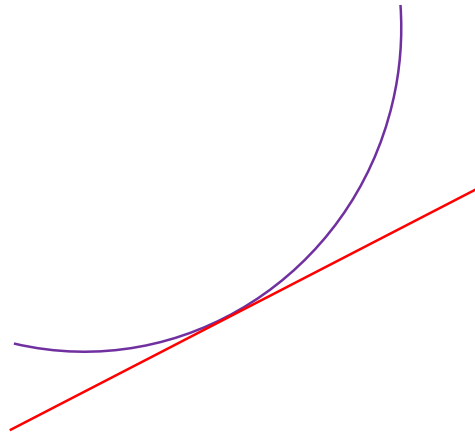


מתמטיקה א'

הקריה האקדמית אונו



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת המתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במתמטיקה א' והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם
 רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי
 שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך
 חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva1.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

3	פרק 1 - משוואה בנעלם אחד.....
7	פרק 2 - שתי משוואות בשני נעלמים.....
9	פרק 3 - חזקות ומשוואות מעריכיות.....
10	פרק 4 - סדרות.....
16	פרק 5 - סדרות וטורים.....
22	פרק 6 - בעיות גדילה ודעיכה.....
26	פרק 7 - הפונקציה הלינארית.....
31	פרק 8 - הפונקציה הריבועית.....
36	פרק 9 - פונקציה ממשית.....
37	פרק 10 - גבול של פונקציה.....
41	פרק 11 - חישוב נגזרת של פונקציה.....
44	נספח - דפי נוסחאות.....

פרק 1 - משוואה בנעלם אחד

פתרו את המשוואות:

$$.2 - \frac{2x-1}{3} + \frac{1-3x}{7} = 7 - 2x \quad (1)$$

$$\frac{8x+3}{5} - \frac{11x-9}{6} + \frac{4x+3}{15} = \frac{11x+15}{10} \quad (2)$$

$$\frac{3x-4}{3} - \frac{5x-1}{9} = \frac{2x+4}{6} \quad (3)$$

$$\frac{2x-1}{2x+4} = \frac{x-1}{x+1} \quad (4)$$

$$\frac{x}{x-1} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2x-2} \quad (5)$$

$$\frac{3}{x} + \frac{4}{3} = \frac{8}{x} + \frac{1}{2} \quad (6)$$

$$\frac{3x+8}{2} - 4x = \frac{x-5}{3} \quad (7)$$

$$(x-2)^2 - x(x-2) = 0 \quad (8)$$

$$(x-5)^2 = x(x+15) \quad (9)$$

$$(x-5)^2 = x^2 - 5 \quad (10)$$

$$2t^3 - 2t = 0 \quad (11)$$

$$5t^4 = 125t^2 \quad (12)$$

$$5y^4 - 20y^3 = 0 \quad (13)$$

$$6x + x^3 - 7x^2 = 0 \quad (14)$$

$$\frac{x^2}{x+2} = \frac{4}{x+2} \quad (15)$$

$$(x-2)(x+3) = 2x^2 - 4x \quad (16)$$

$$34 - 3(10 - x) = x^2 \quad (17)$$

$$3(1-4x) - \frac{(2x-1)^2}{2} = 7 \quad (18)$$

$$\frac{2x+6}{x-3} - \frac{-1}{2x+3} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} = \frac{4}{3} \quad (20)$$

$$\frac{2x-1}{3} + \frac{1-3x}{7} = \frac{1}{x-4} \quad (21)$$

$$\frac{9}{y+4} - \frac{6}{y-4} = 4.5 \quad (22)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+4} = \frac{1}{2} \quad (23)$$

$$x - \frac{10}{x} = 3 \quad (24)$$

$$\frac{x^2 - x}{x - 1} = 2x - 3 \quad (25)$$

שאלה 26

פתור את המשוואה:

$$\frac{2x+1}{2x-3} - \frac{7x}{4x^2-9} = 1 + \frac{x-4}{2x+3}$$

שאלה 27

פתור את המשוואה:

$$\frac{2}{9x^2-1} + \frac{3}{2(3x-1)} - \frac{8}{3x+1} + 1 = 0$$

שאלה 28

פתור את המשוואה:

$$\frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18$$

שאלה 29

פתור את המשוואה:

$$\frac{1}{x-5} - \frac{5}{3x+15} = \frac{8}{x^2-25}$$

שאלה 30

פתור את המשוואה:

$$\frac{2}{(x+3)^2} - \frac{3}{x^2-9} = 0$$

שאלה 31

פתור את המשוואה:

$$(x+3)^2 - (2x+2)(2x-2) = 2(x+3)$$

שאלה 32

פתור את המשוואה:

$$\frac{5x-10}{x+2} - \frac{1}{2x-4} = \frac{5}{2x+4}$$

שאלה 33

פתור את המשוואה:

$$\frac{x^2}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{3}$$

שאלה 34

פתור את המשוואה:

$$\frac{4x^2 - 24x + 36}{x-3} = 12$$

שאלה 35

פתור את המשוואה:

$$\frac{4x^2 + 4x + 1}{8x + 4} = 5$$

שאלה 36

פתור את המשוואה:

$$\frac{2x^3 - 18x}{x+3} = 8x$$

שאלה 37

$$\frac{1}{ax} - \frac{a}{x+a-1} = 0 \quad \text{נתונה המשוואה:}$$

- א. פתור את המשוואה (הבע את x באמצעות a)
 ב. האם יש ערך של a שעבורו אין פתרון למשוואה? נמק.
 ג. האם יש ערך של a שעבורו יש אינסוף פתרונות למשוואה? נמק.

שאלה 38

$$x-1 = k \cdot (2-kx) \quad \text{נתונה המשוואה: } (k \text{ הוא פרמטר}).$$

- א. פתור את המשוואה (הבע את x באמצעות k)
 ב. עבור איזה ערך של k מתקיים $x=0$?
 ג. עיין בתוצאה שקיבלת בסעיף א' ומצא שני ערכים של k שעבורם x שלילי (היעזר בסעיף ב').
 ד. מצא שני ערכים של k שעבורם x חיובי (היעזר בסעיף א' ובסעיף ב').

שאלה 39

$$\frac{4}{1+ax} = \frac{a}{2-x}$$

א. פתור את המשוואה (הבע את x באמצעות a):

ב. הראה שכאשר $a=0$ אין פתרון למשוואה.

פרק 2 – שתי משוואות בשני נעלמים

$$\begin{cases} \frac{2x+y}{3} = \frac{y-1}{4} \\ 2y-5x=15 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2 \\ \frac{x+y}{5} - \frac{2x-y}{4} = 1 - \frac{x}{6} \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 7x-2y=15 \\ \frac{2x+3y}{2} - 2 = \frac{x}{3} \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{2x-3}{2} + \frac{y+1}{8} = 4 \\ \frac{x+1}{3} + \frac{3y-1}{4} = 4 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 2x-y=7 \\ \frac{x}{2} = \frac{x-y}{3} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} y = -x^2 + 6x \\ y = x + 6 \end{cases} \quad (6) \text{ פתור את מערכת המשוואות:}$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 - 5x + 1 \\ 3x + 2y = 17 \end{cases} \quad (7) \text{ פתור את מערכת המשוואות:}$$

$$(8) \text{ פתור את מערכת המשוואות:}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 5xy - 4y^2 = 38 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 - 2y = 2 \\ 3x^2 - 3y = 0 \end{cases} \quad (9) \text{ פתור את מערכת המשוואות:}$$

$$\begin{cases} 3(x^2 - y^2) - 4(y^2 - 2x^2) = 16 \\ 2x^2 - y^2 = 4 \end{cases} \quad (10) \text{ פתור את מערכת המשוואות:}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{5}{y} = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

(11) פתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{3}{y} = -2 \\ \frac{6}{x} - \frac{7}{y} = 40 \end{cases}$$

(12) פתור את מערכת המשוואות:

פרק 3- חזקות ומשוואות מעריכיות

שאלה 1

נתון: $2^x = 9$. חשב, בלי מחשבון, את ערך הביטוי $2^{-1.5x}$.

הראה את דרך החישוב בפירוט.

א. חשב את 8^{-x} , אם נתון: $8^{3x} = 64$.

ב. פתור את המשוואה: $6^x + 2^{x+1} \cdot 3^x = 108$.

שאלה 2

א. מצא, בלי מחשבון, את ערכו של x , אם מתקיים השוויון $(10^2 \cdot 10^x)^2 = 10$.

ב. נסמן: $A = 9^{1000}$, $B = 18^{500}$.

האם $A = B$ או $A > B$ או $A < B$? נמק את תשובתך.

ג. פתור את המשוואה: $2^{x-5} + 2^{x-3} = 80$.

שאלה 3

א. פתור את המשוואה: $4^{x+\frac{1}{2}} = 1\frac{1}{2} - 4^x$.

נתון: $a = 3^x$.

ב. הבע את $(\sqrt{3})^x$ באמצעות a .

ג. הבע את $\left(\frac{1}{9}\right)^x$ באמצעות a .

שאלה 4

א. נתון: $6^{-x} = 3$. חשב את 6^{4x} .

ב. נתון: $3^{2x+1} = a$. הבע באמצעות a את 3^x .

פרק 4 – סדרות**שאלה 1**

סדרה מוגדרת על ידי הנוסחה: $a_n = n^2 - 2n + \frac{1}{4}$.

- א. ערכו של איבר בסדרה זו הוא $15\frac{1}{4}$. מהו מקומו בסדרה?
- ב. מה צריך להיות x , על מנת שהאיברים a_4 , a_5 , $a_7 - x$ יהיו סדרה חשבונית?
- ג. האם האיברים a_1 , a_2 , a_3 מהווים סדרה חשבונית? נמק.

שאלה 2

נתונה סדרה חשבונית $11, 14, 17, \dots$. סכום איברי הסדרה הוא 861. כמה איברים בסדרה?

שאלה 3

- בסדרה חשבונית 10 איברים. סכום איברי הסדרה הוא 210. האיבר הראשון בסדרה הוא 3.
- א. מצא את הפרש הסדרה.
- ב. מצא את האיבר התשיעי בסדרה.

שאלה 4

בסדרה חשבונית 13 איברים. סכום איברי הסדרה הוא 351. הפרש הסדרה הוא 2.5.

- א. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- ב. מצא את האיבר האחרון בסדרה.

שאלה 5

בסדרה חשבונית 20 איברים. האיבר השלישי בסדרה הוא 8. הפרש הסדרה הוא 3.

- א. מצא את האיבר השישה-עשר בסדרה.
- ב. מצא את האיבר העשרים בסדרה.
- ג. חשב את סכום חמשת האיברים האחרונים בסדרה.

שאלה 6

בסדרה חשבונית האיבר השלישי הוא 5, ואיבר החמישי הוא 9.

- א. מצא את הפרש הסדרה.
- ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- ג. בסדרה זו 19 איברים. מצא את סכום איברי הסדרה.

שאלה 7

בסדרה חשבונית סכום האיברים השלישי והשישי הוא 25. האיבר החמישי הוא 14.

- א. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- ב. מצא את הסכום של חמשת האיברים הראשונים בסדרה.

שאלה 8

נתונה סדרה חשבונית שבה: $a_3 = 48$, $d = -4$.

- א. מצא את a_1 .
- ב. מחברים זה לזה את איברי הסדרה, החל מן האיבר הראשון. כמה איברים יש לחבר, כדי שהסכום שיתקבל יהיה 420?
מצא את כל הפתרונות האפשריים.

שאלה 9

נתונות שתי סדרות חשבוניות : $5, 7, 9, 11, \dots$

$100, 97, 94, 91, \dots$

לשתי הסדרות יש אותו מספר איברים. האיבר האחרון בסדרה האחת שווה לאיבר האחרון בסדרה השנייה.

מצא את מספר האיברים בכל אחת מהסדרות.

שאלה 10

בסדרה חשבונית האיבר השביעי גדול ב- 6 מן האיבר השלישי.

האיבר החמישה עשר הוא 36.

א. מהו האיבר הראשון בסדרה?

ב. מהו סכום עשרת האיברים הראשונים בסדרה?

שאלה 11

בסדרה חשבונית האיבר הרביעי גדול פי 3 מהאיבר הראשון, והאיבר השביעי גדול ב- 10 מהאיבר השני.

מהו סכום 60 האיברים הראשונים בסדרה זו?

שאלה 12

בסדרה חשבונית האיבר העשירי גדול פי 3 מהאיבר הרביעי. סכום מאה האיברים הראשונים הוא 9900.

מצא את האיבר החמישי בסדרה.

שאלה 13

בסדרה חשבונית הסכום תשעת האיברים הראשונים הוא 99. הסכום של חמישה-
 עשר האיברים הראשונים הוא 300.
 מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.

שאלה 14

נתונים המספרים 27 ו-69. הכנס בין שני מספרים אלה חמישה מספרים נוספים כך
 שכל שבעת המספרים יהוו סדרה חשבונית.

שאלה 15

המשכורת ההתחלתית של פועל הייתה 3500 שקלים לחודש. בכל חודש עלתה
 משכורתו ב-50
 שקלים.

- א. מה הייתה משכורתו של הפועל בחודש ה-12 לעבודתו?
 ב. כמה השתכר הפועל במשך 12 החודשים הראשונים לעבודתו?

שאלה 16

באולם יש 15 שורות של כיסאות. בשורה הראשונה יש 12 כיסאות, ומספר
 הכיסאות בכל שורה גדול ב-2 ממספר הכיסאות בשורה שלפניה.
 כמה כיסאות יש באולם?

שאלה 17

דוד התאמן למירוץ אופניים. ביום הראשון רכב 25 ק"מ, ובכל יום רכב 4 ק"מ יותר מביום הקודם לו.

- א. כמה ק"מ רכב דוד ביום העשירי?
 ב. כמה ק"מ רכב דוד במשך עשרת הימים הראשונים לאימונו?

שאלה 18

דנה חסכה כסף לטיול. בשבוע הראשון חסכה 6 שקלים, ובכל שבוע חסכה 5 שקלים יותר מבשבוע שקדם לו. דנה הצליחה לחסוך 147 שקלים.
 כמה שבועות חסכה דנה?

שאלה 19

נתונה סדרה חשבונית שבה: $d = 5$, $a_1 = 3$.

- א. רשום לפי הסדר את ששת האיברים הראשונים בסדרה.
 ב. בסדרה זו נמחקו האיבר השני, הרביעי, השישי וכך הלאה (כל איבר במקום זוגי).
 חשב את סכום 100 האיברים הראשונים שלא נמחקו בסדרה.
 ג. חשב את סכום 100 האיברים הראשונים שנמחקו בסדרה.

תשובות פרק 4-סדרות

- (1) א. $n = 5$ ב. $x = 13$ ג. לא, כי $\frac{a_1 + a_3}{2} \neq a_2$
- (2) 21 איברים
- (3) א. $d = 4$ ב. $a_9 = 35$
- (4) א. $a_1 = 12$ ב. $a_{13} = 42$
- (5) א. $a_{16} = 47$ ב. $a_{20} = 59$ ג. 265
- (6) א. $d = 2$ ב. $a_1 = 1$ ג. 361
- (7) א. $a_1 = 2$ ב. 40
- (8) א. $a_1 = 56$ ב. 14 או 15
- (9) $n = 20$
- (10) א. $a_1 = 15$ ב. 217.5
- (11) 3720
- (12) $a_5 = 8$
- (13) $a_1 = -1$, $d = 3$
- (14) 34, 41, 48, 55, 62
- (15) א. 4050 שקלים ב. 45,300 שקלים
- (16) 390 כיסאות
- (17) א. 61 ק"מ ב. 430 ק"מ
- (18) 7 שבועות
- (19) א. 3, 8, 13, 18, 23, 28 ב. 49,800 ג. 50,300

פרק 5 - סדרות וטורים**שאלה 1**

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = n \cdot a_n \end{cases}$$

א. רשום את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. נתון: $a_{10} = 1,814,400$

(1) מהו a_{11} ?

(2) מהו a_9 ?

שאלה 2

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = -13 \\ a_{n+1} = a_n + n \end{cases}$$

א. רשום את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. באיזה מקום נמצא האיבר הגדול ב-17 מן הקודם לו?

שאלה 3

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 3 \end{cases}$$

א. רשום את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. מצא את האיבר ה-57 בסדרה.

שאלה 4

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 2 \end{cases}$$

א. מצא את a_2 , a_3 ו- a_4 .

ב. אם $a_{15} = 240$, מצא את a_{16} .

שאלה 5

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסיגה

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n + 2n + 2 \end{cases}$$

ג. מצא את a_2 , a_3 ו- a_4 .

א. נתון: $a_{49} = k$. בטא באמצעות k את a_{51} .

שאלה 6

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_{n+1} = a_n + 7n \end{cases}$$

א. חשב את ההפרש $a_{13} - a_{12}$.

ב. הסבר מדוע לא ייתכן שיהיו בסדרה הזו שני איברים עוקבים שההפרש ביניהם שווה ל-100.

שאלה 7

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 7 \\ a_{n+1} = a_n - 3n + n^2 \end{cases}$$

א. מה צריך להיות ערכו של x , כדי ששלושת המספרים a_2 , $a_3 + x$, a_4 יהיו שלושה

איברים עוקבים בסדרה חשבונית?

ב. מה צריך להיות ערכו של x , כדי ששלושת המספרים a_2 , a_3 , a_4x יהיו שלושה איברים

עוקבים בסדרה חשבונית?

שאלה 8

סדרה מוגדרת לכל n טבעי על-ידי כלל הנסיגה:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + 2n \end{cases}$$

איזה מספר יש להוסיף לכל אחד מהאיברים a_1 , a_2 , a_3 , כך שיהיו שלושה מספרים עוקבים

בסדרה הנדסית?

שאלה 9

סכומם של שלושה מספרים, המהווים סדרה חשבונית, הוא 18. אם נסיף למספר הראשון 1 ולמספר השלישי 2, נקבל שלושה איברים של סדרה הנדסית.
מצא את שלושת המספרים שמהווים סדרה חשבונית (מצא את שתי האפשרויות).

שאלה 10

נתונים כל המספרים התלת ספרתיים: $100, 101, 102, \dots, 999$.

- א. מבין המספרים הנתונים מצא כמה מספרים מתחלקים ב-5 (בלי שארית).
ב. מבין המספרים הנתונים מצא כמה מספרים אינם מתחלקים ב-5.

שאלה 11

המספר התלת ספרתי הקטן ביותר המתחלק ב-7 בלי שארית הוא 105.
המספר התלת ספרתי הגדול ביותר המתחלק ב-7 בלי שארית הוא 994.
מצא כמה מן המספרים התלת ספרתיים מתחלקים ב-7 בלי שארית.

שאלה 12

ספורטאי הלך 7 שעות רצופות. בכל שעה עבר מרחק השווה ל- $\frac{4}{5}$ מהמרחק שעבר בשעה הקודמת.
בשעה השלישית הוא עבר 4000 מטר.

- א. חשב את המרחק שעבר הספורטאי בשעה הראשונה.
ב. חשב את כל המרחק שעבר הספורטאי ב-7 שעות.

שאלה 13

סכום n האיברים הראשונים בסדרה חשבונית: $1, 4, 7, \dots$.
הוא כסכום n האיברים הראשונים בסדרה החשבונית: $51, 49, 47, \dots$.
מצא את n .

שאלה 14

בסדרה הנדסית עולה האיבר החמישי הוא 48 והאיבר השביעי הוא 192.

- א. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
 ב. מצא את סכום שבעת האיברים הראשונים בסדרה.

שאלה 15

נתונים שלושה מספרים שמהווים סדרה הנדסית. מנת הסדרה היא 3.
 אם נחסיר מהמספר השני 1 ומהמספר השלישי 10, נקבל סדרה חשבונית.
 מצא את שלושת המספרים הנתונים.

שאלה 16

יש להכניס שלושה מספרים בין המספרים 31 ל-496, כך שתתקבל סדרה הנדסית שבה חמישה איברים.

- א. מצא את האיבר השני בסדרה המתקבלת, אם היא סדרה עולה.
 ב. מצא את האיבר השני בסדרה המתקבלת, אם היא איננה סדרה עולה.

שאלה 17

בסדרה הנדסית מתקיים: $a_{10} = 2 \cdot 10^{-18}$

$$a_{11} = 4 \cdot 10^{-19}$$

- א. חשב את מנת הסדרה, q .
 ב. חשב את האיבר התשיעי בסדרה.

שאלה 18

האיבר הרביעי בסדרה הנדסית הוא 1000. מנת הסדרה היא 5.

חשב את סכום שמונת האיברים הראשונים בסדרה.

שאלה 19

נתונה סדרה הנדסית: $10, 10\sqrt{10}, 100, \dots$.

- א. חשב את האיבר ה-13 בסדרה.
 ב. מצא את מקומו בסדרה של האיבר 10^{20} .

שאלה 20

נתונה סדרה הנדסית שבה: $a_8 = 10^5$, $a_3 = 10^{-5}$.

א. חשב את מנת הסדרה.

ב. חשב את a_9 .

שאלה 21

נתונה סדרה הנדסית: $a_1 = 10^{-7}, a_2 = 10^{-5}, a_3 = 10^{-3}, \dots$.

מצא נוסחה לאיבר הכללי a_n של הסדרה, וחשב בעזרת הנוסחה את מספר האיברים בסדרה, אם ידוע שהאיבר האחרון בסדרה הוא 10,000,000 (עשרה מיליון).

תשובות פרק 5 – סדרות וטורים

(1) א. 5,5,10,30 ב. 18,144,000 (2) 201,600

(2) א. -7, -10, -12, -13 ב. במקום ה-18

(3) א. 5,8,11,14 ב. 173

(4) א. $a_2 = 6, a_3 = 12, a_4 = 20$ ב. 272

(5) א. $a_2 = 7, a_3 = 13, a_4 = 21$ ב. $a_{51} = k + 202$

(6) א. 84 ב. כי ההפרש בין שני האיברים הוא כפולה של 7

(7) א. $x = 1$ ב. $x = \frac{1}{3}$

(8) 1

(9) א. 2,6,10 ב. 11,6,1

(10) א. 180 ב. 720

(11) 128

(12) א. 6250 מטר ב. 24,696.4 מטר

(13) $n = 21$

(14) א. $a_1 = 3$ ב. 381

(15) 2,6,18

(16) א. $a_2 = 62$ ב. $a_2 = -62$

(17) א. $q = 0.2$ ב. 10^{17}

(18) 781,248

(19) א. $a_{13} = 10^7$ ב. $n = 39$

(20) א. 100 ב. $a_9 = 10^7$

(21) $a_n = 10^{2n-9}$, $n = 8$

פרק 6 - בעיות גדילה ודעיכה

שאלה 1

הערך של מכונית יורד בכל שנה ב- 5% . מחיר מכונית חדשה הוא 80,000 שקל.

- א. מהו מחיר המכונית לאחר שנה?
- ב. מהו מחיר המכונית לאחר 3.5 שנים?
- ג. מהו מחיר המכונית לאחר 5 שנים?

שאלה 2

נתון כי זמן מחצית החיים של חומר רדיואקטיבי מסוים הוא 40 שנה. כמות החומר קטנה בצורה מעריכית. מצא כמה גרם נותרו מ-1000 גרם של חומר זה :

- א. אחרי 10 שנים.
- ב. אחרי 50 שנים.
- ג. אחרי 75 שנים.

שאלה 3

המשקל של חומר רדיואקטיבי מסוים יורד בכל שנה ב- 2.284% . מהו זמן מחצית החיים של החומר?

שאלה 4

כמות חומר רדיואקטיבי קטנה בצורה מעריכית. מדען שקל את החומר הרדיואקטיבי שלוש פעמים באותו היום, ואלה התוצאות שקיבל :

- בשעה 6^{00} בבוקר היה משקל החומר 50 גרם.
 - בשעה 9^{00} בבוקר היה משקל החומר 40 גרם.
 - בשקילה השלישית באותו יום היה משקל החומר 23.75 גרם.
- מצא באיזה שעה נערכה השקילה השלישית?

שאלה 5

משקל של חומר רדיואקטיבי יורד ב- $\frac{1}{5}$ אחרי 10 שנים.

מצא אחרי כמה שנים ירד משקל החומר ב- $\frac{2}{5}$ ממשקלו (הנח דעיכה מעריכית).

שאלה 6

בשמורת טבע בוצעו שתי ספירות של אוכלוסיית העופות הדורסים. בספירה הראשונה נספרו 1100 עופות. בספירה השנייה, שבוצעה 8 חודשים לאחר הספירה הראשונה, נספרו 1510 עופות.

חשב כעבור כמה חודשים מהספירה הראשונה יהיו בשמורה 4800 עופות דורסים (הנח גידול מעריכי של אוכלוסיית העופות).

שאלה 7

אחוז הריבוי הטבעי של תושבים במדינה מסוימת הוא כזה, שמספר התושבים גדל פי 3 בתוך 50 שנה.

אם אחוז הריבוי הטבעי הזה נשמר קבוע באותה מדינה, מצא בתוך כמה שנים יגדל מספר התושבים במדינה זו פי 4.

שאלה 8

אוכלוסיית תושבים בעיר מסוימת מתרבה בצורה מעריכית לפי 2.4% לשנה. אם בזמן מסוים היו בעיר 499,400 תושבים, מצא אחרי כמה שנים יהיו בעיר 549,100 תושבים.

שאלה 9

כמות העץ גדלה בכל שנה ב- 14.2% . כיום יש ביער $5 \cdot 10^4$ טונות של עץ.
מצא בעוד כמה שנים יהיו ביער 10^7 טונות של עץ. (השאר בתשובתך שתי ספרות
אחרי הנקודה העשרונית).

שאלה 10

כמות האצות באגם מתרבה בצורה מעריכית. במדידה ראשונה היו באגם $3 \cdot 10^4$
ק"ג אצות. כעבור שנתיים מהמדידה הראשונה היו באגם $8 \cdot 10^5$ ק"ג אצות.
איזו כמות אצות תהיה באגם כעבור 3 שנים ו-4 חודשים מהמדידה הראשונה?

תשובות פרק 6 - בעיות גדילה ודעיכה

(1) א. 76,000 שקל ב. 66,853.3 שקל ג. 61,902.5 שקל

(2) א. 840.89 גרם ב. 420.43 גרם ג. 272.62 גרם

(3) 30 שנים

(4) בשעה 16^{00} , כעבור 10 שעות מהמדידה הראשונה

(5) 22.89 שנים

(6) 37.56 חודשים

(7) 63.1 שנים

(8) 4 שנים

(9) 39.90 שנים

(10) 7,140,618.1 ק"ג

פרק 7- הפונקציה הלינארית

שאלה 1

- א. רשום את משוואת הישר, העובר דרך הנקודה $(5,7)$ ומקביל לישר $y = -2x + 3$.
- ב. רשום שיעורי נקודה נוספת (מלבד הנקודה $(5,7)$), הנמצאת על הישר שמצאת בסעיף א'.

שאלה 2

- א. מצא את משוואת הישר, העובר דרך הנקודה $B(0,8)$ ושיפועו -1 .
- ב. מהן נקודות החיתוך של הישר עם הצירים?
- ג. שרטט במערכת צירים את הישר.
- ד. חשב את שטח המשולש שהישר יוצר עם הצירים.

שאלה 3

- קודקודי מרובע $ABCD$ הם: $A(2,0)$, $B(1,7)$, $C(8,6)$, $D(7,-1)$.
- א. מצא את המשוואות של הצלעות AB ו- CD .
- ב. חשב את אורכי האלכסונים של המרובעים.

שאלה 4

- קודקודי מרובע $ABCD$ הם: $A(0,0)$, $B(1,3)$, $C(5,4)$, $D(4,1)$.
- הראה שהמרובע הוא מקבילית.

שאלה 5

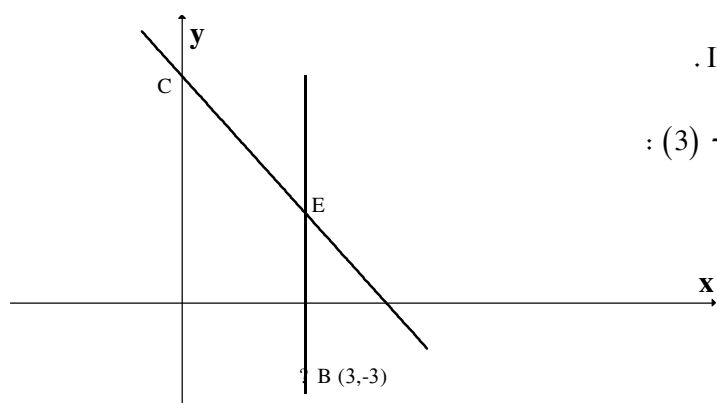
- קודקודי מרובע $ABCD$ הם: $A(8,6)$, $B(12,4)$, $C(11,1)$, $D(5,4)$.
- א. הוכח כי $AB \parallel CD$.
- ב. האם המרובע $ABCD$ הוא מקבילית? נמק.

שאלה 6

הצלעות של מלבן $ABCD$ מקבילות לצירים. נתונים הקודקודים: $A(8,10)$, $C(13,22)$

א. רשום את שיעורי הקודקודים B ו- D .

ב. חשב את שטח המלבן.

שאלה 7

לפניך שרטוט של שני ישרים, I ו-II.

נתונות שלוש משוואות, (1), (2) ו-(3):

$$(1) y = x + 2$$

$$(2) y = -2x + 8$$

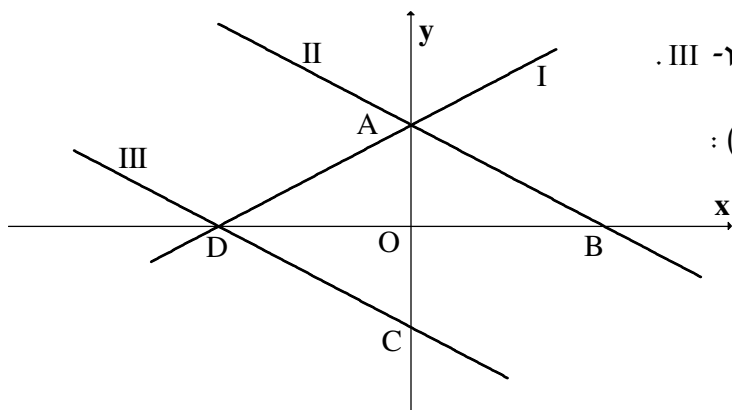
$$(3) y = 2x + 8$$

א. לכל אחד מן הישרים I ו-II, מצא את המשוואה המתאימה מבין המשוואות

(1), (2) ו-(3). נמק את תשובתך.

ב. מצא את משוואת הישר, העובר דרך ראשית הצירים $(0,0)$ ומקביל לישר I.

ג. מצא את שיעורי נקודת החיתוך של הישרים I ו-II.

שאלה 8

לפניך שרטוט של שלושה ישרים I, II ו-III.

נתונות שלוש משוואות (1), (2) ו-(3):

$$(1) y = -x + 2$$

$$(2) y = x + 2$$

$$(3) y = -x - 2$$

א. התאם כל אחת מן המשוואות, (1), (2) ו-(3), לישר אחד מבין הישרים I, II ו-III. נמק

את תשובתך.

ב. מצא את שיעורי הנקודות A, B, C, D המסומנות בשרטוט.

ג. מצא את משוואת הישר BC.

ד. מצא את שטח המשולש AOB.

שאלה 9

נתונות משוואות של שני ישרים: $y = -2x + 17$, $y = 4x + 2$.

הישרים נחתכים בנקודה M.

א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. האם הישר, שמשוואתו $y = 2x + 7$, עובר דרך הנקודה M? נמק.

ג. חשב את מרחק הנקודה M מראשית הצירים.

שאלה 10

קודקודי משולש ABC הם: $A(0,2)$, $B(2,5)$, $C(5,0)$.

מצא את משוואת התיכון לצלע AC.

שאלה 11

במשולש ABC נקודה D היא אמצע הצלע AB .

א. נתון $D(-1,2)$, $A(3,8)$.

מצא את שיעורי הקודקוד B .

ב. נתון גם: $C(7,3)$. מצא את המשוואות של הצלעות AB ו- AC .

שאלה 12

הצלעות של מלבן $ABCD$ מקבילות לצירים. M היא נקודת המפגש של אלכסוני המלבן, AC ו- BD .

נתון: $M(6,8)$, $B(9,12)$.

א. מצא את שיעורי הקודקוד D .

ב. רשום את שיעורי הקודקוד A .

ג. חשב את שטח המלבן.

שאלה 13

במקבילית $ABCD$ נתונים הקודקודים: $A(1,1)$, $B(6,2)$, $D(0,3)$.

א. מצא את נקודת הפגישה של אלכסוני המקבילית.

ב. חשב את שיעורי קודקוד C .

שאלה 14

קודקודי משולש ABC הם: $A(0,0)$, $B(2,5)$, $C(8,2)$.

דרך הקודקוד B עובר ישר, המקביל לציר ה- y וחותך את הצלע AC בנקודה E .

א. מצא את משוואת הישר AC .

ב. מצא את שיעורי הנקודה E .

ג. מצא את אורך הקטע BE ואת שטח המשולש ABE .

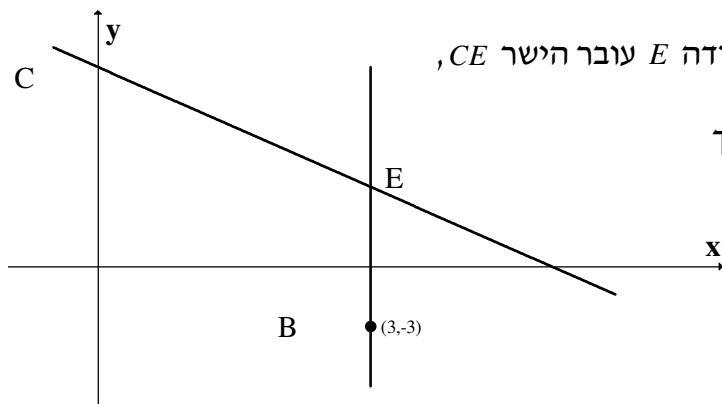
שאלה 15

קודקודי מרובע $ABCD$ הם: $A(3,2)$, $B(2,9)$, $C(7,14)$, $D(8,7)$.

הוכח שהמרובע הוא מעוין.

שאלה 16

הישר BE מקביל לציר ה- y .



שיעורי נקודה B הם $(3, -3)$. דרך נקודה E עובר הישר CE ,

שמשוואתו $y = -2x + 10$, והוא חותך

את ציר ה- y בנקודה C .

(ראה ציור)

א. חשב את שיעורי הנקודה E .

ב. חשב את אורך הקטע BE .

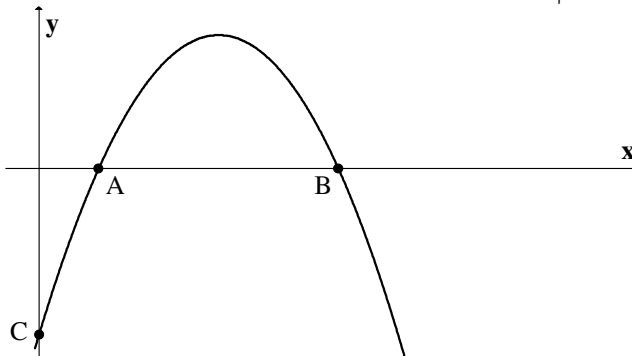
ג. חשב את אורך הקטע CE .

ד. M היא אמצע הקטע BE . מצא את משוואת הישר MC .

פרק 8 – הפונקציה הריבועית

שאלה 1

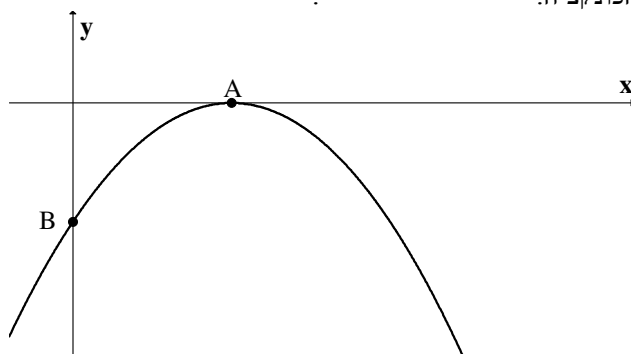
לפניך שרטוט של גרף הפונקציה: $y = -x^2 + 6x - 5$.



- א. חשב את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. חשב את שיעורי נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y .
- ג. מהו המרחק בין הנקודה C (ראה ציור) לראשית הצירים?
- ד. מצא את המרחק בין הנקודה A לנקודה B (ראה ציור).
- ה. מצא את המרחק בין הנקודה A לראשית הצירים.

שאלה 2

לפניך שרטוט של גרף הפונקציה: $y = -x^2 + 4x - 4$.

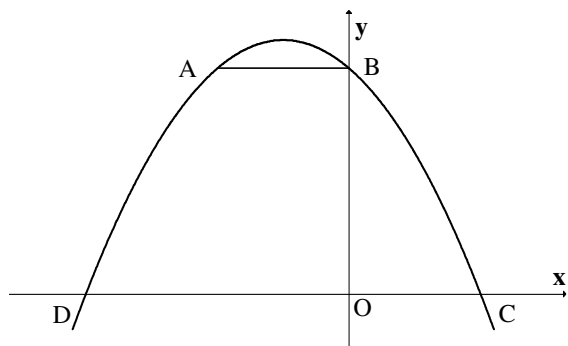


- א. מצא את נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
- ב. מצא את מרחק הנקודה A (ראה ציור) מראשית הצירים.
- ג. מצא את מרחק הנקודה B (ראה ציור) מראשית הצירים.

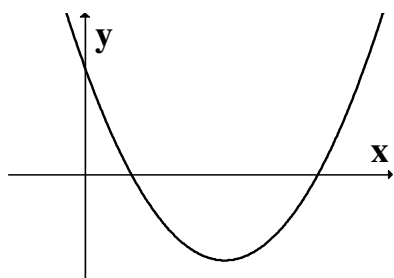
שאלה 3

נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + x + 6$.

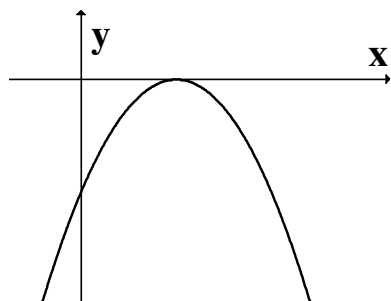
- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. מצא את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .

שאלה 4

- בציור שלפניך משורטטים הפרבולה $y = -x^2 - 2x + 8$ והקטע AB המקביל לציר ה- x .
- א. חשב את שטח הטרפז $ABCD$.
- ב. חשב את שטח המשולש BDC .

שאלה 5

- בציור שלפניך משורטט גרף הפונקציה $y = x^2 - 6x + 5$.
- א. מצא את נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
- ב. עבור אילו ערכי x הפונקציה הנתונה חיובית?
- ג. רשום שני ערכים של x שבהם הפונקציה הנתונה חיובית.

שאלה 6

- בשרטוט שלפניך משורטט גרף הפונקציה $y = -x^2 + 4x - 4$.
- א. מצא את נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
- ב. עבור אילו ערכי x הפונקציה הנתונה שלילית?
- ג. מהו הערך המקסימלי שהפונקציה מקבלת, ובאיזה נקודה מתקבל ערך זה?
- ד. עבור אילו ערכי x הפונקציה יורדת?

שאלה 7

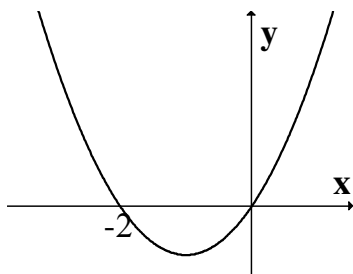
נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + x + 6$.

- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- רשום ערך כלשהו של x שבו הפונקציה שלילית, וערך כלשהו של x שבו הפונקציה חיובית.
- עבור אילו ערכי x הפונקציה הנתונה שלילית?

שאלה 8

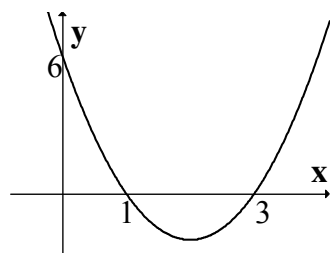
נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-3)(x+4)$.

- שרטט את הפרבולה שמתארת את הפונקציה. מצא את נקודות החיתוך עם הצירים, וסמן אותן בשרטוט.
- עבור אילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ חיובית?
- מהו הערך המינימלי של הפונקציה, ובאיזו נקודה הוא מתקבל?
- עבור אילו ערכי x הפונקציה עולה?

שאלה 9

גרף הפונקציה שבציר מתואר על-ידי: $y = x^2 + bx$.

- מצא את הערך של b .
- עבור אילו ערכי x הפונקציה חיובית?

שאלה 10

בציר שלפניך משורטט גרף הפונקציה $y = ax^2 - 8x + c$

(a ו- c הם פרמטרים).

- בהסתמך על הגרף, קבע את הערך של הפרמטר c .
- בהסתמך על הגרף ועל סעיף א', חשב את הערך של הפרמטר a .

שאלה 11

גרף הפרבולה $y = x^2 + c$ עובר בנקודה $(4,12)$. (c הוא פרמטר).

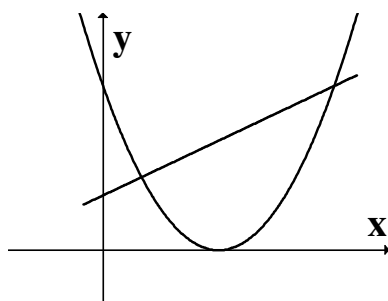
- א. מצא את הערך של הפרמטר c .
 ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפרבולה עם ציר ה- x .

שאלה 12

בציור שלפניך משורטטים הגרפים של הפונקציות:

$$f(x) = (x-3)^2$$

$$g(x) = x + 3$$



- א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים זה עם זה.
 ב. עבור אילו ערכי x מתקיים $f(x) < g(x)$?

שאלה 13

- א. מצא את שיעורי הקודקוד של הפרבולה: $y = -x^2 + 4x - 6$.
 ב. האם גרף הפרבולה שבסעיף א' חותך את ציר ה- x ? נמק.

שאלה 14

$$y = x^2 - 2x - 4$$

$$y = x + 6 \quad \text{נתונים פרבולה וישר:}$$

מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולה לישר.

שאלה 15

- נתונים פרבולה שמשוואתה $y = x^2 - 8$ וישר שמשוואתו $y = 2x$.
 מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולה לישר.

שאלה 16

$$y = x^2 - 9$$

$$y = 2x - 1 \quad \text{נתונים פרבולה וישר:}$$

מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולה לישר.

שאלה 17

$$y = 2x^2 + 3x - 1$$

$$y = x^2 + 10x - 13 \quad \text{נתונות שתי פרבולות:}$$

מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות.

שאלה 18

$$y = 2x^2 - 3x \quad \text{נתונים פרבולה שמשוואתה} \quad \text{וישר שמשוואתו} \quad 2x + y = 3$$

מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולה לישר.

שאלה 19

$$y = 3x^2 - 8x + 4$$

$$y = x^2 - 3x + 2 \quad \text{נתונות שתי פרבולות:}$$

מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות.

שאלה 20

$$y = x^2 + 2x - 8$$

$$y = -x^2 - x + 12 \quad \text{נתונות שתי פרבולות:}$$

מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות.

שאלה 21

$$y = x^2 - 6x + 9$$

$$y = -x^2 + 6x - 9 \quad \text{נתונות שתי פרבולות:}$$

מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות.

שאלה 22

$$y = x^2 - 2x + 3$$

$$y = x^2 + x - 6 \quad \text{נתונות שתי פרבולות:}$$

מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות.

פרק 9 - פונקציה ממשית

***הסעיפים הרלוונטיים בפרק זה הם סעיפים: 8-1, 10-13.

(1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$y = \frac{4x+1}{x^2+1} \quad (3) \qquad y = \frac{1}{x^2-4} \quad (2) \qquad y = x^3 - x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

$$y = \sqrt{x-4} \quad (6) \qquad y = \frac{x^2}{x^2-x-2} \quad (5) \qquad y = \frac{1}{x^3-x} \quad (4)$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-|x|}} \quad (9) \qquad y = \sqrt[3]{x^2+x-1} \quad (8) \qquad y = \sqrt{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$y = e^{x^2+x+1} \quad (12) \qquad y = \log x + \frac{1}{\log x} \quad (11) \qquad y = \ln(x^2+x-2) \quad (10)$$

$$y = \cot(4x) \quad (15) \qquad y = \tan(10x) \quad (14) \qquad y = \log_x(x+4) \quad (13)$$

$$y = \arccos(x+1) \quad (18) \qquad y = \arcsin(x-4) \quad (17) \qquad y = \arctan(x+4) \quad (16)$$

פתרונות – פרק 9

(1)

$x \neq 2, -1$ (5)	$x \neq 0, 1, -1$ (4)	x כל (3)	$x \neq \pm 2$ (2)	x כל (1)
$x < -2$ או $x > 1$ (10)	$-1 < x < 1$ (9)	x כל (8)	$x \leq -2$ או $x \geq 1$ (7)	$x \geq 4$ (6)
$x \neq \frac{\pi}{4} \cdot k$ (15)	$x \neq \frac{\pi}{20} + \frac{\pi}{10}k$ (14)	$0 < x \neq 1$ (13)	x כל (12)	$0 < x \neq 1$ (11)
		$-2 < x < 0$ (18)	$3 < x < 5$ (17)	x כל (16)

פרק 10 - גבול של פונקציה

***השאלות הרלוונטיות לך בפרק זה הן שאלות: 1,2,5

שאלה 6 סעיפים: 1-6 ושאלה 7 סעיפים 1-5

(1) חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2-\sqrt{3x+1}}{1-\sqrt{2x-1}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים (היעזר בגבול הטריגונומטרי $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\sin 2x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{4x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{\cos x}}{x} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x - \sin 3x}{x^3} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} \quad (7)$$

(5) חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

(6) חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

(7) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \tan \frac{1}{x} \right)^x \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 2x + 2} \right)^{10x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4} \right)^{4x^2} \quad (7)$$

(8) חשב את הגבולות הבאים (עייני שימוש בכלל הסנדוויץ') :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \sin x}{4x + \cos x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos(2x+1)}{x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(\ln x^2) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + x + \sin 2x}{x^2 + \cos 3x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} [x] \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{2^x + 3^x + 4^x} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + \arctan(2x-3)}{4x + \arctan(x - \ln x)} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} [x] \quad (10)$$

(9) חשב את הגבול $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ של הפונקציות הבאות (גבול של פונקציה מפוצלת) :

$$(a=1) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x-1} & x > 1 \\ \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} & x < 1 \end{cases} \quad (2) \quad (a=0) f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 4x}{x} & x > 0 \\ 4 + e^{\frac{1}{x}} & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$(a=\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (4) \quad (a=0) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (3)$$

$$(a=-\infty) f(x) = \frac{|x|}{x} \quad (5)$$

הערה חשובה מאוד !

במרבית קורסי החדו"א לומדים בהמשך את כלל לופיטל לחישוב גבולות (ראה פרק 8). בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 2, 3 ו-4.

פרק 11 - גזירה של פונקציה

***הסעיפים הרלוונטים לך בפרק זה הם סעיפים 1-19

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 27-29 גזור פעם אחת):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

פתרונות – פרק 11

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2) \qquad f'(x) = \frac{2x^2 - 8}{4x^2}, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4) \qquad f'(x) = \frac{4x}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{4(1-2x)}{(x+1)^4} \quad (3)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6) \qquad f'(x) = \frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}, \quad f''(x) = \frac{6x}{(x+1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8) \qquad f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3} \quad (7)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10) \qquad f'(x) = \ln x + 1, \quad f''(x) = \frac{1}{x} \quad (9)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12) \qquad f'(x) = \frac{1}{2(2-x)}, \quad f''(x) = \frac{1}{(4-2x)^2} \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[\frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad (15) \qquad f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 + 2x}{x^4} \right) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (16)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3 \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1 + 5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (19)$$

(20)

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3)$$

(21)

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4)$$

(22)

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x$$

(23)

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$$

(24)

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2)$$

(25)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}, \quad f''(x) = \frac{2x + 3}{2(-x^2 - 3x - 2)^{3/2}}$$

(27)

(26)

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$$

(29)

(28)

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left(\frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x)$$

נוסחאות – גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

נוסחאות – נגזרות

1. $y = a \rightarrow y' = 0$
2. $y = f^n \rightarrow y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
3. $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
4. $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot f' \cdot \ln a$
5. $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{1}{f} \cdot f'$
6. $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
7. $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
8. $y = \tan f \rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$
9. $y = \cot f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$
10. $y = \arcsin f \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
11. $y = \arccos f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$
12. $y = \arctan f \rightarrow y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
13. $y = \operatorname{arccot} f \rightarrow y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$
14. $y = \sinh f \rightarrow y' = \cosh f \cdot f'$
15. $y = \cosh f \rightarrow y' = \sinh f \cdot f'$
16. $y = \tanh f \rightarrow y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$
17. $y = \operatorname{coth} f \rightarrow y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$
18. $y = f(x)^{g(x)} \rightarrow y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x)))'$

נוסחאות – אינטגרלים

$$\int adx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \tan x dx = -\ln |\cos x| + c$$

$$\int \cot x dx = \ln |\sin x| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$$

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + c$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a} \frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \ln |\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot(ax+b) dx = \frac{1}{a} \ln |\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln \left| \frac{1}{\cos x} + \tan x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin x} dx = \ln \left| \frac{1}{\sin x} - \cot x \right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln |f| + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

נוסחאות – טריגו

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\begin{cases} \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \\ \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \\ \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \\ \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = (\pi - \alpha) + 2\pi k \end{cases} \\ \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2\pi k \\ x = -\alpha + 2\pi k \end{cases} \\ \tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \\ \cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

נוסחאות – אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$

נוסחאות - טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן

תחום התכנסות

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \quad -\infty < x < \infty$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x^1 + x^2 + x^3 + \dots \quad -1 < x < 1$$

$$(1+x)^m = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{n!} x^n \quad \begin{array}{l} -1 \leq x \leq 1 \ (m > 0) \\ -1 < x \leq 1 \ (-1 < m < 0) \\ -1 < x < 1 \ (m \leq -1) \\ m \neq 0, 1, 2, 3, \dots \end{array}$$

$$= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} x^3 + \dots$$