אלגברה

לינארית

$$
\begin{pmatrix}
\alpha & \beta & \chi & \delta \\
\varepsilon & \phi & \varphi & \gamma \\
\eta & \iota & \kappa & \lambda \\
\mu & \nu & o & \pi \\
\varpi & \theta & \vartheta & \rho \\
\sigma & \varsigma & \tau & \upsilon \\
\omega & \xi & \psi & \zeta
\end{pmatrix}
$$

גיא סלומון

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

תוכן

תרגילים – פרק1

דטרמיננטות

(1) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה):

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 11) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי דירוג.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$

(3) חשב את הדטרמיננטה של המטריצות הבאות על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

(4) ללא חישוב, הראה שהדטרמיננטה של המטריצות הבאות שווה אפס:

(1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

(3 $\begin{pmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{pmatrix}$

(4 $\begin{pmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(5 $\begin{pmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{pmatrix}$

(6 $\begin{pmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{pmatrix}$

(7 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(5) נתון: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$. חשב:

(1 $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

(2 $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

(3 $\begin{pmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(6) א. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

ב. הוכח כי $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$

(7) בכל אחד מהסעיפים הבאים, נתונה מטריצה ריבועית מסדר n. חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הנתונה:

1) $a_{ij}=\begin{cases}1 & i=j=1\\ 0 & i=j\neq 1\\ j & i<j\\ -j & i>j\end{cases}$

2) $a_{ij}=\begin{cases}j & i=j+1\\ n & i=1, j=n\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

3) $a_{ij}=\begin{cases}1 & i+j=n+1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$

4) $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & \text{אחרת}\end{cases}$

5) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n\end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 3 & 3 & \cdots & 3\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 6\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 3 & 6 & \cdots & 3(n-1)\end{pmatrix}$

*7) $a_{ij}=\begin{cases}a & i=j\\ b & i=j+1\\ c & j=i+1\end{cases}$

* בסעיף 7): א. מצא נוסחת נסיגה עבור הדטרמיננטה. ב. הנח כי $a=3,b=1,c=2$ ומצא:

1. ביטוי סגור עבור הדטרמיננטה. 2. את הדטרמיננטה כאשר $n=20$.

(8) חשב:

$$\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & b & c & d & e\\ f & g & h & i & j\\ k & l & m & n & o\\ p & q & r & s & t\\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y\end{vmatrix}$$

(9) נתונים: A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4, |B|=2$. חשב:

1) $|ABA^{-1}B^T|$ 2) $|4A^2B^3|$ 3) $|-A^{-2}B^TA^3|$ 4) $|-2A^2A^T adjB|$

(10) א. נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$ הוכח: $|A|=|B|$.

ב. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, $2AB+3I=0$, $|A|=2$.

חשב את $|B|$.

ג. נתונים: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, $B^2-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.

חשב את: $|A|, |B|$.

ד. הוכח: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

ה. נתון כי A מטריצה אנטיסימטרית מסדר אי זוגי. הוכח ש- $|A|=0$.

ו. נתונים: A מטריצה מסדר n , $|A|=128$, $2AB=B^T A^2$. מצא את n .

ז. נתונים: $\det\left(A_{nxn}\right)=2,\ \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$. חשב: $\det\left(\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right)$.

(11) פתור את מערכות המשוואות הבאות בעזרת כלל קרמר:

1) $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$

2) $\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$

3) $\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$

(12) נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכח שאם למערכת פתרון יחיד אז בהכרח $x=y=z=t=r$

(13) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות חשב את הצמודה הקלסית $adj(A)$ ובעזרתה את A^{-1}.

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

(14) נתון:

$$A=\begin{pmatrix} -9 & 26 & -1 & 14 & 10 \\ 13 & -7 & 87 & 4 & 0 \\ 71 & 35 & 3 & 0 & 0 \\ 17 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

חשב: 1) $(adjA)_{1,5}$ 2) $\left(A^{-1}\right)_{1,5}$

(15) א. הוכח שאם $|A|=1$ וכל איברי A הם מספרים שלמים, אזי כל איברי A^{-1} הם גם מספרים שלמים.

ב. נתון ש-A מטריצה משולשית תחתונה והפיכה. הוכח ש-A^{-1} משולשית תחתונה.

ג. נתון ש-A הפיכה. הוכח שגם $adj(A)$ וגם A^T הפיכות.

ד. נתון: A,B הפיכות. C,D לא הפיכות.

האם המטריצות הבאות הפיכות: 1) $C+D$ 2) $A+B$ 3) AD 4) CD 5) AB ?

(16) מצא את ערכי k עבורם המטריצה הבאה לא הפיכה:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3k & 0 & 0 \\ -7k^2 & 2 & 4k & k & 9+k \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

(17) א. חשב את שטח המקבילית שקודקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$ 2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$.

ב. חשב את נפח המקבילון שקודקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצא משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2),\ (-1,3,1),\ (1,1,-1)$.

ד. חשב את שטח המשולש שקודקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה עליך להשתמש בדטרמיננטות.

פתרונות – פרק 1

(1) 1) $ad-bc$. 2) 29. 3) -1. 4) -1. 5) -3. 6) -14. 7) 24. 8) 234. 9) -300. 10) 9.
11) 6. **(2)** 1) 0. 2) 0. 3) 3. 4) 24. 5) 44. 6) 104. **(3)** 1) 120. 2) 114. 3) 6.

(5) 1) -8. 2) 16. 3) 9. **(7)** 1) $n!$. 2) $(-1)^{n-1}n!$. 3) $(-1)^{\frac{n(3n+1)}{2}}$.

4) $(a-b)^{n-1}[a+(n-1)b]$. 5) 1. 6) $2\cdot 3^{n-2}$.

7) א. $D_3=a^3-2abc$, $D_2=a^2-bc$, $D_n=aD_{n-1}-bcD_{n-2}$.

ב.1. $D_n=2^{n+1}-1$. 2. $D_{20}=2^{21}-1$. **(8)** 0. **(9)** 1) 4. 2) 2^{13}. 3) -8. 4) -2^{11}.

(10) ב. 81/32. ג. $|A|=18, |B|=-2/3$. ו. 7. ז. 4^n. **(11)** 1) $x=1,\ y=2$.

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$. 3) $x=y=z=t=1$. **(12)** א. $k\neq 1, k\neq -4$. ב. $k=-2$.

ג. לא.

(13) 1) $adj(A)=\begin{pmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1.5 & -0.5\end{pmatrix}$ 2) $adj(A)=A^{-1}=\begin{pmatrix}8 & -1 & -3\\ -5 & 1 & 2\\ -10 & 1 & 4\end{pmatrix}$

3) $adj(A)=\begin{pmatrix}-7 & 10 & 20 & -4\\ 2 & -3 & -6 & 1\\ -3 & 5 & 8 & -2\\ 1 & -2 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix}7 & -10 & -20 & 4\\ -2 & 3 & 6 & -1\\ 3 & -5 & -8 & 2\\ -1 & 2 & 3 & -1\end{pmatrix}$

(14) 1) 240. 2) 0.5. **(15)** 1) לא. 2) לא. 3) לא. 4) לא. 5) כן. **(16)** $k=0$.

(17) א.1. 13. א.2. 14. ב. 22. ג. $3x-y+4z+2=0$. ד. 2.

תרגילים – פרק 2

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

(1) עבור כל אחת מהמטריצות הבאות:

א. מצא מטריצה אופיינית.
ב. מצא פולינום אופייני.
ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
ה. מצא וקטורים עצמיים.
ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה, כלומר מצא מטריצה הפיכה P כך ש- $P^{-1}AP = D$, באשר D מטריצה אלכסונית.
ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון חשב A^{2009}.
ט. מצא את הפולינום המינימלי.
י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים. במידה והמטריצה הפיכה בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$ 5) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{F=C, F=R}$ 6) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $\boxed{F=C, F=R}$

* בסעיפים 5,6 עליך לפתור פעם מעל C ופעם מעל R.

(2) א. הגדר את המושג דימיון מטריצות.
ב. ידוע ש- A ו- B מטריצות דומות. הוכח כי:
1. $|A|=|B|$. 2. $tr(A)=tr(B)$. 3. ל- A ו- B אותו פולינום אופייני.

(3) הוכח שאם $P^{-1}AP = B$ אז $A^n = PB^nP^{-1}$.