13.33

פרק 8 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - ציון תקן

רקע:

המטרה למדוד איך תצפית ממוקמות יחסית לשאר התצפיות בהתפלגות.

ציון תקן:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S} : \text{הנוסחה לציון תקן של תצפית היא}$$

ציון התקן נותן כמה סטיות תקן סוטה התצפית מהממוצע.

כלומר, ציון התקן מעיד על כמה סטיות תקן התצפית מעל או מתחת לממוצע.

ציון תקן חיובי אומר שהתצפית מעל הממוצע.

ציון תקן שלילי אומר שהתצפית מתחת לממוצע.

ציון תקן אפס אומר שהתצפית בדיוק בממוצע.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

במקום עבודה מסוים ממוצע המשכורות 8 אלפי ₪ עם סטית תקן של 2 אלפי ₪ באותו מקום

עבודה ההשכלה הממוצעת של העובדים הנה 14 שנים עם סטית תקן של 1.5 שנים.

ערן מרוויח במקום עבודה זה 11 אלף ₪ והשכלתו 16 שנים.

מה ערן יותר באופן יחסי משכיל או משתכר ?

תרגילים

1. תלמידי כיתה ח' ניגשו למבחן בלשון ולמבחן במתמטיקה.
להלן התוצאות שהתקבלו:

המקצוע	ממוצע	סטיית תקן
לשון	74	12
מתמטיקה	80	16

עודד קיבל: 68 בלשון ו70 במתמטיקה.

- א. באיזה מקצוע עודד טוב יותר באופן יחסי לשכבה שלו?
ב. איזה ציון עודד צריך לקבל במתמטיקה כדי שיהיה שקול לציונו בלשון?

2. במפעל לייצור מצברים לרכב בדקו במשך 40 ימים את התפוקה היומית (מספר מצברים במאות) ואת מספר הפועלים שעבדו באותו היום.
להלן טבלה המסכמת את האינפורמציה שנאספה על שני המשתנים:

מספר פועלים	תפוקה	
15	48	ממוצע
2	10	סטיית תקן

באחד הימים מתוך כלל הימים שנבדקו התפוקה הייתה 50 מאות מצברים ובאותו היום עבדו 13 פועלים.

מה יותר חריג באותו היום יחסית לשאר הימים שנבדקו נתוני התפוקה או כמות הפועלים?
בחר בתשובה הנכונה.

א. התפוקה.

ב. כמות הפועלים.

ג. חריגים באותה מידה.

ד. חסרים נתונים כדי לדעת זאת.

3. הגובה הממוצע של המתגייסים לצבא הוא 175 סנטימטר עם סטיית תקן 10 סנטימטר. המשקל הממוצע 66 ק"ג עם סטיית תקן 8 ק"ג. ערך התגייס, גובהו 180 ס"מ ומשקלו 59 ק"ג.
א. במה ערך חריג יותר ביחס לשאר המתגייסים- גובהו או משקלו?
ב. כמה ערך אמור לשקול כדי שמשקלו יהיה שקול לגובהו?

פתרונות:

שאלה 1:

א. לשון

ב. 72

שאלה 2:

תשובה ב

שאלה 3:

א. משקל

ב. 70

פרק 9 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים
במחלקות

רקע:

האחוזון (המאון) ה- p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו יש $p\%$ מהנתונים. מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p .

למשל, המאון ה-25 הוא האחוזון ה-25 או הרבעון התחתון: ערך ש-רבע מהתצפיות קטנות

ממנו והשאר גבוהות ממנו. מסומן: $X_{0.25}$

מציאת מאון במחלקות:

שלב א: נימצא את המחלקה הרלבנטית שמיקומה יהיה $\frac{np}{100}$.

$$x_p = L_0 + \frac{\frac{n \cdot p}{100} - F(x_{m-1})}{f(x_m)} \cdot (L_1 - L_0) : \text{שלב ב: נציב בנוסחה הבאה}$$

$F(x_{m-1})$ - שכיחות מצטברת של מחלקה אחת לפני המחלקה הרלבנטית.

$f(x_m)$ - השכיחות של המחלקה הרלבנטית.

L_0 - גבול התחתון של המחלקה.

L_1 - גבול העליון של המחלקה.

אם רוצים לחלץ את אחוז התצפיות שמתחת לערך מסוים נשתמש בנוסחה הבאה:

$$P_x = \left[\frac{(x - L_0)}{(L_1 - L_0)} \cdot f(x_m) + F(x_{m-1}) \right] \cdot \frac{100}{n}$$

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

להלן התפלגות השכר של עובדים בחברה מסוימת:

שכר בש"ח	f(x)
4000-6000	140
6000-10000	128
10000-15000	60
15000-20000	54
20000-40000	18

א. מצאו את המאון ה-40.

ב. מהו אחוז העובדים שמשתכרים מתחת ל-5,000 ₪?

תרגילים:

1. להלן התפלגות השכר (באלפי שקלים) בחברה:

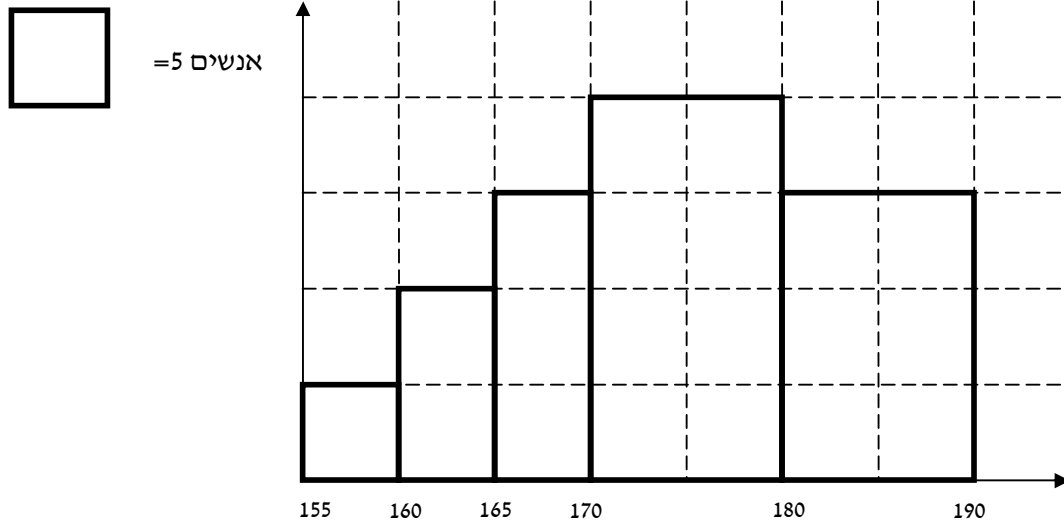
שכר X	שכיחות מצטברת
6-10	48
10-15	100
15-20	120
20-30	132
30-60	136

- א. חשבו את המאון ה-60.
- ב. מהו העשירון העליון?
- ג. 20% מהמשכורות הגבוהות ביותר הן משכורות של הבכירים, מהי המשכורת המינימאלית לבכיר?
- ד. מה אחוז האנשים שמשתכרים מתחת ל-7000 ₪?
- ה. איזה אחוז מהעובדים משתכרים מעל ל-25,000 ₪?
- ו. איזה אחוז מהעובדים משתכרים בין 7000 ל-25,000 ₪?

2. למבחן ניגשו 400 נבחנים. נתון שהעשירון התחתון הוא הציון 60. הרבעון העליון הוא הציון 80. כמו כן ההתפלגות של הציונים היא סימטרית. מלאו את השכיחות החסרות.

ציון - X	$f(X)$
50-60	
60-70	
70-80	
80-90	
90-100	

3. להלן היסטוגרמה המתארת את התפלגות הגבהים בס"מ של קבוצה מסוימת:



א. העשירון התחתון.

ב. האחוזון ה-30.

ג. הגובה ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.

ד. את אחוז התצפיות מתחת לגובה 158 ס"מ.

ה. את אחוז התצפיות מעל לגובה 185 ס"מ.

ו. את אחוז התצפיות בין גובה 170 ס"מ ל-185 ס"מ.

פתרונות:**שאלה 1 :**

- א. 13.23
- ב. 22
- ג. 17.2
- ד. 8.82%
- ה. 7.36%
- ו. 83.82%

שאלה 3:

- א. 162.5
- ב. 170
- ג. 183.33
- ד. 3%
- ה. 15%
- ו. 55%

פרק 10 - סטטיסטיקה תיאורית - מדדי מיקום יחסי - אחוזונים
בטבלת שכיחויות בדידה

רקע:

האחוזון (המאון) p הוא הערך בנתונים המחלק את הנתונים בצורה כזאת שעד אליו כולל יש $p\%$ מהנתונים.

מסמנים את האחוזון ה- p ב- X_p .

חישוב האחוזון מתוך נתונים בטבלת שכיחויות בדידה :

האחוזון הוא הערך שבו בפעם הראשונה השכיחות היחסית המצטברת (באחוזים) גדולה או שווה ל- $p\%$.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

בסניף בנק 250 לקוחות. ספרו לכל לקוח את מספר תכניות החיסכון שלו :

# תכניות החיסכון	$f(x)$	שכיחות מצטברת	שכיחות יחסית מצטברת
0	100		
1	75		
2	25		
3	25		
4	25		

מצא את האחוזון ה-25.

מצא את הערך ש-20% מהמקרים מעליו.

תרגילים:

1. להלן התפלגות של משתנה כלשהו.

$f(x)$	X
10	0
40	1
30	2
15	3
5	4

מצא להתפלגות את:

האחוזון ה-60.

המאון ה-40.

העשירון העליון.

הטווח בין הרבעונים.

2. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה בישוב "הגורן"

מספר מכוניות למשפחה	1	2	3	4	5
שכיחות	65	150	220	140	55

חשבו את:

א. העשירון התחתון.

ב. האחוזון ה-30.

ג. הערך ש-20% מהתצפית גדולות ממנו.

ד. רבעון עליון.

פתרונות:

שאלה 2

א. 1

ב. 2

ג. 4

ד. 4

פרק 11 - סטטיסטיקה תיאורית - טרנספורמציה לינארית

רקע:

מצב שבו מבצעים שינוי מסוג הוספה של קבוע (או החסרה) והכפלה של קבוע (או חילוק) לכל התצפיות : $y = a \cdot x + b$

וכך יושפעו המדדים השונים :

מדדי המרכז :

$$MR_y = a \cdot MR_x + b$$

$$Mo_y = a \cdot Mo_x + b$$

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$

$$Md_y = a \cdot Md_x + b$$

מדדי הפיזור :

$$R_y = |a| R_x$$

$$s_y = |a| s_x$$

$$s_y^2 = a^2 s_x^2$$

מדדי המיקום היחסי :

$$Y_p = a \cdot X_p + b$$

$$Z_y = \frac{a}{|a|} Z_x$$

שלבי העבודה :

1. נזהה שמדובר בטרנספורמציה לינארית (שינוי קבוע לכל התצפיות).
2. נרשום את כלל הטרנספורמציה לפי נתוני השאלה.
3. נפשט את הכלל ונזהה את ערכי a ו b.
4. נציב בנוסחאות שלעיל בהתאם למדדים שנשאלים.

דוגמה: (פתרון בהקלטה)

השכר הממוצע של עובדים הנו 9000 ₪ וטווח 6000 ₪ חשבו את המדדים הללו לאחר שהעלו את כל המשכורות ב-10% ואחר כך קנסו אותם ב100 ₪.

תרגילים:

1. עבור סדרת נתונים התקבל:

$$\bar{X} = 80$$

$$S = 15$$

$$MO = 70$$

הוחלט להכפיל את כל התצפיות פי-4 ולהחסיר מהתוצאה 5. חשב את המדדים הללו לאחר השינוי.

2. בחברה מסוימת השכר הממוצע הוא 40 ש"ח לשעה עם סטיית תקן של 5 ש"ח לשעה. הוחלט להעלות את כל המשכורות ב-10%, אך זה לא סיפק את העובדים ולכן הם קיבלו לאחר מכן תוספת של 2 ש"ח לשעה. מה הממוצע ומהי השונות של השכר לשעה לאחר כל השינויים.

3. במבחן הציון החציוני היה 73, טווח הציונים היה 40 נקודות. והעשירון העליון היה הציון 87. כיוון שהציונים בבחינה היו נמוכים, המורה החליט לתת פקטור של 4 נק' לכל התלמידים. חשבו את המדדים לאחר הפקטור.

4. דגמו מקו ייצור 50 קופסאות של גפרורים. בדקו בכל קופסא בה יש 40 גפרורים את כמות הגפרורים הפגומים. קבלו שבממוצע יש 3 גפרורים פגומים בקופסא. עם סטיית תקן של 1.5 גפרורים. מה יהיה הממוצע ומה תהיה סטיית התקן של מספר התקנים בקופסא?

5. חברת בזק הציעה את החבילה הבאה:
שלושים שקלים דמי מנוי חודשיים קבועים. ובנוסף 10 אגורות לכל דקה של שיחה יוצאת, אדם בדק במשך שנה את דקות השיחות היוצאות שלו, וקיבל שבממוצע בחודש יש לו 600 דקות שיחות יוצאות עם שונות 2500 דקות רבועות, כמו כן בחודש ינואר ציון התקן היה 2. חשבו את המדדים הללו עבור חשבון הטלפון החודשי של אותו אדם בשקלים אם היה משתמש בחבילה המוצעת לו על ידי בזק.

6. הוכח שאם כל התצפיות בהתפלגות עברו טרנספורמציה לינארית:

$$Y_i = a \cdot X_i + b$$

אזי הממוצע והשונות של כלל התצפיות לאחר הטרנספורמציה יהיו בהתאמה:

$$\bar{y} = a \cdot \bar{x} + b$$

$$s_y^2 = a^2 s_x^2$$

פתרונות :**שאלה 2 :**

הממוצע : 46
השונות : 30.25

שאלה 4 :

ממוצע : 37
סטיית תקן : 1.5

שאלה 1 :

הממוצע : 315
סטיית התקן : 60
השכיח : 275

שאלה 3 :

טווח : 40
חציון : 77
עשירון עליון : 91

שאלה 5 :

ממוצע : 90
שונות : 25
ציון תקן : 2

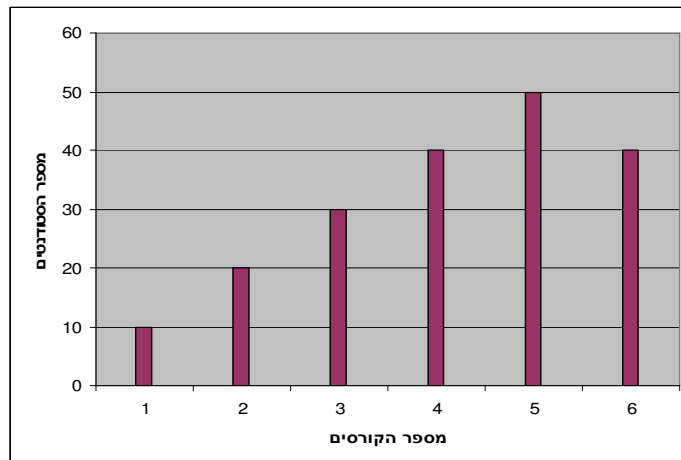
פרק 12 - סטטיסטיקה תיאורית - שאלות מסכמות

1. בדקו עבור 5 תלמידים את המשקל שלהם :

משקל בק"ג	מספר תלמיד
58	1
62	2
48	3
34	4
58	5

- א. מהו המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
 ב. מהו המשקל החציוני, הממוצע והשכיח?
 ג. מה הטווח וסטיית התקן של המשקל?
 ד. לאותם תלמידים חישובו גם את הגובה בס"מ וקיבלו גובה ממוצע של 168 וסטיית תקן 6. במה תלמיד מספר 3 שגובהו 162 יותר חריג במשקל או בגובה?
 ה. הוסיפו עוד תלמיד השוקל 52 ק"ג בדיוק. הסבירו ללא חישוב כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן? (יגדיל יקטין או לא ישנה)

2. בפקולטה להנדסה אספה מזכירות הסטודנטים נתונים לגבי מס' הקורסים שכל סטודנט סיים בשנה הראשונה ללימודיו בשנת 2008.
 להלן התוצאות שהתקבלו :



- א. מה המשתנה הנחקר? האם הוא בדיד או רציף?
 ב. מהי צורת ההתפלגות?
 ג. תאר את הנתונים בטבלת שכיחויות.
 ד. חשב את השכיח, החציון והטווח .

3. להלן התפלגות הציונים בבחינה בלשון שנעשתה עבור תלמידי כיתות ד'. השתתפו במחקר 150 תלמידים.

$$\bar{X} = 7\frac{1}{15}$$

ממוצע הציונים שהתקבל: $\bar{X} = 7\frac{1}{15}$

מספר התלמידים	ציון
12	4
16	5
	6
38	7
	8
14	9
10	10

- א. השלם את השכיחויות החסרות בטבלה.
 ב. חשב את הציון החציוני, השכיח.
 ג. חשב שונות וסטיית תקן להתפלגות הציונים.

4. חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדקה מידת שביעות הרצון של הלקוח מהחברה (1 – שביעות רצון נמוכה ועד 5 שביעות רצון גבוהה) להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר האנשים	שביעות רצון
40	1
60	2
50	3
30	4
20	5

- א. מה אחוז האנשים עם רמת שביעות רצון נמוכה?
 ב. מה המשתנה הנחקר ומאיזה סוג הוא?
 ג. מהי הדרך הגרפית המתאימה ביותר לתיאור הנתונים?
 i. היסטוגרמה.
 ii. דיאגרמת מקלות.
 iii. דיאגרמת עוגה.
 ד. חשבו את המדדים הבאים:
 1. טווח
 2. שכיח
 3. חציון

5. להלן התפלגות מספר שעות העבודה לשבוע של העובדים בחברת "סטאר".
בחברה 200 עובדים.

שכיחות	שכיחות יחסית (פרופורציה)	מספר שעות עבודה
	15%	10-20
	20%	20-30
	30%	30-40
	20%	40-50
		50-60

- א. השלם את הטבלה.
- ב. חשב את החציון, השכיח, והממוצע של התפלגות מס' שעות העבודה בחברה.
- ג. מהי סטיית התקן של מס' שעות העבודה?
- ד. מה העשירון העליון של ההתפלגות?
- ה. איזה אחוז מהעובדים עובדים מעל 45 שעות בשבוע?
- ו. מה ציון התקן של רינה שעובדת 30 שעות בשבוע?
- ז. כיצד ישתנה החציון, הממוצע וסטיית התקן אם מספר שעות העבודה המינימאלי אינו 10 אלא 15? הסבר.

6. חברה סלולארית דגמה 200 אנשים. עבור כל אדם נבדק מס' המסרונים ששלח במשך חודש. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר האנשים	מספר המסרונים
40	0-50
60	50-100
50	100-150
30	150-250
20	250-ומעלה

- א. מה אחוז האנשים ששלחו פחות מ-80 מסרונים בחודש?
 ב. מה אחוז האנשים ששלחו בין 50 ל-120 מסרונים?
 ג. הוחלט להעניק מתנה עבור $\frac{1}{4}$ מהלקוחות שמשלמים במספר הרב ביותר של מסרונים בחודש. החל מאיזה כמות של מסרונים תחולק המתנה?
 ד. ציינו איזה מדד ניתן לחשב ואיזה לא ניתן. אם ניתן חשב:
1. ממוצע
 2. שכיח
 3. חציון
 4. שונות

7. נתנו לקבוצת ילדים לבצע משימה מסוימת ובדקו את התפלגות זמן ביצוע המשימה בדקות. להלן ההתפלגות שהתקבלה:

מספר הילדים	זמן בדקות
20	0.5-3.5
18	3.5-9.5
14	9.5-19.5
8	19.5-29.5

- א. שרטט היסטוגרמה לתיאור התפלגות זמן ביצוע המשימה.
 ב. מתוך ההיסטוגרמה שבנית בסעיף א מהי צורת ההתפלגות?
 ג. חשב את השכיח והחציון של ההתפלגות.
 ד. הסבר, ללא חישובים, האם הזמן הממוצע לביצוע המשימה, קטן או גדול או שווה ביחס לשכיח ולחציון.

8. התפלגות ציוני מבחן אינטיליגנציה היא סימטרית .

מספר הנבחנים	הציון
	50-70
	70-90
	90-100
	100-110
	110-130
	130-150

נתון שהעשירון העליון הוא 130 והרבעון התחתון הוא 90.

נתון שלמבחן נגשו 500 מועמדים.

א. השלימו את הטבלה.

ב. מהו הממוצע והחציון של ההתפלגות?

ג. מהו הציון ש 40% מהתלמידים קיבלו מעליו? באיזה אחוזון מדובר?

ד. אם יוחלט להעלות את כל הציונים ב-10 נקודות . כיצד הדבר ישפיע על הממוצע וסטיית התקן של הציונים?

9. להלן מספר טענות , עבור כל טענה ציין אם היא נכונה או לא נכונה ונמקו .

א. בסדרה שבה כל התצפיות שוות זו לזו השונות הינה 0.

ב. ציון התקן של החציון תמיד יהיה 0.

ג. ציון התקן של האחוזון ה-70 בהתפלגות אסימטרית ימנית (חיובית) תמיד יהיה חיובי.

ד. אם נוסיף תצפיות לסדרה של תצפיות, הדבר בהכרח יגדיל את הממוצע של הסדרה.

ה. בסדרה החציון הינו 80. הוספו שתי תצפיות אחת 79 ואחת 100 לכן החציון יגדל.

ו. אם נוסיף את הערך 4 לכל התצפיות אז סטיית התקן לא תשתנה.

ז. אם נחלק את כל התצפיות בהתפלגות ב-2 אז השונות תקטן פי 2.

ח. אם נגדיל את ממוצע המשכורות של עובדים בחברה אז גם השונות תגדל.

פתרונות:**שאלה 1:**

- א. המשתנה הנחקר כאן הוא משקל תלמיד בק"ג והוא משתנה כמותי רציף.
ב.

$$\bar{X} = 52$$

$$Md = X_{\frac{n+1}{2}} = X_3 = 58$$

השכיח הוא 58

ג. $R = 28$

$s = 10.12$

- ד. הוא חריג יותר בגובה כי שם ציון התקן בערך מוחלט יותר גבוה.
ה. הממוצע לא ישתנה אך סטיית התקן תקטן .

שאלה 2:

- א. מספר הקורסים. בדיד.
ב. התפלגות אסימטרית
שמאלית
ד. השכיח: 5
הטווח: 5

שאלה 3:

- א. 20 תלמידים קיבלו ציון 6 ו-40
תלמידים קיבלו ציון 8.
החציון: 7
השכיח: 8
ג. השונות: 2.533
סטיית התקן: 1.592

שאלה 4:

- א. 20%
ב. שביעות רצון (סדר)
ג. 2
ד. טווח: 4 שכיח: 2 חציון: 2.5
ה. חציון: 4

שאלה 5:

ב. החציון : 35

השכיח: 35

הממוצע: 35

ג. סטיית תקן : 12.65

ד. 53.333

ה. 25%

ו. -0.395

ז. חציון לא ישתנה, ממוצע יגדל סטיית התקן תקטן.

שאלה 6:

א. 38%

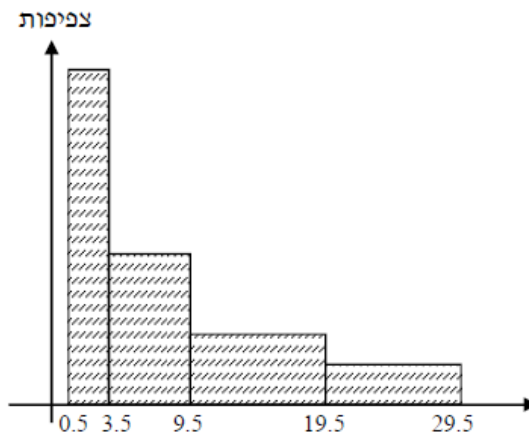
ב. 40%

ג. 150

ד. החציון : 100

שאלה 7:

א.



ב. ההתפלגות היא א-סימטרית ימנית .

ג. שכיח: 2 חציון: 6.83

ד. בהתפלגות א-סימטרית ימנית מתקיים $Mo < Md < \bar{X} < MR$

שאלה 8:

א.

מספר הנבחנים	ציון
50	50-70
75	70-90
125	90-100
125	100-110
75	110-130
50	130-150

ב. 100

ג. 104

ד. הממוצע יעלה ב-10 נקודות אך סטיית התקן לא תשתנה .

שאלה 9:

א. נכון

ב. לא נכון

ג. לא נכון

ד. לא נכון

ה. לא נכון

ו. נכון

ז. לא נכון

ח. לא נכון

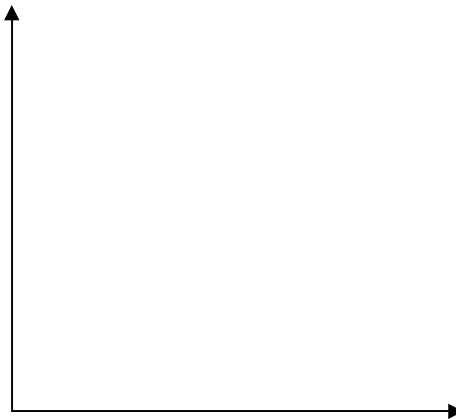
פרק 13 - מדדי קשר - מדד הקשר הלינארי (פירסון)

רקע:

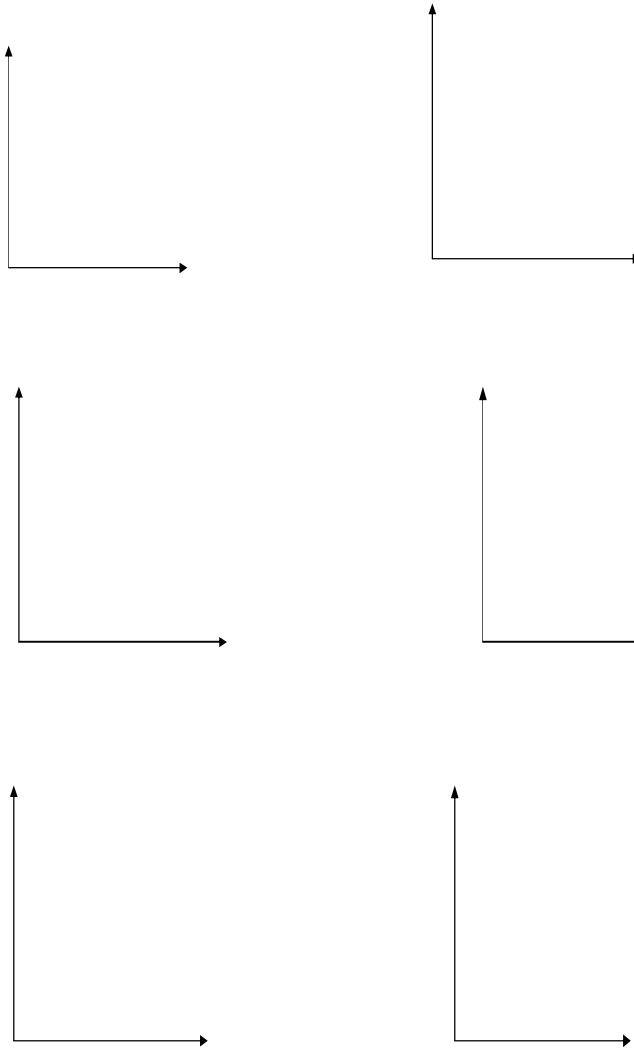
המטרה היא לבדוק האם קיים קשר (קורלציה, מתאם) של קו ישר בין שני משתנים כמותיים. מבחינת סולמות המדידה קשר בין סולמות רווחים ומנה. בדרך כלל, X הוא המשתנה המסביר (הבלתי תלוי) ו Y הוא המשתנה המוסבר (התלוי). למשל, נרצה להסביר כיצד השכלה של אדם הנמדדת בשנות לימוד X מסבירה את ההכנסה שלו Y . במקרה זה שנות ההשכלה זהו המשתנה המסביר (או הבלתי תלוי) ואנחנו מעוניינים לבדוק כיצד שינויים בשנות ההשכלה של אדם יכולים להסביר את השינויים שלו בהכנסה, ולכן רמת ההכנסה זהו המשתנה המוסבר התלוי במשתנה המסביר אותו. בשלב הראשון, נהוג לשרטט דיאגרמת פיזור. זו דיאגרמה שנותנת אינדיקציה ויזואלית על טיב הקשר בין שני המשתנים. למשל, בבניין של 5 דירות בדקו את הנתונים הבאים: X - מס' חדרים בדירה. Y - מס' נפשות הגרות בדירה. להלן התוצאות שהתקבלו:

מס' דירה	X	Y
1	3	2
2	2	2
3	4	3
4	3	3
5	5	4

נשרטט מנתונים הללו דיאגרמת פיזור:



נתבונן בכמה מקרים של דיאגרמות פיזור וננתח אותן :



בשלב השני, מחשבים את מקדם המתאם (מדד הקשר) שבדוק עד כמה קיים קשר לינארי בין שני המשתנים. המדד (ניקרא גם מדד הקשר של פירסון) מכמת את מה שניראה בשלב הראשון רק בעין.

המדד בודק את כיוון הקשר (חיובי או שלילי).

ואת עוצמת הקשר (חלש עד חזק).

מקדם מתאם זה מקבל ערכים בין -1 ל 1 .

מקדם מתאם -1 או 1 אומר שקיים קשר לינארי מוחלט ומלא בין המשתנים שניתן לבטאו על ידי

$$y = bx + a$$

מתאם חיובי מלא (מקדם מתאם 1) אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b יהיה חיובי ואילו

מתאם שלילי מלא אומר שקיים קשר לינארי מלא בו השיפוע b שלילי (מקדם מתאם -1).

מתאם חיובי חלקי אומר שככל שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לעלות בערכו אבל לא קיימת

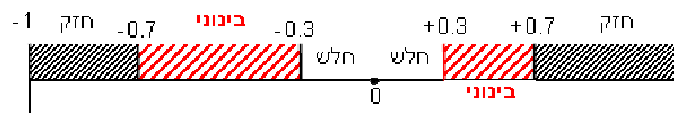
נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y באופן מוחלט ואילו מתאם שלילי חלקי אומר שככל

שמשנתנה אחד עולה לשני יש נטייה לרדת אבל לא קיימת נוסחה לינארית שמקשרת את X ל- Y

באופן מוחלט.

ככל שערך מקדם המתאם קרוב לאפס נאמר שעוצמת הקשר חלשה יותר וככל שמקדם המתאם

רחוק מהאפס נאמר שעוצמת הקשר חזקה יותר.



מקדם המתאם יסומן באות r .

כדי לחשב את מקדם המתאם, יש לחשב את סטיות התקן של כל משתנה ואת השונות המשותפת.

$$COV(x, y) = \frac{\sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{n} = \frac{\sum xy}{n} - \bar{x} \cdot \bar{y} : \text{שונות משותפת}$$

$$s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} - \bar{x}^2 : \text{שונות של המשתנה X}$$

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{n} - \bar{y}^2 : \text{שונות המשתנה Y}$$

$$r_{xy} = \frac{COV(x, y)}{s_x \cdot s_y} : \text{מקדם המתאם הלינארי}$$

תרגילים:

1. להלן נתונים לגבי שישה תלמידים שנגשו למבחן. בדקו לגבי כל תלמיד את הציון שלו בסוף הקורס וכמו כן את מספר החיסורים שלו מהקורס.

מספר חיסורים	ציון
2	80
1	90
0	90
2	70
3	70
4	50

- א. שרטט דיאגרמת פיזור לנתונים. מה ניתן להסיק מהדיאגרמה על טיב הקשר בין מספר החיסורים של תלמיד לציונו? מיהו המשתנה הבלתי תלוי ומיהו המשתנה התלוי?
 ב. חשב את מדד הקשר של פירסון. האם התוצאה מתיישבת עם תשובתך לסעיף א?
 ג. הסבר ללא חישוב כיצד מקדם המתאם היה משתנה אם היה מתווסף תלמיד שהחסיר 4 פעמים וקיבל ציון 80?

2. במחקר רפואי רצו לבדוק האם קיים קשר בין רמת ההורמון X בדם החולה לרמת ההורמון Y שלו. לצורך כך מדדו את רמת ההורמונים ההלו עבור חמישה חולים. להלן התוצאות שהתקבלו:

x	y
10	12
14	15
15	15
18	17
20	21

- א. מה הממוצע של כל רמת הורמון?
 ב. מהו מקדם המתאם בין ההורמונים? ומה משמעות התוצאה?

3. נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \quad \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y . מיהו המשתנה התלוי?

ב. מה המשמעות של התוצאה שקיבלת בסעיף א?

4. נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i^2 = 2080 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i^2 = 2960$$

$$\sum_{i=1}^{20} X_i Y_i = 2464$$

חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y .

5. במוסד אקדמי ציון ההתאמה מחושב כך: מכפילים את הציון הממוצע בבגרות ב-3 ומפחיתים 2 נקודות. ידוע שעבור 40 מועמדים סטיית התקן של ממוצע הציון בבגרות הייתה 2. מה מקדם המתאם בין ציון ההתאמה לציון הממוצע בבגרות שלהם?

6. להלן רשימת טענות, לגבי כל טענה קבע נכון/לא נכון ונמק!

א. מתווך דירות המיר מחירי דירות מדולר לשקל. נניח שדולר אחד הוא 3.5 ₪. אם מתווך הדירות יחשב את מדד הקשר של פירסון בין מחיר הדירה בשקלים למחיר הדירה בדולרים הוא יקבל 1.

ב. לסדרה של נתונים התקבל $\bar{X} = \bar{Y} = 6$ $S_x = S_y = 1$ לכן מדד הקשר של פירסון יהיה 1.

ג. אם השונות המשותפת של X ושל Y הינה 0 אז בהכרח גם מקדם המתאם של פירסון יהיה 0.

שאלות אמריקאיות:

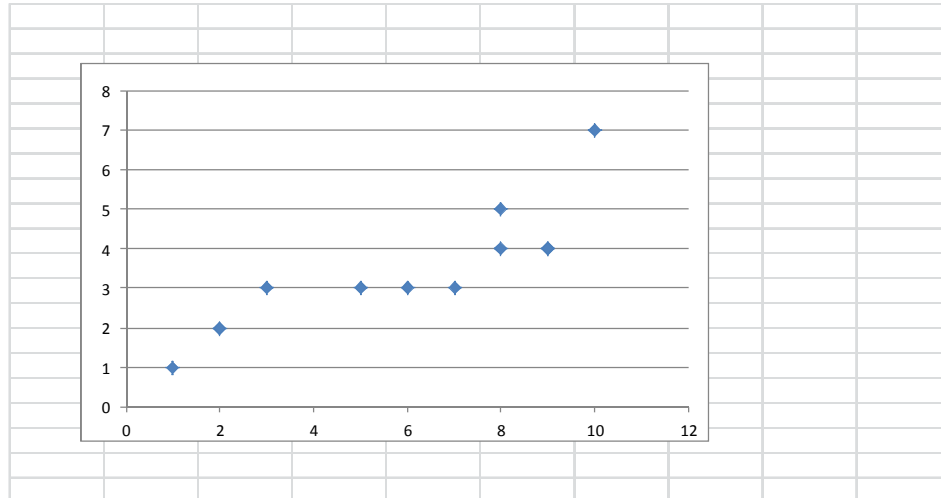
7. נמצא שקיים מקדם מתאם שלילי בין הציון בעברית לציון בחשבון בבחינה לכן :

- א. הדבר מעיד שהציונים בכתה היו שליליים.
- ב. ככל שהציון של תלמיד יורד בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
- ג. ככל שהציון של תלמיד עולה בחשבון יש לו נטייה לרדת בעברית.
- ד. אף אחת מהתשובות לא נכונה.

8. נלקחו 20 מוצרים וניבדק ביום מסוים המחיר שלהם בדולרים והמחיר שלהם בש"ח (באותו היום ערך הדולר היה - 4.2 ₪) מהו מקדם המתאם בין המחיר בדולר למחיר בש"ח?

- א. 1
- ב. 0
- ג. 4.2
- ד. לא ניתן לדעת.

9. להלן דיאגרמת פיזור :



מה יהיה מקדם המתאם בין שני המשתנים?

- א. 1
- ב. 0.85
- ג. 0.15
- ד. 0

פתרונות:**שאלה 1:**

א. בהקלטה

ב. -0.9325 **שאלה 2:**א. $\bar{y} = 16$ $\bar{x} = 15.4$ ב. $r_{xy} = 0.96$ **שאלה 3:**

א : 0.8

שאלה 4:

0.8

שאלה 5:

1

שאלה 6:

א. נכון

ב. לא נכון

ג. נכון

שאלה 7:

התשובה : ג

שאלה 8:

התשובה : א

שאלה 9:

התשובה : ב

פתרונות :**שאלה 1:**

- א. בין הציון המילולי הישן לחדש 1:
בין הציון המילולי החדש לכמותי 0.9:
- ב. בין W לציון המילולי : -1
בין W לציון הכמותי : -0.9

שאלה 2:

0.7

שאלה 3:

התשובה : ב

שאלה 4:

התשובה : ב

פרק 14 - מדדי קשר - רגרסיה ליניארית

רקע:

במידה וקיים קשר חזק בין שני המשתנים הכמותיים נהוג לבצע ניבויי. לבנות קו ניבויים הנקרא גם קו רגרסיה המנבא משתנה אחד על סמך האחר.

מדובר בקו שמנבא את Y על סמך X . השיטה למציאת הקו הנ"ל נקראת שיטת הריבועים הפחותים והקו המתקבל נקרא קו הרגרסיה או קו הניבויים או קו הריבועים הפחותים.

a - בעצם נותן את ערך Y כאשר X הנו אפס על גבי קו הניבויים. הוא ניקרא החותך של הקו.

b - הוא שיפוע הקו נותן בכמה בעצם Y משתנה כאשר X גדל ביחידה אחת על גבי קו הניבויים. להלן המשוואות למציאת הפרמטרים של קו הרגרסיה:

$$\tilde{Y} = bX + a$$

$$b = r \frac{S_y}{S_x}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

אם נרצה לבנות קו ניבויים לניבוי X על סמך Y נצטרך לעדכן את הנוסחאות בהתאם.

תרגילים:

1. נסמן ב- X את ההכנסה של משפחה באלפי ₪. נסמן ב- Y את ההוצאות של משפחה באלפי ₪. נלקחו 20 משפחות והתקבלו התוצאות הבאות:

$$\sum_{i=1}^{20} Y_i = 200 \quad \sum_{i=1}^{20} X_i = 240$$

$$\sum_{i=1}^{20} (Y_i - \bar{Y})^2 = 76 \quad \sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})^2 = 76$$

$$\sum_{i=1}^{20} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 60.8$$

- א. חשב את מדד הקשר הלינארי בין X ל- Y . מיהו המשתנה התלוי?
 ב. מצא את קו הרגרסיה לניבוי ההוצאה של משפחה על סמך הכנסה שלה. הסבר את משמעות הפרמטרים של קו הרגרסיה.
 ג. משפחת כהן הכניסה 15,000 ₪, מה ההוצאה הצפויה שלה?

2. נסמן ב- X את ההשכלה של אדם בשנות למוד. נסמן ב- Y את הכנסתו באלפי ₪. במחקר התקבלו התוצאות הבאות:

$$S_y = 5 \quad S_x = 2$$

$$\bar{Y} = 8 \quad \bar{X} = 14$$

$$COV(X, Y) = 7.5$$

- א. חשב את מדד הקשר של פירסון בין ההשכלה להכנסה.
 ב. מה ההכנסה הצפויה לאדם שהשכלתו 12 שנים?
 ג. מה ההשכלה הצפויה לאדם שהכנסתו 10,000 ₪?
3. חוקר רצה לחקור את הקשר הקווי שבין הציון המבחן בסטטיסטיקה לבין מספר שעות ההכנה של הסטודנטים למבחן. במדגם של 100 סטודנטים שנבחנו בקורס נרשמו התוצאות הבאות: הציון הממוצע של הסטודנטים היה 65 עם סטיית תקן של 27. מספר שעות ההכנה הממוצע היה 30 עם סטיית תקן של 18. מקדם המתאם בין הציון לשעות ההכנה היה 0.8.
- א. על פי משוואת הרגרסיה שעת הכנה נוספת משפרת את ציון המבחן?
 ב. על פי משוואת הרגרסיה תלמיד שייגש למבחן ללא שעות הכנה כלל יקבל ציון?
 ג. מהו קו הרגרסייה לניבוי הציון לפי שעות ההכנה?
4. נתונים 2 משתנים Y, X . כמו כן נתון: X ממוצע = 1.5, שונות X = שונות Y = 4, וכן שקו הרגרסיה של Y על בסיס X הינו $Y = -0.2X + 0.5$. חשב מהו מקדם המתאם בין X ל- Y ?

פתרונות:**שאלה 1:**

א. 0.8

ב. $\tilde{Y} = 0.8X + 0.4$

ג. 12.4

שאלה 2:

א. 0.75

ב. 4.25 אלפי ש"ח

ג. 14.6 שנים

שאלה 3:

א. 1.2

ב. 29

ג. $y = 1.2x + 29$

שאלה 4:

-0.2

פרק 15 - בעיות בסיסיות בהסתברות

רקע :

ניסוי מקרי : תהליך לו כמה תוצאות אפשריות. התוצאה המתקבלת נודעת רק לאחר ביצוע התהליך.
למשל : תוצאה בהטלת קובייה, מזג האוויר בעוד שבועיים.

מרחב מדגם : כלל התוצאות האפשריות בניסוי המקרי :

בהטלת קובייה : $\{1,2,3,4,5,6\}$.
מזג האוויר בעוד שבועיים : { נאה, שרבי, מושלג, גשום, מעונן חלקית, אביך }

מאורע : תת קבוצה מתוך מרחב במדגם. מסומן באותיות : A, B, C, \dots

בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 : $A = \{5, 6\}$
לקבל תוצאה זוגית : $B = \{2, 4, 6\}$

גודל מרחב המדגם : מספר התוצאות האפשריות במרחב המדגם :

בהטלת הקובייה : $|\Omega| = 6$

גודל המאורע : מספר התוצאות האפשריות במאורע עצמו.

בהטלת הקובייה : $|A| = 2$ $|B| = 3$

מאורע משלים : מאורע המכיל את כל התוצאות האפשריות במרחב המדגם פרט לתוצאות במאורע אותו הוא משלים :

בהטלת הקובייה : $\bar{A} = \{1, 2, 3, 4\}$ $\bar{B} = \{1, 3, 5\}$

מרחב מדגם אחיד (סימטרי) : מרחב מדגם בו לכל התוצאות במרחב המדגם יש את אותה עדיפות, אותה סבירות למשל, קובייה הוגנת, אך לא כמו מזג האוויר בשבוע הבא.

הסתברות במרחב מדגם אחיד :

במרחב מדגם אחיד הסיכוי למאורע יהיה : $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

למשל, מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל לפחות 5? $p(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{2}{6}$

מה הסיכוי בהטלת קובייה לקבל תוצאה זוגית? $p(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$

הסתברות במרחב לא אחיד :

יחושב לפי השכיחות היחסית : $\frac{f}{n}$

להלן התפלגות הציונים בכיתה מסוימת :

הציון X-	מספר התלמידים – השכיחות f-
5	2
6	4
7	8
8	5
9	4
10	2

א. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה קיבל את הציון 8? $\frac{f}{n} = \frac{5}{25} = 0.2$

ב. מה ההסתברות שתלמיד אקראי שניבחר בכיתה יכשל?

$$\frac{f}{n} = \frac{2}{25} = 0.08$$

הסתברות למאורע משלים :

$$p(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

למשל, בדוגמה הקודמת הסיכוי לעבור את הבחינה יכול להיות מחושב לפי הסיכוי להיכשל :

$$p(A) = 1 - \frac{2}{25} = \frac{23}{25}$$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות.
- הרכב את כל המילים האפשריות.
 - רשום את המקרים למאורע:
 - A - במילה נמצאת האות E.
 - B - במילה האותיות שונות.
 - ג. רשום את המקרים למאורע \bar{A} .
2. מטילים זוג קוביות.
- רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?
 - רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:
 - A - סכום התוצאות 7.
 - C - מכפלת התוצאות 12.
 - ג. חשב את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיף ב.
3. בוחרים באקראי ספרה מבין הספרות 0-9.
- מה ההסתברות שהספרה שנבחרה גדולה מ-5?
 - מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא לכל היותר 3?
 - ג. מה ההסתברות שהספרה שנבחרה היא אי זוגית?
4. להלן התפלגות מספר מקלטי הטלוויזיה שנספרו עבור כל משפחה בישוב מסוים:

מספר משפחות	מספר מקלטים
22	0
28	1
18	2
22	3
10	4

- נבחרה משפחה באקראי מהישוב.
- מה ההסתברות שאין מקלטים למשפחה?
 - מה ההסתברות שיש מקלטים למשפחה?
 - ג. מה ההסתברות שיש לפחות 3 מקלטים למשפחה?

5. להלן התפלגות מספר המכוניות למשפחה ביישוב "עדן":

מספר מכוניות	מספר משפחות
0	20
1	40
2	100
3	30
4	10

נבחרה משפחה אקראית מן הישוב.

א. מה ההסתברות שאין לה מכוניות?

ב. מה ההסתברות שבבעלות המשפחה לפחות 3 מכוניות?

ג. מה הסיכוי שבבעלותה פחות מ-3 מכוניות?

6. מטילים מטבע רגיל 3 פעמים. בצד אחד של המטבע מוטבע עץ ובצד השני פלי.

א. רשום את מרחב המדגם של הניסוי. האם המרחב מדגם הוא אחיד?

ב. רשום את כל האפשרויות למאורעות הבאים:

A- התקבל פעם אחת עץ.

D- התקבל לפחות פלי אחד.

ג. מהו המאורע המשלים ל-D.

ד. חשבו את הסיכויים למאורעות שהוגדרו בסעיפים ב- ג.

פתרונות:**שאלה 2**

ג. הסיכוי ל-A: $\frac{1}{6}$

הסיכוי ל-B: $\frac{1}{9}$

שאלה 3

א. 0.4

ב. 0.4

ג. 0.5

שאלה 4

א. 0.22

ב. 0.78

ג. 0.32

פרק 16 - פעולות בין מאורעות (חיתוך ואיחוד), מאורעות זרים ומכילים

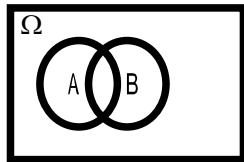
רקע:

פעולת חיתוך :

נותנת את המשותף בין המאורעות הנחתכים, חיתוך בין המאורע A למאורע B יסומן כך :

$$A \cap B$$

מדובר בתוצאות שנמצאות ב-A וגם ב-B.



$A = \{5, 6\}$: בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 :

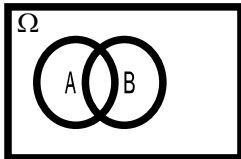
$B = \{2, 4, 6\}$: לקבל תוצאה זוגית :

$$A \cap B = \{6\}$$

פעולת איחוד :

נותנת את כל האפשרויות שנמצאות לפחות באחת מהמאורעות. הסימון הוא : $A \cup B$ נותנת את

אשר נימצא ב-A או ב-B. כלומר, לפחות אחד מהמאורעות קורה.



$A = \{5, 6\}$: בהטלת קובייה, למשל, לקבל לפחות 5 :

$B = \{2, 4, 6\}$: לקבל תוצאה זוגית :

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

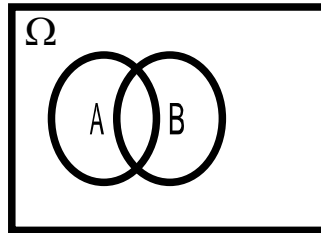
דוגמה (הפתרון נמצא בהקלטה)

סטודנט ניגש בסמסטר לשני מבחנים. מבחן בסטטיסטיקה ומבחן בכלכלה. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הוא 0.9. ההסתברות שלו לעבור את המבחן בכלכלה הוא 0.8. ההסתברות לעבור את המבחן בסטטיסטיקה ובכלכלה היא 0.75.

- א. מה ההסתברות שלו לעבור את המבחן בסטטיסטיקה בלבד?
 ב. מה ההסתברות שלו להיכשל בשני המבחנים?
 ג. מה ההסתברות לעבור לפחות מבחן אחד?

נוסחת החיבור לשני מאורעות :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

חוקי דה מורגן לשני מאורעות:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cup \bar{B})$$

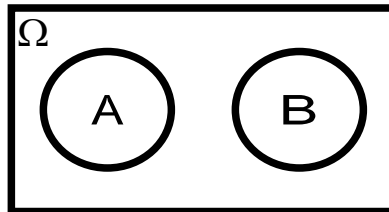
$$P(A \cup B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$$

שיטת ריבוע הקסם:

השיטה רלבנטית רק אם יש שני מאורעות במקביל בדומה לתרגיל הקודם:

	\bar{A}	A	
B	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(A \cap B)$	$P(B)$
\bar{B}	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
	$P(\bar{A})$	$P(A)$	1

מאורעות זרים: מאורעות שאין להם מהמשותף: לא יכולים להתרחש בו זמנית.



$$A \cap B = \{ \}$$

$$P(A \cap B) = 0$$

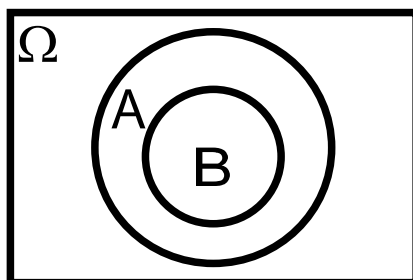
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

למשל, בהטלת קובייה

$$A = \{5, 6\} \quad : \text{לקבל לפחות 5}$$

$$B = \{3\} \quad : \text{לקבל 3}$$

$$A \cap B = \{ \}$$

מאורעות מכילים :

מאורע A מכיל את מאורע B כל התוצאות שנמצאות ב-B מוכלות בתוך המאורע-A.

קשר זה מסומן באופן הבא: $B \subset A$

$$A \cap B = B$$

$$A \cup B = A$$

$$P(A \cap B) = P(B)$$

$$P(A \cup B) = P(A)$$

למשל:

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{2, 4\}$$

תרגילים:

1. מהאותיות E, F ו-G יוצרים מילה בת 2 אותיות לא בהכרח בת משמעות. נגדיר את המאורעות הבאים :
- E - במילה נמצאת האות E.
- F - במילה אותיות שונות.
- א. רשום את כל האפשרויות לחיתוך A עם B.
- ב. רשום את כל האפשרויות לאיחוד של A עם B.
2. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה. נגדיר את המאורעות הבאים :
- A - לעבור את המבחן בסטטיסטיקה.
- B - לעבור את המבחן בכלכלה.
- העזר בפעולות חיתוך, איחוד ומשלים בלבד כדי להגדיר את המאורעות הבאים וסמן בדיאגרמת וון את השטח המתאים :
- א. התלמיד עבר רק את המבחן בכלכלה.
- ב. התלמיד עבר רק את המבחן בסטטיסטיקה.
- ג. התלמיד עבר את שני המבחנים.
- ד. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד.
- ה. התלמיד נכשל בשני המבחנים.
- ו. התלמיד נכשל בכלכלה.
3. נתבקשתם לבחור ספרה באקראי. נגדיר את A להיות הספרה שנבחרה היא זוגית. נגדיר את B להיות הספרה שנבחרה קטנה מ-5.
- א. רשמו את כל התוצאות למאורעות הבאים :
- $A =$
- $B =$
- $\bar{B} =$
- $A \cap B =$
- $A \cup B =$
- ב. חשבו את ההסתברויות לכל המאורעות מהסעיף הקודם.

4. נסמן ב- Ω את מרחב המדגם וב- ϕ קבוצה ריקה.

נתון כי A הינו מאורע בתוך מרחב המדגם.

להלן מוגדרים מאורעות שפתרונם הוא Ω או ϕ או A .

קבע עבור כל מאורע מה הפתרון שלו.

$$\begin{aligned}
 &= \\
 &A \\
 &A \cap \phi \\
 &A \cup \phi \\
 &A \cap \Omega \\
 &A \cup \Omega \\
 &A \cap \bar{A} \\
 &\bar{\phi} \\
 &A \cup \bar{A}
 \end{aligned}$$

5. הוגדרו המאורעות הבאים:

A = אדם שגובהו מעל 1.7 מטר

B = אדם גובהו מתחת ל-1.8 מטר

קבע את גובהם של האנשים הבאים:

א. $A \cap B$

ב. $A \cup B$

ג. $\bar{A} \cap B$

ד. $\bar{A} \cup \bar{B}$

ה. \bar{A}

6. נגדיר את המאורעות הבאים :
- A - אדם דובר עברית.
 B - אדם דובר ערבית.
 C - אדם דובר אנגלית.
- השתמש בפעולות איחוד, חיתוך והשלמה לתיאור המאורעות הבאים :
- א. אדם דובר את כל שלוש השפות.
 ב. אדם דובר רק עברית.
 ג. אדם דובר לפחות שפה אחת מתוך השפות הללו.
 ד. אדם אינו דובר אנגלית.
 ה. קבוצת התלמידים דוברי 2 שפות בדיוק (מהשפות הנ"ל).
7. שתי מפלגות רצות לכנסת הבאה. מפלגת "גדר" תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.08. מפלגת עתיד תעבור את אחוז החסימה בהסתברות של 0.20. בהסתברות של 76% שתי המפלגות לא תעבורנה את אחוז החסימה.
- א. מה ההסתברות שלפחות אחת מהמפלגות תעבור את אחוז החסימה?
 ב. מה ההסתברות ששתי המפלגות תעבורנה את אחוז החסימה?
 ג. מה ההסתברות שרק מפלגות "עתיד" תעבור את אחוז החסימה?
8. במקום עבודה מסוים 40% מהעובדים הם גברים. כמו כן 20% מהעובדים הם אקדמאים. 10% מהעובדים הינן נשים אקדמאיות.
- א. איזה אחוז מהעובדים הם גברים אקדמאיים?
 ב. איזה אחוז מהעובדים הם גברים או אקדמאיים?
 ג. איזה אחוז מהעובדים הם נשים לא אקדמאיות?
9. הסיכוי של מניה A לעלות הנו 0.5 ביום מסוים והסיכוי של מניה B לעלות ביום מסוים הנו 0.4. בסיכוי של 0.7 לפחות אחת מהמניות תעלה ביום מסוים. חשב את ההסתברויות הבאות לגבי שתי המניות הללו ביום מסוים :
- א. ששתי המניות תעלנה.
 ב. שאף אחת מהמניות לא תעלנה.
 ג. שמניה A בלבד תעלה.

10. מטילים זוג קוביות אדומה ושחורה. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - בקובייה האדומה התקבלה התוצאה 4 ובשחורה 2.

B - סכום התוצאות משתי הקוביות 6.

C - מכפלת התוצאות בשתי הקוביות 10.

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. האם המאורע B מכיל את המאורע A?

ג. האם A ו-C מאורעות זרים?

ד. האם A ו-C מאורעות משלימים?

11. עבור המאורעות A ו-B ידועות ההסתברויות הבאות:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0.1 \quad p(B) = 0.3 \quad p(A) = 0.6$$

א. האם A ו-B מאורעות זרים?

ב. חשב את $p(\bar{A} \cap B)$

12. מטבע הוטל פעמיים. נגדיר את המאורעות הבאים:

A - קיבלנו עץ בהטלה הראשונה.

B - קיבלנו לפחות עץ אחד בשתי ההטלות.

איזו טענה נכונה?

א. A ו-B מאורעות זרים.

ב. A ו-B מאורעות משלימים.

ג. B מכיל את A.

ד. A מכיל את B.

13. בהגרלה חולקו 100 כרטיסים על 3 מהם רשום חופשה ועל 2 מהם רשום מחשב שאר

הכרטיסים ריקים. אדם קיבל כרטיס אקראי.

א. מה הסיכוי לזכות בחופשה או במחשב? האם המאורעות הללו זרים?

ב. מה ההסתברות לא לזכות בפרס?

.14

$$P(A) = 0.3$$

$$P(B) = 0.25$$

$$P(A \cup B) = 0.49$$

א. חשב את הסיכוי ל- $P(A \cap B)$

ב. האם A ו- B מאורעות זרים?

ג. מה ההסתברות שרק A יקרה או רק B יקרה?

15. A ו- B מאורעות זרים. נתון ש: $2 \cdot P(B \cap \bar{A}) = P(A \cap \bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$

מה הסיכוי למאורע A ומה ההסתברות למאורע B?

16. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות:

א. $A \cap B = B \cap A$

ב. $\overline{A \cup B} = A \cap B$

ג. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$

ד. $\overline{A \cap B \cap C} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

17. נתון ש A ו- B מאורעות במרחב מדגם. נתון ש $P(A) = 0.3$ ו- $P(B) = 0.2$

א. האם יתכן ש- $p(A \cup B) = 0.4$?

ב. האם יתכן ש- $p(A \cup B) = 0.6$?

ג. אם A ו- B זרים מה הסיכוי $p(A \cup B)$?

ד. אם A מכיל את B מה הסיכוי $p(A \cup B)$?

18. מתוך אזרחי המדינה הבוגרים ל- 30% חשבון בבנק הפועלים. ל-28% חשבון בבנק לאומי ול-15% חשבון בבנק מזרחי. כמו כן נתון כי 6% מחזיקים חשבון בבנק לאומי ובבנק הפועלים. ל-5% חשבון בבנק פועלים ומזרחי. ול-4% חשבון בבנק לאומי ומזרחי. כמו כן ל-1% מהאוכלוסייה הבוגרת חשבון בנק בשלושת הבנקים יחד.
- א. מה אחוז האזרחים להם חשבון בבנק לאומי בלבד?
- ב. מה ההסתברות שאזרח כלשהו יחזיק חשבון בבנק פועלים ולאומי אבל לא בבנק מזרחי?
- ג. מה ההסתברות שלאזרח יהיה חשבון בפועלים או במזרחי אבל לא בבנק לאומי?
- ד. מה אחוז האזרחים שיש להם חשבון בנק אחד בלבד?
- ה. מה אחוז האזרחים שיש להם בדיוק חשבון בשני בנקים בלבד?
- ו. מה ההסתברות שלאזרח בוגר אין חשבון בנק באף אחד מהבנקים הללו?
- ז. לאיזה אחוז מהאזרחים יש חשבון בנק בלפחות אחד מהבנקים הללו?

19. חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21. הנתונים שהתקבלו היו: 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 13% לא מחזיקים באף אחד משלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. מה אחוז מחזיקי שלושת כרטיס האשראי גם יחד?
- ב. מה אחוז מחזיקי ישראכרט וויזה אך לא את אמריקן אקספרס?
- ג. מה אחוז מחזיקי כרטיס אחד בלבד?

20. הוכח: $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

21. A ו-B מאורעות במרחב המדגם האם נכון לומר שהסיכוי שיתרחש בדיוק מאורע אחד

הוא: $P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$

פתרונות:שאלה 7

א. 0.24

ב. 0.04

ג. 0.16

שאלה 8

א. 10%

ב. 50%

ג. 50%

שאלה 9

א. 0.2

ב. 0.3

ג. 0.3

שאלה 10

א. לא.

ב. כן.

ג. כן.

ד. לא.

שאלה 11

א. כן

ב. 0.3

שאלה 12

התשובה הנכונה ג

שאלה 13

א. 0.05

ב. 0.95

שאלה 14

א. 0.06

ב. לא זרים

ג. 0.43

שאלה 18

א. 0.19

ב. 0.05

ג. 0.31

ד. 0.46

ה. 0.12

ו. 0.41

ז. 0.59

פרק 17 - קומבינטוריקה - כלל המכפלה

רקע:

כלל המכפלה:

כלל המכפלה הוא כלל שבאמצעותו אפשר לחשב את גודל המאורע או גודלו של מרחב המדגם.

אם לתהליך יש k שלבים : n_1 אפשרויות לשלב הראשון , n_2 אפשרויות לשלב השני ... n_k

אפשרויות לשלב k :

מספר האפשרויות לתהליך כולו יהיה : $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdots n_k$

למשל, כמה אפשרויות יש למשחק בו מטילים קובייה וגם מטבע? (הסבר בהקלטה)

למשל, כמה לוחיות רישוי בני 5 תווים ניתן ליצור כאשר התו הראשון הוא אות אנגלי והיתר

ספרות? (הסבר בהקלטה)

תרגילים:

1. חשבו את מספר האפשרויות לתהליכים הבאים:
 - א. הטלת קובייה פעמים.
 - ב. מספר תלת ספרתי.
 - ג. בחירת בן ובת מכתה שיש בה שבעה בנים ועשר בנות.
 - ד. חלוקת שני פרסים שונים לעשרה אנשים שונים כאשר אדם לא יכול לקבל יותר מפרס אחד.

2. במסעדה מציעים ארוחה עסקית. בארוחה עסקית יש לבחור מנה ראשונה, מנה עיקרית ושתייה. האופציות למנה ראשונה הן: סלט ירקות, סלט אנטיפסטי ומרק היום. האופציות למנה עיקרית הן: סטייק אנטרקוט, חזה עוף בגריל, לזניה בשרית ולזניה צמחונית. האופציות לשתייה הן: קפה, תה ולימונדה.
 - א. כמה ארוחות שונות ניתן להרכיב בעזרת התפריט הזה?
 - ב. אדם מזמין ארוחה אקראית. חשב את ההסתברויות הבאות:
 1. בארוחה סלט ירקות, לזניה בשרית ולימונדה.
 2. בארוחה סלט, לזניה ותה.

3. בוחרים באקראי מספר בין חמש ספרות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
 - א. המספר הוא זוגי.
 - ב. במספר כל הספרות שונות.
 - ג. במספר כל הספרות זהות.
 - ד. במספר לפחות שתי ספרות שונות.
 - ה. במספר לפחות שתי ספרות זהות.
 - ו. המספר הוא פלינדרום (מספר הנקרא מימין ומשמאל באותה צורה).

4. חמישה אנשים אקראיים נכנסו למעלית בבנין בן 8 קומות. חשבו את ההסתברויות הבאות:
 - א. כולם ירדו בקומה החמישית?
 - ב. כולם ירדו באותה קומה?
 - ג. כולם ירדו בקומה אחרת?
 - ד. ערך ודני ירדו בקומה השישית והיתר בשאר הקומות?

5. במפלגה חמישה עשר חברי כנסת. יש לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים. בכמה דרכים ניתן לחלק את התפקידים אם:
- חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
6. מטילים קובייה 4 פעמים.
- מה ההסתברות שכל התוצאות תהינה זהות?
 - מה ההסתברות של התוצאות תהינה שונות?
 - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה זהות?
 - מה ההסתברות שלפחות שתי תוצאות תהינה שונות?
7. יש ליצור מילה בת חמש אותיות לא בהכרח עם משמעות מאותיות ה-ABC (26 אותיות) בת 5 אותיות.
- מה ההסתברות שבמילה שנוצרה אין האותיות A, D ו L?
 - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה כל האותיות זהות?
 - מה ההסתברות שבמילה שנוצרה לפחות שתי אותיות שונות זו מזו?
 - מה ההסתברות שהמילה היא פלינדרום (מילה אשר משמאל לימין, ומימין לשמאל נקראת אותו הדבר).
8. יוצרים קוד עם a ספרות (מותר לחזור על אותה ספרה בקוד). חשבו את ההסתברויות הבאות: (בטאו את תשובותיכם באמצעות a)
- בקוד אין את הספרה 5.
 - בקוד מופיעה הספרה 3.
 - בקוד לא מופיעות ספרות אי זוגיות.
9. במשחק מזל יש למלא טופס בו n משבצות. כל משבצת מסומנת בסימון V או בסימון X. בכמה דרכים שונות ניתן למלא את טופס משחק המזל?

פתרונות :**שאלה 2**

- א. 36
 ב. $1/36$
 ג. $1/9$

שאלה 4

- א. 0.00003
 ב. 0.00024
 ג. 0.20508
 ד. 0.01047

שאלה 6

- א. $1/216$
 ב. $5/18$
 ג. $13/18$
 ד. $215/216$

שאלה 9

2"

שאלה 1

- א. 36
 ב. 900
 ג. 70
 ד. 90

שאלה 3

- א. 0.5
 ב. 0.3024
 ג. 0.0001
 ד. 0.9999
 ה. 0.6976
 ו. 0.01

שאלה 5

- א. 3,375
 ב. 2,730

שאלה 7

- א. 0.5417
 ב. $\frac{1}{26^4}$
 ג. 0.0015

פרק 18 - קומבינטוריקה - תמורה - סידור עצמים בשורה

רקע:

תמורה:

מספר האפשרויות לסדר n עצמים שונים בשורה:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

$$0! = 1 \text{ הערה:}$$

למשל, בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a, b, c, d ? (הפתרון בהקלטה)

למשל, בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a, b, c, d , כך שהאותיות a, b יהיו ברצף?

(הפתרון בהקלטה)

למשל, בכמה דרכים שונות ניתן לסדר את האותיות a, b, c, d , כך שהאותיות a, b יופיעו בתור

הרצף ba ? (הפתרון בהקלטה)

תרגילים:

1. חשבו בכמה אופנים :
 - א. אפשר לסדר 4 ספרים שונים על מדף?
 - ב. אפשר לסדר חמישה חיילים בטור?

2. סידרו באקראי 10 דיסקים שונים על מדף שמתוכם שניים בשפה העברית.
 - א. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית יהיו צמודים זה לזה?
 - ב. מה ההסתברות שהדיסקים בעברית לא יהיו צמודים זה לזה?
 - ג. מה ההסתברות ששני הדיסקים בעברית יהיו כל אחד בקצה השני של המדף?

3. בוחנים 5 בנים ו-4 בנות בכיתה ומדרגים אותם לפי הציון שלהם בבחינה. נניח שאין תלמידים להם אותו ציון.
 - א. מהו מספר הדירוגים האפשריים?
 - ב. מהו מספר הדירוגים האפשריים, אם מדרגים בנים ובנות בנפרד?

4. מסדרים 10 ספרים שונים על מדף.
 - א. בכמה אופנים ניתן לסדר את הספרים על המדף?

- שני ספרים מתוך ה-10 הם ספרים בסטטיסטיקה.
 - ב. מה ההסתברות שאם נסדר את הספרים באקראי, הספרים בסטטיסטיקה יהיו צמודים זה לזה?
 - ג. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה לא יהיו צמודים זה לזה?
 - ד. מה ההסתברות שהספרים בסטטיסטיקה יהיו בקצות המדף (כל ספר בקצה אחר)?

5. אדם יצר בנגן שלו פלייליסט (רשימת השמעה) של 12 שירים שונים. 4 בשפה העברית, 5 באנגלית ו-3 בצרפתית. האדם הריץ את הפלייליסט באקראי.
 - א. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו כשירים הראשונים כמקשה אחת?
 - ב. מה ההסתברות שכל השירים באנגלית יופיעו ברצף (לא חובה ראשונים)?
 - ג. מה ההסתברות ששירים באותה השפה יופיעו ברצף (כלומר כל השירים באנגלית ברצף, כל השירים בעברית ברצף וכך גם השירים בצרפתית)?

6. 4 בניים ו-4 בנות התיישבו באקראי בשורת קולנוע בכיסאות 1-8.
- א. מה ההסתברות שיוסי ומיכל לא ישבו זה לצד זה?
- ב. מה ההסתברות שהבנים יתיישבו במקומות האי-זוגיים?
- ג. מה ההסתברות שכל הבנים ישבו זה לצד זה?
- ד. מה ההסתברות שהבנים ישבו זה לצד זה והבנות תשבנה זו לצד זו?

פתרונות :שאלה 1

א. 24

ב. 120

שאלה 2

א. 0.2

ב. 0.8

ג. 0.022

שאלה 3

א. 362,880

ב. 2,880

שאלה 4

א. 3,628,800

ב. 0.2

ג. 0.8

ד. $\frac{1}{45}$ שאלה 5א. $\frac{1}{792}$ ב. $\frac{1}{99}$ ג. $\frac{1}{4620}$ שאלה 6

א. 0.75

ב. 0.014

ג. $\frac{1}{14}$ ד. $\frac{1}{35}$

פרק 19 - קומבינטוריקה - דגימה סידורית ללא החזרה ועם החזרה

רקע:

מדגם סדור בדגימה עם החזרה

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים מתוך n עצמים שונים כאשר הדגימה היא עם החזרה והמדגם סדור הוא: n^k .

למשל, בוחרים שלושה תלמידים מתוך עשרה לייצג ועד בו תפקידים שונים, תלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד. כמה ועדים שונים ניתן להרכיב?

$$n = 10$$

$$k = 3$$

$$10^3 = 1,000$$

מדגם סדור ללא החזרה

מספר האפשרויות בדגימת k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים ($n \geq k$) כאשר המדגם סדור ואין החזרה של עצמים נדגמים הינו:

$$(n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

למשל, שלושה תלמידים נבחרים מתוך 10 לייצג וועד בו תפקידים שונים. תלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

$$\frac{10!}{7!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

תרגילים:

1. במפלגה 20 חברי כנסת, מעוניינים לבחור שלושה חברי כנסת לשלושה תפקידים שונים.
 - א. חבר כנסת יכול למלא יותר מתפקיד אחד. כמה קומבינציות ישנן לחלוקת התפקידים?
 - ב. חבר כנסת לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד. כמה קומבינציות יש לחלוקת התפקידים?

2. במשחק מזל יש 4 משבצות ממוספרות מ A-D (A עד D). בכל משבצת יש למלא סיפרה (0-9).
 - א. מה ההסתברות לזכות במשחק?
 - ב. מה ההסתברות שבאף משבצת לא תהיה את הספרה 3 במספר הזוכה?
 - ג. מה ההסתברות שהתוצאה 4 תופיע לפחות פעם אחת במספר הזוכה?

3. קבוצה מונה 22 אנשים, מה ההסתברות שלפחות לשניים מהם יהיה יום הולדת באותו התאריך?

4. שלושה אנשים קבעו להיפגש במלון הילטון בסינגפור. הבעיה היא שבסינגפור ישנם 5 מלונות הילטון.
 - א. מה ההסתברות שכל השלושה ייפגשו?
 - ב. מה ההסתברות שכל אחד יגיע לבית מלון אחר?

5. בכיתה 40 תלמידים. מעוניינים לבחור חמישה מהם לוועד כיתה. בכמה דרכים ניתן להרכיב את הוועד אם:
 - א. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד יכול למלא יותר מתפקיד אחד.
 - ב. בוועד 5 תפקידים שונים ותלמיד לא יכול למלא יותר מתפקיד אחד.

פתרונות :**שאלה 1 :**

א. 8000

ב. 6840

שאלה 2 :

א. 0.0001

ב. 0.6561

ג. 0.3439

שאלה 3 :

0.476

שאלה 4 :

א. 0.04

ב. 0.48

פרק 20 - קומבינטוריקה - דגימה ללא סדר וללא החזרה

רקע:

מדגם לא סדור בדגימה ללא החזרה

מספר האפשרויות לדגום k עצמים שונים מתוך n עצמים שונים כאשר אין משמעות לסדר העצמים הנדגמים ואין החזרה:

$$\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}$$

דוגמה

מתוך 10 תלמידים יש לבחור שלושה נציגים לוועד ללא תפקידים מוגדרים:

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$$

הערות

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad .1$$

$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n \quad .2$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1 \quad .3$$

תרגילים :

1. בכיתה 15 בנות ו-10 בנים. יש לבחור 5 תלמידים שונים מהכיתה לנציגות הכיתה. בכמה דרכים אפשר להרכיב את הנציגות אם-
 - א. אין שום הגבלה לבחירה.
 - ב. מעוניינים ש-3 בנות ו-2 בנים ירכיבו את המשלחת.
 - ג. לא יהיו בנים במשלחת.

2. סטודנט מעוניין לבחור 5 קורסי בחירה בסמסטר זה. לפניו רשימה של 10 קורסים לבחירה:
 - 5 במקצועות מדעי הרוח.
 - 3 במקצועות מדעי החברה.
 - 2 מתחום המתמטיקה.
 - א. כמה בחירות שונות הוא יכול ליצור לעצמו?
 - ב. כמה בחירות יש לו בהן 3 קורסים הם ממדעי הרוח?
 - ג. כמה בחירות יש לו אם 2 מהן לא ממדעי הרוח?
 - ד. כמה בחירות יש לו אם 2 ממדעי הרוח, 2 ממדעי החברה ו-1 ממתמטיקה?

3. בכיתה 30 תלמידים מתוכם 12 תלמידים ו-18 תלמידות. יש לבחור למשלחת 4 תלמידים מהכיתה. התלמידים נבחרים באקראי.
 - א. מה ההסתברות שהמשלחת תורכב רק מבנות?
 - ב. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה רק בת אחת?
 - ג. מה ההסתברות שבמשלחת תהיה לפחות בת אחת?

4. במשחק הלוטו יש לבחור 5 מספרים מתוך 45. המספרים הם 1-45.
 - א. מה ההסתברות שבמשחק הזוכה כל המספרים הם זוגיים?
 - ב. מה ההסתברות שבמספר הזוכה יש לכל היותר מספר זוגי אחד?
 - ג. מה ההסתברות שבמספר הזוכה לפחות פעם אחת יש מספר זוגי?
 - ד. מה ההסתברות שבמספר הזוכה כל המספרים גדולים מ-30?

5. בחפיסת קלפים ישנם 52 קלפים: 13 בצבע שחור בצורת עלה, 13 בצבע אדום בצורת לב, 13 בצבע אדום בצורת יהלום ו- 13 בצבע שחור בצורת תלתן. מכל צורה (מתוך ה-4) יש 9 קלפים שמספרם 2-10, שאר הקלפים הם; נסיך, מלכה, מלך ואס (בעצם מדובר בקופסת קלפים רגילה ללא ג'וקר). שני אנשים משחקים פוקר. כל אחד מקבל באקראי 5 קלפים (ללא החזרה).

- א. מה ההסתברות שעודד יקבל את כל המלכים וערן את כל המלכות?
- ב. מה ההסתברות שאחד השחקנים יקבל את הקלף אס-לב?
- ג. מה ההסתברות שערן יקבל קלפים שחורים בלבד ועודד יקבל שני קלפים שחורים בדיוק?
- ד. מה ההסתברות שערן יקבל לפחות 3 קלפים שהם מספר (אס אינו מספר)?

6. במכללה 4 מסלולי לימוד. בכל מסלול לימוד 5 מזכירות. יש ליצור וועד של 5 מזכירות מתוך כלל המזכירות במכללה. יוצרים וועד באופן אקראי. חשבו את ההסתברויות הבאות:

- א. כל המזכירות בוועד יהיו ממסלול "מדעי ההתנהגות".
- ב. כל המזכירות בוועד יהיו מאותו המסלול.
- ג. מכל מסלול תבחר לפחות מזכירה אחת.

פתרונות:**שאלה 2**

א. 252

ב. 100

ג. 100

ד. 60

שאלה 1

א. 53,130

ב. 20,475

ג. 3003

שאלה 4

א. 0.02

ב. 0.187

ג. 0.972

ד. 0.00246

שאלה 3

א. 0.1117

ב. 0.1445

ג. 0.9819

שאלה 6א. $6.45 \cdot 10^{-5}$ א. $2.58 \cdot 10^{-4}$

ב. 0.3225

פרק 21 - הסתברות מותנית - במרחב מדגם אחיד

רקע:

לעיתים אנו נדרשים לחשב הסתברות למאורע כלשהו כאשר ברשותנו אינפורמציה לגבי מאורע אחר. הסתברות מותנית הינה סיכוי להתרחשות מאורע כלשהו אשר ידוע שמאורע אחר התרחש/ לא התרחש.

ההסתברות של A בהינתן ש B כבר קרה:

$$P(A|B)$$

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} \quad \text{כשמרחב המדגם אחיד:}$$

למשל, (פתרון בהקלטה)

מטילים קובייה.

נגדיר:

A – התוצאה זוגית.

B – התוצאה גדולה מ-3.

נרצה לחשב את:

$$P(A|B)$$

תרגילים:

1. נבחרה ספרה זוגית באקראי. מה הסיכוי שהספרה גדולה מ-6?
2. יוסי הטיל קובייה. מה הסיכוי שקיבל את התוצאה 4 אם ידוע שהתוצאה שהתקבלה זוגית?
3. מטילים צמד קוביות.
נגדיר:
 A – סכום התוצאות בשתי ההטלות הינו 7
 B – מכפלת התוצאות 12
חשבו את $P(A|B)$
4. הוטל מטבע פעמיים. ידוע שהתקבל לכל היותר ראש אחד, מה הסיכוי שהתקבלו שני ראשים?
5. אדם הטיל זוג קוביות והתקבל שהתוצאות זהות. מה הסיכוי שלפחות אחת התוצאות 5?
6. אדם הטיל זוג קוביות והתקבל לפחות פעם אחת 4. מה הסיכוי שאחת התוצאות 5?
7. נבחרה משפחה בת שני ילדים. ידוע שאחד הילדים בן. מה ההסתברות שבמשפחה שני בנים בקרב הילדים?
8. נבחרה משפחה בת שלושה ילדים. נתון שהילד האמצעי בן. מה הסיכוי שיש בנות בקרב הילדים?

פתרונות:**שאלה 1**

0.2

שאלה 2

1/3

שאלה 3

0.5

שאלה 4

0

שאלה 5

1/6

שאלה 6

2/11

שאלה 7

1/3

שאלה 8

3/4

פרק 22 - הסתברות מותנית - מרחב לא אחיד

רקע:

הסיכוי שמאורע A יתרחש בהינתן ש – מאורע B כבר קרה :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

במונה : הסיכוי לחיתוך של שני המאורעות זה הנשאל וזה הנתון שהתרחש.

במכנה : הסיכוי למאורע שנתון שהתרחש :

למשל,

נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל- 30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית? (פתרון בהקלטה)

תרגילים:

1. תלמיד ניגש בסמסטר לשני מבחנים מבחן בכלכלה ומבחן בסטטיסטיקה :
 - נגדיר את המאורעות הבאים : A- לעבור את המבחן בסטטיסטיקה. B- לעבור את המבחן בכלכלה. כמו כן נתון שהסיכוי לעבור את המבחן בכלכלה הנו 0.8 והסיכוי לעבור את המבחן בסטטיסטיקה הנו 0.9. הסיכוי לעבור את שני המבחנים הנו 0.75. חשבו את הסיכויים למאורעות הבאים :
 - א. התלמיד עבר בסטטיסטיקה, מה ההסתברות שהוא עבר בכלכלה?
 - ב. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא עבר בסטטיסטיקה?
 - ג. התלמיד עבר בכלכלה, מה ההסתברות שהוא נכשל בסטטיסטיקה?
 - ד. התלמיד נכשל בסטטיסטיקה מה ההסתברות שהוא נכשל בכלכלה?
 - ה. התלמיד עבר לפחות מבחן אחד מה ההסתברות שהוא יעבור את שני המבחנים?

2. במדינה שתי חברות טלפון סלולארי "סופט" ו"בל". 30% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "בל". 60% מהתושבים הבוגרים רשומים אצל חברת "סופט".
 - ל-15% מהתושבים הבוגרים אין טלפון סלולארי בכלל.
 - א. איזה אחוז מהתושבים הבוגרים רשומים אצל שתי החברות?
 - ב. נבחר אדם שרשום אצל חברת "סופט", מה ההסתברות שהוא רשום גם אצל חברת "בל"?
 - ג. אם אדם לא רשום אצל חברת "בל", מה ההסתברות שהוא כן רשום בחברת "סופט"?
 - ד. אם אדם רשום אצל חברה אחת בלבד, מה ההסתברות שהוא רשום בחברת "סופט"?

3. במכללה שני חניונים : חניון קטן וחניון גדול. בשעה 08:00 יש סיכוי של 60% שבחניון הגדול יש מקום, סיכוי של 30% שבחניון הקטן יש מקום וסיכוי של 20% שבשני החניונים יש מקום.
 - א. מה ההסתברות שיש מקום בשעה 08:00 רק בחניון הגדול של המכללה?
 - ב. ידוע שבחניון הקטן יש מקום בשעה 08:00, מה הסיכוי שבחניון הגדול יש מקום?
 - ג. אם בשעה 08:00 בחניון הגדול אין מקום, מה ההסתברות שבחניון הקטן יהיה מקום?
 - ד. נתון שלפחות באחד מהחניונים יש מקום בשעה 08:00, מה ההסתברות שבחניון הגדול יש מקום?

4. נלקחו 200 שכירים ו-100 עצמאים, מתוך השכירים 20 הם אקדמאיים, מתוך העצמאיים 30 הם אקדמאיים.
 - א. בנו טבלת שכיחות משותפת לנתונים.
 - ב. נבחר אדם אקראי מהי ההסתברות שהוא שכיר?
 - ג. מה ההסתברות שהוא שכיר ולא אקדמאי?
 - ד. מה ההסתברות שהוא שכיר או אקדמאי?
 - ה. אם האדם שנבחר הוא עצמאי מהי ההסתברות שהוא אקדמאי?
 - ו. אם הבן אדם שנבחר הוא לא אקדמאי, מה ההסתברות שהוא שכיר?

5. חברה מסוימת פרסמה את הנתונים הבאים לגבי האזרחים מעל גיל 21 :
- הנתונים שהתקבלו היו : 40% מהאנשים מחזיקים כרטיס "ויזה", 52% מחזיקים כרטיס "ישראלכרט", 20% מחזיקים כרטיס "אמריקן אקספרס", 15% מחזיקים כרטיס ויזה וגם ישראלכרט, 8% מחזיקים כרטיס ישראלכרט וגם אמריקן אקספרס ו-7% מחזיקים כרטיס ויזה וגם אמריקן אקספרס. כמו כן, 5% מחזיקים בכל שלושת הכרטיסים הנ"ל.
- א. אם לאדם יש ויזה, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?
- ב. אם לאדם שני כרטיסי אשראי, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?
- ג. אם לאדם לפחות כרטיס אשראי אחד, מה הסיכוי שאין לו כרטיס ישראלכרט?

פתרונות:**שאלה 1**

- א. 0.833
- ב. 0.9375
- ג. 0.0625
- ד. 0.5
- ה. 0.789

שאלה 2

- א. 5%
- ב. 0.0833
- ג. 0.786
- ד. 0.6875

שאלה 3

- א. 0.4
- ב. $\frac{2}{3}$
- ג. 0.25
- ד. $\frac{6}{7}$

פרק 23 - דיאגרמת עצים, נוסחת בייס ונוסחת ההסתברות השלמה

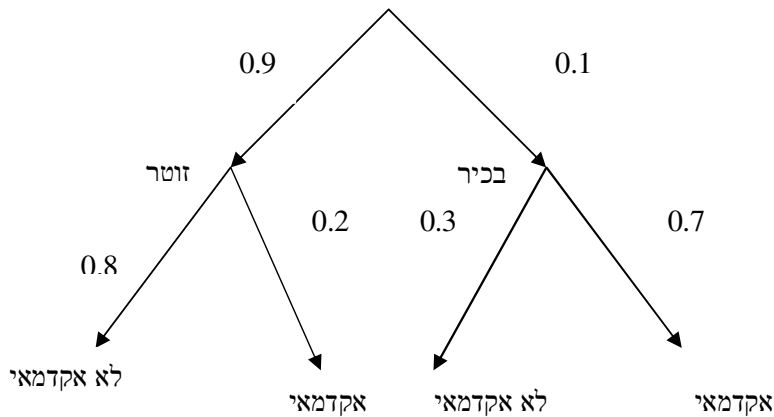
רקע:

נשתמש בשיטה זו כאשר יש תרגיל שבו התרחשות המאורעות היא בשלבים, כך שכל תוצאה של כל שלב תלויה בשלב הקודם, פרט לשלב הראשון:

למשל,

בחברה מסוימת 10% מוגדרים בכירים והיתר מוגדרים זוטרים.
מבין הבכירים 70% הם אקדמאים ומבין הזוטרים 20% הם אקדמאים.

נשרטט עץ שיתאר את הנתונים, השלב הראשון של העץ אינו מותנה בכלום ואילו השלב השני מותנה בשלב הראשון.



כדי לקבל את הסיכוי לענף מסוים נכפיל את כל ההסתברויות על אותו ענף.
נבחר אדם באקראי מאותה חברה.

א. מה הסיכוי שהוא בכיר אקדמאי ?

$$0.1 * 0.7 = 0.07$$

ב. מה הסיכוי שהוא זוטר לא אקדמאי ?

$$0.9 * 0.8 = 0.72$$

כדי לקבל את הסיכוי לכמה ענפים נחבר את הסיכויים של כל ענף (רק אחרי שבתוך הענף הכפלנו את ההסתברויות)

ג. מה הסיכוי שהוא אקדמאי ?

$$0.1*0.7+0.9*0.2=0.25$$

ד. נבחר אקדמאי מה ההסתברות שהוא עובד זוטרי?

מדובר כאן על שאלה בהסתברות מותנה ולכן נשתמש בעיקרון של הסתברות מותנה

$$P(zutar | academay) = \frac{0.9*0.2}{0.25} = \frac{0.18}{0.25} = 0.72$$

נוסחת ההסתברות השלמה

B מאורע כלשהו, A_1, \dots, A_n חלוקה ממצה של Ω .

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i) \quad \text{אזי:}$$

נוסחת בייס

$$P(A_j/B) = \frac{P(A_j)P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^n P(A_i) \cdot P(B/A_i)}$$

תרגילים:

1. בשקית סוכריות 4 סוכריות תות ו-3 לימון . מוציאים באקראי סוכרייה אם היא בטעם תות אוכלים אותה ומוציאים סוכרייה נוספת , אך אם היא בטעם לימון מחזירים אותה לשקית ומוציאים סוכרייה נוספת.
 - א. מה ההסתברות שהסוכרייה הראשונה שהוצאה בטעם תות והשנייה בטעם לימון ?
 - ב. מה ההסתברות שהסוכרייה השנייה בטעם לימון?

2. באוכלוסיה מסוימת 30% הם ילדים, 50% בוגרים והיתר קשישים. לפי נתוני משרד הבריאות הסיכוי שילד יחלה בשפעת במשך החורף הוא 80%, הסיכוי שמבוגר יחלה בשפעת במשך החורף הוא 40% והסיכוי שקשיש יחלה בשפעת במשך החורף הוא 70%.
 - א. איזה אחוז מהאוכלוסייה הינו קשישים שלא יחלו בשפעת במשך החורף?
 - ב. מה אחוז האנשים שיחלו בשפעת במשך החורף?
 - ג. נבחר אדם שחלה במשך החורף בשפעת, מה ההסתברות שהוא קשיש?
 - ד. נבחר ילד, מה ההסתברות שהוא לא יחלה בשפעת במשך החורף?

3. בכד א' 5 כדורים כחולים ו-5 כדורים אדומים. בכד ב' 6 כדורים כחולים ו-4 כדורים אדומים. בוחרים באקראי כד, מוציאים ממנו כדור ומבלי להחזירו מוציאים כדור נוסף.
 - א. מה ההסתברות ששני הכדורים שיוצאו יהיו בצבעים שונים?
 - ב. אם הכדורים שהוצאו הם בצבעים שונים, מה ההסתברות שהכדור השני שהוצא יהיה בצבע אדום?

4. חברת סלולר מסווגת את לקוחותיה לפי 3 קבוצות גיל: נוער, בוגרים ופנסיונרים. נתון כי :
 - 10% מהלקוחות בני נוער, 70% מהלקוחות בוגרים והיתר פנסיונרים. מתוך בני הנוער 90% מחזיקים בסמארט-פון, מתוך האוכלוסייה הבוגרת ל 70% יש סמארט-פון ומתוך אוכלוסיית הפנסיונרים 30% מחזיקים בסמארט-פון.
 - א. איזה אחוז מלקוחות החברה הם בני נוער עם סמארט-פון?
 - ב. נבחר לקוח אקראי ונתון שיש לו סמארט-פון. מה ההסתברות שהוא פנסיונר?
 - ג. אם ללקוח אין סמארט-פון, מה ההסתברות שהוא לא בן נוער?

5. כדי להתקבל למקום עבודה יש לעבור שלושה מבחנים. המבחנים הם בשלבים, כלומר אם נכשלתם במבחן מסוים אינכם ניגשים למבחן הבא אחריו.

70% מהמועמדים עוברים את המבחן הראשון.

מתוכם 50% עוברים את המבחן השני.

מבין אלה שעוברים את המבחן השני 40% עוברים את המבחן השלישי.

א. מה ההסתברות להתקבל לעבודה?

ב. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא נכשל במבחן הראשון?

ג. מועמד לא התקבל לעבודה. מה ההסתברות שהוא עבר את המבחן השני?

6. משרד הבריאות פרסם את הנתונים הבאים :

מתוך אוכלוסיית הילדים והנוער 80% חולים בשפעת בזמן החורף.

מתוך אוכלוסיית המבוגרים (עד גיל 65) 60% חולים בשפעת בזמן החורף.

30% מהתושבים הם ילדים ונוער.

50% הם מבוגרים.

היתר קשישים.

כמו כן נתון ש 68% מהאוכלוסייה תחלה בשפעת בחורף.

א. מה אחוז החולים בשפעת בקרב האוכלוסייה הקשישה?

ב. נבחר אדם שלא חלה בשפעת, מה ההסתברות שהוא לא קשיש?

7. רדאר שנמצא על החוף צריך לקלוט אנייה הנמצאת ב-1 מ-4 האזורים: A B C D.

אם האנייה נמצאת באזור A הרדאר מזהה אותה בסיכוי 0.8, סיכוי זה פוחת ב-0.1 ככל שהאנייה מתקדמת באזור.

כמו כן נתון שבהסתברות חצי האנייה נמצאת באזור D, בהסתברות 0.3 באזור C, באזור B היא

נמצאת בסיכוי 0.2, אחרת היא נמצאת באזור A.

א. מה הסיכוי ש האנייה תתגלה ע"י הרדאר?

ב. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה ההסתברות שהיא נמצאת באזור C?

ג. אם האנייה התגלתה ע"י הרדאר, מה הסיכוי שהיא לא נמצאת באזור B?

8. סימפטום X מופיע בהסתברות של 0.4 במחלה A, בהסתברות של 0.6 במחלה B ובהסתברות של 0.5 במחלה C.

סימפטום X מופיע אך ורק במחלות הללו, אדם לא יכול לחלות ביותר ממחלה אחת מבין המחלות הללו.

לקליניקה מגיעים אנשים כדלקמן:

8% חולים במחלה A, 10% במחלה B, 2% במחלה C והיתר בריאים. כמו כן נתון שבמחלה A,

סימפטום X מתגלה בסיכוי של 80%. במחלות B, C, הסימפטום מתגלה בסיכוי של 90% בכל מחלה.

א. מה ההסתברות שאדם הגיע לקליניקה וגילו אצלו את סימפטום X?

ב. אם התגלה אצל אדם סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ג. אם לאדם יש את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא חולה במחלה A?

ד. אם לא גילו אצל אדם את סימפטום X, מה ההסתברות שהוא בריא?

9. סטודנט ניגש למבחן אמריקאי. הסיכוי שהוא יודע לשאלה מסוימת את התשובה הוא p , אם הוא

לא יודע את התשובה הוא מנחש. בכל מקרה הוא עונה על השאלה.

נתון שלשאלה יש k תשובות אפשריות.

אם הסטודנט ענה נכון על השאלה, מה הסיכוי שהוא ידע אותה?

פתרונות:**שאלה 1**א. $2/7$ ב. $23/49$ **שאלה 2**א. 6% ב. 58% ג. 0.241 ד. 0.2 **שאלה 3**א. 0.544 ב. 0.5 **שאלה 4**א. 9% ב. 0.09375 ג. 0.9722 **שאלה 8**א. 0.0886 ב. 0.2889 ג. 0.3137 ד. 0.8778 **שאלה 9**

$$\frac{kp}{1 + (k-1)p}$$

פרק 24 - תלות ואי תלות בין מאורעות

רקע:

אם מתקיים ש: $P(B|A) = p(B)$ נגיד שמאורע B בלתי תלוי ב-A.

הדבר גורר גם ההפך: $P(A|B) = p(A)$ כלומר A אינו תלוי גם ב-B.

כשהמאורעות בלתי תלויים מתקיים ש: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

הוכחה לכך:

$$P(A|B) = P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

נשתמש בנוסחאות של מאורעות בלתי תלויים רק אם נאמר במפורש שהמאורעות בלתי תלויים

בתרגיל או שמהקשר אפשר להבין ללא צל של ספק שהמאורעות בלתי תלויים.

למשל,

חוקר מבצע שני ניסויים בלתי תלויים הסיכוי להצליח בניסוי הראשון הנו 0.7 והסיכוי להצליח

בניסוי השני הוא 0.4.

א. מה הסיכוי להצליח בשני הניסויים יחדו?

כיוון שהמאורעות הללו בלתי תלויים:

$$p(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0.7 \cdot 0.4 = 0.28$$

ב. מה הסיכוי להיכשל בשני הניסויים?

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1-0.7)(1-0.4) = 0.18 \quad \text{באופן דומה:}$$

הרחבה: אי תלות בין n מאורעות

n מאורעות A_1, \dots, A_n הם בלתי תלויים אם ורק אם:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i)$$

תרגילים:

1. נתון:

$$p(A) = 0.2$$

$$P(B) = 0.5$$

$$P(A \cup B) = 0.6$$

האם המאורעות הללו בלתי תלויים?

2. תלמיד ניגש לשני מבחנים שהצלחתם לא תלויה זו בזו. הסיכוי שלו להצליח במבחן הראשון

הוא 0.7 והשני 0.4 .

א. מה הסיכוי להצליח בשני המבחנים יחדו?

ב. מה הסיכוי שניכשל בשני המבחנים ?

3. במדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי שני אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות ששניהם מובטלים?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

4. מוצר צריך לעבור בהצלחה ארבע בדיקות בלתי תלויות לפני שיווקו, אחרת הוא נפסל ולא

יוצא לשוק. הסיכוי לעבור בהצלחה כל אחת מהבדיקות הוא 0.8. בכל מקרה מבוצעות כל 4

הבדיקות.

א. מה הסיכוי שהמוצר יפסל?

ב. מה ההסתברות שהמוצר יעבור בהצלחה לפחות בדיקה אחת?

5. מדינה מסוימת 8% אבטלה, נבחרו באקראי חמישה אנשים מהמדינה.

א. מה ההסתברות שכולם מובטלים במדגם?

ב. מה ההסתברות שלפחות אחד מהם מובטל?

6. עבור שני מאורעות A ו-B המוגדרים על אותו מרחב מדגם נתון ש: $P(A \cup B) = 0.9$, $P(A|B) = 0.6$, $P(A \cap \bar{B}) = 0.3$. האם A ו-B מאורעות בלתי תלויים?

7. הוכח אם

$$P(A/B) = P(B/A)$$

אז:

$$P(A) = P(B)$$

8. קבע אילו מהטענות הבאות נכונות. נמק!

א. אם $p(A \cup B) = p(A) \cdot p(B)$ אזי המאורעות בלתי תלויים.

ב. מאורע A כלול במאורע B. $P(A) > 0$, $0 < p(B) < 1$, לכן $p(A/B) < p(A)$.

ג. A ו-B מאורעות זרים שסיכוייהם חיוביים לכן הם מאורעות תלויים.

ד. A ו-B מאורעות תלויים שסיכוייהם חיוביים לכן A ו-B מאורעות זרים.

ה. $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - P(A) - P(B)$ לכן A ו-B מאורעות זרים.

פתרונות :**שאלה 1**

כן

שאלה 2

א. 0.28

ב. 0.18

שאלה 3

א. 0.0064

ב. 0.1536

שאלה 4

א. 0.5904

ב. 0.9984

שאלה 8

א. לא נכון

ב. לא נכון

ג. נכון

ד. לא נכון

ה. נכון

פרק 25 - שאלות מסכמות בהסתברות

1. נלקחו משפחות שיש להם שתי מכוניות. ל-30% מהמשפחות הללו המכונית הישנה יותר היא מתוצרת אירופה ואצל 60% מהמשפחות הללו המכונית החדשה יותר מתוצרת אירופה. כמו כן 15% מהמשפחות הללו שתי המכוניות הן מתוצרת אירופאית.
 - א. מה ההסתברות שמשפחה אקראית בת שתי מכוניות תהיה ללא מכוניות מתוצרת אירופה?
 - ב. מה ההסתברות שלפחות מכונית אחת תהיה אירופאית?
 - ג. ידוע שלמשפחה יש מכונית אירופאית. מה ההסתברות שרק המכונית החדשה שלה היא מתוצרת אירופאית?
 - ד. אם המכונית הישנה של המשפחה היא אירופאית, מה ההסתברות שגם החדשה אירופאית?

2. במדינת "שומקום" 50% מהחלב במרכולים מיוצר במחלבה א' 40% במחלבה ב' והיתר במחלבה ג'. 3% מתוצרת מחלבה א' מגיעה חמוצה למרכולים ואילו במחלבה ב' 10%. כמו כן ידוע שבמדינת "שומקום" בסך הכול 7.5% מהחלב חמוץ.
 - א. איזה אחוז מהחלב שמגיע למרכול ממחלבה ג' חמוץ?
 - ב. אם נרכש חלב חמוץ במרכול. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה ג'?
 - ג. ברכישת חלב נימצא שהוא אינו חמוץ. מה הסיכוי שהוא יוצר במחלבה א'?
 - ד. האם המאורעות: "חלב חמוץ" ו-"יוצר במחלבה א'" בלתי תלויים?

3. רוני ורונה יצאו לבלות במרכז בילויים עם מספר אפשרויות בילוי:
 - בהסתברות של 0.3 הם ייצאו לבאולינג
 - בהסתברות של 0.5 הם ייצאו לבית קפה
 - בהסתברות של 0.7 הם יצאו לפחות לאחד מהם, באולינג/קפה.
 - א. מה ההסתברות שהם יצאו רק לבאולינג?
 - ב. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" זרים?
 - ג. האם המאורעות "לצאת לבאולינג" לצאת לבית קפה" תלויים?
 - ד. מה ההסתברות שיום אחד הם יצאו רק לבאולינג וביום למחרת לא יצאו לאף אחד מהמקומות?

4. 70% מהנבחנים בסטטיסטיקה עוברים את מועד א'. כל מי שלא עובר את מועד א' ניגש לעשות מועד ב', מתוכם 80% עוברים אותו. מבין אלה שנכשלים בשני המועדים 50% נרשמים לקורס מחדש, והיתר פורשים מהתואר.
- א. מה הסיכוי שסטודנט אקראי עבר את הקורס?
 ב. אם סטודנט אקראי עבר הקורס, מה הסיכוי שעבר במועד ב'?
 ג. מה אחוז הסטודנטים שפורשים מהתואר?
 ד. נבחרו 2 סטודנטים אקראיים רונית וינאי, מה ההסתברות שרונית עברה במועד א' ושינאי עבר במועד ב'?
5. באוכלוסייה מסוימת 40% הם גברים והיתר הן נשים. מבין הגברים 10% מובטלים. בסך הכול 13% מהאוכלוסייה מובטלת.
- א. מה אחוז האבטלה בקרב הנשים?
 ב. נבחר אדם מובטל, מה ההסתברות שזו אישה?
 ג. נגדיר את המאורעות הבאים:
 A - נבחר אדם מובטל
 B - נבחר גבר
 האם המאורעות הללו זרים? והאם הם בלתי תלויים?
6. בתיבה 10 מטבעות, מתוכם 7 מטבעות רגילים (ראש, זנב) ו-3 מטבעות שבשני צדדיהם טבוע ראש. אדם בוחר באקראי מטבע ומטיל אותו פעמיים. נסמן ב-A את ההטלה הראשונה ראש, ב-B את ההטלה השנייה ראש.
- א. חשבו את הסיכויים למאורעות A ו-B.
 ב. האם המאורע A ו-B בלתי תלויים?
 ג. ידוע שבהטלה הראשונה התקבל ראש, מה ההסתברות שהמטבע שהוטל הוא מטבע הוגן?

7. ערן מעוניין למכור את רכבו, הוא מפרסם מודעה באינטרנט ומודעה בעיתון. מבין אלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש 30% יראו את המודעה באינטרנט, 50% יראו את המודעה בעיתון ו-72% יראו את המודעה בלפחות אחת מהמדיות.
- א. מה אחוז האנשים מאלה שמעוניינים לרכוש רכב משומש יראו את 2 המודעות?
 ב. אם אדם ראה את המודעה באינטרנט, מה ההסתברות שהוא לא ראה את המודעה בעיתון?
 ג. האם המאורעות: "לראות את המודעה באינטרנט" ו"לראות את המודעה בעיתון" בלתי תלויים?
- ד. אדם שראה את המודעה באינטרנט בלבד יתקשר לערן בהסתברות של 0.7, אם הוא ראה את המודעה בעיתון בלבד הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.6. ואם הוא ראה את שתי המודעות הוא יתקשר לערן בהסתברות של 0.9.
1. מה ההסתברות שאדם המעוניין לרכוש רכב משומש יתקשר לערן?
 2. אדם המעוניין לרכוש רכב משומש התקשר לערן. מה ההסתברות שהוא ראה את שתי המודעות?

פתרונות:**שאלה 1**

א. 0.25

ב. 0.75

ג. 0.6

ד. 0.5

שאלה 2

א. 0.2

ב. 0.267

ג. 0.524

ד. המאורעות תלויים.

שאלה 3

א. 0.2

ב. המאורעות אינם זרים.

ג. המאורעות הללו תלויים.

ד. 0.06

שאלה 4

א. 0.94

ב. 0.255

ג. 0.03

ד. 0.168

שאלה 5

א. 15%

ב. 0.692

ג. לא זרים ותלויים.

שאלה 6

א. 0.65

ב. A ו-B תלויים.

ג. 0.5384

שאלה 7

א. 8%

ב. 0.733

ג. תלויים.

ד. 1. 0.478

2. 0.15