אלגברה

לינארית 2

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \chi & \delta \\ \varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\ \eta & \iota & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & o & \pi \\ \varpi & \theta & \vartheta & \rho \\ \sigma & \varsigma & \tau & \upsilon \\ \omega & \xi & \psi & \zeta \end{pmatrix}$$

גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק באלגברה לינארית והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתִרגוּל בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר www.GooL.co.il

הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: www.GooL.co.il/linearit.html

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון

תוכן

תרגילים – פרק 1

מטריצות

(1) נתונות מטריצות: $A_{4\times6}, B_{4\times6}, C_{6\times2}, D_{4\times2}, E_{6\times4}$.

קבע מי מבין המטריצות הבאות מוגדרות. במידה והמטריצה מוגדרת רשום את סדר המטריצה.

1) $A+B$ 2) AB 3) $AC-D$ 4) $AE-B$ 5) $B+AB$
6) $E(B+A)$ 7) $(E+A^T)D$ 8) E^TB 9) $E(AC)$ 10) $E(B-A)$

(2) מצא את x,y,z, אם ידוע כי:

$$\begin{pmatrix} x+2y & 3x-2y \\ 2x-5y & 2x+8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2z & 5+z \\ -4-3z & -12z \end{pmatrix}$$

(3) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 10 \end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

חשב (במידה וניתן):

1) $E+D$ 2) $E-D+I_3$ 3) $5C$ 4) $2D+4EI_3$ 5) $2tr\left(D^2-2E\right)$
6) $4C^T+A$ 7) $\frac{1}{2}A^T+\frac{1}{4}C$ 8) I_2BC 9) $tr\left(C^TC\right)$ 10) $DABC$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים מצא מטריצות A, $\underline{x}$ ו- $\underline{b}$ המבטאות את מערכת המשוואות הנתונה ע"י המשוואה היחידה $A\underline{x}=\underline{b}$.

1)
$$\begin{aligned} 2x+y-z&=3 \\ x+2y-4z&=5 \\ 6x+4y+z&=2 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z+t&=1 \\ 4x+y+2z&=4 \\ y+z+t&=1 \\ x-4z-2y&=10 \end{aligned}$$

(5) נתון:

$$A=\begin{pmatrix}4&-2&4\\1&-1&1\\1&-6&3\end{pmatrix}\qquad \underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\qquad \underline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

בטא כל אחת מהמשוואות הבאות כמערכת משוואות ליניאריות:

1) $A\underline{x}=\underline{b}$ 2) $A\underline{x}=4\underline{x}+\underline{b}$ 3) $A\underline{x}=-k\underline{x}+\underline{b}$ 4) $A\underline{x}=\underline{x}$ 5) $A^T\underline{x}=2\underline{x}+3\underline{b}$

(6) מטריצה ריבועית A תיקרא סימטרית אם $A^T=A$ ואנטי-סימטרית אם $A^T=-A$.

א. ידוע ש- A מטריצה ריבועית. מי מבין הבאים נכון:

1. AA^T סימטרית. 2. $A+A^T$ סימטרית. 3. $A-A^T$ אנטי-סימטרית.

ב. ידוע ש- A ו- B אנטי-סימטריות מאותו סדר. מי מבין הבאים נכון:

1. $BABABA$ אנטי-סימטרית. 2. A^2-B^2 סימטרית. 3. A^2+B סימטרית.

ג. ידוע ש- A ו- B סימטריות מאותו סדר ונתון כי $AB=-BA$. מי מבין הבאים נכון:

1. AB^3 אנטי-סימטרית. 2. AB^2 סימטרית. 3. $(A-B)^2$ סימטרית.

ד. ידוע ש- A סימטרית ו- B אנטי סימטרית מאותו סדר ונתון כי $AB=BA$. הוכח:

1. AB אנטי-סימטרית. 2. $AB+B$ אנטי-סימטרית.

ה. נתון: A,B,AB סימטריות מאותו סדר. הוכח כי $A^4B^4=B^4A^4$.

(7) מצא את ההפוכה של כל מטריצה. בדוק תשובתך על ידי כפל מטריצות מתאים.

1) $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}5&2\\7&3\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}4&1.5\\2&1\end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&8\\2&1&3\end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&-1\\5&2&3\end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix}2&-1&1\\3&-2&2\\5&-3&4\end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&2&0&0\\1&2&3&0\\1&2&3&4\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}1&4&2&4\\1&2&-1&0\\0&1&1&1\\1&3&-1&-2\end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\4&2&2&3\\2&-1&2&-1\\4&0&2&-2\end{pmatrix}$

(8) א. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 5 & -7 & k^2+3 \\ 3 & -1 & k+3 \end{pmatrix}$.

ב. עבור אילו ערכים של הקבוע k המטריצה הבאה איננה הפיכה: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(9) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת המטריצה ההפוכה:

1) $\begin{aligned} 2x-y+z&=3 \\ 3x-2y+2z&=5 \\ 5x-3y+4z&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+4y+2z+4t&=1 \\ x+2y-z&=0 \\ y+z+t&=1 \\ x+3y-z-2t&=0 \end{aligned}$

(10) א. הנח שכל המטריצות הן הפיכות מסדר n וחלץ את X:

1) $AXC=D$ 2) $A^{-1}XC=A^{-1}DC$ 3) $P^{-1}X^TP=A$

4) $C^{-1}(A+X)D^{-2}=I$ 5) $(A-AX)^{-1}=X^{-1}C$ 6) $ABC^TX^{-1}BA^TC=AB^T$

ב. נתון $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$. חשב את X אם ידוע כי $B^2X(2B)^{-1}=B+I$.

ג. נתון $B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. חשב את Y אם ידוע כי $BYB^T=B^{-1}+B$.

ד. נתון $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$. חשב את B אם נתון $5A^TB(I+2A)^{-2}=(7A)^{-2}$

(11) א. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^2-5A-2I=0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

ב. נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $(A-3I)(A+2I)=0$.

הוכח: A הפיכה ובטא את A^{-1} במונחי A ו- I.

ג. נתונים: $p(x)=x^3-4x^2-20x+48$, $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 3 & -1 & 0\\ -2 & -2 & 6\end{pmatrix}$.

1. חשב את $p(A)$.

2. בעזרת תוצאת סעיף 1 (ולא בדרך אחרת) הוכח ש- A והפיכה ובטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד.

(12) נתון: A מטריצה ריבועית המקיימת $A^4=0$.

א. הוכח כי A לא הפיכה.

ב. הוכח כי המטריצה $I-A$ הפיכה ומצא את ההופכית שלה.

(13) נתון: $\begin{cases}P^{-1}AP=B\\ Q^{-1}BQ=C\end{cases}$. הוכח כי קיימת מטריצה הפיכה D כך ש- $D^{-1}AD=C$.

* הנח שכל המטריצות הנתונות ריבועיות, מאותו סדר והפיכות.

** לסטודנטים המכירים את המושג דימיון מטריצות ניתן לנסח את השאלה כך:

הוכח: אם A דומה ל- B ו- B דומה ל- C אז A דומה ל- C (כלומר יחס הדימיון הוא יחס טרנזיטיבי).

<u>הערה</u>

בפרק 3 (דטרמיננטות) תמצא שאלות נוספות הנוגעות למטריצה ההפוכה.

פתרונות – פרק 1

(1) 1) 4×6 2) 3) 4×2 4) 5)
6) 6×6 7) 6×2 8) 9) 6×4 10) 6×6

(2) $(x,y,z)=(2,1,-1)$

(3) 1) $\begin{pmatrix}5&5&3\\0&0&0\\8&3&9\end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix}4&-3&-1\\-2&1&2\\0&-1&-10\end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix}5&20&10\\20&5&25\end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix}18&12&8\\-2&0&2\\24&8&16\end{pmatrix}$

5) 230 6) $\begin{pmatrix}8&16\\17&6\\7&21\end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix}2.25&1.5&0\\1&1.25&1.75\end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix}8&17&13\\-8&-2&-10\end{pmatrix}$

9) 63 10) $\begin{pmatrix}-32&82&-22\\48&87&75\\-48&108&-36\end{pmatrix}$

(4)

1) $\underline{b}=\begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&-4\\4&4&1\end{pmatrix}$

2) $\underline{b}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\\10\end{pmatrix}$ $\underline{x}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}2&-3&1&1\\4&1&2&0\\0&1&1&1\\1&-2&-4&0\end{pmatrix}$

(5) 1) $\begin{aligned}4x-2y+4z&=1\\x-y+z&=2\\x-6y+3z&==3\end{aligned}$ 2) $\begin{aligned}-2y+4z&=1\\x-5y+z&=2\\x-6y-z&=3\end{aligned}$ 3) $\begin{aligned}(4+k)x-2y+4z&=1\\x+(k-1)y+z&=2\\x-6y+(3+k)z&=3\end{aligned}$

4) $\begin{aligned}3x-2y+4z&=0\\x-2y+z&=0\\x-6y+2z&=0\end{aligned}$ 5) $\begin{aligned}2x+y+z&=3\\-2x-3y-6z&=6\\4x+y+z&=9\end{aligned}$

(6) א. 1,2,3 ב. 2 ג. 1,2,3

(7)

(1 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$ (2 $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ (3 $\begin{pmatrix} 1 & -1.5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

(4 $\begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (5 $\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (6 $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(7 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (8 $\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ (9 $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 3 & -1 \\ -10 & 3 & -5 & 2 \\ -10 & 3 & -4 & 1.5 \\ 4 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

(8) (1 $k \neq 1, k \neq -2$. (2 $k=1, k=-4$

(9) (1 $(x,y,z)=(1,2,3)$. (2 $(x,y,z,t)=(-13,4,-5,2)$

(10) א. 1. $A^{-1}DC^{-1}$. 2. D . 3. $\left(P^{-1}\right)^T A^T P^T$. 4. CD^2-A .

5. $\left(A+C^{-1}\right)^{-1} A$. 6. $BA^T C(B^{-1})^T BC^T$

ב. $X=4\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ג. $Y=\begin{pmatrix} 22 & 86 & 38 \\ 64 & 246 & 114 \\ 60 & 238 & 100 \end{pmatrix}$ ד. $B=\frac{1}{245}\begin{pmatrix} 264 & 450 \\ 448 & 768 \end{pmatrix}$

(11) א. $A^{-1}=0.5A-2.5I$ ב. $A^{-1}=\frac{1}{6}A-\frac{1}{6}I$.

ג. 1. $f(B)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 2. $B^{-1}=-\frac{1}{48}B^2+\frac{1}{12}B+\frac{5}{12}I$.

(12) ב. $(I-A)^{-1}=I+A+A^2+A^3$

תרגילים - פרק 2

דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה) :

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג :

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(5) נתון: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$. חשב:

1) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) א. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

ב. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה:

(1
$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\neq 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$$

(2
$$a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1,\ j=n\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

(3
$$a_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

(4
$$a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & \text{אחרת}\end{cases}$$

(5
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

(6
$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1)\end{pmatrix}$$

(*7
$$a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\end{cases}$$

* בסעיף 7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3, b=1, c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y\end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

(1 $|ABA^{-1}B^T|$ (2 $|4A^2B^3|$ (3 $|-A^{-2}B^TA^3|$ (4 $|-2A^2A^T adjB|$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $|adj(A_{nxn})|=|A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A|=0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^TA^2$. מצא את n .

ז. נתונים: $\det(A_{nxn})=2,\ \det(B_{nxn})=\frac{1}{3}$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

1) $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד ?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x=y=z=t=r$

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1} .

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(14) נתון:

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

חשב: 1) $(adjA)_{1,5}$ 2) $(A^{-1})_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש- A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש- A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש- A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A,B הפיכות. C,D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: 1) $C+D$ 2) $A+B$ 3) AD 4) CD 5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבור המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ 2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$.

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2),\ (-1,3,1),\ (1,1,-1)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

פתרונות - פרק 2

(1) 1) $ad-bc$. 2) 29. 3) -1. 4) -1. 5) -3. 6) -14. 7) 24. 8) 234. 9) -300. 10) 9.

11) 6. **(2)** 1) 0. 2) 0. 3) 3. 4) 24. 5) 44. 6) 104. **(3)** 1) 120. 2) 114. 3) 6.

(5) 1) -8. 2) 16. 3) 9. **(7)** 1) $n!$. 2) $(-1)^{n-1}n!$. 3) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$.

4) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$. 5) 1. 6) $2\cdot 3^{n-2}$.

7) א. $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$, $D_2=a^2-bc, D_3=a^3-2abc$.

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$. 2. $D_{20}=2^{21}-1$. **(8)** 0. **(9)** 1) 4. 2) 2^{13}. 3) -8. 4) -2^{11}.

(10) ב. 81/32. ג. $|A|=18, |B|=-2/3$. ו. 7. ז. 4^n. **(11)** 1) $x=1, y=2$.

2) $x=1, y=1, z=2$. 3) $x=y=z=t=1$. **(12)** א. $k\neq 1, k\neq -4$. ב. $k=-2$.

ג. לא.

(13) 1) $adj(A)=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1.5 & -0.5 \end{pmatrix}$

2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 \\ -5 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix} -7 & 10 & 20 & -4 \\ 2 & -3 & -6 & 1 \\ -3 & 5 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 7 & -10 & -20 & 4 \\ -2 & 3 & 6 & -1 \\ 3 & -5 & -8 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(14) 1) 240. 2) 0.5. **(15)** 1) לא. 2) לא. 3) לא. 4) לא. 5) כן. **(16)** $k=0$.

(17) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x-y+4z+2=0$. ד. 2.

תרגילים - פרק 3

העתקות (טרנספורמציות) ליניאריות

העתקות ליניאריות

(1) הגדר והדגם את המושג העתקה (טרנספורמציה) ליניארית. הגדר את המושג אופרטור ליניארי.

(2) עבור כל אחת מההעתקות הבאות, קבע האם היא העתקה ליניארית.

1) $T:R^2\to R^2$; $T(x,y)=(x+y,x-y)$

2) $T:R^3\to R^3$; $T(x,y,z)=(x+y-2z,x+2y+z,2x+2y-3z)$

3) $T:R^3\to R^2$; $T(x,y,z)=(2x+z,|y|)$

4) $T:R^2\to R^3$; $T(x,y)=(xy,y,z)$

5) $T:R^3\to R^3$ $T(x,y,z)=(x+1,x+y,y+z)$

6) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=BA+AB$ $\left(B\in M_n[R]\right)$

7) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A+A^T$

8) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=|A|\cdot I$

9) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A\cdot A^T$

10) $T:M_n[R]\to M_n[R]$; $T(A)=A^{-1}$

11) $T:P_3[R]\to P_2[R]$; $T(a+bx+cx^2+dx^3)=a+bx+cx^2$

12) $T:P_n[R]\to P_n[R]$; $T\left(p(x)\right)=p(x+1)$

13) $T:P_n[R]\to P_n[R]$; $T\left(p(x)\right)=p'(x)+p''(x)$

14) $T:P_n[R]\to P_{2n}[R]$; $T\left(p(x)\right)=p^2(x)$

15) $T:C[F]\to C[F]$; $T\left(z\right)=\bar{z}$ $\left(F=C,F=R\right)$

(3) עבור איזה ערך של הקבוע m (אם יש כזה) ההעתקה הבאה תהיה לינארית:

$$T(x,y)=\left(m^2x^{2m},y^{2m}+x\right)\quad;\quad T:R^2\to R^2$$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים, קבע האם קיימת העתקה לינארית המקיימת את הנתון. אם כן, מצא את ההעתקה וקבע האם היא יחידה. אם לא, נמק מדוע.

א. $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(1,1,0)=(1,2,3),\ T(0,1,1)=(4,5,6),\ T(0,0,1)=(7,8,9)$.

ב. $T:R^3\to R^3$ כך ש- $T(1,0,1)=(1,1,0),\ T(0,1,1)=(1,2,1)\ ,\ T(0,0,1)=(0,1,1)$.

ג. $T:R^4\to R^3$ כך ש- $T(1,2,-1,0)=(0,1,-1),T(-1,0,1,1)=(1,0,0),T(0,4,0,2)=(2,2,-2)$.

ד. $T:P_2[R]\to P_2[R]$ כך ש- $T(1)=4,T\left(4x+x^2\right)=x,T(1-x)=x^2+1$.

<u>תמונה וגרעין של העתקות לינאריות</u>

(5) נתונה העתקה לינארית $T:V\to U$. הגדר והדגם את המושגים:

א. הגרעין של ההעתקה - $KerT$. ב. התמונה של ההעתקה - $\operatorname{Im}T$.

ג. משפט הממד להעתקות (השתמש במושגים הדרגה של העתקה- $\operatorname{rank}T$ והאיפוס של העתקה - $\operatorname{null}T$)

(6) עבור כל אחת מההעתקות הבאות מצא בסיס וממד לגרעין ולתמונה:

1) $T(x,y,z,t)=(x+y,y-4z+t,4x+y+4z-t)\ ,\ T:R^4\to R^3$

2) $T(x,y,z)=(x-4y-z,x+y,y-z,x+4z)\ ,T:R^3\to R^4$

3) $$T(x,y,z,t)=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\1&3&5&-2\\2&6&10&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\quad,\quad T:R^4\to R^3$$

4) $$T(A)=A\cdot\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\cdot A\quad,\quad T:M_2[R]\to M_2[R]$$

5) $T\left(p(x)\right)=p(x+1)-p(x+4)\quad,\quad T:P_2[R]\to P_2[R]$

6) $D\left(p(x)\right)=p'(x)\quad,\quad D:P_3[R]\to P_3[R]$

(7) מצא העתקה לינארית $T:R^3 \to R^3$ אשר תמונתה נפרשת על ידי $\{(4,1,4),(-1,4,1)\}$.

(8) מצא העתקה לינארית $T:R^4 \to R^3$ אשר הגרעין שלה נפרש על ידי $\{(0,1,1,1),(1,2,3,4)\}$.

(9) א. נתונה העתקה לינארית $T:V \to U$. הוכח כי אם $\dim \operatorname{Im} T = \dim Ker T$ אז הממד של V זוגי.

ב. האם תיתכן העתקה חד-חד ערכית $T:R^4 \to R^3$?

העתקות לינאריות חח"ע ולא חח"ע, העתקות לינאריות על, איזומורפיזם

(9) הסבר את המושגים העתקה לינארית חד-חד ערכית (חח"ע) והעתקה לינארית על.
כמו כן הסבר את המושג איזומורפיזם והעתקה הפוכה.

(10) עבור כל אחת מההעתקות הבאות קבע האם היא חח"ע, האם היא על, האם היא איזומורפיזם והאם קיימת העתקה הפוכה.

1) $T:R^3 \to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,z-x)$

2) $T:R^3 \to R^3$, $T(x,y,z)=(x-y+z,y+z,x+2z)$

3) $T:P_2[R] \to R^3$, $T(a+bx+cx^2)=(a+b+c,a-b,b-2c)$

4) $T:M_2[R] \to P_3[R]$, $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=a-b+(c+d)x+(a-c)x^2+dx^3$

הערה: העתקה חח"ע נקראית גם לא סינגולרית

פעולות עם העתקות לינאריות

(11) תהיינה $S:R^3 \to R^2$ ו- $T:R^3 \to R^3$ העתקות לינאריות המוגדרות על ידי:

$$S(x,y,z)=(x-z,y) \quad , \quad T(x,y,z)=(x,4x-y,x+4y-z)$$

מצא נוסחאות (אם יש) המגדירות את:

1) $S+T$ 2) $4S$ 3) $4S-10T$ 4) TS 5) ST

6) T^2 7) T^{-1} 8) T^{-2} 9) S^{-1} 10) S^2

תרגילים - פרק 4

מטריצות והעתקות ליניאריות

הערה: כבסיס לפרק זה יש להכיר את המושגים וקטור קואורדינטות ביחס לבסיס ומטריצת מעבר מבסיס לבסיס (פרק 4). לפיכך חמשת הסעיפים הראשונים בשאלה הראשונה עוסקים בכך.

מטריצה שמייצגת העתקה

(1) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2 = \{\ (1,0,1), (0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

$$[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[v]_{B_2}\ (1 \qquad [M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[v]_{B_1}\ (2 \qquad [M]_{B_1}^{B_2}=\left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1}\ (3$$

נתונה העתקה ליניארית: $T(x,y,z)=(x+y,y+z,z-x)\ ,\ T:R^3\to R^3$

ו. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $\left[T\right]_{B_1}$.

ז. מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה בבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $\left[T\right]_{B_2}$.

ח. אשר את הטענות הבאות:

$$[T]_{B_1}\cdot[v]_{B_1}=[T(v)]_{B_1}\ (1 \qquad\qquad [T]_{B_2}\cdot[v]_{B_2}=[T(v)]_{B_2}\ (2$$

$$\left[M\right]_{B_2}^{B_1}\cdot\left[T\right]_{B_1}\cdot\left[M\right]_{B_1}^{B_2}=\left[T\right]_{B_2}\ (3$$

ט. האם ההעתקה הפיכה ?

י. חשב את הדטרמיננטה והעקבה של ההעתקה.

יא. מצא ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים עבור ההעתקה.

יב. האם ההעתקה ניתנת ללכסון ?

(2) יהיו B_1 ו- B_2 שני בסיסים של המרחב R^3. יהי T אופרטור ליניארי על R^3.

נתון כי: $[M]_{B_1}^{B_2}=\begin{pmatrix}-1 & -9 & 6\\ 1 & 6 & -4\\ 1 & 5 & -2\end{pmatrix}$ ו- $[T]_{B_1}=\begin{pmatrix}-29 & -45 & 6\\ 20 & 31 & -4\\ 13 & 19 & -1\end{pmatrix}$

חשב את $[M]_{B_2}^{B_1}$ ואת $[T]_{B_2}$.

(3) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $T: M_2[R]\rightarrow M_2[R]$, $T(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}A$

לפי הבסיס: $B=\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

(4) מצא את המטריצה שמייצגת את ההעתקה $D: P_4[R]\rightarrow P_3[R]$, $D\left(p(x)\right)=p'(x)$

לפי הבסיס הסטנדרטי של הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- 4.

<u>מטריצה שמייצגת העתקה מבסיס לבסיס</u>

(5) מצא את המטריצה המייצגת של כל אחת מההעתקות הליניאריות הבאות ביחס לבסיסים

הסטנדרטיים של R^n.

א. $T: R^2\rightarrow R^3$, $T(x,y)=(x+y,y+z,z-x)$.

ב. $T: R^4\rightarrow R^2$, $T(x,y,z,t)=(4x-y-z+t,x+y+4z+t)$.

(6) תהי $T: R^3\rightarrow R^2$ העתקה לינארית המוגדרת על ידי $T(x,y,z)=(4x+y-z,x-y+z)$.

חשב את המטריצה המייצגת את ההעתקה T מהבסיס $B_1=\{(1,1,0),(0,1,1),(0,0,1)\}$

של R^3 לבסיס $B_2=\{(1,4),(1,5)\}$ של R^2. כלומר את $[T]_{B_1}^{B_2}$.

תרגילים - פרק 5

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

(1) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות:

א. מצא מטריצה אופיינית.
ב. מצא פולינום אופייני.
ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי.
ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
ה. מצא וקטורים עצמיים.
ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה, כלומר מצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP=D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון חשב A^{2009}.
ט. מצא את הפולינום המינימלי.
י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-1\\0&2&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\ (1\qquad A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\ (2\qquad A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\ (3$$

$$A=\begin{pmatrix}-1&3&0\\3&-1&0\\-2&-2&6\end{pmatrix}\ (4\qquad A=\begin{pmatrix}3&-2\\4&-1\end{pmatrix}\ (5\ \ \boxed{F=C,F=R}\qquad A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&4\end{pmatrix}\ (6\ \ \boxed{F=C,F=R}$$

* בסעיפים 5,6 עליך לפתור פעם מעל C ופעם מעל R.

(2) א. הגדר את המושג דימיון מטריצות.
ב. ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי:
1. $|A|=|B|$. 2. $tr(A)=tr(B)$. 3. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(3) הוכח שאם $P^{-1}AP=B$ אז $A^n=PB^nP^{-1}$.

פרק 6 - מרחבים וקטורים

סימונים:

R^n - המרחב הוקטורי של כל הוקטורים הממשיים ממימד n מעל השדה הממשי R .

$M_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל המטריצות הריבועיות מסדר n מעל השדה הממשי R.

$P_n[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפולינומים ממעלה קטנה או שווה ל- n מעל השדה R.

$F[R]$ - המרחב הוקטורי של כל הפונקציות הממשיות $(f:R\to R)$ מעל השדה R.

תת-מרחבים

(1) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של R^3 :

א. $W=\{(a,b,c)\,|\,a+b+c=0\}$.

ב. $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c\}$.

ג. $W=\{(a,b,c)\,|\,a=3b\}$.

ד. $W=\{(a,b,c)\,|\,a<b<c\}$.

ה. $W=\{(a,b,c)\,|\,a=c^2\}$.

ו. $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a+d,\ c=a+2d\}$, כלומר a, b ו- c מהווים סדרה חשבונית.

ז. $W=\{(a,b,c)\,|\,b=a\cdot q,\ c=a\cdot q^2\}$ כלומר a, b ו- c מהווים סדרה הנדסית.

(2) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W תת מרחב של $M_n[R]$:

א. W מורכב מן המטריצות הסימטריות. כלומר, $W=\{A\,|\,A=A^T\}$.

ב. W מורכב מכל המטריצות המתחלפות בכפל עם מטריצה נתונה B .

כלומר, $W=\{A\,|\,AB=BA\}$.

ג. W מורכב מכל המטריצות שהדטרמיננטה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A\,|\,|A|=0\}$.

ד. W מורכב מכל המטריצות ששוות לריבוע שלהן. כלומר, $W=\{A\,|\,A^2=A\}$.

ה. W מורכב מכל המטריצות שהן משולשות עליונות.

ו. W מורכב מכל המטריצות שמכפלתן במטריצה נתונה B הוא אפס. כלומר,

$W=\{A\,|\,AB=0\}$.

ז. W מורכב מכל המטריצות שהעקבה שלהן אפס. כלומר, $W=\{A\,|\,tr(A)=0\}$.

ח. W מורכב מכל המטריצות שבהן סכום כל שורה הוא אפס.

(3) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $P_n[R]$.

א. W מורכב מכל הפולינומים בעלי 4 כשורש. כלומר, $W=\{p(x)\,|\,p(4)=0\}$.

ב. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מקדמים שלמים.

ג. W מורכב מכל הפולינומים בעלי מעלה ≥ 4. כלומר, $W=\{p(x)\,|\,\deg(p)\leq 4\}$.

ד. W מורכב מכל הפולינומים בעלי חזקות זוגיות בלבד של x.

ה. W מורכב מכל הפולינומים ממעלה n כאשר $4\leq n\leq 7$.

ו. $W=\{p(x)\,|\,p(0)=1\}$

(4) בכל אחד מהסעיפים הבאים בדוק האם W הוא תת מרחב של $F[R]$.

א. W מורכב מכל הפונקציות הזוגיות. כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\,|\,f(-x)=f(x)\}$.

ב. W מורכב מכל הפונקציות החסומות. כלומר, לכל x ממשי $W=\{f(x)\,|\,|f(x)|\leq M\}$.

ג. W מורכב מכל הפונקציות הרציפות.

ד. W מורכב מכל הפונקציות הגזירות.

ה. W מורכב מכל הפונקציות הקבועות.

ו. $W=\left\{f(x)\,|\,\int_0^1 f(x)dx=4\right\}$ (הנח ש- f אינטגרבילית ב $[0,1]$).

ז. $W=\{f(x)\,|\,f'(x)=0\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ח. $W=\{f(x)\,|\,f'(x)=1\}$ (הנח ש- f גזירה לכל x).

ט. $W=\{f(x)\,|\,f(x)=f(x+1)\}$.

(5) בדוק האם $W=\{(z_1,z_2,z_3)\,|\,z_2=\bar{z}_1, z_3=z_1+\bar{z}_1\}$ הוא תת מרחב של C^3:

א. מעל השדה הממשי R.

ב. מעל שדה המרוכבים C.

צירופים ליניאריים, מרחב נפרש, תלות ליניארית

(6) נתונים הוקטורים הבאים :

$u_1=(4,1,1,5)$, $u_2=(0,11,-5,3)$, $u_3=(2,-5,3,1)$, $u_4=(1,3,-1,2)$.

א. 1. האם u_1 הוא צירוף ליניארי של u_4 ?

2. האם u_1 שייך ל- $Sp\{u_4\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_4\}$ תלוייה ליניארית ?

ב. 1. האם u_3 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

2. האם u_3 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_3\}$ תלוייה ליניארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הוקטורים האחרים.

ג. 1. האם u_4 הוא צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

2. האם u_4 שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

3. האם הקבוצה $\{u_1,u_2,u_4\}$ תלוייה ליניארית ? במידה וכן רשום כל וקטור בקבוצה כצירוף ליניארי של הוקטורים האחרים.

ד. נתון $v=(4,12,k,-2k)$.

1. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

2. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$.

3. מה צריך להיות ערכו של k על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהייה תלוייה ליניארית.

ה. נתון $v=(a,b,c,d)$

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה צירוף ליניארי של u_1 ו- u_2 ?

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהוקטור v יהיה שייך ל- $Sp\{u_1,u_2\}$?

1. מה התנאים על a,b,c,d על מנת שהקבוצה $\{u_1,u_2,v\}$ תהייה תלוייה ליניארית ?

ו. הבע את הוקטור $(2,-3,3,1)$ כצירוף ליניארי של u_1 , u_2 ו- u_3 .

בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

ז. הבע את הוקטור $(7,10,-2,11)$ כצירוף ליניארי של u_1 , u_2 , u_3 ו- u_4 . בכמה אופנים ניתן לעשות זאת ?

(7) נתונות המטריצות הבאות:

$$A=\begin{pmatrix}4&1\\1&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0&11\\-5&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}2&-5\\3&1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&3\\-1&2\end{pmatrix}.$$

1. בדוק האם המטריצות תלויות לינארית מעל $M_2[R]$.

2. במידה והמטריצות תלויות רשום כל אחת מהמטריצות כצירוף לינארי של יתר המטריצות.

3. האם המטריצה A שייכת ל- $Sp\{B,C\}$?

(8) נתונים הפולינומים הבאים:

$$p_1(x)=4+x+x^2+5x^3\ ,\ p_2(x)=11x-5x^2+3x^3\ ,$$

$$p_3(x)=2-5x+3x^2+x^3\ ,\ P_4(x)=1+3x-x^2+2x^3.$$

1. בדוק האם הפולינומים תלויים ליניארית מעל $P_3[R]$.

2. במידה והפולינומים תלויים ליניארית רשום כל פולינום כצירוף ליניארי של שאר הפולינומים.

3. האם הפולינום p_2 שייך ל- $Sp\{p_1,p_4\}$?

(9) עהוא איזה ערכים של a,b,c הוקטורים הבאים תלויים ליניארית:

$$\{(c,2,4),(2.4,a,2),(c,b,6),(b,2,a)\}.$$

(10) נתון כי קבוצת הוקטורים $\{u,v,w\}$ בלתי תלוייה ליניארית ב- $V[F]$.

בדוק האם הקבוצות הבאות תלויות ליניארית, במידה שכן רשום כל וקטור כצירוף של הוקטורים האחרים:

א. $\{u-v,u-w,u+v-2w\}$

ב. $\{u+2v+3w,4u+5v+6w,7u+8v+9w\}$

ג. $\{u+v,v+w,w\}$

(11) בדוק האם הוקטורים $\{(1,i,i-1),(i+1,i-1,-2)\}$ תלויים לינארית ב- C^3

א. מעל C. ב. מעל R.

בסיס ומימד

בדיקה האם קבוצת וקטורים מהווה בסיס למרחב

(12) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- R^3 :

1) $\{ (1,0,1), (0,0,1) \}$

2) $\{ (1,1,2), (1,2,3), (3,3,4), (2,2,1) \}$

3) $\{ (1,2,3), (4,5,6), (7,8,9) \}$

(13) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $M_{2x2}[R]$:

1) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

2) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 16 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \right\}$

3) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

(14) בדוק אם הקבוצות הבאות הן בסיס ל- $P_2(R)$:

1) $\{ 1+x,\ x^2+2x+3 \}$

2) $\{ 1+x,\ x^2+2x+3, 2x+4x^3, x-x^3 \}$

3) $\{ 1+2x+3x^3,\ 4+5x+6x^2, 7+8x+10x^2 \}$

(15) נתונה קבוצת וקטורים ב- R^3 : $T=\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9),(2,3,4)\}$.

א. האם T בסיס ל- R^3.

ב. מצא קבוצה T' , שהיא קבוצה מקסימלית של וקטורים בלתי תלויה ליניארית ב- T.

ג. השלם את T' לבסיס של

<u>מציאת בסיס וממד למרחב פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית</u>

(16) לפניך 3 מערכות של משוואות הומוגניות :

(1 $\begin{cases} x+y-z+2w=0 \\ 3x-y+7z+4w=0 \\ -5x+3y-15z-6w=0 \end{cases}$ (2 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ x+2z-w=0 \\ x+y+3z-3w=0 \end{cases}$ (3 $\begin{cases} x-y+z+w=0 \\ 2x-2y+2z+2w=0 \end{cases}$

נסמן ב- W את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 1).

נסמן ב- U את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 2).

נסמן ב- V את המרחב הנפרש ע"י מערכת המשוואות 3) .

א) מצא בסיס וממד ל- W , U ו- V.

ב) 1) מצא בסיס וממד ל- $U\cup V$. 2) מצא ממד ל- $U\cap V$.

ג) מצא בסיס ל- $U\cap V$.

(17) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid a=c, b=d\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(18) נתון $U=\{(a,b,c,d)\in R^4 \mid c=a+b, d=b+c\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(19) נתון $U=\{v\in R^4 \mid v\cdot(1,-1,1,-1)=0\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(20) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \mid A=A^T\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(21) נתון $U=\left\{A\in M_{2x2}[R] \middle| \ A\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

(22) נתון $U=\left\{p(x)\in P_3[R] \middle| \ p(1)=0\right\}$. מצא בסיס וממד ל- U.

<u>**מציאת בסיס וממד לתת מרחב**</u>

(23) לפניכם שני תתי מרחבים של המרחב R^4 :

$$U=span\left\{(1,1,-1,2),\ (3,-1,7,4),\ (-5,3,-15,-6)\right\}$$

$$V=span\left\{(1,-1,1,1),\ (1,0,2,-1),\ (1,1,3,-3),\ (5,1,5,8)\right\}$$

א. מצא בסיס , ממד ומשוואות ל- U .

ב. מצא בסיס , ממד ומשוואות ל- V .

ג. מצא בסיס וממד ל- $U\cup V$.

ד. מצא בסיס וממד ל- $U\cap V$.

(24) לפניכם תת מרחב של המרחב $M_{2x2}[R]$:

$$U=span\left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}\right\}.$$

מצא בסיס וממד ל- U.

(25) לפניכם תת מרחב של המרחב $P_3[R]$:

$$U=span\left\{1+x-x^2+2x^3,4+x-x^2+x^3,2-x+x^2-3x^3\right\}.$$

מצא בסיס וממד ל- U.

<u>מציאת בסיס וממד למרחב שורה ומרחב עמודה של מטריצה, דרגת מטריצה</u>

(26) מצא בסיס וממד למרחב השורה ומרחב העמודה של המטריצות הבאות וציין את דרגת המטריצה (rank) :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ (1} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \text{ (2}$$

<u>וקטורי קואורדינטות, שינוי בסיס</u>

(27) נתונים שני בסיסים של R^3 :

$$B_1 = \{(1,1,0),\ (0,1,0),\ (0,1,1)\}\ ,\quad B_2 = \{\ (1,0,1), (0,1,1),\ (0,0,1)\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ד. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_2 לבסיס B_1 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

ה. אשר את הטענות הבאות:

$$[M]_{B_2}^{B_1}\cdot[v]_{B_1} = [v]_{B_2} \text{ (1} \qquad [M]_{B_1}^{B_2}\cdot[v]_{B_2} = [v]_{B_1} \text{ (2} \qquad [M]_{B_1}^{B_2} = \left([M]_{B_2}^{B_1}\right)^{-1} \text{ (3}$$

(27) נתונים שני בסיסים של $P_2[R]$:

$$B_1 = \{1+x, x,\ x+x^2\}\ ,\quad B_2 = \{\ 1+x^2, x+x^2,\ x^2\ \}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_1 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_1}$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B_2 . סמן וקטור זה ב- $[v]_{B_2}$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B_1 לבסיס B_2 . סמן מטריצה זו ב- $[M]_{B_1}^{B_2}$.

(28) נתונים שני בסיסים של $M_2[R]$:

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$E=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

א. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס B . סמן וקטור זה ב- $[v]_B$.

ב. מצא את וקטור הקואורדינטות ביחס לבסיס E . סמן וקטור זה ב- $[v]_E$.

ג. מצא מטריצת מעבר מהבסיס B לבסיס E . סמן מטריצה זו ב- $\left[M\right]_B^E$.