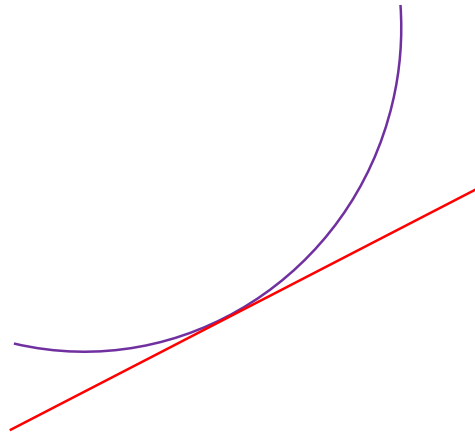


# מתמטיקה ב'

## הקריה האקדמית אונו



גיא סלומון

## סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)  
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: [www.GooL.co.il/hedva1.html](http://www.GooL.co.il/hedva1.html)

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



## תוכן

3	פרק 1 - חישוב נגזרת של פונקציה.....
6	פרק 2 - בעיות משיקים.....
9	פרק 3 - חקירת פונקציה.....
13	פרק 4 - פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות.....
15	פרק 5 – פונקציות בשני משתנים למנהל עסקים.....
18	פרק 6 - קיצון של פונקציה של שני משתנים (רגיל).....
20	פרק 7 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגרנז'י).....

**תרגילים – פרק 1****גזירה של פונקציה**

(1) גזור פעמיים את הפונקציות הבאות (בסעיפים 27-29 גזור פעם אחת):

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x + 4}{2x} \quad (1)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (6) \quad f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (5) \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4} \quad (4)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (9) \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (8) \quad f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (12) \quad f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (11) \quad f(x) = x^2 \cdot \ln x \quad (10)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (15) \quad f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (14) \quad f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (13)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1} \quad (18) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (17) \quad f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (16)$$

$$f(x) = \cos(x^4) \quad (21) \quad f(x) = \sin(x^3) \quad (20) \quad f(x) = \sqrt[3]{x^2} (1-x) \quad (19)$$

$$f(x) = \ln(\cos x^2) \quad (24) \quad f(x) = \tan(x^2) \quad (23) \quad f(x) = \sin^3 x \quad (22)$$

$$f(x) = (x+1)^{\sin x} \quad (27) \quad f(x) = \arctan(x^2) \quad (26) \quad f(x) = \arcsin(2x+3) \quad (25)$$

$$f(x) = (\cos x)^{\ln x} \quad (29) \quad f(x) = (\sin x)^x \quad (28)$$

**פתרונות – פרק 1**

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 20x - 62}{(2x+10)^2}, \quad f''(x) = \frac{448}{(2x+10)^3} \quad (2) \quad (1)$$

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}, \quad f''(x) = \frac{4x \cdot (2x^2 + 24)}{(x^2 - 4)^3} \quad (4) \quad (3)$$

$$f'(x) = -\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4}, \quad f''(x) = 12 \frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5} \quad (6) \quad (5)$$

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{1.5}}, \quad f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{2.5}} \quad (8) \quad (7)$$

$$f'(x) = x(2 \ln x + 1), \quad f''(x) = 2 \ln x + 3 \quad (10) \quad (9)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x}(\ln x + 1), \quad f''(x) = \frac{-2 \ln x}{x^2} \quad (12) \quad (11)$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} \left[ \frac{(\ln x)^4 - 1}{(\ln x)^3} \right], \quad f''(x) = -\frac{2}{x^2} \left\{ \frac{(\ln x)^5 - (\ln x)^4 - (\ln x) - 3}{(\ln x)^4} \right\} \quad (13)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{x^2 - x - 2}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{5x + 2}{x^4} \right) \quad (15) \quad (14)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1 + 2x}{x^4} \right) \quad (16)$$

$$f'(x) = e^{-2x^2} (1 - 4x^2), \quad f''(x) = -4xe^{-2x^2} (3 - 4x^2) \quad (17)$$

$$f'(x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9 \cdot \sqrt[3]{x^4}} \quad (18)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}}, \quad f''(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{-\frac{1}{3}x^2 - 1}{(x^2 - 1)^{5/3}} \quad (19)$$

$$f'(x) = \frac{2 - 5x}{3 \sqrt[3]{x}}, \quad f''(x) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1 + 5x}{\sqrt[3]{x^4}} \quad (20)$$

$$f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2, \quad f''(x) = -9x^4 \sin(x^3) + 6x \cdot \cos(x^3)$$

$$f'(x) = -\sin(x^4) \cdot 4x^3, \quad f''(x) = -16x^6 \cos(x^4) - 12x^2 \cdot \sin(x^4) \quad (21)$$

$$f'(x) = 3 \sin^2 x \cdot \cos x, \quad f''(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x \quad (22)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\cos^2(x^2)}, \quad f''(x) = \frac{2 \cdot \cos^2(x^2) - 8x^2 \cos(x^2) \sin(x^2)}{\cos^4(x^2)} \quad (23)$$

$$f'(x) = \tan(x^2) \cdot (-2x), \quad f''(x) = \frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)} - 2 \tan(x^2) \quad (24)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 3x - 2}}, \quad f''(x) = \frac{2x + 3}{2(-x^2 - 3x - 2)^{3/2}} \quad (25)$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln(x+1) + \frac{\sin x}{x+1} \right) \quad (26)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}, \quad f''(x) = \frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2} \quad (27)$$

$$f'(x) = (\cos x)^{\ln x} \cdot \left( \frac{\ln(\cos x)}{x} - \tan x \cdot \ln x \right) \quad (28)$$

$$f'(x) = (\sin x)^x (\ln(\sin x) + \cot x \cdot x) \quad (29)$$

## תרגילים – פרק 2

### בעיות משיקים (המשמעות הגיאומטרית של הנגזרת)

(1) הישר  $y = x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = e^x$ . מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(2) הישר  $y = 4x + b$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2}{x^2} + 3$ . מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(3) הישר  $y = 3x$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x\sqrt{x} + b$ . מצא את  $b$  ואת נקודת ההשקה.

(4) הישר  $y = ax + \frac{1}{2}$  משיק לגרף הפונקציה  $g(x) = \frac{2}{x+c}$  בנקודה  $x = 0$ . מצא את  $a$  ו- $c$ .

(5) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = \ln x$  בנקודה  $x = e$ .

(6) מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה  $f(x) = x^3 + 1$  בנקודה  $x = 0$ .

(7) מצא את משוואת המשיק למעגל  $x^2 + y^2 = 25$  בנקודה  $(3, 4)$ .

(8) הפונקציות  $y = \frac{1}{x}$  ו- $y = -\frac{1}{2}x^2 + k$  משיקות זו לזו. מצא את  $k$  ואת נקודת ההשקה.

(9) מצא את נקודת ההשקה ואת משוואת המשיק לגרף העקומה העובר דרך הנקודה הנתונה.

(א)  $y = x^2 - 2x + 1$  ב- $(2, -3)$  (ב)  $y = \sqrt{x}$  ב- $(-3, 1)$

(10) מצא את משוואת המשיקים המשותפים לפונקציות הבאות:

$$y = x^2 \quad \text{ו-} \quad y = -\frac{1}{4}x^2 - 5$$

(11) מצא את הזווית בין הפונקציות  $y = f(x) = x^2$  ו- $y = g(x) = \frac{1}{x}$ .

(12) מצא את הזווית בין המעגל  $x^2 + y^2 = 8$  והפרבולה  $y^2 = 2x$ .

(13) הוכח שהאליפסה  $x^2 + 2y^2 = 8$  וההיפרבולה  $x^2 - y^2 = 2$  נחתכות בזווית ישרה.

**פתרונות – פרק 2**

(1) נקודת ההשקה היא  $(0,1)$  ומשוואת המשיק היא  $y = x + 1$ .

(2) נקודת ההשקה היא  $(-1,5)$  ומשוואת המשיק היא  $y = 4x + 9$ .

(3) נקודת ההשקה היא  $(4,12)$  ו-  $b = 4$ .

(4) נקודת ההשקה היא  $(0, \frac{1}{2})$  ומשוואת המשיק היא  $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{2}$ .

(5) משוואת המשיק היא  $y = \frac{1}{e}x$ .

(6) משוואת המשיק היא  $y = 1$ .

(7) משוואת המשיק היא  $y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}$ .

(8) נקודת ההשקה  $k = 1.5$ ,  $(1,1)$ .

(9) א)  $(0,1)$ ,  $y = -2x + 1$ ,  $(4,9)$ ,  $y = 6x - 15$ .

ב) המשיק:  $(9,3)$ ,  $y = \frac{1}{6}x + \frac{3}{2}$ .

(10)  $y = 2x - 1$ ,  $y = -2x - 1$ .

(11)  $71.57^\circ$

(12)  $71.56^\circ$



**תרגילים – פרק 3****חקירת פונקציה**

(1) חקור את הפונקציות הבאות חקירה מלאה לפי הפירוט הבא: תחום הגדרה ורציפות, נקודות חיתוך עם הצירים, זוגיות, אסימפטוטות אנכיות, אופקיות ומשופעות, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה, נקודות פיתול, תחומי קמירות וקעירות, גרף.

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} \quad (3)$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 \quad (2)$$

$$f(x) = x(x-9)^2 \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2} \quad (6)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-4} \quad (5)$$

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)^2} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2-4} \quad (9)$$

$$f(x) = \frac{x^2-1}{(x-2)(x-5)} \quad (8)$$

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \quad (12)$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \quad (11)$$

$$f(x) = \frac{x^3-x^2}{x^2-1} \quad (10)$$

$$f(x) = \ln^2 x + 2 \ln x - 3 \quad (15)$$

$$f(x) = \ln \sqrt{\frac{1}{2-x}} \quad (14)$$

$$f(x) = x \cdot \ln x \quad (13)$$

$$f(x) = x - e^x \quad (18)$$

$$f(x) = \ln^2 x + \frac{1}{\ln^2 x} \quad (17)$$

$$f(x) = 4 \ln^2 x - 4 \ln x - 3 \quad (16)$$

$$f(x) = x \cdot e^{-2x^2} \quad (21)$$

$$f(x) = (x+2) \cdot e^{\frac{1}{x}} \quad (20)$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} \quad (19)$$

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 1\right)^2 \quad (24)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(1-x) \quad (23)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \quad (22)$$

$$f(x) = x - 2 \arctan x \quad (27)$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-2} \quad (26)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1} \quad (25)$$

$$f(x) = 8 \cos x + 2 \cos 2x - 3 \quad (30) \\ (0 \leq x \leq 2\pi)$$

$$f(x) = 2 \cos^2 x - \sin 2x \quad (29) \\ (0 \leq x \leq \pi)$$

$$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad (28)$$

**הערות:**

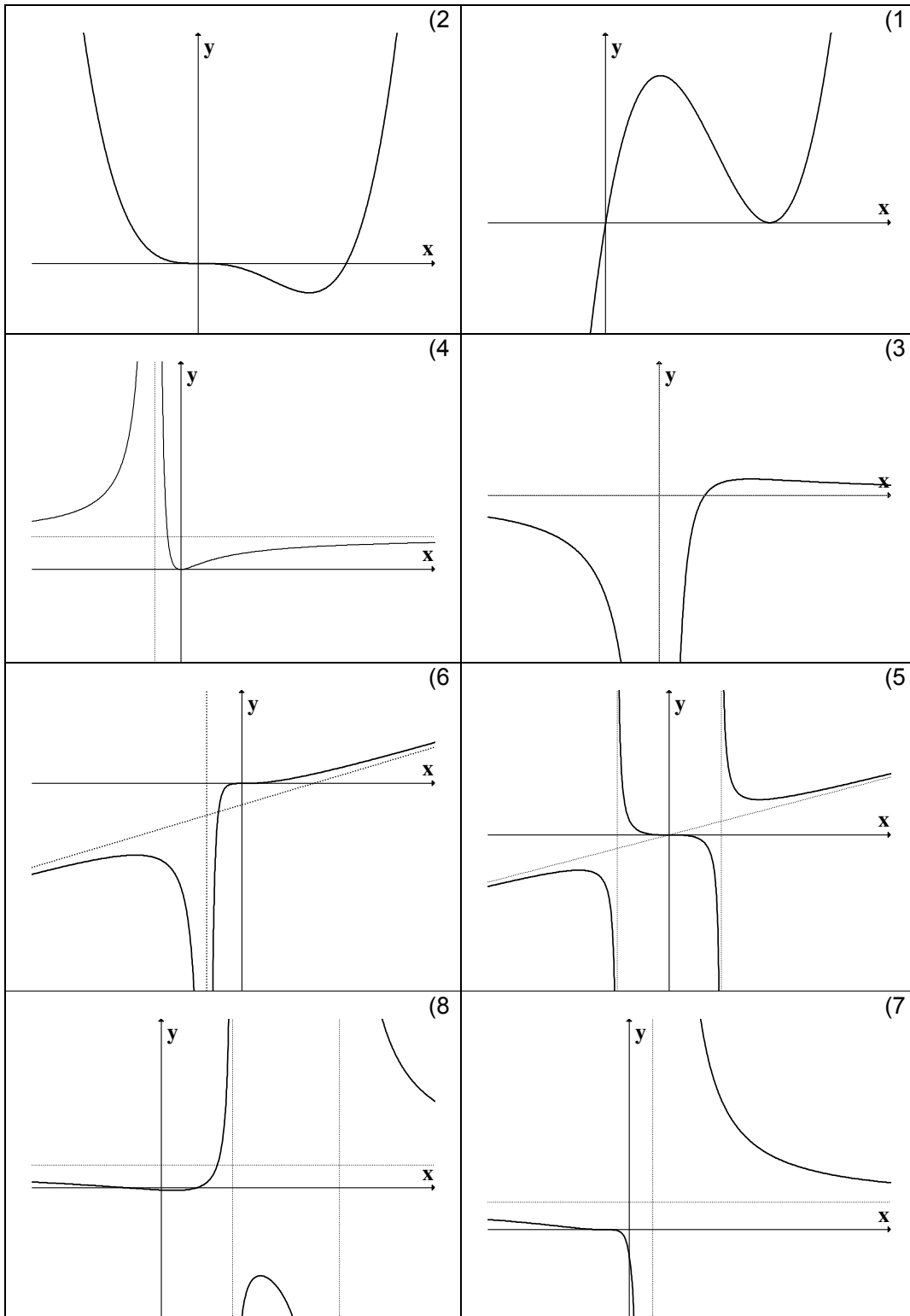
\* בשאלה 27 אין צורך למצוא חיתוך עם ציר  $x$ . בשאלה 18 מצא את החיתוך רק לאחר השרטוט.

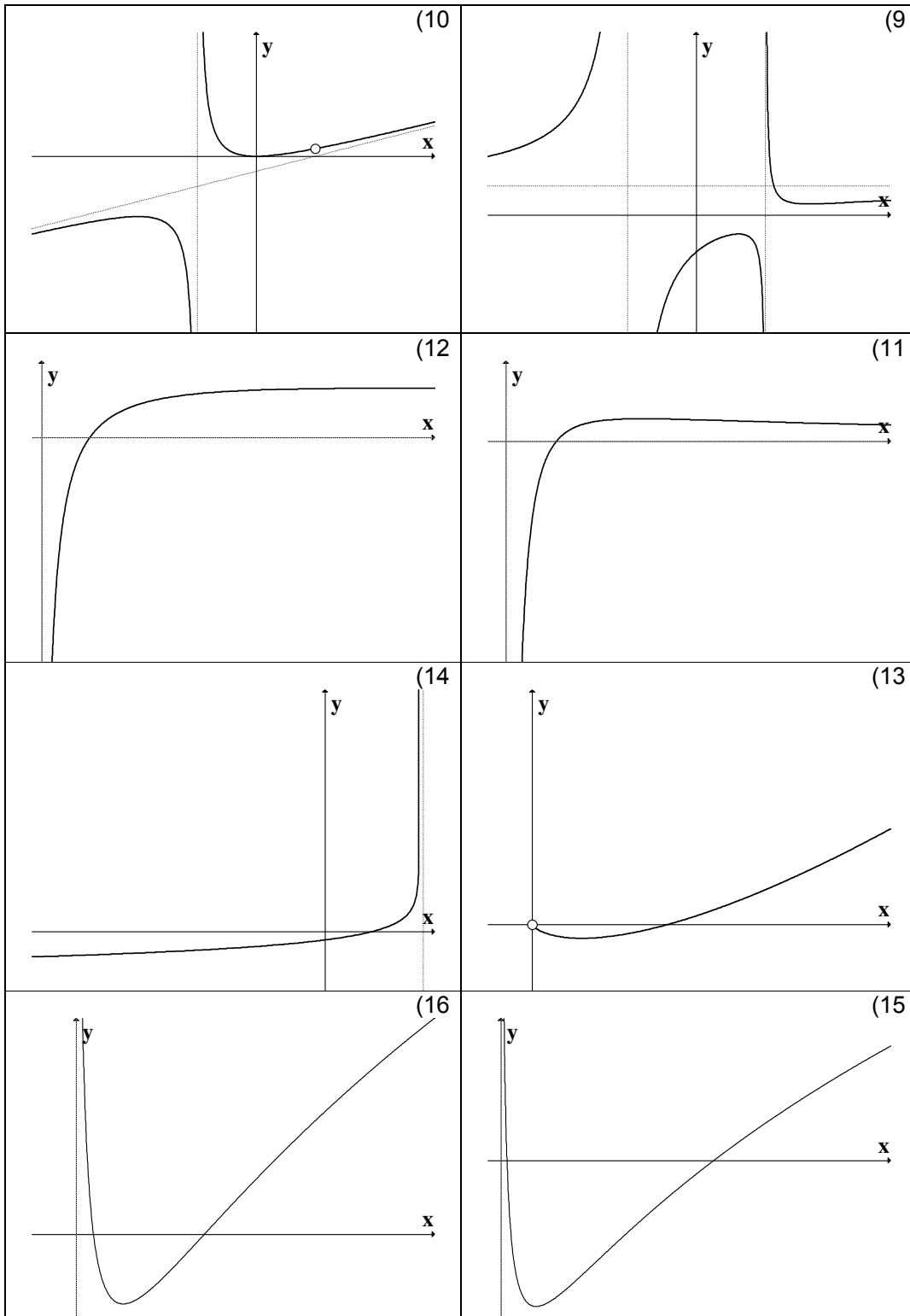
\*\* בתרגילים 1,2,28,29,30 אין צורך למצוא אסימפטוטות (וגם אין).

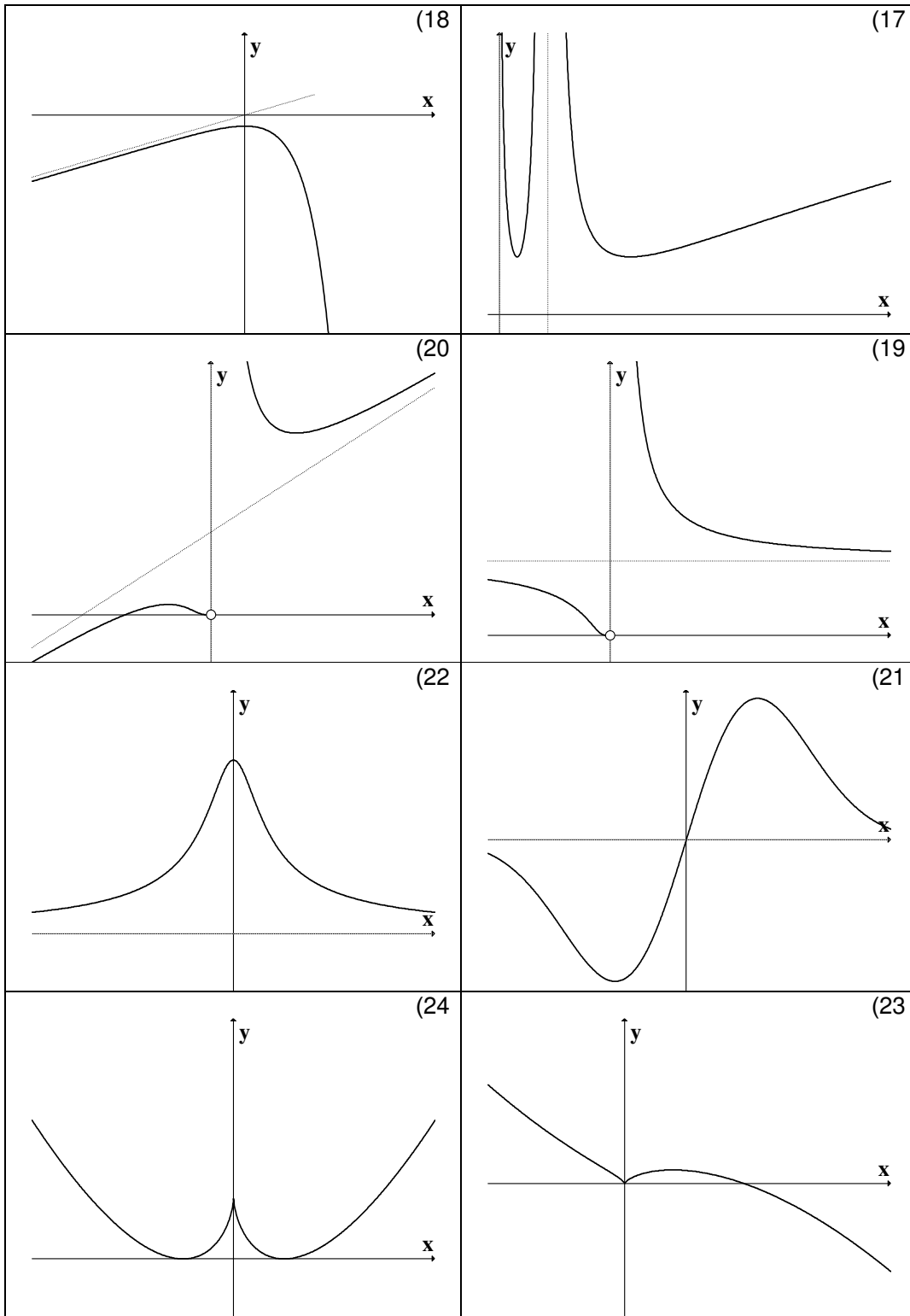
\*\*\* בתרגילים 9,17 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם ניוטון רפסון. בתרגיל 8 אין צורך למצוא נקודות פיתול אלא אם כן למדתם לפתור משוואה ממעלה שלישית.

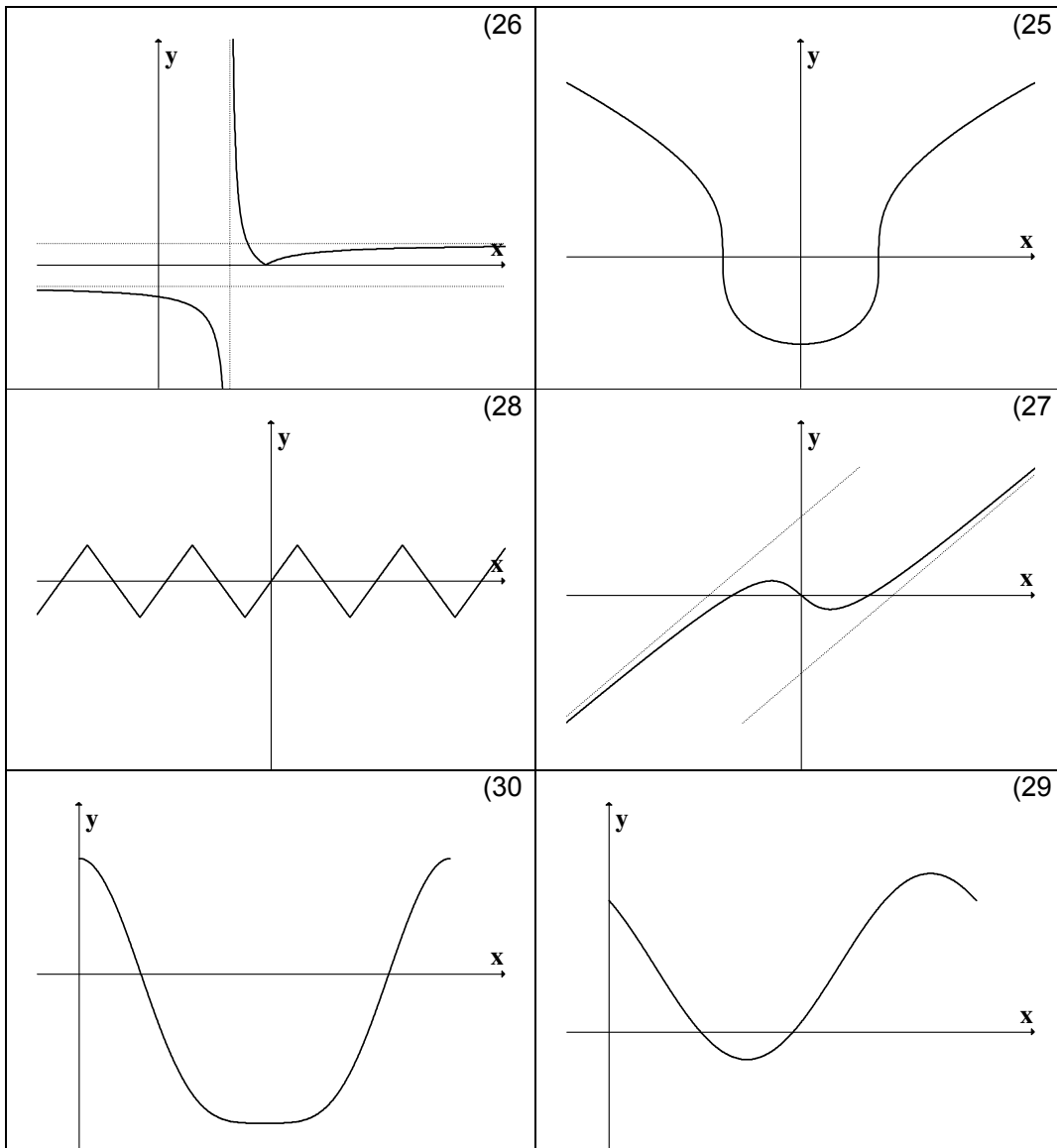
פתרונות – פרק 3

(1)









**תרגילים – פרק 4****פונקציות של מספר משתנים, גבולות ורציפות**

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה (בסעיפים 7 ו-8 תאר את משטחי הרמה).

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2 \quad (8) \qquad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (7)$$

(2) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2 y^2 - 36} \quad (2) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^3 y)}{x^3 y} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0^+)} (x^2 + y) \ln(x^2 + y) \quad (4) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4} \quad (6) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,1,2)} \frac{\sin(x(y^2+z^2))}{xy^2} \quad (8) \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \quad (7)$$

(3) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |y|^x \quad (2) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^4 + y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{y} \quad (4) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^3 y}{2x^6 + y^2} \quad (6) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0 \\ z \rightarrow 0}} \frac{xyz}{x^2 + y^4 + z^4} \quad (8) \qquad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \quad (7)$$

(4) חשב את הגבולות הבאים :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\infty, \infty)} \frac{x-y}{x^2+yx+y^4} \quad (2)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 y}{x^2+y^2} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \quad (4)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \quad (6)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2} \quad (8)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2+y^2) \quad (7)$$

(5) בדוק את רציפות הפונקציות הבאות בנקודה (0,0).

במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה, האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה ?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 2 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (2)$$

#### פתרונות - פרק 4

(1) (1)  $x \neq 0$ , המישור ללא ציר  $y$ . (2)  $x > 0, y > 0$ , הרביע הראשון ללא הצירים.(3) כל המישור. (4)  $x^2+y^2 \leq 1$ , עיגול היחידה. (5)  $y < x^2$ (6)  $y \geq 0$ , חצי המישור העליון. (7) ת.ה - כל המרחב. (8) ת.ה - כל המרחב.(2) (1) 1 (2)  $\frac{1}{12}$  (3) 1 (4) 0 (5) אינסוף (6)  $\frac{1}{2}$  (7) 2 (8) 5.

(3) בכל הסעיפים אין לפונקציה גבול. (4) (1) 0 (2) 0 (3) 0 (4) 0 (5) 3 (6) 0 (7) 0 (8) 0.

(5) (1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר  $f(0,0) = 1$  הפונקציה תהיה רציפה. (2) הפונקציה רציפה.

**תרגילים – פרק 5****פונקציות בשני משתנים לכלכלנים****עקומות שוות ערך, נגזרות חלקיות****עקומות שוות ערך**

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

(2)

א. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של  $f$ .

ב. נגדיר  $f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases}$ . הנח כי  $x, y \geq 0$ .

שרטט את העקומות שוות הערך  $f(x, y) = 4, 12$  עבור הפונקציה הנתונה.

ג. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של  $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$ ,  $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$ .

(3)

תהי  $u(x, y) = (x + p)(y + q)$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$  פונקצית תועלת של פרט.

הנקודות  $(1, 6)$ ,  $(3, 2)$ ,  $(0, 14)$  מונחות על אותה עקומת אדישות.

א. מצא את  $p$  ו- $q$ . הצב אותם בפונקצית התועלת.

ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?  
עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.



נגזרות חלקיות

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$(only f_x) f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות :

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3)$$

תרגילים – פרק 6קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוקף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

(9) נתון משטח  $z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$ .

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפתח 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה (1,2,3) למישור  $-2x - 2y + z = 0$  וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק עומד את הביקוש  $Q_1$  למחשבון בארץ ואת הביקוש  $Q_2$  למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים,  $P_1$  ו-  $P_2$ , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

### פתרונות - פרק 6

(1) (-0.5,1) אוכף ; (1.5,-3) מינימום.

- (2) (1, 2) מינימום ; (-1,-2) מקסימום ; (-1, 2) , (1,-2) אוסף.
- (3) (0,0) אוסף ; (1,1) מינימום.
- (4) (-1, 1) , (-1, -1) מינימום ; (1, 0) מקסימום ; (-1, 0) , (1,1) , (1, -1) אוסף.
- (5) (0, 2) מקסימום. (6) (4, 4) מקסימום.
- (7) (-0.5, 4) מקסימום. (8) אין נקודות קריטיות.
- (9)  $z = 3$  ,  $z = 4$  . (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר  $(1/3, 4/3, 10/3)$  .
- (12)  $P_1=10\$$  ,  $P_2=12\$$  , רווח מקסימלי 288\$ .

## תרגילים - פרק 7

### קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')

#### פונקציות של שני משתנים

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$(5) \text{ נתונה בעיית הקיצון } \text{Max}\{xy\} \text{ s.t. } x+3y=12$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעייה.

$$(6) \text{ נתונה בעיית הקיצון } \text{Max}\{2x+y\} \text{ s.t. } \sqrt{x}+\sqrt{y}=9$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעייה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר  $x+3y=12$ , מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה  $2x^2+3xy=1-2y^2$  מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

$$(9) \text{ מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר } 3x-6y+4=0 \text{ לפרבולה } x^2+2xy+y^2+4y=0$$

$$\text{רמז: מרחק הנקודה } (x_0, y_0) \text{ מהישר } ax+by+c=0 \text{ הוא } \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(10) מוושלה קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוושלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת  $\ln 16$  והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוושלה.

(11) דני קונה בשוק  $x$  ק"ג מלפפונים ו- $y$  ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

$$(12) \text{ עקומת התמורה בין מנגו } X \text{ ואננס } Y \text{ היא } x^2+y^2=13$$

$$\text{ לדני תועלת } f(x, y) = 4x+6y$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו)  $(x, y)$ , על עקומת התמורה, המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעייה.

