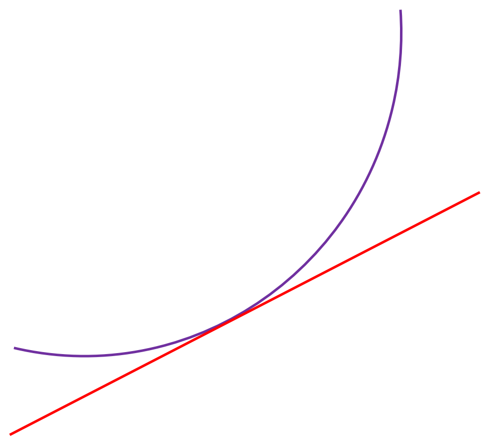
חדו"א

ווקטורים



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחדו"א ווקטורים והוא מתאים לתלמידים הלומדים 4 יח"ל במכינה של אוניברסיטת תל אביב.

הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

GooL.co.il

גוּל, בִּשְׁבִיל התִרגוּל...

תוכן

פרק 1 - חישוב נגזרת של פונקציה........ 3
פרק 2 - בעיות משיקים........ 6
פרק 3 - חקירת פונקציה........ 7
פרק 4 - חקירת פונקציה ("שאלות מסביב") 12
פרק 5 - בעיות מקסימום ומינימום........ 14
פרק 6 - אינטגרלים מיידיים........ 21
פרק 7 - אינטגרלים טריגונומטריים 22
פרק 8 - שימושי האינטגרל המסויים (חישוב שטחים)........ 23
פרק 9 – וקטורים........ 29
נספח – דפי נוסחאות........ 38

תרגילים – פרק 1

גזירה של פונקציה

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 27-29 גזור פעם אחת) :

1) $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$
2) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$
3) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$
5) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$
6) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

7) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$
8) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
9) $f(x)=x\cdot\ln x$

10) $f(x)=x^2\cdot\ln x$
11) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$
12) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

13) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$
14) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$
15) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

16) $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$
17) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$
18) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

19) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$
20) $f(x)=\sin(x^3)$
21) $f(x)=\cos(x^4)$

22) $f(x)=\sin^3 x$
23) $f(x)=\tan(x^2)$
24) $f(x)=\ln(\cos x^2)$

פתרונות – פרק 1

(1
$$f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\quad f''(x)=\frac{4}{x^3}$$

(2
$$f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\quad f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$$

(3
$$f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$$

(4
$$f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\quad f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$$

(5
$$f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$$

(6
$$f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\quad f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$$

(7
$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

(8
$$f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\quad f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$$

(9
$$f'(x)=\ln x+1,\quad f''(x)=\frac{1}{x}$$

(10
$$f'(x)=x(2\ln x+1),\quad f''(x)=2\ln x+3$$

(11
$$f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\quad f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$$

(12
$$f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\quad f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$$

(13
$$f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\quad f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$$

(14
$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$$

(15
$$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$$

(16
$$f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\quad f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$$

(17
$$f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$$

(18
$$f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\quad f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$$

(19
$$f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$$

(20
$$f'(x)=\cos(x^3)\cdot 3x^2,\quad f''(x)=-9x^4\sin(x^3)+6x\cdot\cos(x^3)$$

(21

$$f'(x)=-\sin(x^4)\cdot 4x^3,\ \ f''(x)=-16x^6\cos(x^4)-12x^2\cdot\sin(x^4)$$

(22

$$f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x,\ \ f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$$

(23

$$f'(x)=\frac{2x}{\cos^2(x^2)}\ ,\ \ f''(x)=\frac{2\cdot\cos^2(x^2)-8x^2\cos(x^2)\sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$$

(24

$$f'(x)=\tan(x^2)\cdot(-2x),\ \ f''(x)=\frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)}-2\tan(x^2)$$

תרגילים – פרק 2

בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)

(1) הישר $y = x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר $y = 4x + b$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר $y = 3x$ משיק לגרף הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + b$. מצא את b ואת נקודת ההשקה.

(4) הישר $y = ax + \frac{1}{2}$ משיק לגרף הפונקציה $g(x) = \frac{2}{x+c}$ בנקודה $x = 0$. מצא את a ו- c .

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $x = e$.

(6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 1$ בנקודה $x = 0$.

(7) מצא את משוואת המשיק למעגל $x^2 + y^2 = 25$ בנקודה $(3,4)$.

(8) הפונקציות $y = \frac{1}{x}$ ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$ משיקות זו לזו. מצא את k ואת נקודת ההשקה.

(9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.

א) $y = x^2 - 2x + 1$ $\quad (2,-3)$ $\qquad$ ב) $y = \sqrt{x}$ $\quad (-3,1)$

פתרונות – פרק 2

(1) נקודת ההשקה היא $(0,1)$ ומשוואת המשיק היא $y = x + 1$.

(2) נקודת ההשקה היא $(-1,5)$ ומשוואת המשיק היא $y = 4x + 9$.

(3) נקודת ההשקה היא $(4,12)$ ו- $b = 4$.

(4) נקודת ההשקה היא $(0,\frac{1}{2})$ ומשוואת המשיק היא $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$.

(5) משוואת המשיק היא $y = \frac{1}{e}x$.

(6) משוואת המשיק היא $y = 1$.

(7) משוואת המשיק היא $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$

(8) $k = 1.5$, נקודת ההשקה $(1,1)$.

(9) א) $(0,1)$, $y = -2x + 1$ $\quad$, $\quad$ $(4,9)$, $y = 6x - 15$

ב) המשיק: $(9,3)$, $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$.

תרגילים – פרק 3
חקירת פונקציה

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא : תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים*, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות **, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, גרף .

1) $f(x)=x(x-9)^2$

2) $f(x)=x^4-2x^3$

3) $f(x)=\frac{x-1}{x^2}$

4) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

5) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

6) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

7) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

8) $f(x)=\frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)}$

9) $f(x)=\frac{x^2-4x+3}{x^2-4}$

10) $f(x)=\frac{x^3-x^2}{x^2-1}$

14) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

15) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-3$

16) $f(x)=4\ln^2 x-4\ln x-3$

19) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

22) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

29) $f(x)=2\cos^2 x-\sin 2x$ $(0\le x\le \pi)$

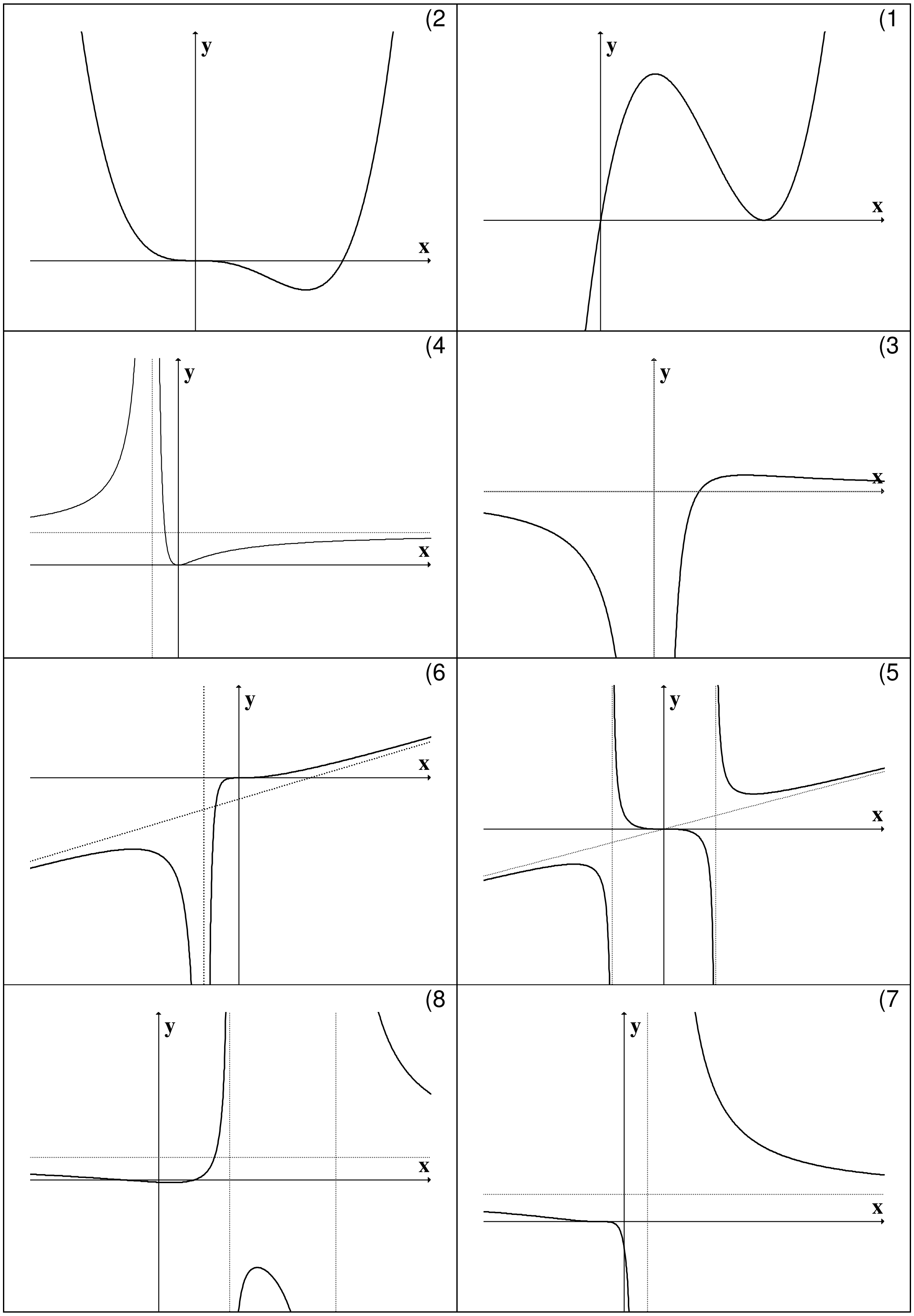
30) $f(x)=8\cos x+2\cos 2x-3$ $(0\le x\le 2\pi)$

הערות:

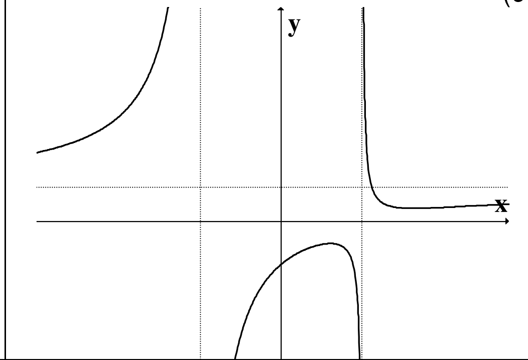
** בתרגילים 1,2 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).

פתרונות – פרק 3

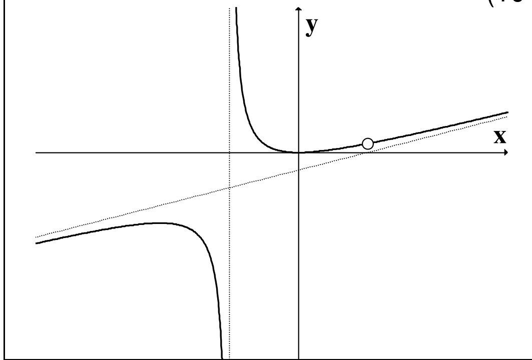
(1)



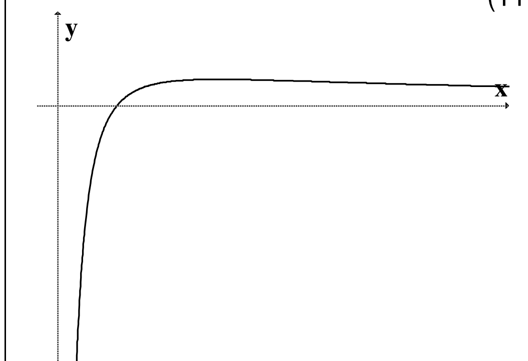
(9



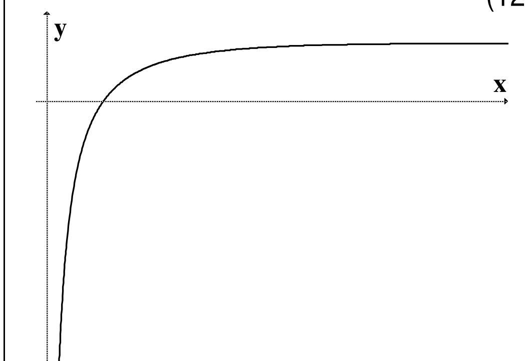
(10



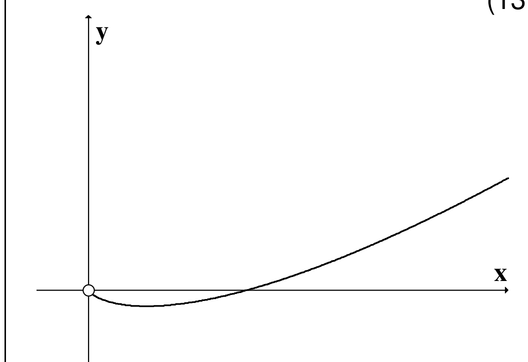
(11



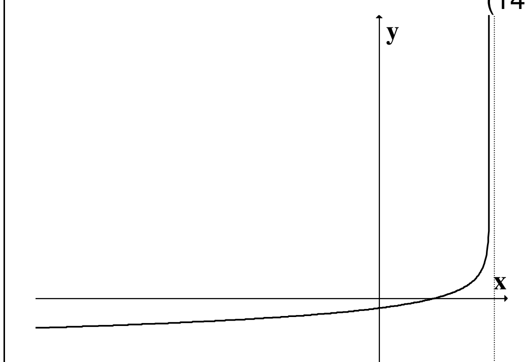
(12



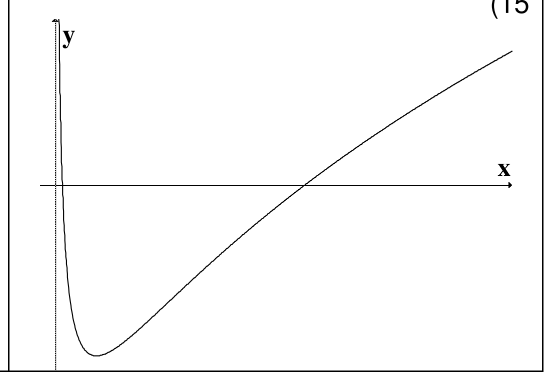
(13



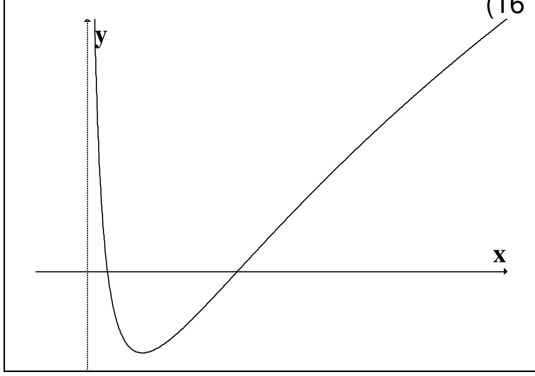
(14



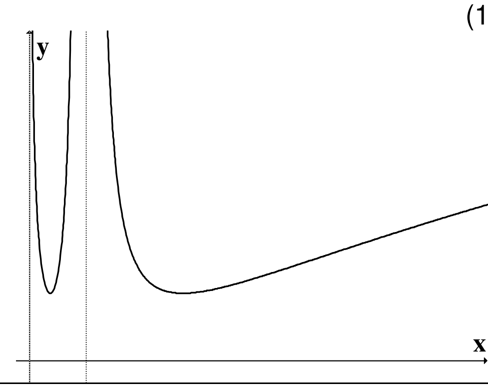
(15



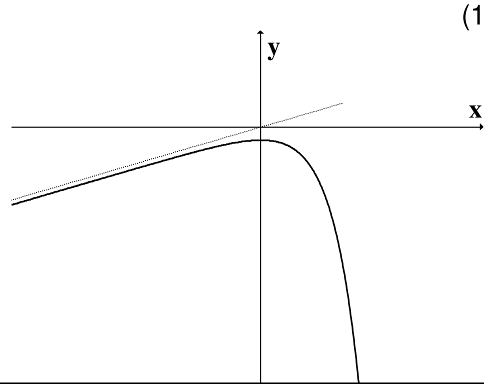
(16



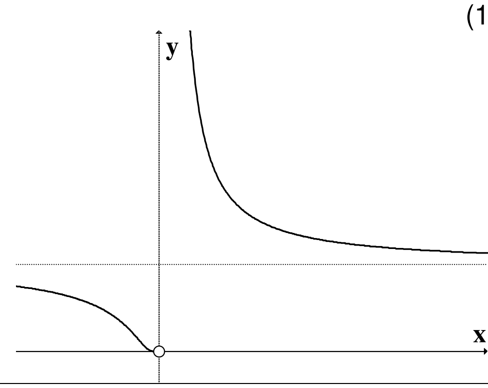
(17



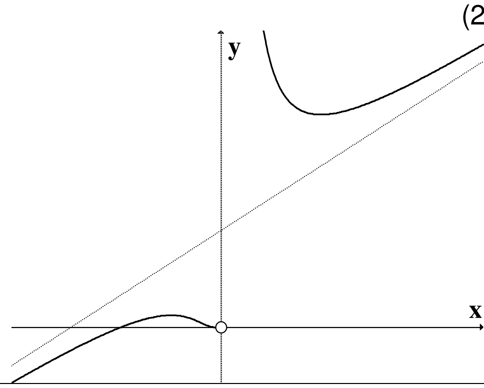
(18



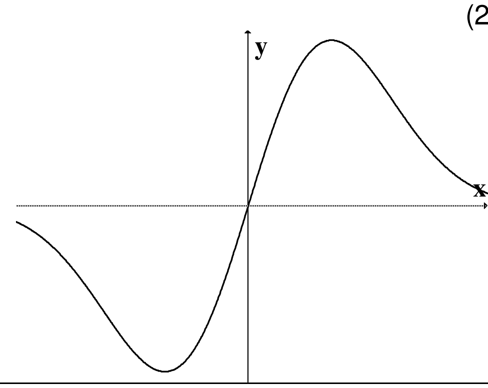
(19



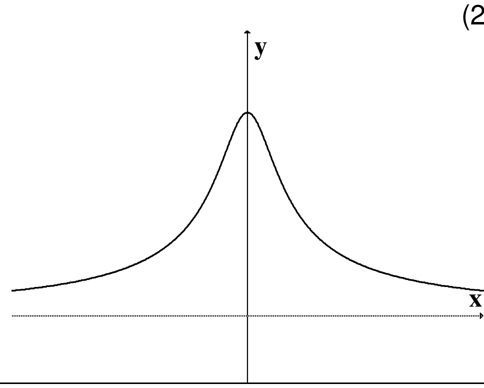
(20



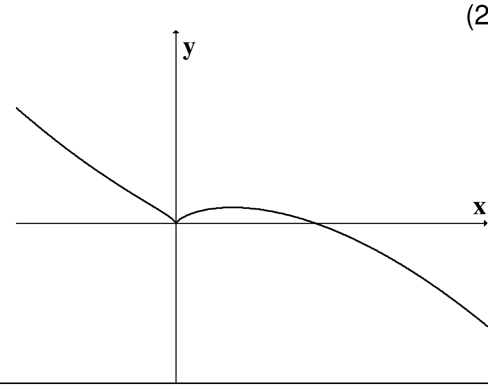
(21



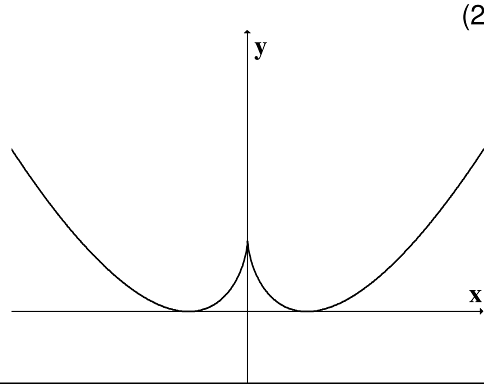
(22

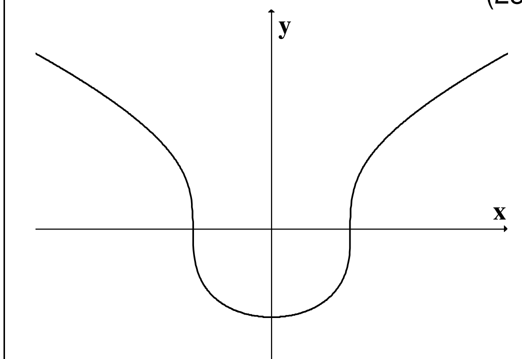


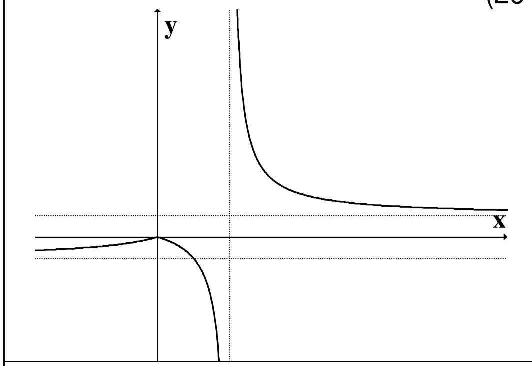
(23

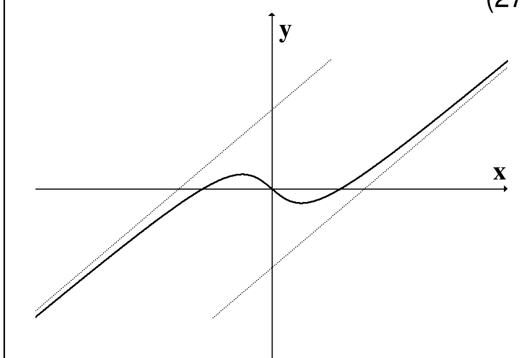


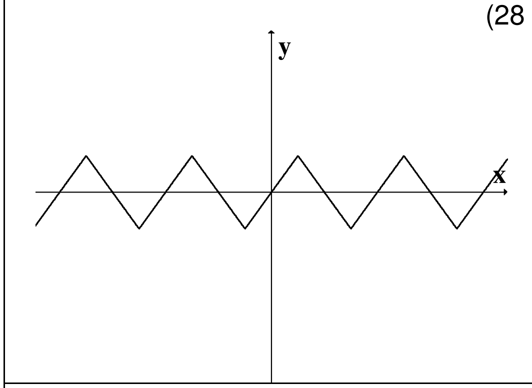
(24

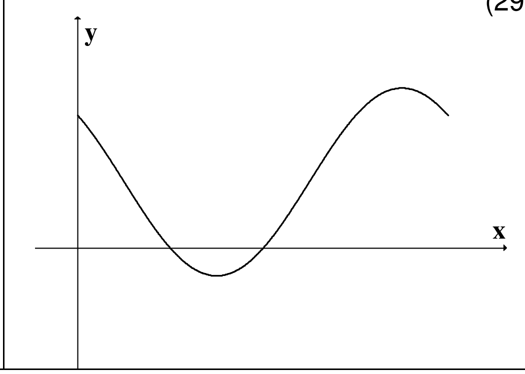


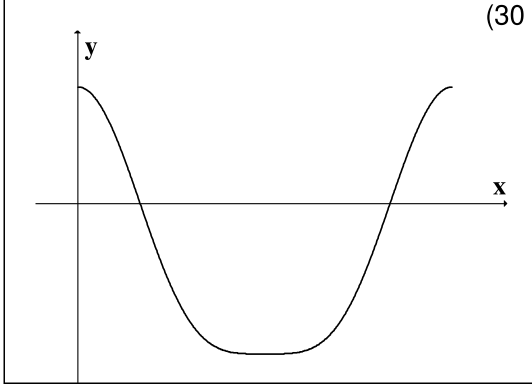
(25


(26


(27


(28


(29


(30


תרגילים – פרק 4

חקירת פונקציה – "שאלות מסביב"

(1)

א) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$. ידוע שהנקודה $x=1$ נקודת קיצון. מצא את הקבוע a .

ב) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$. ידוע שהנקודה $(1,2)$ נקודת קיצון.

מצא את הקבועים a,b .

ה) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+x^2$ שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $x=3$ הוא 33.

מצא את a .

ו) נתונה הפונקציה $f(x)=ax^3+bx^2$. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $(3,9)$ הוא 12.

מצא את a,b .

ז) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax^3+x^2}{2x^3+x+6}$. ידוע שהישר $y=4$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

ח) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{ax^2+2x+4}{x}$. ידוע שהישר $y=0.5x+1$ אסימפטוטה לגרף

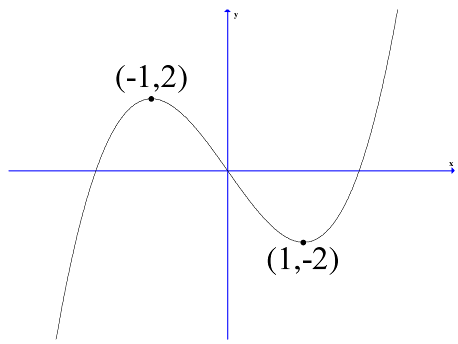
הפונקציה. מצא את a .

ט) נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{x^2+2x+4}{x^2+ax+6}$ ידוע שהישר $x=1$ אסימפטוטה לגרף הפונקציה.

מצא את a .

(2) לפניך גרף הפונקציה $f(x)=x^3-3x$

א. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=5$.
ב. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=2$.
ג. מהו מספר הפתרונות של המשוואה $f(x)=0.5$.
ד. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק פתרון אחד.
ה. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שני פתרונות.
ו. עבור איזה ערך של k למשוואה $f(x)=k$ יש בדיוק שלושה פתרונות.
ז. האם קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x)=k$ אין פתרון.
ח. מצא את התחומים בהם הפונקציה היא חח"ע.



<u>פתרונות – פרק 4</u>

(1)

א) $a=-\frac{2}{3}$
ב) $b=6, a=-4$.
ג) $a=-\frac{1}{3}$
ד) $b=3, a=-1$.
ה) $a=1$.
ו) $b=-1$, $a=\frac{2}{3}$
ז) $a=8$
ח) $a=0.5$
ט) $a=-7$

(2)

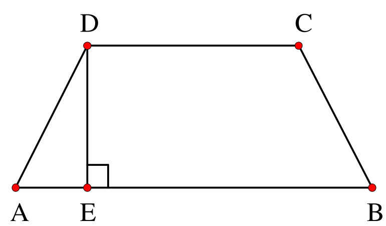
א) 1
ב) 2
ג) 3
ד) $k>2$ או $k<-2$.
ה) $k=\pm 2$.
ו) $-2<k<2$
ז) לא
ח) $x<-1$ או $-1<x<1$
או $x>1$

תרגילים – פרק 5
בעיות מקסימום ומינימום

הערה: בפרק זה, סומנו התרגילים הקשים יותר בכוכבית *

בעיות בהנדסת המישור

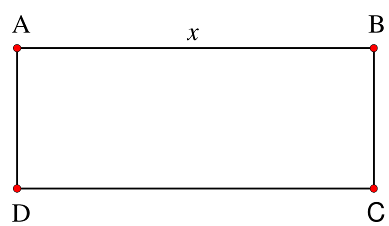
(1) בטרפז שווה-שוקיים ABCD (AB||CD) אורך השוק הוא 4 ס"מ ואורך הבסיס הקטן הוא 6 ס"מ. DE הוא הגובה מקדקוד D (ראהציור). מה צריך להיות אורך הקטע AE כדי ששטח הטרפז יהיה מקסימלי?



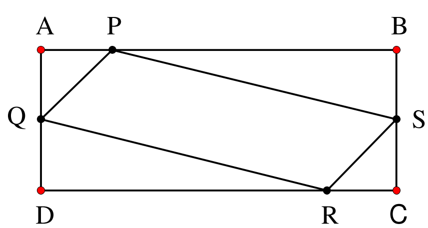
(2) נתון מלבן ABCD. נסמן ב- x את אחת מצלעות המלבן (ראה ציור).

א) אם היקף המלבן הוא 60 ס"מ בטא באמצעות x את שטח המלבן.

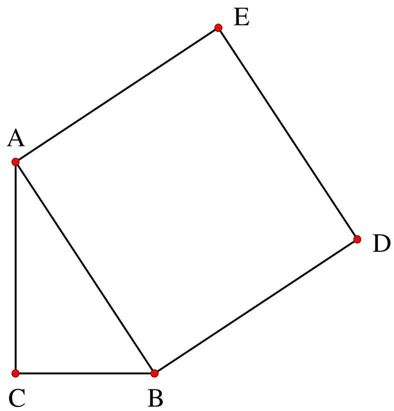
ב) אם היקף המלבן הוא p מצא מה צריכים להיות אורכי צלעות המלבן כדי ששטחו יהיה מקסימלי (הבע את אורכי הצלעות באמצעות p).



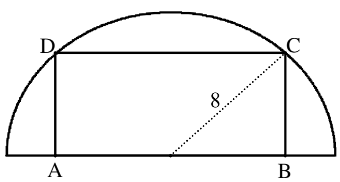
(3) נתון מלבן ABCD כך ש- $AD = BC = 5$ס"מ, $AB = CD = 10$ס"מ. על צלעות המלבן מקצים קטעים: $AP = AQ = CS = CR = x$ (ראה ציור). מה צריך להיות ערכו של x כדי ששטח המקבילית PQRS יהיה מקסימלי?



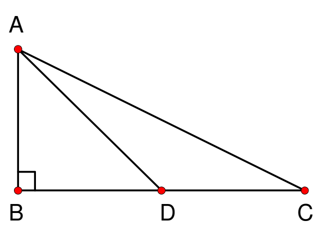
(4) במשולש ישר זווית ΔABC $(\sphericalangle C = 90^\circ)$ סכום אורכי הניצבים הוא 8 ס״מ. על היתר AB בונים ריבוע ABDE. מה צריכים להיות אורכי הניצבים, כדישטח המחומש AEDBC יהיה מינימלי.



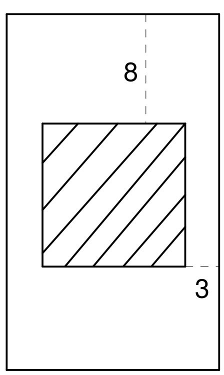
(5) בחצי עיגול שרדיוסו 8 ס״מ חוסמים מלבן ABCD , כך שהצלע AB של המלבן מונחת על הקוטר, והקדקודים C ו- D מונחים על הקשת(ראה ציור). מה צריך להיות אורך הצלע AB כדי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



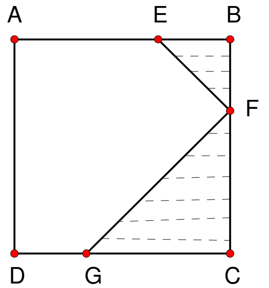
(6) במשולש ישר-זווית ΔABC $(\sphericalangle B = 90^\circ)$, סכום אורכי הניצבים הוא 30 ס״מ. AD הוא תיכון לניצב BC (ראה ציור).
חשב מה צריכים להיות אורכי הניצבים, על מנת שריבוע אורך התיכון יהיה מינימלי.



(7) בחוברת פרסום, שטח כל עמוד הוא 600 סמ״ר.
רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו הוא 8 ס״מ, ורוחב השוליים בצדדים הוא 3 ס״מ.
מצא מה צריך להיות האורך והרוחב של כל עמוד, כדי שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי (השטח המקווקו בציור).



(8) בריבוע ABCD הנקודות E , F , G נמצאות על הצלעות AB , BC , DC בהתאמה, כך ש- BE = BF , CF = CG (ראה ציור).



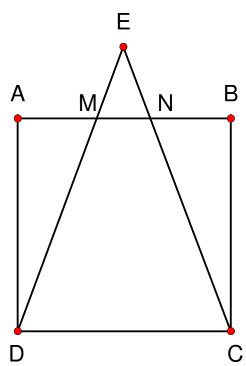
נתון כי האורך של צלע הריבוע הוא 6 ס״מ.

א. סמן ב- x את BF ואת BE , והבע באמצעות x את הסכום של שטחי המשולשים EBF ו- FCG (השטח המקווקו בציור).

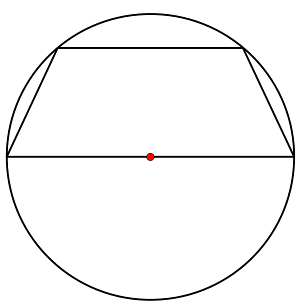
ב.1. מצא את x שעבורו סכום שטחי המשולשים הוא מינימלי.

ב.2. חשב את הסכום המינימלי של שטחי המשולשים.

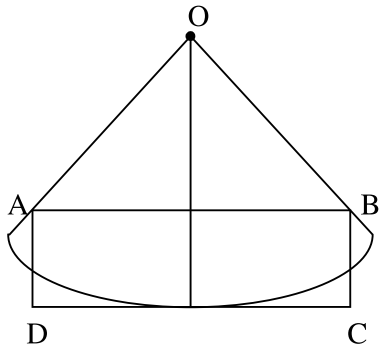
(*9) נתון ריבוע ABCD שאורך צלעו 10 ס״מ. E היא נקודה כלשהי מחוץ לריבוע, כך שהמשולש DEC הוא שו״ש (ED = EC). שוקי המשולש חותכים את הצלע AB בנקודות M ו- N (ראה ציור). מצא מה צריך להיות אורך הקטע AM כדי שהסכום של שטחי המשולשים EMN , AMD , BNC יהיה מינימלי.



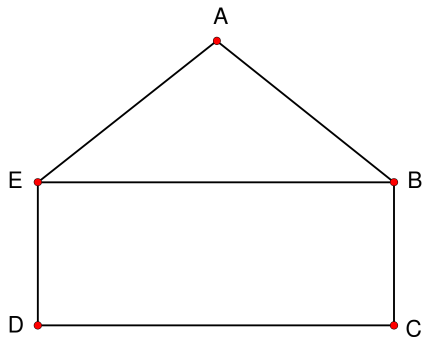
(*10) נתון מעגל שרדיוסו R . במעגל זה חסום טרפז שו״ש, כך שהבסיס הגדול של הטרפז הוא קוטר במעגל (ראה ציור). מבין כל הטרפזים החסומים באופן זה, הבע באמצעות R את אורך הבסיס הקטן בטרפז ששטחו מקסימלי.



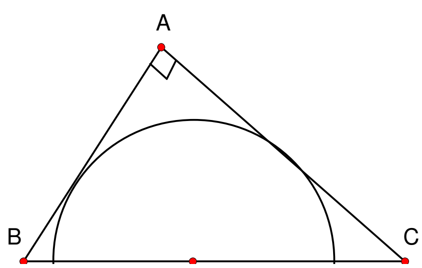
(11*) נתונה גזרה של רבע עיגול שמרכזו O ורדיוסו 10 ס"מ.
בונים מלבן ABCD, כך שרבע המעגל משיק לצלע DC
בנקודת האמצע שלה, והקודקודים A ו- B נמצאים על
הרדיוסים התוחמים את הגזרה (ראה ציור).
מבין כל האלכסונים של המלבנים ABCD שנוצרים
באופן זה, מצא את אורך האלכסון הקצר ביותר.



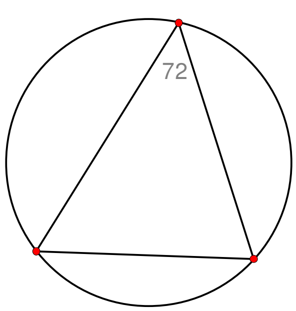
(12*) ABCDE הוא מחומש המורכב ממשולש ABE וממלבן
EBCD (ראה ציור).
נתון: BC = 2 ס"מ , AB = AE = 4 ס"מ .
מצא את השטח של המחומש ששטחו מקסימלי.



(13*) מתבוננים בכל המשולשים ישרי הזווית ABC
החוסמים חצי מעגל שרדיוסו R כמתואר בציור.
מהן זוויות המשולש שסכום הניצבים שלו הוא
מינימלי?

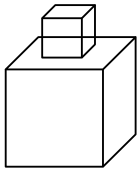


(14*) במעגל שרדיוסו R חסומים משולשים כך שהגודל של
אחת הזוויות בכל אחד מהמשולשים הוא $\frac{2\pi}{5}$.
מצא את הזוויות במשולש בעל ההיקף המקסימלי.

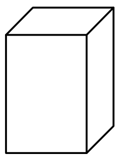


<u>בעיות בהנדסת המרחב</u>

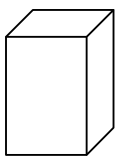
(15) גובהו של "מגדל" הבנוי שמתי קוביות(לאו דווקא שוות) הוא 8 ס"מ. מה צריך להיות אורך המקצוע ש הקובייה התחתונה כדי שנפח המגדל (סכום נפחי הקוביות) יהיה מינימלי ?



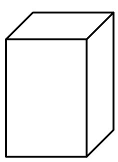
(16) בונים תיבה שגובהה y ס"מ, ובסיסה ריבוע, שאורך צלעו x ס"מ (ראה ציור), כך שההיקף של כל אחת מהדפנות הצדדיות שווה ל- 12 ס"מ. מה צריך להיות אורך צלע הבסיס כדי שנפח התיבה יהיה מקסימלי?



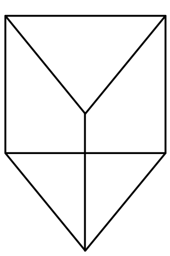
(17) יש לבנות תיבה <u>פתוחה מלמעלה</u>, שבסיסה ריבוע ושטח פניה 75 סמ"ר (במקרה זה שטח הפנים מורכב מבסיס אחד ומארבע פאות צדדיות). מכל התיבות שאפשר לבנות, מצא את ממדי התיבה (צלע הבסיס וגובה) שנפחה מקסימלי.

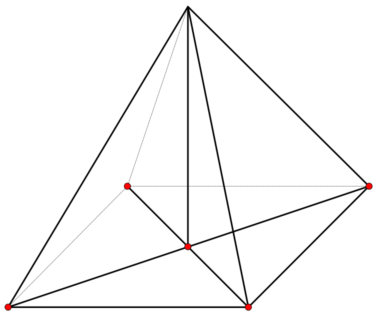


(18) יש להכין מחוט תיל "שלד" (מסגרת) של תיבה, שבסיסה ריבוע ונפחה 1000 סמ"ק. מהו האורך המינימלי של החוט הנחוץ ליצירת התיבה?



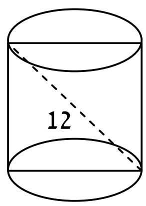
(19) מחוט שאורכו a ס"מ יש לבנות מנסרה משולשת ישרה, שבסיסה הוא משולש שווה צלעות.
מצא איזה חלק מאורך החוט יש להקצות לצלע הבסיס x ואיזה חלק לגובה y כדי שיתקיים :
א. שטח המעטפת של המנסרה יהיה מקסימלי.
ב. נפח המנסרה יהיה מקסימלי.



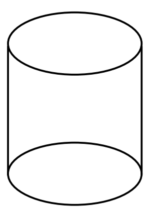


(20*) מכל הפירמידות המרובעות, המשוכללות והישרות, שאורך המקצוע הצדדי שלהן הוא a , מצא את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.

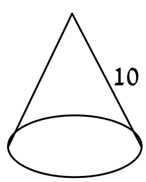
(21*) מכל הפירמידות הישרות , שבסיסן ריבוע ושטח הפנים שלהן הוא 200 סמ"ר, חשב את נפחה של הפירמידה בעלת הנפח המקסימלי.



(22) אלכסון החתך הצירי של גליל ישר הוא 12 ס"מ (ראה ציור). מצא מה צריכים להיות גובה הגליל ורדיוס בסיסו כדי שנפחו יהיה מקסימלי.



(23) נתון מיכל גלילי פתוח מלמעלה שקיבולו 64 מ"ק. המיכל עשוי כולו מפח. הראה כי שטח הפח הוא מינימלי כאשר רדיוס הבסיס הוא $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ מטר.



(24) מבין כל החרוטים שאורך הקו היוצר שלהם הוא 10 ס"מ (ראה ציור), מהו נפח החרוט שנפחו מקסימלי?

פתרונות – פרק 5

(1) $AE=1.7_{cm}$. **(2)** א. $(30-x)$. ב. כל צלע שווה ל- $0.25p$. **(3)** $x=3.75_{cm}$.

(4) $AC=BC=4_{cm}$. **(5)** $AB=2\sqrt{32}_{cm}$. **(6)** $B=6_{cm},\ BC=24_{cm}$. **(7)** אורך: 40 ס"מ

רוחב: 15 ס"מ. **(8)** א. $S=x^2-6x+18$. ב.1. $x=3$. ב.2. 9 סמ"ר. **(9)** $AM=5/\sqrt{2}$.

(10) בסיס קטן $= R$. **(11)** $4\sqrt{5}_{cm}$. **(12)** $12\sqrt{3}$ סמ"ר. **(13)** $45^{\circ}, 45^{\circ}, 90^{\circ}$.

(14) $\frac{2\pi}{5}, \frac{3\pi}{10}, \frac{3\pi}{10}$. **(15)** 4 ס"מ. **(16)** 4 ס"מ. **(17)** צלע הבסיס: 5 ס"מ. גובה: 2.5

ס"מ. **(18)** 120 ס"מ. **(19)** א. $y=\frac{1}{6}a$, $x=\frac{1}{12}a$. ב. $x=y=\frac{1}{9}a$. **(20)** $\frac{4\sqrt{3}}{27}a^3$.

(21) $\frac{500}{3}$ סמ"ק. **(22)** גובה: $\sqrt{48}$ ס"מ. רדיוס: $\sqrt{24}$ ס"מ. **(24)** 403.1 סמ"ק.

(25) א. $A(3,6)$. ב. $A(0,0)$ או $A(5,5)$. **(26)** $CD=2\sqrt{3}$. **(27)** א. $A(1,8)$. ב. 32.

(28) א. $AB=4$. ב. $S_{\Delta AOB}=16$. **(29)** א. $x=1$. ב. אין. **(30)** $PQ=4$.

(31) $M(4,2)$. **(32)** $(1.5,0.5)$. **(33)** 8. **(34)** $(0.5,0.75)$.

(35) א. $B(\sqrt{(2a-1)/2},(2a-1)/2)$. ב. 4.25. **(36)** א. $y=2t\cdot x-t^2$. ב. $t=-3/37$.

(37) $M(0.845,0)$.

תרגילים – פרק 6

האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי)

חשב את האינטגרלים הבאים :

1) $\int 4dx$

2) $\int x^4 dx$

3) $\int \frac{1}{x^2} dx$

4) $\int \sqrt{x} dx$

5) $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

6) $\int 4x^{10} dx$

7) $\int (2x^2 - x + 1) dx$

8) $\int (\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}) dx$

9) $\int (x^2+1)^2 dx$

10) $\int (x^2+1)(x+2) dx$

11) $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$

12) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

13) $\int (4x+1)^{10} dx$

14) $\int (x^2-2x+1)^{10} dx$

15) $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

16) $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$

17) $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$

18)

19)

20)

21) $\int \frac{1}{4x} dx$

22) $\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$

23) $\int (1+\frac{1}{x})^2 dx$

24) $\int \frac{1}{4x-1} dx$

25) $\int \frac{x+3}{x+2} dx$

26) $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$

27) $\int (e^{4x} + e^{-x}) dx$

28) $\int \left(e^{x+1}\right)^2 dx$

29) $\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx$

30) $\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx$

31)

32)

33)

34) $\int \cos 4x dx$

35) $\int \sin\frac{x}{2} dx$

36) $\int 2\sin 4x + \cos x dx$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

תרגילים – פרק 7
האינטגרל הלא מסוים (אינטגרלים טריגונומטריים)

אינטגרלים טריגונומטריים (בעזרת זהויות בלבד)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

1) $\int(\sin 2x-4\cos\frac{x}{3})dx$

4) $\int\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$

5) $\int\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)dx$

6) $\int(\sin x+\cos x)^2 dx$

7) $\int\sin x\cos x\cos 2x dx$

10) $\int\sin 7x\cos 5x dx$

2) $\int\frac{1}{\cos^2 4x}dx$

3) $\int\frac{1}{\sin^2 10x}$

8) $\int\tan^2 x dx$

11) $(\cos x\cos 2x+\sin x\sin 2x)dx$

9) $\int\frac{1}{(\sin x\cos x)^2}dx$

12) $\int(\sin^4 x+\cos^4 x)dx$

13) $\int\cos^2 x dx$

14) $\int\sin^2 4x dx$

15) $\int\cos^3 x dx$

16) $\int\sin^3 4x dx$

17) $\int\cos^4 x dx$

18) $\int\sin^4 2x dx$

19) $\int\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

20) $\int\frac{\sin 5x-\sin x}{\sin 4x-\sin 2x}dx$

21) $\int\frac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x+1}dx$

22) $\int\frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

23) $\int\frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

24) $\int\sin^2 x\cos^4 x dx$

תרגילים - פרק 8
שימושי אינטגרל המסוים (שטחים)

חישוב שטחים

(1) נתונות שתי פונקציות:

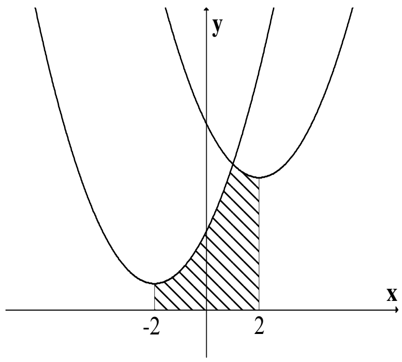
$$f(x)=x^2+4x+6$$
$$g(x)=x^2-4x+14$$

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים

x = -2 ו- x = 2 (השטח המקווקו בציור).



(2) נתונה הפונקציה $y=-x^2+6x-5$ (ראה ציור).

א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של

הפונקציה.

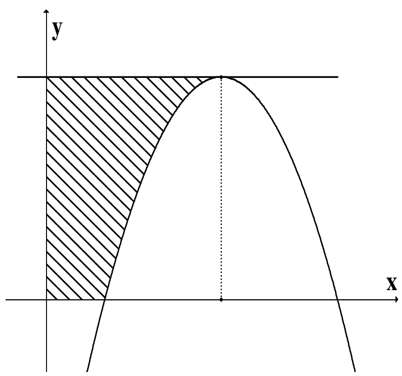
ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק

בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי

גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציור).

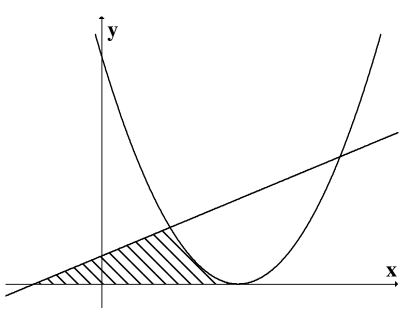


(3) נתונה הפונקציה $f(x)=(x-2)^2$ ונתון הישר

$y=0.5x+0.5$ (ראה ציור). מצא את השטח

המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x

(השטח המקווקו בציור).

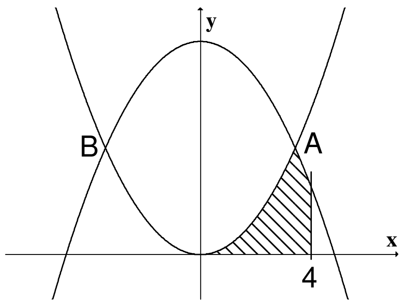


(4) נתונות הפונקציות :

$$f(x)=x^2$$
$$g(x)=-x^2+18$$

הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו- B

(ראה ציור).



א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות A ו- B.

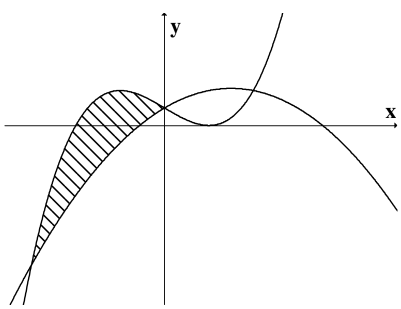
ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי

הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל

ידי הישר x = 4 .

(5) נתונות שתי פונקציות :

$$y=-x^2+3x+2$$
$$y=x^3-3x+2$$



א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין

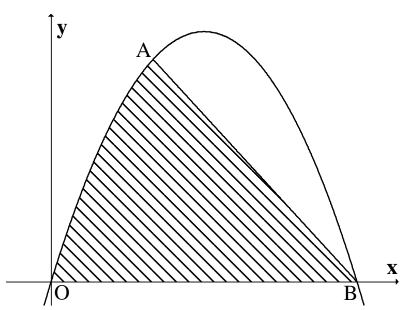
הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, השטח המקווקו בציור.

(6) נתונה הפונקציה $f(x)=-x^2+ax$.

הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2,8)$ (ראה ציור).



א. מצא את ערך הפרמטר a .

ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה O(0,0)

ובנקודה B . מצא את שיעורי הנקודה B.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

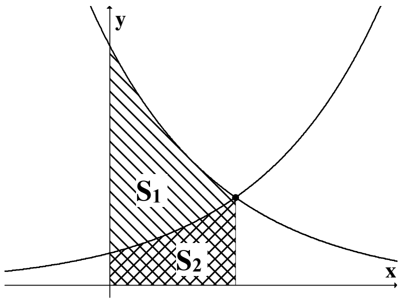
הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר

ה- x .

(7)

בציור שלפניך נתונות שתי הפונקציות :

$$f(x)=e^{-x+2}$$
$$g(x)=e^{x}$$



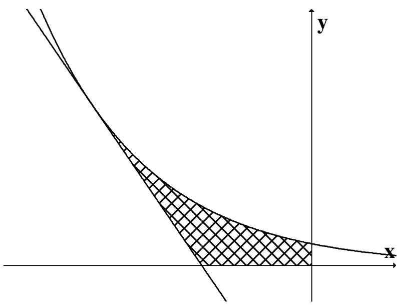
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר y .

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

ג. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ (ראה ציור).

(8)

נתונה הפונקציה $f(x)=e^{-2x}$.



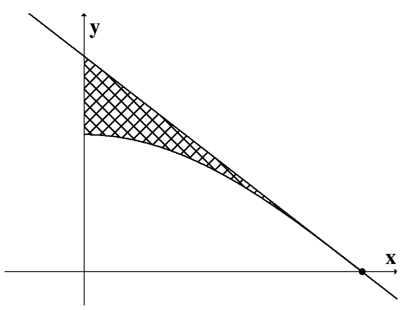
העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-1$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח המקווקו בציור).

(9)

נתונה הפונקציה $y=\cos 2x$ בתחום $0\le x\le 4$ (ראה ציור).



ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$.

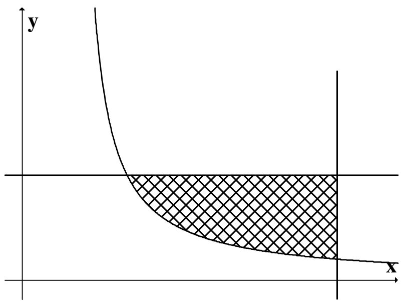
א. מצא את משוואת המשיק .

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(10) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

$y = \frac{1}{2x-1}$ ועל ידי הישרים $x = 3$ ו- $y = 1$

(השטח המקווקו בציור).

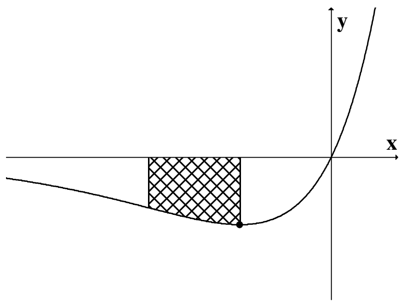


(11) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - e^{x}$.

לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.

א. מצא את שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך לציר ה- x . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל ידי הישר x=a , שווה ל- $3e^{2a} - e^{a}$, כאשר $a < \ln 0.5$. מצא את הערך של a .



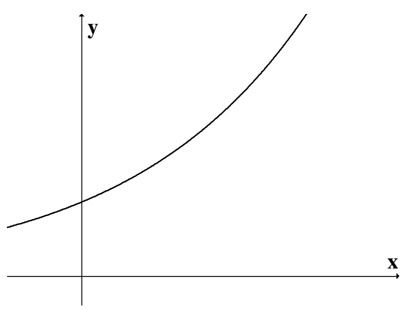
(12) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}$ (ראה ציור).

שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A, הוא $\frac{e^2}{2}$.

א. מצא את שיעורי הנקודה A .

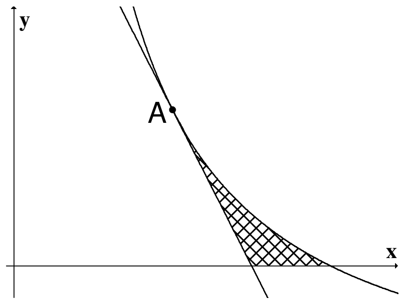
ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .



(13)

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{8}{x}-2$ בתחום $x>0$.



מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

$A(2,2)$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב.חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו

בציור).

(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x)=\sin x \ \ ; \ \ 0\le x\le \pi$$
$$g(x)=\cos 2x \ ; \ 0\le x\le \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקוו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15)

נתונה הפונקציה $f(x)=tg^2x$ בתחום $-\frac{\pi}{2}<x\le 0$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=-\frac{\pi}{4}$.

ב. הראה כי $\int tg^2xdx=tgx-x+c$ ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x .

(16) דרך הנקודה $A(8,0)$ העבירו משיקים לפרבולה $y=x^2-10x+25$.

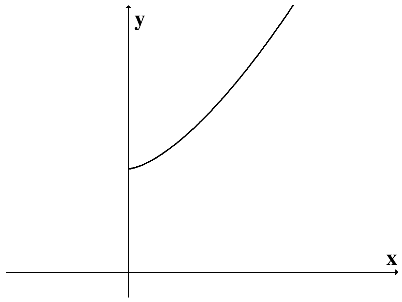
א. מצא את משוואות המשיקים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.

(17)

נתונה הפונקציה $f(x)=x\sqrt{x}+4$ בתחום $x\geq 0$.

(ראה ציור)



א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה (0,0) ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .

(18)

א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x)=\cos^3 x$.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x ועל ידי גרף הפונקציה $y=\cos^2 x\cdot\sin x$ בתחום $\frac{1}{2}\pi\leq x\leq\frac{3}{2}\pi$.

* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

תרגילים – פרק 9

וקטורים

הערה: אנו נסמן את הוקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים: $\mathbf{u}$, $\vec{u}$.

את גודל הוקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.

גודל וקטור נקרא גם אורך הוקטור וגם הנורמה של הוקטור.

(1) מצא את x , y ו- z אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

(2) נתונים הוקטורים: $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{w}=(2,6,-5)$. חשב:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$ ד. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ה. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

ו. $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$ ז. $\underline{u}/|\underline{u}|$ ח. $d(\underline{u},\underline{v})$ ט. $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$ י. $proj(\underline{u},\underline{v})$

* בסעיפים ז,ח,י הסבר את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

(3) נתונות הנקודות: $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$. מצא את הוקטורים הבאים:

א. $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$ ב. $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ ג. $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

(4) א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר $x=(1,2,3)+t(4,5,6)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x , y ו- z.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינטות $x=1+2t$, $y=10$, $z=4-t$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(5) נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו- B 2. B ו- C 3. A ו- C

ב. מי מבין הנקודות $D=(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם.

ג. חשב את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

(6) א. מצא במרחב הצגה פרמטרית של ציר ה- x , ציר ה- y וציר ה- z.

ב. מצא הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודה $(4,5,6)$ ומקביל לציר z.

(7) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$ והמאונך לישר

$\underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

(8) מצא במרחב הצגה פרמטרית של ישר ℓ_2 העובר דרך הנקודה $P(-4,1,1)$, מאונך לישר

$\ell_1:\ (2,-3,1)+t(1,4,-3)$ וחותך אותו.

(9) א. נתונה הצגה פרמטרית של מישור $\underline{x}=(1,-2,3)+t(2,0,1)+s(-4,1,5)$.

כתוב את ההצגה בעזרת הקואורדינטות x , y ו- z .

ב. נתונה הצגה של מישור בעזרת קואורדינטות $x=1+2t-s,\ y=10+t,\ z=4-t+s$.

כתוב את ההצגה הפרמטרית שלו.

(10) א. 1. הראה ששלוש הנקודות $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$ אינן נמצאות על ישר אחד ומצא

הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.

2. מצא את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ״ל.

ב. מצא שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שמצאת בסעיף א?

(11) נתונות הנקודות: $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.

א. מצא הצגה פרמטרית של הישר , המחבר את B עם C הראה כי הנקודה A לא נמצאת על

הישר הזה.

ב. חשב את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C .

ג. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

(12) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$ כמתואר בציור.

נתון: $|\overrightarrow{AA'}|=6$, $|\overrightarrow{AD}|=2$, $|\overrightarrow{AB}|=4$, $C'F=FB'$.

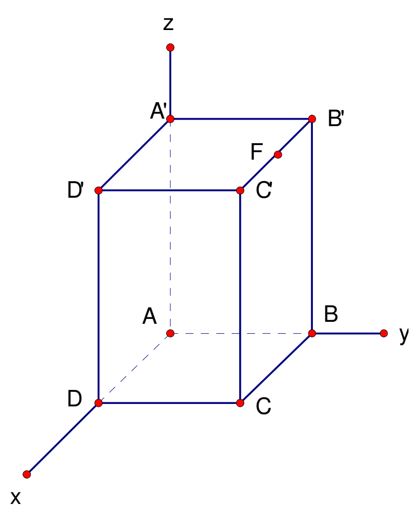
א. מצא הצגה פרמטרית של הישר העובר

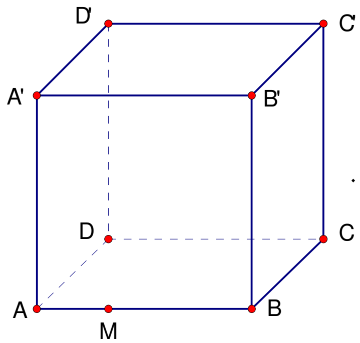
דרך הנקודה F ומאונך למישור העובר

העובר דרך $A'DB$.

ב. מצא את מרחק הנקודה F מהמישור העובר

העובר דרך $A'DB$.





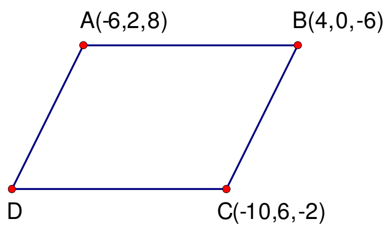
13) בתיבה $ABCDA'B'C'D'$ נתונים הקודקודים :

$A(7,-9,5),\ B(1,-3,-7),\ C(-5,-1,-3),\ C'(-1,7,-1)$.

הנקודה M מחלקת את המקצוע AB כך ש- $\overline{BM}=2\overline{MA}$.

א. חשב : $|\overline{MA'}|,\ |\overline{MC}|$.

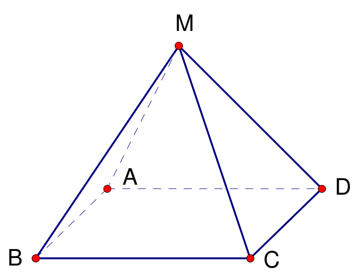
ב. חשב את שטח המשולש $\Delta A'MC$.



14) נתונה מקבילית $ABCD$ (ראה ציור).

א. מצא את קודקוד D .

ב. מצא את הזווית בין אלכסוניה של המקבילית.



15) נתונה פירמידה שבסיסה מקבילית $ABCD$

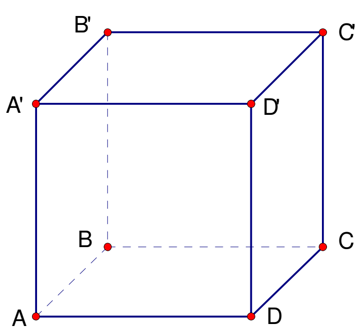
וקודקודה M (ראה ציור). נתון :

$A(3,6,-1),\ B(-1,2,-3),\ C(7,6,-3),\ M(4,-3,-4.5)$.

א. מצא את גודל זווית $\measuredangle ABC$.

ב. מצא את שטח בסיס הפירמידה.

ג. מצא את נפח הפירמידה.



16) נתונה תיבה $ABCDA'B'C'D'$.

נתון : $A(1,2,0),\ C(4,0,1),\ D(2,2,-1),\ B'(9,12,8)$

חשב את נפח התיבה.

(17) מצא את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבע אם הם :

נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.

א. $\underline{x} = (1,1,0) + s(2,4,0)$, $\underline{x} = (1,0,1) + t(1,2,0)$.

ב. $\underline{x} = (1,-1,0) + t(12,-3,1)$, $\underline{x} = (-2,2,4) + u(6,6,1)$.

ג. $\underline{x} = (2,3,1) + s(2,4,-2)$, $\underline{x} = (1,1,2) + t(1,2,-1)$.

ד. $\underline{x} = (2,0,3) + s(-1,-3,1)$, $\underline{x} = (1,-1,0) + t(0,2,-4)$.

במקרה בו הישרים נחתכים מצא גם את <u>נקודות החיתוך</u> ואת <u>הזווית</u> בין הישרים.

במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים מצא גם את <u>המרחק</u> ביניהם.

(18) נתונים שני ישרים :

$$\ell_1 : (x,y,z) = (4,3,1) + t(1,-3,2)$$
$$\ell_2 : (x,y,z) = (5,-1,4) + m(-1,3,5)$$

א. הראה כי הישרים מצטלבים.

ב. מצא משוואה של מישור שמכיל את ℓ_2 ומקביל ל- ℓ_1 .

ג. חשב את המרחק בין הישרים.

(19) נתונים שני ישרים :

$$\ell_1 : (x,y,z) = (3,1,1) + u(2,-1,-2)$$
$$\ell_2 : (x,y,z) = (3,9,-6) + m(6,2,-1)$$

א. מהו המצב ההדדי של הישרים?

ב. אם הישרים מקבילים או נחתכים, מצא את משוואת המישור המכיל אותם.

אם הישרים מצטלבים מצא את המרחק ביניהם.

(20) נתונות ארבע נקודות : $P(k,0,0)$, $Q(0,4,0)$, $R(0,k,3)$, $S(1,1,-1)$.

א. הראה שלא קיים ערך של k עבורו הישרים PQ ו- SR מקבילים.

ב. מצא עבור איזה ערך של k הישרים אורתוגונליים (מאונכים) זה לזה,

ומצא את המרחק ביניהם במקרה זה.

(21) הישר ℓ_1 עובר דרך הנקודות $(6,1,3)$ ו- $(5,2,3)$.

הצגה פרמטרית של הישר ℓ_2 היא: $\ell_2:\ (2,k+1,3)+t(k^2-9,-7,0)$.

א. 1. עבור איזה ערך של k הישרים מקבילים (לא מתלכדים)?

2. עבור איזה ערך של k הישרים מתלכדים?

ב. מצא משוואה של מישור π , המכיל את הישר ℓ_1 ומקביל לציר ה- z .

ג. עבור k שמצאת בתת סעיף א.1. , מצא את המרחק של ℓ_2 מהמישור π.

(22) נתונות ארבע נקודות: $A(1,1,-1)$, $B(-1,k,3)$, $C(0,-4,0)$, $D(k,0,0)$

הישר ℓ_1 מחבר את הנקודה A עם הנקודה B.

הישר ℓ_2 מחבר את הנקודה C עם הנקודה D.

א. מצא עבור איזה ערך של k הישרים מאונכים זה לזה.

ב. עבור הערך של k שמצאת בסעיף א. , מצא את משוואת המישור המכיל את הישר ℓ_1

ומקביל לישר ℓ_2 .

(23) מצא את המצב ההדדי של המישור והישר וקבע אם הישר:

חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

במקרה שהישר חותך את המישור, מצא גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור. במקרה בו הישר מקביל למישור מצא את מרחק הישר מהמישור.

(24) ידוע כי הישר ℓ עובר דרך הנקודות $A(4,-6,5)$ ו- $B(4+k,3,2)$

ונתון מישור $\pi:\ x-4y-kz-5=0$.

א. עבור איזה ערך של k הישר מקביל למישור?

ב. המישור π חותך את ציר ה- x בנקודה C .

עבור k שמצאת בסעיף א , חשב את הזווית בין המישור π לבין $\overrightarrow{BC}$.

(25) נתונים ישר: $\ell: (2,1,-1)+t(0,a,-1)$ ומישור: $\pi: x-2y-4z=4$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a יהיה הישר מוכל במישור?

ב. מצא משוואה של מישור המכיל את הישר ℓ ומאונך למישור π.

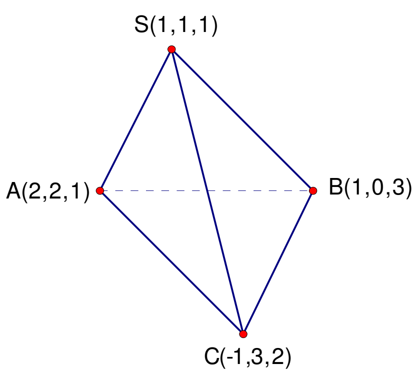
(26) נתונים שני ישרים ומישור:

$$\ell_1: (x,y,z)=(2,1,1)+t(1,-1,-1)$$
$$\ell_2: (x,y,z)=(3,-1,2)+s(-2,1,1)$$
$$\pi:\ x-y+2z=3$$

א. קבע את המצב ההדדי בין כל אחד מהישרים למישור.

ב. מצא את הנקודות על הישר ℓ_2 שמרחקן מראשית הצירים הוא $\sqrt{18}$.

(27) בציור משמאל נתון טטראדר $SABC$.



א. הוכח כי אחד המקצועות דרך S, ניצב למישור הנקבע על-ידי שני המקצועות האחרים דרך S.

ב. מצא את משוואות המישור הנ"ל.

ג. חשב את הזווית שבין המקצוע AC לבין מישור המשולש ΔSAB.

(28) מצא את המצב ההדדי של המישורים וקבע אם הם: מקבילים, מתלכדים או נחתכים.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

במקרה בו המישורים מקבילים מצא את המרחק ביניהם. במקרה בו הם נחתכים מצא את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

(29) א. נתונים שני מישורים: $2x+3y-4z=10$, $x+2y-z=7$.

מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך ℓ_1 של שני המישורים.

ב. נתון: $\ell_2: (6,2,-2)+s(2,-1,1)$. מהו המצב ההדדי בין ℓ_1 ו- ℓ_2.

(30) נתונים שני מישורים: $2x+y-3z+1=0 ,\ x-y+2z-7=0$.

א. מצא הצגה פרמטרית לישר החיתוך ℓ של שני המישורים.

ב. עבור איזה ערך של הפרמטר C, יקביל הישר ℓ למישור $\pi: 4x-y+Cz-1=0$?

ג. עבור C שמצאת בסעיף ב, חשב את מרחק הישר ℓ מהמישור π.

(31) נתונים שני מישורים: $x-3y+4z=-10 ,\ x+y+2z=6$ ונקודה $M(1,8,-3)$.

הישר ℓ הוא ישר החיתוך של המישורים הנ"ל.

א. מצא את משוואת המישור העובר דרך הנקודה M וניצב לישר ℓ.

ב. מצא את מרחק הנקודה M מהישר ℓ.

(32) הישר $\ell: (0,-2,1)+t(-3,4,m)$ מקביל למישור $\pi_1: x-2y-4z=4$.

א. מצא את הקבוע m.

ב. הנקודה $N(2,-1,4)$ נמצאת על המישור π_1 ויוצרת עם הישר ℓ מישור π_2.

מצא הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישורים π_1 ו- π_2.

(33) אחד מקודקודי קוביה נמצא

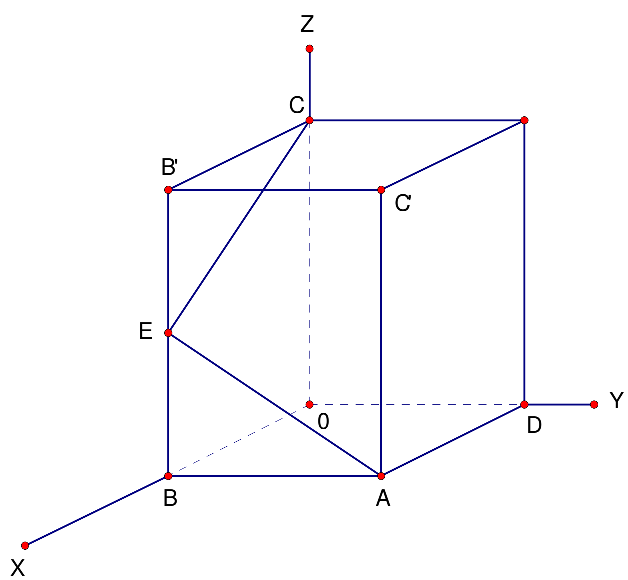
בראשית הצירים.

E אמצע BB' , $|AB|=1$.

א. חשב את זווית $\measuredangle CEA$.

ב. חשב את הזווית בין שני

המישורים AEC ו- $BODA$.



(34) נתונים שני ישרים:

$$\ell_1: (1,2,3)+t(3,-12,18)$$
$$\ell_2: (2,5,-1)+u(-4,16,-24)$$

א. הראה כי הישרים קובעים מישור יחיד ומצא את משוואתו.

ב. מצא משוואת מישור, המקביל למישור שמצאת ב- א., ועובר דרך הנקודה $(0,-1,0)$.

פתרונות – פרק 9

לתשומת לבכם!

הצגה פרמטרית של ישר (או מישור) היא לא יחידה. ייתכן למשל, שהישר הפרמטרי שאתם תקבלו "ייראה" שונה מהישר שאני קיבלתי. בכל אופן אם תבצעו בדיקה תוכלו לראות שהם מתלכדים.

(1) $x=5, y=-2, z=6$.

(2) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$ ד. $(2.5,-1,-3.5)$
ה. $(9.5,9.5,-18)$ ו. $(19,19,-36)$ ז. $\frac{1}{\sqrt{26}}(-3,1,4)$ ח. 12.5698
ט. 14 י. $(\frac{-19}{7},\frac{19}{14},\frac{57}{14})$

(3) א. $(5,7,1)$ ב. $(-8,-16,8)$ ג. $(8,12,0)$

(4) א. $x=1+4t, y=2+5t, z=3+6t$ ב. $\underline{x}=(1,10,4)+t(2,0,-1)$

(5) א.1) $(1,-3,0)+t(3,5,-1)$ א.2) $(4,2,-1)+t(-1,-3,3)$
א.3) $(1,-3,0)+t(2,2,2)$ ב. הנקודה D
ג. 35.477°

(6) א. $t(1,0,0)$, $t(0,1,0)$, $t(0,0,1)$ ב. $(4,5,6)+t(0,0,1)$

(7) $(1,2,3)+t(2,1,0)$

(8) $(-4,1,1)+t(83,-32,-15)$

(9) א. $x=1+2t-4s, y=-2+s, z=3+t+5s$ ב. $(1,10,4)+t(2,1,-1)+s(-1,0,1)$

(10) א.1. $(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ א.2. $-2x+3y+z-1=0$
ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא

(11) א. $(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. 1.4142 ג. $y-z+2=0$

(12) א. $(1,4,6)+t(6,3,2)$ ב. $\frac{18}{7}$

(13) א. $|\overrightarrow{MC}|=\sqrt{152}, |\overrightarrow{MA'}|=\sqrt{108}$ ב. 59.396

(14) א. $D(-20,8,12)$ ב. 81.62°

(15) א. 26.565° ב. $S=24$ ג. $V=32$

(16) $V=72$

(17) א. מקבילים, 1.095 ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. זווית בין הישרים 47.6°.

(18) ב. $3x+y=14$ ג. 0.31622

(19) א. מצטלבים ב. 10

(20) ב. $d=\frac{2}{15}, k=0.8$

(21) א.1. $k=-4$ א.2. $k=4$ ב. $x+y=7$ ג. 5.65685

(22) א. $k=2$ ב. $8x-4y+5z+1=0$

(23) א. מקביל, 0.9284 ב. מוכל
ג. חותך בנקי (3.5,-0.5,-2), זוית בין הישר למישור 40.78°

(24) א. $k=9$ ב. 14.67°

(25) א. $a=2$ ב. $10x+y+2z-19=0$

(26) א. ℓ_1 מוכל, ℓ_2 חותך. ב. $(-1,1,4),(\frac{11}{3},\frac{-4}{3},\frac{5}{3})$

(27) א. $SC \perp SAB$ ב. $2x-2y-z+1=0$ ג. 64.76°

(28) א. המישורים נחתכים. ישר החיתוך : $(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$. זווית 63.612°.
ב. המישורים מקבילים, המרחק ביניהם : 0.324 ג. המישורים מתלכדים.

(29) א. $(9,0,2)+t(-5,2,-1)$ ב. מצטלבים

(30) א. $(2,-5,0)+t(1,7,3)$ ב. $C=1$ ג. 2.8284

(31) א. $5x-y-2z=3$ ב. 5.07

(32) א. $m=-8$ ב. $(2,-1,4)+t(-4,4,-8)$

(33) א. 78.463° ב. 35.26°

(34) א. $2x-10y-7z+39=0$ ב. $2x-10y-7z-10=0$

נוסחאות – נגזרות

1. $y = a \quad \rightarrow \quad y' = 0$

2. $y = f^{n} \quad \rightarrow \quad y' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$

3. $y = e^{f} \quad \rightarrow \quad y' = e^{f} \cdot f'$

4. $y = a^{f} \quad \rightarrow \quad y' = a^{f} \cdot f' \cdot \ln a$

5. $y = \ln f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{f} \cdot f'$

6. $y = \sin f \quad \rightarrow \quad y' = \cos f \cdot f'$

7. $y = \cos f \quad \rightarrow \quad y' = -\sin f \cdot f'$

8. $y = \tan f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cos^2 f} \cdot f'$

9. $y = \cot f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sin^2 f} \cdot f'$

10. $y = \arcsin f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$

11. $y = \arccos f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2}} \cdot f'$

12. $y = \arctan f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{1+f^2} \cdot f'$

13. $y = \operatorname{arccot} f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{1+f^2} \cdot f'$

14. $y = \sinh f \quad \rightarrow \quad y' = \cosh f \cdot f'$

15. $y = \cosh f \quad \rightarrow \quad y' = \sinh f \cdot f'$

16. $y = \tanh f \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{\cosh^2 f} \cdot f'$

17. $y = \coth f \quad \rightarrow \quad y' = -\frac{1}{\sinh^2 f} \cdot f'$

18. $y = f(x)^{g(x)} \quad \rightarrow \quad y' = f(x)^{g(x)} \cdot (g(x) \cdot \ln(f(x))'$

נוסחאות – אינטגרלים

$$\int a\,dx = ax + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1 \qquad \int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c \qquad \int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + c$$

$$\int k^x dx = \frac{k^x}{\ln k} + c \qquad \int k^{ax+b} dx = \frac{1}{a}\frac{k^{ax+b}}{\ln k} + c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \qquad \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \qquad \int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + c$$

$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c \qquad \int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos(ax+b)| + c$$

$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c \qquad \int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax+b)| + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c \qquad \int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c \qquad \int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \ln\left|\frac{1}{\cos x} + \tan x\right| + c \qquad \int \frac{1}{\sin x} dx = \ln\left|\frac{1}{\sin x} - \cot x\right| + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$$

$$\int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + c \qquad \int f \cdot f' dx = \frac{1}{2} f^2 + c$$

$$\int e^f \cdot f' dx = e^f + c \qquad \int \cos f \cdot f' dx = \sin(f) + c$$

$$\int \sin f \cdot f' dx = -\cos(f) + c \qquad \int \frac{f'}{\sqrt{f}} dx = 2\sqrt{f} + c$$

$$\int \sqrt{f} \cdot f' dx = \frac{2}{3} f^{\frac{3}{2}} + c \qquad \int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$$

נוסחאות – טריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\[2mm]\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\[2mm]1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos2\alpha)\\[2mm]\cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)\\[2mm]\sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)\\[2mm]\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=\sin\alpha\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=(\pi-\alpha)+2\pi k\end{cases}\\[2mm]\cos x=\cos\alpha\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=\alpha+2\pi k\\ x=-\alpha+2\pi k\end{cases}\\[2mm]\tan x=\tan\alpha\Rightarrow\ x=\alpha+\pi k\\ \cot x=\cot\alpha\Rightarrow x=\alpha+\pi k\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x=0\Rightarrow\ x=\pi k\\[2mm]\cos x=0\Rightarrow\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k\end{cases}$$

נוסחאות – אלגברה

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \\ (a-b)^2 = a^2-2ab+b^2 \\ (a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ (a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ (a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \\ (a-b)^4 = a^4-4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2 = (a+b)^2-2ab \\ a^2-b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3+b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab) \\ a^3-b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab) \\ a^4+b^4 = (a^2+b^2)^2-2a^2b^2 \\ a^4-b^4 = (a^2-b^2)(a^2+b^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^m a^n = a^{m+n} \\ \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ \left(a^m\right)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \dfrac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} \ , \ \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \ \Rightarrow \ x = \ln b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a>0, b>0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \dfrac{a}{b} \\ \ln 1 = 0 \ , \ \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \ (x>0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \ \Rightarrow \ x = e^k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\cdot d - b\cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & if \quad a \ge 0 \\ -a & if \quad a < 0 \end{cases} \\ |a\cdot b| = |a|\cdot|b| \\ \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \ or \ x > a \end{cases}$$