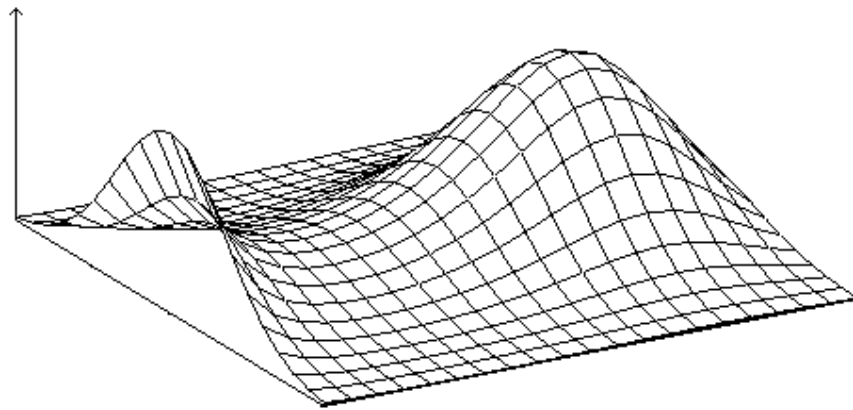


מתמטיקה ב' לכלכלנים

המכללה למנהל



גיא סלומון

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בחשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2 (חדו"א 2) והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/hedva2.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

GooL.co.il

גול, בשביל התרגול...

תוכן

3	פרק 1 - אינטגרלים מיידיים.....
4	פרק 2 - אינטגרלים כמעט מידיים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים".....
5	פרק 2 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים.....
6	פרק 4 - אינטגרלים בשיטת ההצבה.....
7	פרק 5 - שימושי האינטגרל המסויים (חישוב שטח ואורך קשת).....
	פרק 6 – פונקציות בשני משתנים לכלכלנים – עקומות שוות ערך ונגזרות חלקיות.....
15	פרק 7 - כלל השרשרת בפונקציות של מספר משתנים.....
17	פרק 8 - פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים.....
19	פרק 9 - קיצון של פונקציה של שני משתנים (רגיל).....
21	פרק 10 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגרנג').....
23	פרק 11 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים (כופלי לגרנג').....
24	פרק 12 – פונקציות הומוגניות – משפט אוילר.....

תרגילים – פרק 1**האינטגרל הלא מסויים (אינטגרל מיידי)**

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{1}{x^2} dx \quad (3) \qquad \int x^4 dx \quad (2) \qquad \int 4dx \quad (1)$$

$$\int 4x^{10} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx \quad (5) \qquad \int \sqrt{x} dx \quad (4)$$

$$\int (x^2 + 1)^2 dx \quad (9) \qquad \int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx \quad (8) \qquad \int (2x^2 - x + 1) dx \quad (7)$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx \quad (12) \qquad \int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx \quad (11) \qquad \int (x^2+1)(x+2) dx \quad (10)$$

$$\int \frac{4}{(x-2)^5} dx \quad (15) \qquad \int (x^2 - 2x + 1)^{10} dx \quad (14) \qquad \int (4x+1)^{10} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{x}{(x-1)^4} dx \quad (18) \qquad \int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx \quad (17) \qquad \int \sqrt[3]{4x-10} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{4x} dx \quad (21) \qquad \int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1} \quad (20) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}} \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{4x-1} dx \quad (24) \qquad \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 dx \quad (23) \qquad \int \frac{1+x+x^2}{x} dx \quad (22)$$

$$\int (e^{4x} + e^{-x}) dx \quad (27) \qquad \int \frac{4x+1}{x+2} dx \quad (26) \qquad \int \frac{x+3}{x+2} dx \quad (25)$$

$$\int \left(4\sqrt{e^x} + \frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right) dx \quad (30) \qquad \int \frac{2^x + 4^{2x} + 10^{3x}}{5^x} dx \quad (29) \qquad \int (e^{x+1})^2 dx \quad (28)$$

$$\int \frac{x^2}{1-x^2} dx \quad (33) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx \quad (32) \qquad \int \frac{1}{1+4x^2} dx \quad (31)$$

$$\int 2\sin 4x + \cos x dx \quad (36) \qquad \int \sin \frac{x}{2} dx \quad (35) \qquad \int \cos 4x dx \quad (34)$$

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

תרגילים – פרק 2**האינטגרל הלא מסוים (הנגזרת כבר בפנים)**

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1)x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1)x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

* הערה : את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

תרגילים – פרק 3

האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int x \sin x dx \quad (3) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \quad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int x \cos 2x dx \quad (4) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int \ln x dx \quad (7) \quad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \quad \int \arcsin x \quad (10) \quad \int \arctan x \quad (9)$$

$$\int x \arctan x \quad (14) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13) \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \quad \int \ln^2 x dx \quad (16) \quad \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \quad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19) \quad \int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad \int x \tan^2 x dx \quad (22) \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

(2) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int x^4 e^x dx$.

(3) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(4) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(5) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

תרגילים – פרק 4**האינטגרל הלא מסוים (שיטת ההצבה)**

(1) חשב את האינטגרלים הבאים (הצבות רגילות):

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3)$$

$$\int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2)$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6)$$

$$\int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5)$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9)$$

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8)$$

$$\int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12)$$

$$\int x^3(3x^2-1)^{14} dx \quad (11)$$

$$\int \cos(2x^2+1) \cdot 4x^4 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15)$$

$$\int \ln^3 x dx \quad (14)$$

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18)$$

$$\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17)$$

$$\int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \quad (21)$$

$$\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20)$$

$$\int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24)$$

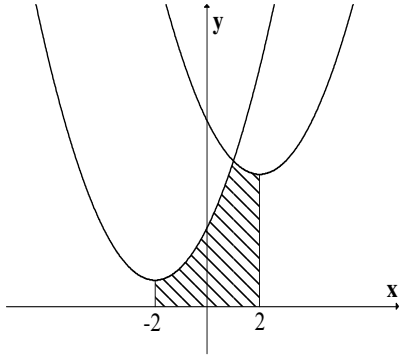
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23)$$

$$\int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

הערה: בחלק מהתרגילים, לאחר ההצבה, תידרש לאינטגרציה בחלקים.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 5

שימושי אינטגרל המסוים (שטח ואורך קשת)חישוב שטחים

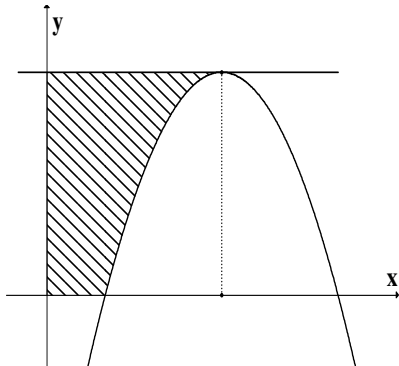
(1) נתונות שתי פונקציות:

$$f(x) = x^2 + 4x + 6$$

$$g(x) = x^2 - 4x + 14$$

א. מצא את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל ידי הישרים $x = -2$ ו- $x = 2$ (השטח המקווקו בציר).(2) נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 6x - 5$ (ראה ציור).

א. מצא את השיעורים של נקודת המקסימום של הפונקציה.

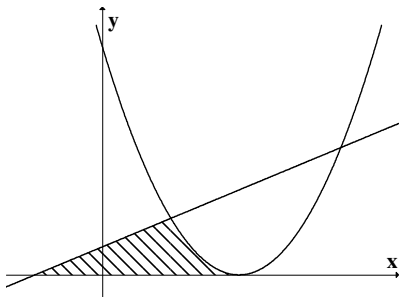
ב. מהי משוואת הישר המשיק לגרף הפונקציה

בנקודת המקסימום שלה?

ג. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק

בנקודת המקסימום, על ידי הצירים ועל ידי

גרף הפונקציה (השטח המקווקו בציר).

(3) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-2)^2$ ונתון הישר $y = 0.5x + 0.5$ (ראה ציור). מצא את השטחהמוגבל על ידי גרף הפונקציה, הישר וציר ה- x

(השטח המקווקו בציר).

(4) נתונות הפונקציות:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = -x^2 + 18$$

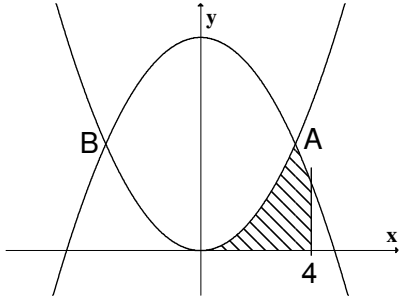
B ו-A הנקודות של הפונקציות נחתכים בנקודות A ו-B

(ראה ציור).

- א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות A ו-B.
 ב. חשב את השטח ברביע הראשון המוגבל על ידי

הגרפים של שתי הפונקציות, על ידי ציר ה- x ועל

ידי הישר $x = 4$.



(5) נתונות שתי פונקציות:

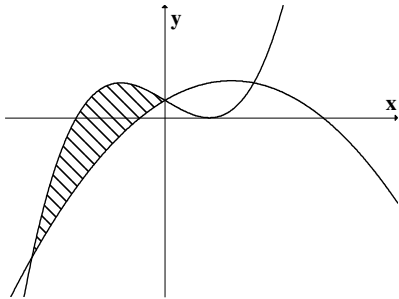
$$y = -x^2 + 3x + 2$$

$$y = x^3 - 3x + 2$$

- א. מצא את שיעורי ה- x של נקודות החיתוך בין הגרפים של שתי הפונקציות.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, השטח המקווקו בציור.

(6) נתונה הפונקציה $f(x) = -x^2 + ax$.

הפונקציה עוברת דרך הנקודה $A(2,8)$ (ראה ציור).

א. מצא את ערך הפרמטר a .

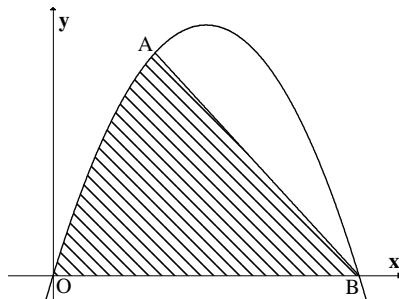
ב. הפונקציה חותכת את ציר x בנקודה $O(0,0)$ ונקודה B.

ג. מצא את שיעורי הנקודה B.

ד. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי המיתר AB ועל ידי ציר

ה- x .

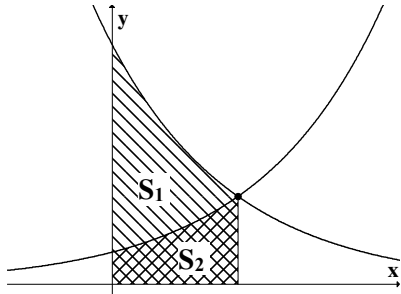


(7)

בציור שלפניך נתונות שתי הפונקציות :

$$f(x) = e^{-x+2}$$

$$g(x) = e^x$$



א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר y .

ב. מצא את נקודת החיתוך בין הפונקציות.

ג. חשב את היחס $\frac{S_1}{S_2}$ (ראה ציור).

(8)

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{-2x}$.

העבירו ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה

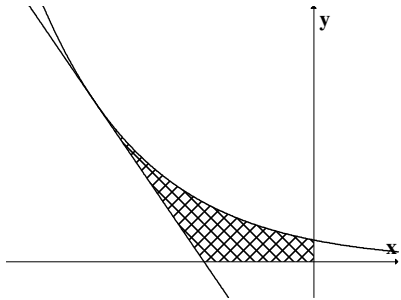
$$x = -1 \text{ (ראה ציור).}$$

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי הצירים (השטח

המקווקו בציור).



(9)

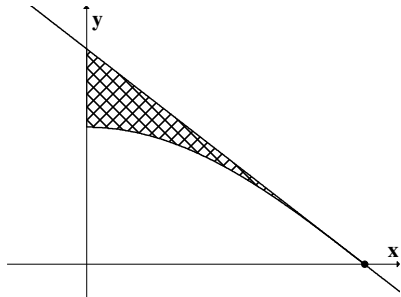
נתונה הפונקציה $y = \cos 2x$ בתחום $0 \leq x \leq 4$ (ראה ציור).

ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

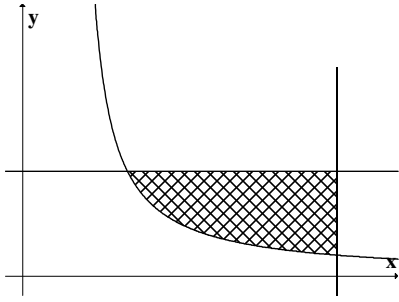
על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .



(10) חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

$$y = \frac{1}{2x-1} \text{ ועל ידי הישרים } x = 3 \text{ ו- } y = 1$$

(השטח המקווקו בציור).



(11) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - e^x$.

לפונקציה יש מינימום כמתואר בציור.

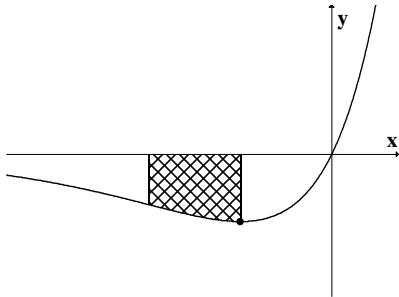
א. מצא את שיעור ה- x של נקודת המינימום של הפונקציה.

ב. מנקודת המינימום של הפונקציה העבירו אנך לציר ה- x . נתון כי השטח, המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, על ידי ציר ה- x , על ידי האנך ועל

ידי הישר $x=a$, שווה ל- $3e^{2a} - e^a$, כאשר

$a < \ln 0.5$. מצא את הערך של a .



(12)

נתונה הפונקציה $f(x) = e^{\frac{x+1}{2}}$ (ראה ציור).

שיפוע הישר, המשיק לגרף הפונקציה בנקודה A, הוא $\frac{e^2}{2}$.

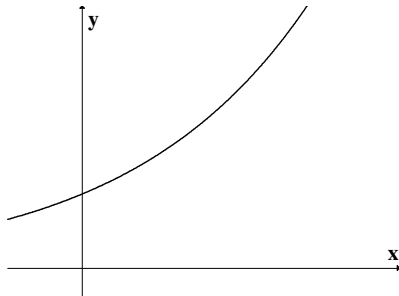
א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

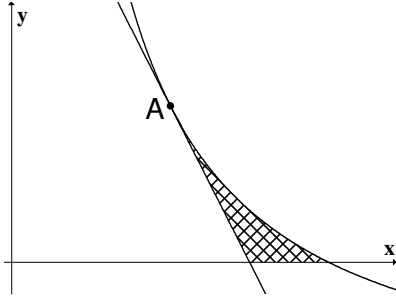
בנקודה A.

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .



(13)



נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{8}{x} - 2$ בתחום $x > 0$.

מעבירים ישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה

$A(2, 2)$ (ראה ציור).

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x (השטח המקווקו)

(בציור).

(14) נתונות הפונקציות :

$$f(x) = \sin x ; 0 \leq x \leq \pi$$

$$g(x) = \cos 2x ; 0 \leq x \leq \pi$$

א. תאר במערכת צירים את הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות.

ב. קווקו את השטח המוגבל בין הגרפים של שתי הפונקציות הנתונות וחשב את גודלו.

(15) נתונה הפונקציה $f(x) = tg^2 x$ בתחום $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$.

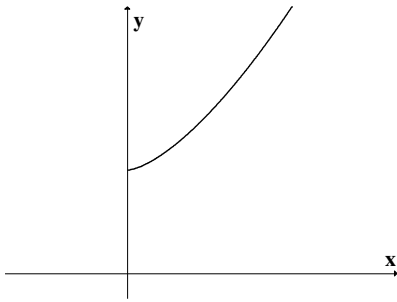
א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = -\frac{\pi}{4}$.

ב. הראה כי $\int tg^2 x dx = tgx - x + c$ ומצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- x .

(16) דרך הנקודה $A(8, 0)$ העבירו משיקים לפרבולה $y = x^2 - 10x + 25$.

א. מצא את משוואות המשיקים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני המשיקים והפרבולה.



(17)

נתונה הפונקציה $f(x) = x\sqrt{x} + 4$ בתחום $x \geq 0$.

(ראה ציור)

א. מצא את משוואת הישר העובר דרך הנקודה

(0,0) ומשיק לגרף הפונקציה הנתונה.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה

הנתונה, על ידי המשיק ועל ידי ציר ה- y .(18) א. חשב את הנגזרת של הפונקציה $f(x) = \cos^3 x$.ב. חשב את השטח המוגבל על ידי ציר ה- x ועל ידי גרף הפונקציה $y = \cos^2 x \cdot \sin x$

$$\text{בתחום } \frac{1}{2}\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$$

* לסטודנטים במקצועות ריאליים, ענו על סעיף ב ללא סעיף א.

(19) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $y^2 = -x$ והישר $y = x + 6$.(20) חשב את השטח הכלוא בין הפרבולה $x = y^2 + 2$ והישר $y = x - 8$.(21) חשב את האינטגרלים הבאים: א. $\int_0^a \sqrt{x^2 - a^2} dx$ ב. $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy$ **חישוב אורך עקום (קשת)**

(22) חשב את אורך העקום הנתון בסעיפים הבאים:

$$(1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^5}{15} + \frac{1}{4x^3} \quad (3) \quad (1 \leq x \leq 8) y = x^{2/3} \quad (2) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2} \quad (1)$$

$$(1 \leq x \leq 8) x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad (6) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{1}{3}\sqrt{x}(3-x) \quad (5) \quad (0 \leq x \leq 3) y = \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} \quad (4)$$

$$(1 \leq x \leq 2) y = x^2 \quad (9) \quad (1 \leq x \leq 2) y = \ln x \quad (8) \quad (0 \leq y \leq 4) x = 3y^{3/2} - 1 \quad (7)$$

תרגילים – פרק 6**פונקציות בשני משתנים לכלכלנים**
עקומות שוות ערך, נגזרות חלקיות**עקומות שוות ערך**

(1) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, מצא תחום הגדרה, שרטט אותו ושרטט את מפת קווי הגובה/עקומות שוות ערך של הפונקציה.

$$f(x, y) = \ln x + \ln y \quad (2) \qquad f(x, y) = \frac{y}{x} \quad (1)$$

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (4) \qquad f(x, y) = x^2 + y^2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x\sqrt{y} \quad (6) \qquad f(x, y) = \ln(x^2 - y) \quad (5)$$

(2)

א. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = 100 - 5x - 2y$

באיזה כיוון עליך לזוז מעקומה לעקומה על מנת להגדיל את הערך של f .

ב. נגדיר $f(x, y) = \begin{cases} 3x + y & y > x \\ 4x & y \leq x \end{cases}$. הנח כי $x, y \geq 0$.

שרטט את העקומות שוות הערך $f(x, y) = 4, 12$ עבור הפונקציה הנתונה.

ג. שרטט את מפת העקומות שוות הערך של $f: \mathbf{R}_+^2 \rightarrow \mathbf{R}_+$, $f(x, y) = \min\left\{\frac{x}{3}, y\right\}$.

(3)

תהי $u(x, y) = (x + p)(y + q)$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ פונקצית תועלת של פרט.

הנקודות $(0, 14)$, $(3, 2)$, $(1, 6)$ מונחות על אותה עקומת אדישות.

א. מצא את p ו- q . הצב אותם בפונקצית התועלת.

ב. מהי משוואת עקומת האדישות עליה מונחות הנקודות הנתונות?
עליך להגיע למשוואה מפורשת. שרטט את עקומת האדישות.

נגזרות חלקיות

(4) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^3 - 3x^2y^2 + 2x + 3y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^5 \ln y \quad (2)$$

$$(only f_x) f(x, y) = \frac{x^2 y^4 (\sqrt{y} + 5 \ln y)}{y^2 + 5y + y^y} \quad (3)$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^3) \cdot (2x + 3y) \quad (4)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - 3y}{x + y^2} \quad (5)$$

(5) חשב את הנגזרות החלקיות מסדר שני של הפונקציות הבאות:

$$f(x, y) = 4x^2 - x^2y^2 + 4x + 10y \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^4 \ln y \quad (2)$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (3)$$

תרגילים – פרק 7**כלל השרשרת לפונקציה של מספר משתנים**

* בתרגילים בפרק זה, הנח שכל הנגזרות הרשומות קיימות.

$$(1) \text{ נתון } z = \ln(x^2 - y^2), y = u^2 + v^3, x = 2u - v, \text{ חשב } z_u, z_v.$$

$$(2) \text{ נתון } z = e^{u-v}, u = t^2 + 4m, v = 4t + k^2, \text{ חשב } \frac{\partial z}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial m}, \frac{\partial z}{\partial k}.$$

$$(3) \text{ נתון } z = f(x^2 - y^2) \text{ הוכח } y \cdot z_x + x \cdot z_y = 0.$$

$$(4) \text{ נתון } z = f(xy) \text{ הוכח } x \cdot z_x - y \cdot z_y = 0.$$

$$(5) \text{ נתון } z = f\left(\frac{x}{y}\right) \text{ הוכח } x \cdot z_x + y \cdot z_y = 0.$$

$$(6) \text{ נתון } z = f(x - y, y - x) \text{ הוכח } z_x + z_y = 0.$$

$$(7) \text{ נתון } w = f(x - y, y - z, z - x) \text{ הוכח } w_x + w_y + w_z = 0.$$

$$(8) \text{ נתון } u = \sin x + f(\sin y - \sin x) \text{ הוכח } u_x \cos y + u_y \cos x = \cos x \cos y.$$

$$(9) \text{ נתון } z = y \cdot f(x^2 - y^2) \text{ הוכח } \frac{1}{x} z_x + \frac{1}{y} z_y = \frac{z}{y^2}.$$

$$(10) \text{ נתון } z = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right) \text{ הוכח } x \cdot z_x + y \cdot z_y = xy + z.$$

$$(11) \text{ נתון } u(x, y, z) = x^2 \cdot f\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \text{ הוכח } xu_x + yu_y + zu_z = 2u.$$

$$(12) \text{ נתון } h(x, y) = f(y + ax) + g(y - ax) \text{ הוכח } h_{xx} = a^2 \cdot h_{yy}.$$

$$(13) \text{ נתון } u(x, y) = f(e^x \sin y) - g(e^x \sin y)$$

$$\text{הוכח: א. } u_{xx} + u_{yy} = \frac{u_{xx} - u_x}{\sin^2 y} \quad \text{ב. } u_{xy} = u_{yx}.$$

$$\text{חשב: ג. } u_{xy}(1, \pi) \text{ אם ידוע ש- } f'(0) = 2, g'(0) = 1.$$

$$(14) \text{ נתון } y = r \sin \theta, x = r \cos \theta, u = f(x, y)$$

$$\text{א. הוכח } (u_x)^2 + (u_y)^2 = (u_r)^2 + \frac{1}{r^2} (u_\theta)^2$$

$$\text{ב. הוכח } u_{rr} = f_{xx} \cos^2 \theta + 2f_{xy} \cos \theta \sin \theta + f_{yy} \sin^2 \theta$$

$$\text{ג. הוכח } f_{xx} + f_{yy} = u_{rr} + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r} u_r$$

$$(15) \text{ נתון } z = h(u, v) \text{ ונתון כי } u = f(x, y), v = g(x, y) \text{ מקיימות את מישוואת}$$

$$\text{קושי-רימן, כלומר מקיימות } u_x = v_y, u_y = -v_x$$

הוכח כי:

$$\text{א. } u, v \text{ מקיימות את מישוואת לפלס. כלומר } u_{xx} + u_{yy} = 0, v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$\text{ב. } h_{xx} + h_{yy} = \left((u_x)^2 + (v_x)^2 \right) (h_{uu} + h_{vv})$$

$$(16) \text{ נתון } y = r \sinh s, x = r \cosh s, u = f(x, y)$$

$$\text{הוכח כי } (u_x)^2 - (u_y)^2 = (u_r)^2 - \frac{1}{r^2} (u_s)^2$$

פתרונות - פרק 7

(13) ג. $-e$.

תרגילים - פרק 8**פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות, שימושים גיאומטריים****פונקציות סתומות, מערכת של פונקציות סתומות**

(1) מצא את y' כאשר $x^2 + y^5 = xy + 1$. חשב את $y'(0)$.

(2) מצא את $y'(1)$ כאשר $e^{xy} + x^2y^2 = 5x - 4$.

(3) מצא את $y'(e)$, $y''(e)$ כאשר $2 \ln x + \ln y = 1$.

(4) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y) \sin z = 0$

חשב את: $\frac{\partial z}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,0)$.

(5) נתון $(y = y(x, z) \geq 0)$ $z^2 - e^{x^2+y^2} + (x+y) \sin z = -e^4$

חשב את $y_x(0,0)$, $y_z(0,0)$.

(6) נתון $(z = z(x, y) \geq 0)$ $z^3 - 2xz + y = 0$. מצא $z_{xx}(1,1)$.

(7) נתונה משוואה $z^3 - 3xyz = 4$ ונקודה $(2,1,-2)$.

מצא: (1) $z_{xx}(2,1)$ (2) $z_{xy}(2,1)$ (3) $z_{yy}(2,1)$.

(8) אם $u^2 - v = 3x + y$ ו- $u - 2v^2 = x - 2y$,

מצא את u_x, v_x, u_y, v_y .

(9) אם $w = u^3 + v^3$, $y = u^2 + v^2$, $x = u + v$, מצא את w_x, w_y .

שימושים גיאומטריים (מישור משיק וישר נורמלי למשטח)

$$(10) \text{ נתון משטח המוגדר ע"י הפונקציה } \frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3 \text{ (} z < 0 \text{)}$$

מהי משוואת מישור משיק למשטח בנקודה P בה $x = -2, y = 1$.

$$(11) \text{ מצא משוואה של מישור משיק למשטח } xyz = 8 \text{ בנקודה } (-2, 2, -2) \text{ וכן}$$

משוואה של הישר הפרמטרי הניצב למשטח הנתון בנקודה זו.

$$(12) \text{ מצא מישור המשיק למשטח } x^2 + 8y^2 = 21 - 27z^2 \text{ המקביל למישור}$$

$$. x + 8y + 18z = 0$$

$$(13) \text{ למשטח } \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a} \text{ מעבירים מישור המשיק בנקודה כלשהי.}$$

מישור זה חותך את הצירים x, y, z בנקודות A, B, C בהתאמה. נסמן

$$. OA + OB + OC = a \text{ הוכח. } O = (0, 0, 0)$$

(למעשה מוכיחים שסכום הקטעים אינו תלוי בנקודת ההשקה).

פתרונות - פרק 8

$$y'(0) = \frac{1}{5} \quad (1)$$

$$y'(1) = 5 \quad (2)$$

$$y'(e) = -\frac{2}{e^2}, y''(e) = \frac{6}{e^3} \quad (3)$$

$$z_x(0, 0) = z_y(0, 0) = -\frac{\sin 1}{2} \quad (4)$$

$$y_x(0, 0) = 0, y_z(0, 0) = \frac{1}{2e^4} \quad (5)$$

$$z_x(1, 1) = -16 \quad (6)$$

$$z_{xx}(2, 1) = z_{xy}(2, 1) = 1, z_{yy}(2, 1) = 4 \quad (7)$$

$$u_x = \frac{1-12v}{1-8uv}, u_y = \frac{-4v-2}{1-8uv}, v_x = \frac{2u-3}{1-8uv}, v_y = \frac{-4u-1}{1-8uv} \quad (8)$$

$$w_x = -3uv, w_y = 1.5(u+v) \quad (9)$$

$$3x - 6y + 2z + 18 = 0 \quad (10)$$

$$x - y + z + 6 = 0, (-2, 2, -2) + t(1, -1, 1) \quad (11)$$

$$x + 8y + 18z = 21, x + 8y + 18z = -21 \quad (12)$$

תרגילים - פרק 9**קיצון של פונקציה בשני משתנים (רמה רגילה)**

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצא נקודות קריטיות וסווג אותן למקסימום, מינימום או אוכף.

$$f(x, y) = 8x^3 + 12xy + 3y^2 - 18x \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy + 4 \quad (3)$$

$$f(x, y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4 \quad (4)$$

$$f(x, y) = e^{4y-x^2-y^2} \quad (5)$$

$$f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y \quad (6)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2y^2 - 8x + y}{xy} \quad (7)$$

$$f(x, y) = e^x \cos y \quad (8)$$

$$(9) \text{ נתון משטח } z = x^3 + y^3 - 3xy + 4$$

מצא את משוואות המישורים המשיקים האופייניים למשטח.

(10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפתחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

(11) מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה (1, 2, 3) למישור $-2x - 2y + z = 0$

וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ"ל.

(12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין. עלות הייצור של מחשבון בארץ היא \$6 ועלות ייצור מחשבון בסין היא \$8. מנהל השיווק עומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ ואת הביקוש Q_2 למחשבון בסין על ידי:

$$Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$$

$$Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2$$

כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2 , על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

פתרונות - פרק 9

- (1) $(-0.5, 1)$ אוקף ; $(1.5, -3)$ מינימום.
- (2) $(1, 2)$ מינימום ; $(-1, -2)$ מקסימום ; $(-1, 2)$, $(1, -2)$ אוקף.
- (3) $(0, 0)$ אוקף ; $(1, 1)$ מינימום.
- (4) $(-1, -1)$, $(-1, 1)$ מינימום ; $(1, 0)$ מקסימום ; $(-1, 0)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$ אוקף.
- (5) $(0, 2)$ מקסימום. $(4, 4)$ מקסימום.
- (7) $(-0.5, 4)$ מקסימום. (8) אין נקודות קריטיות.
- (9) $z = 3$, $z = 4$. (10) רוחב 4 ס"מ , אורך 4 ס"מ , גובה 2 ס"מ .
- (11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
- (12) $P_1 = 10\$$, $P_2 = 12\$$, רווח מקסימלי \$288 .

תרגילים - פרק 10**קיצון תחת אילוץ של פונקציה של שני משתנים (כופלי לגרנג')****פונקציות של שני משתנים**

מצא את המקסימום והמינימום של הפונקציות הבאות בכפוף לאילוץ הנתון:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 ; 2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (2)$$

$$f(x, y) = 4x + 6y ; x^2 + y^2 = 13 \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 y ; x^2 + 2y^2 = 6 \quad (4)$$

$$\text{Max}\{xy\} \quad \text{s.t.} \quad x + 3y = 12 \quad (5)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

$$\text{Max}\{2x + y\} \quad \text{s.t.} \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} = 9 \quad (6)$$

א. פתור את הבעיה. ב. הבא פתרון גרפי לבעיה.

(7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x + 3y = 12$, מצא את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

(8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2 + 3xy = 1 - 2y^2$ מצא את הנקודות שמרחקיהן מראשית הצירים הוא מינימלי ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

(9) מצא את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x - 6y + 4 = 0$ לפרבולה $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0, y_0) מהישר $ax + by + c = 0$ הוא $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

(10) מוישלה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = \ln x + \ln y \text{ נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.

מוישלה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$ והוא מעוניין להשיג זאת

בעלות מינימאלית. נסח ופתור את בעיית מוישלה.

(11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות. התועלת מצריכת הסל

$$u(x, y) = xy \text{ נתונה על ידי}$$

מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח. מחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.

לדני תקציב של 12 ש"ח. נסח ופתור את בעיית דני.

(12) עקומת התמורה בין מנגו X ואננס Y היא $x^2 + y^2 = 13$.

$$f(x, y) = 4x + 6y \text{ תועלת דני}$$

דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) (x, y) , על עקומת התמורה, המביא

למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס. נסח ופתור את הבעיה.

(13) לייצרן פונקציית ייצור $Q = \sqrt{K} + \sqrt{L}$. המחירים ליחידת K ו- L הם

$P_K = 2, P_L = 1$. היצרן נמצא ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף

(K^*, L^*) המביא למינימום את העלות. נסח את בעיית היצרן (אל תפתור).

פתרונות - פרק 10

$$\text{Max}(0, \pm 1) \quad \min(\pm 1, 0) \quad (2) \quad \text{Max}(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (1)$$

$$\text{Max}(\pm 2, 1) \quad \min(\pm 2, 1) \quad (4) \quad \text{Max}(2, 3) \quad \min(-2, -3) \quad (3)$$

$$\text{Max}(9, 36) \quad (6) \quad \text{Max}(6, 2) \quad (5)$$

$$\text{Max}(\pm 1, \mp 1) \quad \min(\pm\sqrt{1/7}, \pm\sqrt{1/7}) \quad (8) \quad (6, 2) \quad (7)$$

$$\min(\sqrt{32}, \sqrt{8}) \quad (10) \quad 7 / \sqrt{45} \quad (9)$$

$$\text{Max}(2, 3) \quad (12) \quad \text{Max}(6, 2) \quad (11)$$

$$\min\{2K + L\} \quad ; \quad \sqrt{K} + \sqrt{L} = 100 \quad (13)$$

תרגילים - פרק 11**קיצון תחת אילוצים של פונקציה של שלושה משתנים (כופלי לגרנג')****פונקציות של שלושה משתנים תחת אילוץ**

(1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפתחן 32 סמ"ק, חשב את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

כלומר, מצא מינימום לפונקציה $f(x, y, z) = xy + 2zy + 2xz$ בכפוף לאילוץ $xyz = 32$.

(2) מצא על פני הכדור $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ את הנקודות הקרובות ביותר

לנקודה $(1, 2, 2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1, 2, 2)$.

כלומר, מצא מקסימום ומינימום לפונקציה $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2$ בכפוף לאילוץ $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

(3) א. מצא את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1, 2, 3)$ למישור $-2x - 2y + z = 0$.

כלומר, מצא מקסימום ומינימום לפונקציה $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2$ בכפוף לאילוץ $-2x - 2y + z = 0$.

(4) מצא את הנקודות על המשטח $z^2 = xy + 1$ הקרובות ביותר לראשית.

כלומר, מצא מקסימום ומינימום לפונקציה $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ בכפוף לאילוץ $z^2 = xy + 1$.

(5) מצא את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$

למישור $3x + 4y + 12z = 288$.

כלומר, מצא מקסימום ומינימום לפונקציה $f(x, y, z) = \frac{3}{13}x + \frac{4}{13}y + \frac{12}{13}z - \frac{288}{13}$

בכפוף לאילוץ $\frac{x^2}{96} + y^2 + z^2 = 1$.

תרגילים – פרק 12**פונקציות הומוגניות, משפט אוילר****שאלה 1**

א. הוכח כי פונקצית התועלת $u(x, y) = \left(\frac{1}{2}x^m + \frac{1}{2}y^m\right)^{1/m}$ הומוגנית. הנח כי m קבוע חיובי.

ב. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_y(a, a) = u_y(1, 1)$.

ג. הוכח, ללא חישוב ישיר של הנגזרות, כי $u_x(2, 2) + u_y(1, 1) = 1$.

שאלה 2

א. מצא את סדר ההומוגניות, m . $f(2, 1) = \sqrt{27}$ ו- $f(6, 3) = 243$ המקיימת m תהי $f(x, y)$ פונקציה הומוגנית מסדר

ב. בנקודה $(6, 3)$ עוברת עשׂייע של f . מעבירים משיק לעשׂייע בנקודה הנ״ל. המשיק הוא

ג. מצא את $f_x(1, 0.5)$, $f_y(2, 1)$, $f_x(2, 1)$.

ד. מצא את $2x + 3y = 21$.

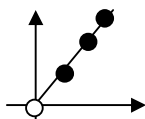
שאלה 3

פונקציה של משתנה אחד. $g(t)$ תהי

$g(4) = 5$, $g(1) = 3$, $g'(8) = 2$. ידוע כי g על הפונקציה

תלוי במשתנים החיוביים (x, y) כך: $t = \frac{4y}{x}$.

כפונקציה של המשתנים $u(x, y) = g(t) = g\left(\frac{4y}{x}\right)$ באופן הבא: (x, y) כפונקציה של המשתנים u מגדירים תועלת



א. באיור שלפניך קרן עם שיפוע 1.

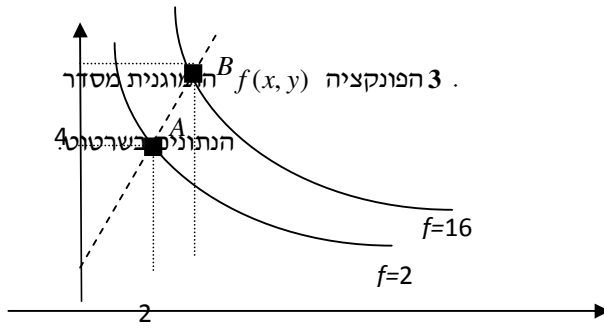
מה הערך של התועלת בנקודות המסומנות על הקרן?

ב. הוכח כי הקרן $4y - x = 0$ היא עקומת אדישות של התועלת.

צייר את הקרן הזאת ורשום באיור מה הערך של התועלת.

ג. הוכח כי התועלת היא פונקציה הומוגנית. מהו סדר ההומוגניות?

ד. הוכח כי $u_x(1, 2) = -16$.



שאלה 4

א. מצא את שיעורי הנקודה B .

ב. מצא את ערך הסכום $f_x(4,8) + 2f_y(4,8)$.

ג. נגדיר פונקציה חדשה $u(x, y) = (f(x, y))^2$ על ידי

הסבר זאת בקצרה. $u_x(x, y) = 2 \cdot f(x, y) \cdot f_x(x, y)$. ג.1. לפי כללי הגזירה מתקיים

היעזר ב-1 ובנתונים על $6(f(x, y))^2 = x \cdot u_x(x, y) + y \cdot u_y(x, y)$. ג.2. הוכח כי