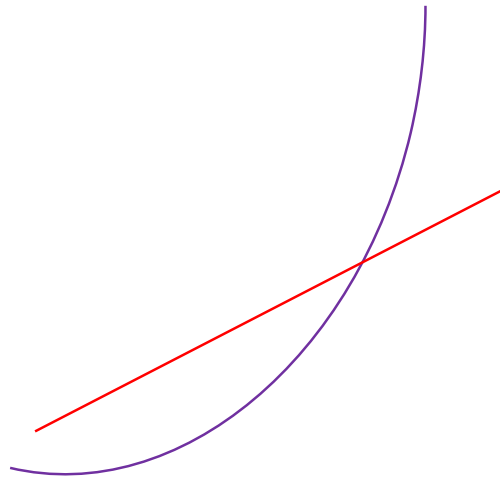


מתמטיקה

למנהלים

מותאם אישית למכללה למנהל



גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי והוא מותאם אישית לסטודנטים למנהל עסקים במכללה למנהל.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכנית הלימוד במכללה. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



תוכן

- 3 **פרק 1 - מבוא - פונקציות** - הסבר מהי פונקציה, הפונקציות הנפוצות, תחום הגדרה של פונקציה, פונקציה זוגית / אי זוגית, פונקציה מפוצלת.
- 5 **פרק 2 - גבולות ורציפות** - הסבר מהו גבול של פונקציה, פירוט טכניקות לחישוב גבול, הסבר מהי פונקציה רציפה, פירוט טכניקות לבדיקת רציפות של פונקציה.
- 8 **פרק 3 - הנגזרת** - מהי נגזרת, כללי הגזירה, נגזרת פונקציה סתומה, המשמעות של הנגזרת, בעיות משיקים.
- 12 **פרק 4 - כלל לופיטל** - הסבר מהו כלל לופיטל, מהם סוגי הגבולות אותם ניתן לחשב עם כלל זה.
- 14 **פרק 5 - חקירת פונקציה** - הסברים ודוגמאות לכל שלבי חקירת הפונקציה.
- 17 **פרק 6 - בעיות מקסימום ומינימום** - בעיות מקסימום ומינימום כלכליות במשתנה יחיד, בעיות מקסימום ומינימום כלכליות בשני משתנים בלי אילוץ ועם אילוץ (כופלי לגרנז').
- 24 **פרק 7 - אינטגרלים** - מידיים, אינטגרציה בחלקים, שיטת ההצבה, חילוק פולינומים.
- 26 **פרק 8 - שחזור פונקציה מהנגזרת שלה** - חלק ב של המבחן.
- 30 **פרק 9 - אלגברה ליניארית** - דירוג מטריצות, פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות, המטריצה ההפוכה, דטרמיננטות, כלל קרמר.
- 34 **נספח - דפי נוסחאות**

הערה

תרגילים הכתובים בצבע כחול מכילים

הסבר תיאורטי

פרק 1 - מבוא - פונקציות

1. הגדר והדגם את המושג פונקציה במתמטיקה.

ותאר את הפונקציות הנפוצות:

לינארית. ריבועית. שורש $y = \sqrt{x}$. היפרבולה $y = \frac{1}{x}$. הערך המוחלט $y = |x|$

2. הסבר מהו תחום הגדרה של פונקציה ומצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x \quad \text{ב. } f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \quad \text{ג. } f(x) = \frac{2x}{x-3}$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{x^2}{x^3 - 4x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x - 8} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{6}{x^2 + 1}$$

3. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ב. } f(x) = 2\sqrt{x-3} \quad \text{ג. } f(x) = 3x\sqrt{1-2x} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}}$$

$$\text{ה. } f(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 10} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3 - 9x}} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{x+1}{x - \sqrt{2-x}}$$

4. תאר בקצרה את הפונקציה המעריכית $f(x) = e^x$.

5. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\text{א. } f(x) = \frac{2x-1}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{3}{e^x - 1} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x+1}{e^x - 5} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 3e^x + 2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{5x - 2} \quad \text{ז. } f(x) = \sqrt{e^{2x} - 4e^x + 3}$$

6. תאר בקצרה את הפונקציה הלוגריתמית $f(x) = \ln x$.

7. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות :

א. $f(x) = \ln x$ ב. $f(x) = \ln(x^2)$ ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$ ד.

ה. $f(x) = \ln(e^x - 4)$ ו. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$ ז. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$

$$f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$$

8. הסבר מהי פונקציה זוגית ומהי פונקציה אי זוגית.

9. בדוק עבור כל אחת מהפונקציות הבאות האם היא זוגית, אי זוגית או כללית.

(a) (1) $y = 4x^3$ (2) $y = x^4 + x^{10}$ (3) $y = 1$ (4) $y = x^2 + x^3$

(b) (5) $y = |x| + x^2$ (6) $y = \sqrt[3]{x} + x$

10. בתרגיל זה נלמד על פונקציה מפוצלת שמופיעה הרבה בקורס.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x \leq 4 \\ -x & x < 0 \end{cases} \text{ נתונה הפונקציה}$$

א. חשב את $f(1)$, $f(4)$, $f(-4)$, $f(0)$, $f(7)$.

ב. שרטט את גרף הפונקציה

ג. בדוק האם הפונקציה זוגית, אי זוגית או כללית.

פרק 2 - גבולות ורציפות

לתשומת לבך! השאלות הבאות הופיעו כסעיף או כשאלה שלמה בבחינת גמר של הקורס במתמטיקה למנהל עסקים, המכללה למנהל:

5,6,7,10,11

(1) הסבר למה הכוונה בחישוב גבול של פונקציה.

(2) הסבר את שיטת ההצבה לחישוב גבולות וחשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 100} 40 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{104-x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+4}{x+18} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 4x + 1 \quad (1)$$

(3) הסבר את שיטת פירוק לגורמים לשם חישוב גבול של פונקציה.

(4) חשב את הגבולות הבאים (פירוק לגורמים):

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

(5) הסבר את שיטת ההכפלה בצמוד לחישוב גבול של פונקציה.

(6) חשב את הגבולות הבאים (הכפלה בצמוד):

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

(7) הסבר את השיטה לחישוב גבול של פונקציה כאשר הפונקציה שואפת לאינסוף.

(8) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

הערה חשובה מאוד !

בהמשך הקורס תלמד את כלל לופיטל לחישוב גבולות. בעזרת כלל זה ניתן לחשב ללא מאמץ את הגבולות המופיעים בשאלות 3, 4.

(9) הסבר את השיטה לחישוב גבול של פונקציה כאשר x שואף לאינסוף:

(10) חשב את הגבולות הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (4)$$

(11) הסבר מהי שיטת חישוב הגבול שנקראית הגבול של אוילר.

(12) חשב את הגבולות הבאים (העזר בגבול של אוילר $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^x \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^x \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x} \right)^x \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x + 4} \right)^{4x^2} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3} \right)^x \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^{x^2-1} \quad (4)$$

רציפות

(13) הסבר מהי פונקציה רציפה. התייחס בתשובתך למושג אי רציפות סליקה.

(14) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות ב"נקודת התפר" שלהן:

(בסעיפים 1 ו-2 שרטט את גרף הפונקציה).

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \quad (2) \quad f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 5-x & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \leq 1 \\ |x-2| & 1 < x < 2 \\ 1 & x = 2 \\ x-2 & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

* נקודת התפר היא הנקודה בה נוסחת הפונקציה משתנה.

למשל, נקודת התפר בתרגיל 1 היא $x = 2$.

(15) מה צריך להיות הערך של הקבוע k על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות לכל x :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & x \neq 1 \\ k & x = 1 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} kx^2 + x - 2 & x \leq 2 \\ 5kx - 6 & x > 2 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x - k & x \leq 0 \\ x^{2x} & x > 0 \end{cases} \quad (4) \qquad f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} & x \neq 2 \\ k & x = 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיף 4 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל (פרק 8).

(16) מה צריך להיות הערך של הקבועים a ו- b על מנת שהפונקציות הבאות תהינה רציפות בתחום הגדרתן :

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x > 1 \\ (x-1)\ln(x+1) + b & 0 \leq x \leq 1 \\ a \frac{\frac{1}{2^x} - 2}{\frac{1}{2^x} + 4} & x < 0 \end{cases} \quad (2) \qquad f(x) = \begin{cases} a\sqrt[3]{x+x^2} & x < -1 \\ bx^2 + x - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ 4 \frac{\sqrt{x-1+a} - \sqrt{a}}{\sqrt{a}(x-1)} & x > 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}} & x < 1 \\ ax^2 + b & 1 \leq x \leq 2 \\ (x-1)^{\frac{1}{x-2}} & x > 2 \end{cases} \quad (3)$$

הערה: על סעיפים 2 ו-3 תוכל לענות רק אחרי שתלמד את כלל לופיטל (פרק 8).

פרק 3 - חישוב הנגזרת של פונקציה

לתשומת לבך! השאלות הבאות הופיעו כסעיף או כשאלה שלמה בבחינת גמר של הקורס במתמטיקה א לכלכלנים, המכללה למנהל:

23,24,25,26,27,28

(1) הסבר מהי הנגזרת של פונקציה והסבר את כלל הגזירה $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

השתמש בכלל הנ"ל וגזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$ ב. $f(x) = x^7$ ג. $f(x) = x^2$ ד. $f(x) = x$ ה. $f(x) = x^{-3}$

ו. $f(x) = x^{-1}$ ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

(2) הסבר את כלל הגזירה $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$

השתמש בכלל הנ"ל וגזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$ ב. $f(x) = 3x^7$ ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$ ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$ ה. $f(x) = 8x$

ו. $f(x) = 3x^{-2}$ ז. $f(x) = \frac{4}{x}$ ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

(3) הסבר את כלל הגזירה $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$

השתמש בכלל הנ"ל וגזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$ ב. $f(x) = \frac{7}{8}$

(4) הסבר את כלל הגזירה $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$

השתמש בכלל הנ"ל וגזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$

$$f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad \text{הסבר את כלל הגזירה (5)}$$

השתמש בכלל הנייל וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = (5x-2)^3 \quad \text{ב. } f(x) = (x^3+6)^5 \quad \text{ג. } f(x) = 3(x-x^2)^2$$

$$\text{ד. } f(x) = \frac{(5-x)^3}{4} \quad \text{ה. } f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{u} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{u^2} u' \quad \text{הסבר את כלל הגזירה (6)}$$

השתמש בכלל הנייל וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = \frac{3}{x} \quad \text{ב. } f(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{3}{x^3}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{x^2-3x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{2}{3-x} \quad \text{ז. } f(x) = \frac{6}{x+5}$$

$$f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u \quad \text{הסבר את כלל הגזירה (7)}$$

השתמש בכלל הנייל וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב. } f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ג. } f(x) = x^3(6-x)^4$$

$$f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad \text{הסבר את כלל הגזירה (8)}$$

השתמש בכלל הנייל וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{x^2+8}{x-1}$$

$$\text{ה. } f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{3}{x^3}$$

$$f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' \quad \text{הסבר את כלל הגזירה (9)}$$

השתמש בכלל הנייל וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{ב. } f(x) = 4\sqrt{x+1} \quad \text{ג. } f(x) = \sqrt{x^3-1}$$

$$\text{ד. } f(x) = (3x+1)\sqrt{x} \quad \text{ה. } f(x) = x^2\sqrt{x+3} \quad \text{ו. } f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}}$$

$$f(x) = \sqrt{u} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}} u' \text{ 'הסבר את כלל הגזירה' (10)}$$

השתמש בכלל הנייל וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x+1}} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{1-2x} \quad \text{ג. } f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

(11) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}} \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad \text{ג. } f(x) = \sqrt[5]{x^2-3x-4}$$

$$\text{ד. } f(x) = x \cdot \sqrt[4]{(x^2+1)^3}$$

(12) הסבר מהי הפונקציה המעריכית וכיצד מחשבים את הנגזרת שלה.

(13) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 \quad \text{ב. } f(x) = e^{x^2-3x} + ex$$

(14) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = xe^x \quad \text{ב. } f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ג. } f(x) = (x+1) \cdot 2^x$$

(15) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{ב. } f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(16) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = 5(e^{2x}-1)^3 \quad \text{ב. } f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ג. } f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{e^x+1}}$$

(17) הסבר מהי הפונקציה הלוגריתמית וכיצד מחשבים את הנגזרת שלה.

(18) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1) \quad \text{ב. } f(x) = \ln(x^2-3x) \quad \text{ג. } f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\text{ד. } f(x) = \ln(e^x+1)$$

(19) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = x \ln x \quad \text{ב. } f(x) = (3x+1)^2 \cdot \ln x \quad \text{ג. } f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$$

$$\text{ה. } f(x) = \sqrt{\ln x + x}$$

(20) גזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = \ln^3 x \quad \text{ב. } f(x) = 3 \ln^2 x \quad \text{ג. } f(x) = x^2 \ln^2 x \quad \text{ד. } f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$$

(21) הסבר כיצד גוזרים פונקציה עם פרמטר וגזור את הפונקציות הבאות :

$$\text{א. } f(x) = ax^4 - bx \quad \text{ב. } f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c \quad \text{ג. } f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \quad \text{ד. } f(x) = a\sqrt{bx^2 + c}$$

(22) הסבר מהי פונקציה סתומה וכיצד גוזרים אותה.

$$(23) \text{ גזור את הפונקציה הסתומה } x^2 + y^5 - y = 1 \text{ ומצא את } y'$$

$$(24) \text{ גזור את הפונקציה הסתומה } 4 \ln x + 10 \ln y = y^2 \text{ ומצא את } y'$$

$$(25) \text{ גזור את הפונקציה הסתומה } \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{xy} \text{ ומצא את } y'$$

$$(26) \text{ גזור את הפונקציה הסתומה } xy - y^3 + x^2 - x = 0 \text{ ומצא את } y''(1)$$

(27) הסבר מהן בעיות משיקים ומהי אסטרטגיית הפתרון בבעיות אלה.

$$(28) \text{ הישר } y = x + b \text{ משיק לגרף הפונקציה } f(x) = e^x \text{ . מצא את } b \text{ ואת נקודת ההשקה.}$$

$$(29) \text{ הישר } y = 4x + b \text{ משיק לגרף הפונקציה } f(x) = \frac{2}{x^2} + 3 \text{ . מצא את } b \text{ ואת נקודת ההשקה.}$$

$$(30) \text{ הישר } y = 3x \text{ משיק לגרף הפונקציה } f(x) = x\sqrt{x} + b \text{ . מצא את } b \text{ ואת נקודת ההשקה.}$$

$$(31) \text{ הישר } y = ax + \frac{1}{2} \text{ משיק לגרף הפונקציה } g(x) = \frac{2}{x+c} \text{ בנקודה } x = 0 \text{ . מצא את } a \text{ ו- } c \text{ .}$$

$$(32) \text{ מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה } f(x) = \ln x \text{ בנקודה } x = e \text{ .}$$

$$(33) \text{ מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה } f(x) = x^3 + 1 \text{ בנקודה } x = 0 \text{ .}$$

$$(34) \text{ מצא את משוואת המשיק למעגל } x^2 + y^2 = 25 \text{ בנקודה } (3,4) \text{ .}$$

$$(35) \text{ הפונקציות } y = \frac{1}{x} \text{ ו- } y = -\frac{1}{2}x^2 + k \text{ משיקות זו לזו. מצא את } k \text{ ואת נקודת ההשקה.}$$

פרק 4 - כלל לופיטל

לתשומת לבך! השאלות הבאות הופיעו כסעיף או כשאלה שלמה בבחינת גמר של הקורס במתמטיקה א לכלכלנים, המכללה למנהל: 6-8, 18-35. 32-34 במיוחד.

(1) א. הסבר מהו כלל לופיטל וכיצד מחשבים בעזרתו גבול של פונקציה מהצורה $\frac{0}{0}$

ומהצורה $\frac{\infty}{\infty}$.

ב. הסבר כיצד משתמשים בכלל לופיטל לחישוב גבול מהצורה $0 \cdot \infty$

ג. הסבר כיצד משתמשים בכלל לופיטל לחישוב גבול מהצורה $\infty^0, 0^0, 1^\infty$

ד. הסבר כיצד משתמשים בכלל לופיטל לחישוב גבול מהצורה $\infty - \infty$

חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2 + 7} - 4}{\sqrt{x-2} - 1} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1} - 2} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{2x^2 - 1} - \sqrt{x}}{x-1} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2e^x - x^2 - 2x - 2}{2x^3} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a, b > 0) \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1) + x}{x} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)}{\frac{1}{x^2}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x^2 - 2x + 1} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + x + 1}{e^x} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 3} \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot e^x \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^2 + 2 \ln x - 3}{x} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (25)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \ln x \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) \quad (28)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{x+3}{x-3} \right) \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 9) \cdot \ln(x-3) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-4)^{x-2} \quad (31)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (ax)^x \quad (a > 0) \quad (30)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} \quad (29)$$

(32) נתון כי $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{ax^2 + bx + 2}{x+2} = 4$. מצא את הקבועים a ו- b .

(33) נתון כי $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 + ax + b}{x^2 - 4} = 7$. מצא את הקבועים a ו- b .

פרק 5 - חקירת פונקציה

לתשומת לבך! לפחות שליש מהשאלות בבחינת הגמר הן בסגנון השאלות בפרק עצום זה. כל השאלות בפרק זה הן בסגנון בחינות הגמר. כאשר הקלות יותר הן שאלות חימום. בבחינה מבקשים לעיתים חקירה מלאה אך לעיתים מבקשים רק סעיף או שניים מתוך החקירה.

1. הגדר את המושג נקודת קיצון. התייחס בתשובתך להבדל בין קיצון מקומי לקיצון מוחלט.
2. הסבר והדגם כיצד מוצאים נקודת קיצון ותחומי עליה וירידה לפונקצית פולינום.
3. הסבר והדגם כיצד מוצאים נקודת קיצון ותחומי עליה וירידה לפונקציית מנה.
4. הסבר והדגם את המושג אסימפטוטה אנכית לגרף של פונקציה.
5. הסבר והדגם את המושג אסימפטוטה משופעת לגרף פונקציה.
6. הסבר והדגם את המושג נקודת פיתול.
7. הסבר והדגם כיצד מוצאים נקודת פיתול עבור פולינום.
8. הסבר והדגם כיצד מוצאים נקודת פיתול בפונקצית מנה.
9. הדגם והדגם כיצד מוצאים נקודת פיתול בפונקצית שורש.

חקור חקירה מלאה את הפונקציות הבאות לפי הסעיפים הבאים :

תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים , זוגיות, אסימפטוטות אנכיות ומשופעות, נקודות קיצון ותחומי עליה וירידה, נקודות פיתול ותחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (12) \quad f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (11) \quad f(x) = x(x-9)^2 \quad (10)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (15) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (14) \quad f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (13)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (18) \quad f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (17) \quad f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (16)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (21) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (20) \quad f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (19)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (24) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (23) \quad f(x) = x \cdot \ln x \quad (22)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (27) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (26) \quad f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (25)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (30) \quad f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (29) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (28)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (33) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (32) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (31)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (34)$$

הערות:

* בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

** בתרגילים 8,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול.

מקסימום ומינימום מוחלטים/גלובליים של פונקציה

(35) הסבר מהי נקודת קיצון מוחלטת / גלובלית של פונקציה ומצא את נקודות הקיצון

המוחלטות של הפונקציה $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ בקטע $-1 \leq x \leq 3$

(36) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$.

(37) מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה $f(x) = x^{2/3}(20 - x)$ בקטע $-1 \leq x \leq 20$

פרק 6 - בעיות מקסימום ומינימום

בעיות מקסימום ומינימום כלכליות במשתנה יחיד

1. הגדר והדגם את הפונקציות הכלכליות הבאות:
 פונקציית ביקוש, פונקציית פדיון (הכנסות), פונקציית עלות (הוצאות), פונקציית עלות ממוצעת, פונקציית רווח, פונקציה שולית ובמיוחד פונקציית עלות שולית.
 2. כאשר חברת "יוטבתה" מוכרת x ליטר שוקו ליום היא יכולה לקבל מחיר של

$$p(x) = -\frac{1}{4}x + 10 \text{ שקל לליטר.}$$

- א. מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 4 ליטר?
 ב. מהו מחיר ליטר אחד אם הכמות שנמכרת ביום היא 12 ליטר?
 ג. מהי הכמות הנמכרת ביום אם המחיר הוא 6 ₪ לליטר?
 ד. שרטט את הגרף של פונקציית הביקוש ומצא את תחום ההגדרה שלה.
 ה. פונקציית הביקוש הנתונה מתארת את מחיר המוצר כפונקציה של הכמות הנמכרת ממנו. שנה את נוסחת הפונקציה כך שהיא תתאר את הכמות הנמכרת מהמוצר כפונקציה של מחירו.

3. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.6x + 120$.

- א. מצא את פונקציית הפדיון ואת התחום שלה.
 ב. אם $x = 20$ מהו מחיר המוצר ומהו הפדיון?
 ג. אם המחיר הוא 12 ₪, מהו הפדיון?
 4. פונקציית הפדיון של מוצר מסוים היא $R(x) = -0.08x^2 + 40x$.

- א. מהו התחום של פונקציית הפדיון?
 ב. שרטט את הגרף של פונקציית הפדיון.
 ג. מצא את פונקציית הביקוש ושרטט את הגרף שלה.

5. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -0.4x + 100$ שקל ליחידה.

- א. מצא את תחום הפונקציה.
 ב. מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון הממוצע.
 ג. מצא את פונקציית הפדיון השולי.
 ד. לאיזה ערך של x יתקבל פדיון מקסימלי ומהו?

6. פונקציית הביקוש של מוצר מסוים היא $p(x) = -6x^2 + 240x + 1800$.

- מצא את פונקציית הפדיון ואת פונקציית הפדיון השולי.
- אם $x = 40$ האם כדאי להגדיל את הייצור?
- מתי יהיה הפדיון מקסימלי ומהו?

7. פונקציית הביקוש למוצר מסוים נתונה ע"י: $Q(x) = 10x - \frac{x^2}{5}$.

- מצא את המחיר הנותן את הפדיון המקסימלי.
- מהו הביקוש במקרה זה?
- מהו הביקוש השולי בנקודת המחיר שמצאת? מה משמעותו?

8. פונקציית ההוצאות של יצרן המייצר x ק"ג קפה ביום היא $C(x) = 5x + 150$.

- שרטט גרף של פונקציית ההוצאות. מהן ההוצאות הקבועות?
- מצא כמה ק"ג קפה מייצר היצרן אם ההוצאות הן 1000 ש"ח.
- מהן ההוצאות אם מייצרים 20 ק"ג קפה?
- מצא את פונקציית ההוצאה השולית.

9. פונקציית העלות של יצרן כובעים היא $TC(x) = 0.04x^2 + 10x + 400$ שקל ליום.

- חשב את העלות הממוצעת ליום אם הוא מייצר 40 כובעים.
- כמה כובעים עליו לייצר כדי שהעלות הממוצעת תהיה מינימלית?
- חשב את העלות השולית ליום עבור $x = 100$. איזו מסקנה ניתן להסיק מכך?

10. פונקציית העלות של מוצר מסוים היא $C(x) = 0.004x^2 + 10x + 200$.

- חשב את העלות כאשר $x = 100$ וכאשר $x = 101$.
- חשב את העלות השולית כאשר $x = 100$?
- חשב כמה תעלה יחידת מוצר נוספת כאשר הייצור יעבור מ- $x = 100$.
- ל- $x = 101$ והשווה עם התוצאה של סעיף ב. מהי המסקנה?
ד. מצאו האם קצב השינוי של העלות גדל או קטן.

11. ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 100 - 0.06Q$ ופונקציית עלות כוללת $TC(Q) = 200 + 4Q$.

מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

מהו המקסימום במקרה זה?

12. ליצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = 20$ ופונקציית עלות $TC(Q) = 300 + 2Q^2$.

מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

מהו המקסימום במקרה זה?

13. לייצרן פונקציית ביקוש $P(Q) = -0.15Q + 50$ ופונקציית עלות שולית

$$. MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$$

מהי הכמות שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

14. לייצרן פונקציית ביקוש $Q = \frac{5000 - 50P}{3}$ ופונקציית עלות $TC(Q) = 200 + 4Q$

מהי הכמות Q שעל היצרן לייצר על מנת להביא למקסימום את רווחיו.

מהו המקסימום במקרה זה?

15. לייצרן פונקציית עלות שולית $MC(Q) = 0.06Q^2 + 20$. מצא את פונקציית העלות אם

ידוע שכאשר הכמות המיוצרת היא $Q = 10$ אז העלות הכוללת היא 225 ₪.

16. א. הוכח שהרווח המקסימלי מתקבל כאשר הפדיון השולי שווה להוצאה השולית.

הסבר את המשמעות הגרפית.

ב. הוכח שאם מחיר המוצר קבוע אז הרווח המקסימלי מתקבל כאשר ההוצאה השולית

שווה למחיר המוצר.

17. יעל נוהגת לעשות שופינג בכל יום בכיכר המדינה. לאחרונה החליטה יעל לשכור

דירה לחודש (30 יום). אם הדירה נמצאת במרחק x ק"מ מכיכר המדינה דמי

השכירות החודשיים הינם $P(x) = 60 - 4x$. בכל יום יעל נוסעת הלך ושוב לכיכר

$$. D(x) = \frac{x^2}{180} + \frac{2}{3x}$$

א. רשום את ההוצאה הכוללת של יעל, $TC(x)$.

ב. באיזה מרחק מכיכר המדינה על יעל לשכור את דירתה?

ג. שרטט גרף איכותי של $TC(x)$. הדגש את שיעורי נקודת הקיצון.

נגזרות חלקיות

חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

(בשאלות 23,24 חשב גם נגזרות חלקיות מסדר שני)

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (18)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (19)$$

$$\text{(only } f_x) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (20)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (21)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (22)$$

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (23)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (24)$$

מינימום ומקסימום לפונקציה של שני משתנים (ללא אילוץ)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף:

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (25)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (26)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (27)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (28)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (29)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (30)$$

31) יצרן מוכר מחשבוניס, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8.

מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבוניס, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

מקסימום ומינימום לפונקציה של שני משתנים עם אילוץ (כופלי לגרנז')אנא קראו הערה חשובה בדף הבא לפני שאתם ניגשים לפתרונות

32. נתונה בעיית הקיצון $x + 3y = 12$ *s.t.* $Max\{xy\}$, פתור את הבעיה.

33. נתונה בעיית הקיצון $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 9$ *s.t.* $Max\{2x + y\}$, פתור את הבעיה.

34. מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

35. דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

36. עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$f(x, y) = 4x + 6y$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא

למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

37. ליצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{k} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם

$P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף

(K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

הערה חשובה לגבי המתכון לפתרון בעיות קיצון תחת אילוץ (כופלי לגרנז')

הדרך בה אני מציג את הפתרונות תיראה לכם במבט ראשון שונה מהנעשה בהרצאה. יחד עם זאת אני מבטיח לכם שהדרך זהה לדרך שנלמדה בהרצאה, היא פשוט חוסכת שלב אחד או שניים. על מנת שתהיו רגועים אני אפרט במספר שורות על דרך הפתרון בהרצאה ועל הדרך אותה אני מציג. כך גם נוכל לחזור על מתכון הפתרון. נתחיל...

הבעיה העומדת לפנינו היא למצוא לפונקציה $f(x, y)$ מקסימום ומינימום בהינתן אילוץ $g(x, y) = 0$ או $g(x, y) = k$.

שלב I - בשלב זה מוצאים נקודות חשודות כקיצון

בהרצאה מגדירים פונקציית לגרנז' $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$

ואז על מנת למצוא נקודות חשודות כקיצון פותרים $L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_\lambda = 0$

היות ושלוש המשוואות הנ"ל מובילות לשלוש המשוואות הבאות:

$$\boxed{1) f_x = \lambda g_x \quad 2) f_y = \lambda g_y \quad 3) g(x, y) = 0}$$

הרי שאני רושם אותן מיד וחוסך את שלב כתיבת פונקציית הלגרנז'.

שלב II - בשלב זה יש לבדוק האם הנקודות החשודות כקיצון הן קיצון או לא.

$$H = \begin{vmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & f_{xx} - \lambda g_{xx} & f_{xy} - \lambda g_{xy} \\ g_y & f_{xy} - \lambda g_{xy} & f_{yy} - \lambda g_{yy} \end{vmatrix}$$

בהרצאה מחשבים את הדטרמיננטה

אם $H(x_0, y_0; \lambda) > 0$ הנקודה (x_0, y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.

אם $H(x_0, y_0; \lambda) < 0$ הנקודה (x_0, y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.

אני פיתחתי את הדטרמיננטה הנ"ל מראש, הכפלתי במינוס אחת, וקיבלתי

$$H = (f_{xx} - \lambda g_{xx}) \cdot (g_y)^2 + (f_{yy} - \lambda g_{yy}) \cdot (g_x)^2 - 2(f_{xy} - \lambda g_{xy}) \cdot g_x \cdot g_y$$

אם $H(x_0, y_0; \lambda) < 0$ הנקודה (x_0, y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.

אם $H(x_0, y_0; \lambda) > 0$ הנקודה (x_0, y_0) היא נקודת מקסימום בהינתן האילוץ.

i. ניתן גם לא להכפיל במינוס אחת ולעשות כמו בהרצאה.

פרק 7 - אינטגרלים

חשב את האינטגרלים הבאים (אינטגרלים מידיים):

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4x dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (21) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (20) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (19)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (24) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (23) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (22)$$

$$\int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (26) \qquad \int (e^{x+1})^2 dx \quad (25)$$

חשב את האינטגרלים הבאים:

(27-37) : אינטגרציה בחלקים. 38-50 : שיטת ההצבה. 51-56 : חילוק פולינומים).

$$\int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (29) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (28) \quad \int x e^x dx \quad (27)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (32) \quad \int \ln x dx \quad (31) \quad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (30)$$

$$\int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (35) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (34) \quad \int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (33)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (37) \quad \int \ln^2 x dx \quad (36)$$

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (40) \quad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (39) \quad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (38)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (43) \quad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (42) \quad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (41)$$

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (46) \quad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (45) \quad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (44)$$

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (49) \quad \int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (48) \quad \int \ln^3 x dx \quad (47)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (50)$$

$$\int \frac{3x^3 - 5x^2 + 4x - 2}{x-1} dx \quad (53) \quad \int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4} dx \quad (52) \quad \int \frac{x+1}{(x-4)^2} dx \quad (51)$$

$$\int \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 + x}{(x-1)^2} dx \quad (56) \quad \int \frac{12x^3 - 11x^2 + 6x - 1}{4x-1} dx \quad (55) \quad \int \frac{x^4 + 2x^3 - 10x^2 - 8x}{x+4} dx \quad (54)$$

פרק 8 - שחזור פונקציה מהנגזרת שלה - חלק ב של המבחן

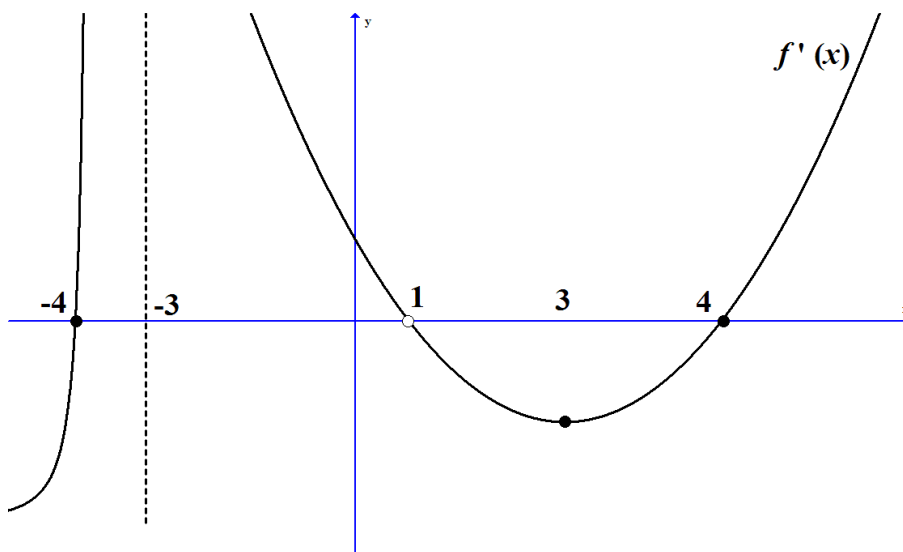
1. לפניך גרף הנגזרת $f'(x)$

א. מצא את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקמירות והקעירות של הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון בנוסף, $f(-4) = 1$, $f(-3) = 2$, $f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(4) = 1$

שרטט את גרף $f(x)$



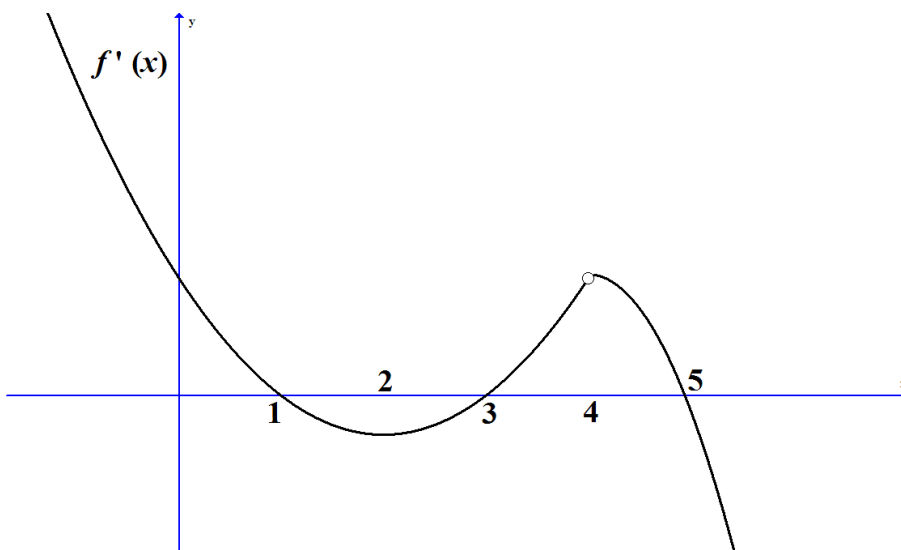
2. לפניך גרף הנגזרת $f'(x)$

א. מצא את נקודות הקיצון ואת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

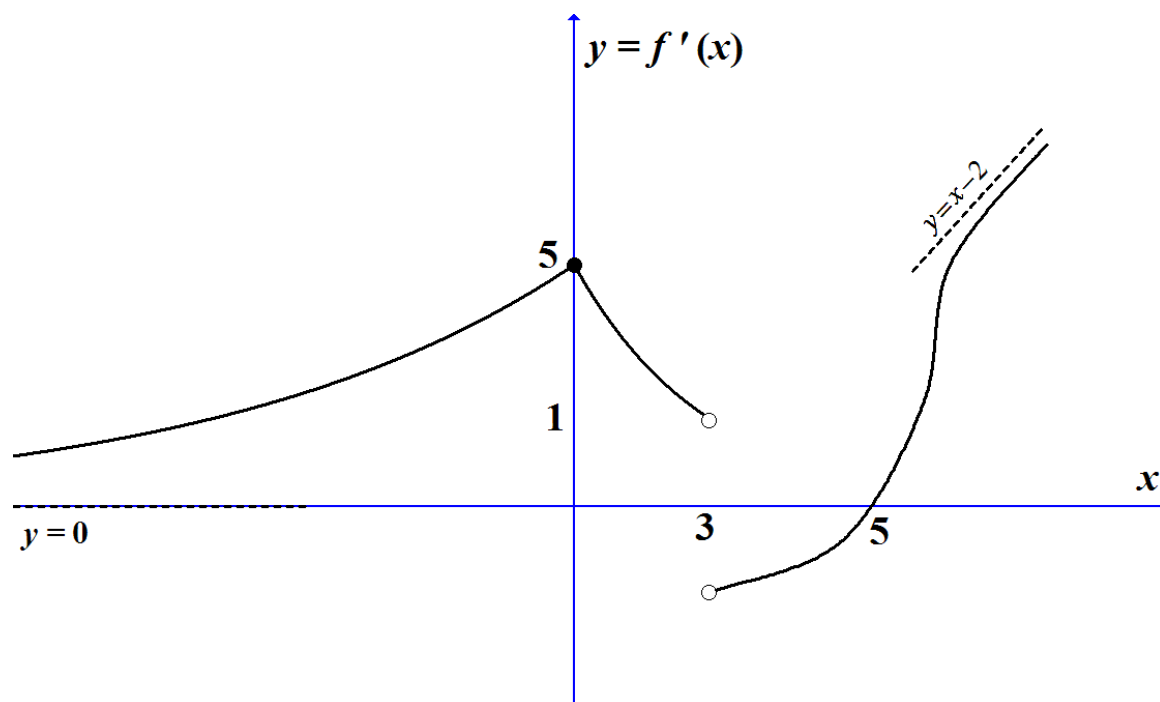
ב. מצא את נקודות הפיתול ואת תחומי הקמירות והקעירות של הפונקציה $f(x)$.

ג. נתון בנוסף, $f(1) = 4$, $f(2) = 3$, $f(3) = 2$, $f(4) = 4$, $f(5) = 7$

שרטט את גרף $f(x)$



3. לפי גרף הנגזרת הראשונה $y = f'(x)$



כמו כן, נתון כי:

- $y = f(x)$ רציפה לכל x .
- הישר $y = x - 2$ מהווה אסימפטוטה משופעת לגרף $y = f'(x)$ ב- ∞ .
- הישר $y = 0$ מהווה אסימפטוטה אופקית לגרף $y = f'(x)$ ב- $-\infty$.
- $f(3) = 3$, $f(5) = -2$, $f(-3) = -2$

עבור כל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה או לא. נמק את תשובתך.

$$f'(2) \cdot f''(2) \cdot f'''(2) > 0.1$$

$$f'(4) + f''(4) + f'''(4) > 0 \quad .2$$

$$f(3) \cdot f'(3) \cdot f''(3) > 0 \quad .3$$

$$x < 0 \quad f'(x) \cdot f''(x) \cdot f'''(x) > 0 \quad \text{עבור} \quad .4$$

$$.5 \quad \text{עבור } x < 0, f \text{ יורדת}$$

$$.6 \quad \text{עבור } x < 0, f \text{ קמורה}$$

$$.7 \quad \text{עבור } x > 5, f'' > 0$$

$$.8 \quad \text{עבור } x > 5, f'' \text{ יורדת.}$$

$$.9 \quad \text{עבור } 0 < x < 3, f''' < 0$$

.10 יש נקודה אחת בה f לא גזירה ונקודה אחת בה f' לא גזירה.

$$.11 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) + 2}{x - 5} = 4$$

$$.12 \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f^2(x) - 4}{\ln(x + 4)} = -21$$

$$.13 \quad \lim_{x \rightarrow 5} \left[\sqrt[3]{\frac{f(x) + 2}{x - 5}} + 1 \right] = 0$$

$$.14 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(f'(x))^2 + 4 \ln x}{x^2} = 2$$

$$.15 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{f(x)} + \ln(-x)}{x} = 1$$

$$.16 \quad \text{הפונקציה } y = f^3(x) + 4x \text{ יורדת עבור } x > 5$$

$$.17 \quad \text{הפונקציה } g(x) = \ln(f^2(x) + 1) \text{ מקיימת } g'(-3) < 0$$

$$.18 \quad \text{נסמן } g(x) = \sqrt{x \cdot f(x)} \text{ אזי } g'(5) = 0$$

$$.19 \quad \text{נסמן } g(x) = x^{f(x)} \text{ אזי } g'(-3) < 0$$

.20 לפונקציה שתי נקודות קיצון.

21. לפונקציה שתי נקודות פיתול.

22. למשוואה $f(x) = 2$ יש בדיוק 3 פתרונות.

הערה :

פתרון הסעיפים הבאים מסתמך על גרף הפונקציה המקורית $f(x)$ שאליו הגענו בסעיף 22.

23. למשוואה $f(x) = 5$ יש בדיוק 3 פתרונות.

24. קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ יש בדיוק שני פתרונות.

25. קיים ערך של k עבורו למשוואה $f(x) = k$ אין פתרון.

26. לפונקציה $y = f(x)$ בקטע $3.5 \leq x \leq 4.5$ יש נקודות קיצון גלובליות רק בנקודות קצה.

27. לפונקציה $y = f(x)$ בקטע $2 \leq x \leq 4$ יש נקודות קיצון גלובליות רק בנקודות קצה.

28. לפונקציה $y = f(x)$ יש אסימפטוטה משופעת באינסוף.

29. לנגזרת השנייה $y = f''(x)$ יש אסימפטוטה אופקית באינסוף.

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5f^2(x) + f(x)}{x^2} = 20$$

פרק 9 - אלגברה ליניאריתמושגים בסיסיים ודירוג מטריצות

(1) רשום את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות :

$$\begin{array}{cccc} x=3 & (4) & 2x+y+z=3 & (3) & x-4y+z=-7 & (2) & x+10y=11 & (1) \\ 2x+y=4 & & x-z=0 & & x-y=-1 & & 2x-2=0 & \\ z+t=8 & & & & x+y+z=5 & & x+y=3 & \end{array}$$

(2) בצע על כל אחת מהמטריצות הבאות את הפעולות הרשומות מתחתיה בזו אחר זו ומצא את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} & \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{(2)} & \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}^{(1)} \\ R_1 \rightarrow R_1 + 3R_3, R_2 \rightarrow R_2 + 3R_3 & R_2 \rightarrow 4R_2, R_2 \rightarrow R_2 + R_1 & R_1 \leftrightarrow R_2, R_1 \rightarrow 2R_1 \\ R_1 \rightarrow 5R_1 - 8R_2 & R_2 \leftrightarrow R_3, R_3 \rightarrow R_3 - 3R_2 & R_3 \rightarrow R_3 + R_1, R_1 \leftrightarrow R_3 \end{array}$$

(3) א. **הסבר והדגם** את המושגים מטריצה מדורגת, מטריצה מדורגת קנונית ודירוג מטריצות.
 ב. הבא את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת** (בסעיפים 1,3,5,7 גם לצורה **מדורגת קנונית**):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}^{(1)} \quad \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}^{(3)}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{(4)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{(6)}$$

פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

(4) פתור את מערכות המשוואות הבאות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דרוג).

$$8x - 4y = 10 \quad (3) \qquad 4x + 8y = 20 \quad (2) \qquad 2x + 3y = 8 \quad (1)$$

$$-6x + 3y = 1 \qquad 3x + 6y = 14 \qquad 5x - 4y = -3$$

$$x + 2y + 3z = 3 \quad (6) \qquad x + 2y + 3z = -11 \quad (5) \qquad 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 5 \quad (4)$$

$$4x + 6y + 16z = 8 \qquad 2x + 3y - z = -5 \qquad 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 5$$

$$3x + 2y + 17z = 1 \qquad 3x + y - z = 2 \qquad 10x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 32$$

$$3x - 2y = 1 \quad (9) \qquad 4x - 7y = 0 \quad (8) \qquad x + 3y = 2 \quad (7)$$

$$-9x + 6y = -3 \qquad 8x - 14y = 2 \qquad 2x + y = -1$$

$$6x - 4y = 2 \qquad -16x + 28y = 4 \qquad x - y = -2$$

$$x + 2y + 2z = 2 \quad (12) \quad x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 13x_4 = 3 \quad (11) \quad x + 2y - 3z + 2t = 2 \quad (10)$$

$$3x - 2y - z = 5 \qquad 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 2 \qquad 2x + 5y - 8z + 6t = 5$$

$$2x - 5y + 3z = -4 \qquad 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \qquad 6x + 8y - 10z + 4t = 8$$

$$2x + 8y + 12z = 0$$

(5) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$x + 2ky + z = 0 \quad (3) \qquad x + ky + z = 1 \quad (2) \qquad x - y + z = 1 \quad (1)$$

$$3x + y + kz = 2 \qquad x + y + kz = 1 \qquad 5x - 7y + (k^2 + 3)z = k^2 + 1$$

$$x + 9ky + 5z = -2 \qquad kx + y + z = 1 \qquad 3x - y + (k + 3)z = 3$$

$$x + ky + 3z = 2 \quad (6) \qquad kx - y = 1 \quad (5) \qquad 2x - y + z = 0 \quad (4)$$

$$kx - y + z = 4 \qquad (k - 2)x + ky = -2 \qquad x + 2y - z = 0$$

$$3x + y + (2 + k)z = 0 \qquad (k^2 - 1)z = 9 \qquad 5x + (1 - k)y + k^2z = 1$$

(6) מצא לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות הבאות:

א. פתרון יחיד. ב. אף פתרון. ג. אינסוף פתרונות.

$$3x + 4y - z = 2 \quad (3) \qquad 2x - 3y + z = 1 \quad (2) \qquad 2x + ky = 3 \quad (1)$$

$$kx - 2y + z = -1 \qquad 4x + (k^2 - 5k)y + 2z = k \qquad (k + 3)x + 2y = k^2 + 5$$

$$x + 8y - 3z = k \qquad 6x + 3ky = 7k^2 + 2$$

$$2x + 6y - 2z = 0.5k + 1$$

מטריצות, מטריצה הפוכה, פתרון מערכת משוואות בעזרת המטריצה ההפוכה

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A , \underline{x} ו- \underline{b} המבטאות את מערכת המשוואות

הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x} = \underline{b}$.

$$\begin{array}{l} 2x - 3y + z + t = 1 \quad (2) \quad 2x + y - z = 3 \quad (1) \\ 4x + y + 2z = 4 \quad \quad \quad x + 2y - 4z = 5 \\ y + z + t = 1 \quad \quad \quad 6x + 4y + z = 2 \\ x - 4z - 2y = 10 \end{array}$$

(8) נתון:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות ליניאריות:

$$A^T \underline{x} = 2\underline{x} + 3\underline{b} \quad (5) \quad A\underline{x} = \underline{x} \quad (4) \quad A\underline{x} = -k\underline{x} + \underline{b} \quad (3) \quad A\underline{x} = 4\underline{x} + \underline{b} \quad (2) \quad A\underline{x} = \underline{b} \quad (1)$$

(9) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

$$\begin{array}{l} \begin{pmatrix} 4 & 1.5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{(1)} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{(4)} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}^{(9)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}^{(8)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{(7)} \end{array}$$

(10) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

$$\begin{array}{l} x + 4y + 2z + 4t = 1 \quad (2) \quad 2x - y + z = 3 \quad (1) \\ x + 2y - z = 0 \quad \quad \quad 3x - 2y + 2z = 5 \\ y + z + t = 1 \quad \quad \quad 5x - 3y + 4z = 11 \\ x + 3y - z - 2t = 0 \end{array}$$

דטרמיננטות, כלל קרמר

(11) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

$$\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{(3)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}^{(2)} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{(1)}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{(6)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{(5)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{(4)}$$

(12) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

$$\begin{array}{rcl} x + 2z + 5t = 8 & (3) & x + z = 3 & (2) & x + 2y = 5 & (1) \\ -2x - 6y = -8 & & 4x + y + 8z = 21 & & 3x + 4y = 11 & \\ 5x + 3y - 7z + 4t = 5 & & 2x + 3z = 8 & & & \\ 2x + 5y + 44z = 51 & & & & & \end{array}$$

נוסחאות - גבולות

	$x \rightarrow -\infty$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	---	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$	$a^{-\infty} = 0$	$a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$
$y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$	$a^\infty = 0$
$y = \sin x$	---	$\sin 0 = 0$	---
$y = \cos x$	---	$\cos 0 = 1$	---
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	---	1	---
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	e	(from right) 1	e
$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	---	e	1
$y = \sqrt{x}$	---	$\sqrt{0^+} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$
$y = \sqrt[3]{x}$	$-\infty$	$\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$$\infty \cdot \infty = \infty, \quad \infty(-\infty) = -\infty, \quad \infty + \infty = \infty, \quad \infty \pm a = \infty, \quad \infty \cdot (\pm a) = \pm \infty, \quad \infty / (\pm a) = \pm \infty$$

Undefined Limits:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0$$

נוסחאות - אלגברה

$$\left\{ \begin{array}{l} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ (a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\ (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \\ a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 + b^2 - ab) \\ a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + b^2 + ab) \\ a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 \\ a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^m a^n = a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \\ (a^m)^n = a^{mn} \\ (ab)^n = a^n b^n \\ \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \\ a^0 = 1 \\ a^{-n} = \frac{1}{a^n} \\ \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}, \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \\ a^x = b \Rightarrow x = \ln b \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a > 0, b > 0 \\ \ln a + \ln b = \ln ab \\ \ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b} \\ \ln 1 = 0, \ln e = 1 \\ \ln e^n = n \\ \ln x^n = n \ln x \quad (x > 0) \\ e^{\ln x} = x \\ a^b = e^{b \ln a} \\ \ln x = k \Rightarrow x = e^k \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} |a| = \sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{if } a \geq 0 \\ -a & \text{if } a < 0 \end{cases} \\ |a \cdot b| = |a| \cdot |b| \\ \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \\ |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ or } x > a \end{array} \right.$$