

## סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס חקר ביצועים. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט **.On-line**.

הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

**הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי.**

את הקורס בנתה הגברת מיכל פרידמן, מרצה מבוקשת במוסדות אקדמיים שונים ובעלת ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר **.www.gool.co.il**



אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

**גול זה בול. בשבילך!**

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

**תוכן עניינים**

- פרק 1 - תורת ההחלטות ..... 3
- פרק 2 - תכנון ליניארי: ניסוח בעיות ופתרון גרפי ..... 7
- פרק 3 - תכנון ליניארי: הכרה וניתוח פלט מחשב, תוכנת POM-QM ..... 14
- פרק 4 - תורת התורים ..... 20

## פרק 1 - תורת ההחלטות

### דוגמא:

שוקי מתלבט אם להמר בהגרלה כלשהי או לא. עלות ההימור הינה 5 ₪. אם יהמר ויזכה, ירוויח 100 ₪. הסתברות הזכייה הינה 0.1. מה כדאי לשוקי לעשות?  
 שוקי יכול לפנות למגדת עתידות על מנת לקבל עצה לגבי ההימור. מגדת העתידות תאמר ששוקי יזכה בהסתברות 0.7 ושלא יזכה בהסתברות 0.3.  
 מגדת העתידות צודקת ב-97% מהמקרים.  
 האם כדאי לשוקי לפנות למגדת העתידות?

### שאלה 1:

חברת הייטק גדולה A מעוניינת להחליט האם לקנות חברת הייטק קטנה יותר B. עלות הקנייה הינה \$500,000. פוטנציאל הרווח הינו, \$2,000,000. משמע, לאחר עלות ההשקעה, אם הקנייה משתלמת הרווח יהיה \$2,000,000. חברה A מאמינה שהקנייה תשתלם בהסתברות 0.6. החברה יכולה לשכור את שירותיו של משרד ייעוץ (בעלות של \$10,000) המומחה בתחום לקבלת מידע נוסף לגבי הקנייה.  
 משרד הייעוץ ימליץ לקנות את החברה הקטנה בהסתברות 0.7 ובהסתברות 0.3 ימליץ לא לבצע את הקנייה.  
 אם המשרד ימליץ לקנות את החברה הקטנה, בהסתברות 0.9 הקנייה אכן תשתלם. אם המשרד לא ימליץ לקנות את החברה הקטנה, הקנייה תשתלם רק בהסתברות 0.2.  
 א. בנה עץ החלטות ותאר את האסטרטגיה האופטימאלית של חברה A.  
 ב. מה המחיר המקסימאלי שכדאי לשלם למשרד הייעוץ עבור המלצתו?  
 ג. מהו ערך האינפורמציה המלאה?  
 ד. מהי התפלגות הערכים תחת המדיניות האופטימאלית?  
 ה. נניח שחברה A פנתה למשרד הייעוץ וקיבלה ממנו המלצה לבצע את הקנייה (משמע, הקנייה תשתלם). מהו ערך האינפורמציה המלאה בשלב זה?

**שאלה 2:**

דוד מתלבט האם להשקיע בבורסה בשנה הקרובה. ידוע כי אם השנה תהיה שנת שגשוג, השקעה של 150,000 ₪ תניב רווח נקי של 35,000 ₪. אם זו לא תהיה שנת שגשוג, השקעה של 150,000 ₪ תניב הפסד של 60,000 ₪ נטו. לפני נתוני העבר ידוע כי בהסתברות של 0.9 תהיה זו שנת שגשוג. דוד יכול לפנות לחברו הכלכלן לקבלת תחזיתו לגבי השנה הקרובה. הכלכלן אינו חבר כל כך טוב ודורש סכום של 2,000 ₪ תמורת התחזית. ידוע כי הכלכלן חוזה שנת שגשוג כאשר באמת תהיה שנת שגשוג בהסתברות 0.85 וחוזה שנת שגשוג אך טועה, בהסתברות 0.1.

- א. מהי המדיניות האופטימאלית עבור דוד ללא תחזית חברו הכלכלן?
- ב. מהי המדיניות האופטימאלית עבור דוד כאשר קיימת בפניו האפשרות לפנות לחברו הכלכלן לקבלת תחזית?
- ג. מהו המחיר המקסימאלי שכדאי לדוד לשלם לחברו הכלכלן בתמורה לתחזיתו?
- ד. מהו ערך האינפורמציה המלאה (ללא התייחסות לתחזית הכלכלן)?

**שאלה 3:**

חברת תרופות קטנה שוקלת לשווק בארה"ב חיסון חדש נגד אדמת. ידוע כי אם החברה תהיה היחידה בשוק המשוקת חיסון מסוג זה, היא צפויה להרוויח \$3,000,000. אם לא תהיה היחידה בשוק, היא צפויה להפסיד \$400,000. מעריכים כי בהסתברות 0.65 לחברה לא תהיה תחרות ובהסתברות 0.35 חברות נוספות ישווקו חיסון לאותה המחלה. קיימת אפשרות להשתמש בשירותי חברה החוזה את כניסתן של חברות נוספות לשוק בתחומים השונים על מנת לקבל את הערכתה לגבי חברות נוספות המשוקות חיסון נגד מחלה זו. החברה דורשת סכום של \$80,000 עבור תחזיתה. ידוע כי החברה מנבאת תחרות ב-80% מהמקרים בהם אכן הייתה תחרות ומנבא כי לא תהיה תחרות ב-70% מהמקרים בהם לא הייתה תחרות.

ההסתברות לתחזית לפיה תהייה תחרות הינה 0.475.

- א. בנה עץ החלטות ותאר את האסטרטגיה האופטימאלית של החברה.
- ב. מה המחיר המקסימאלי שכדאי לשלם עבור התחזית?
- ג. מהו ערך האינפורמציה המלאה?
- ד. מהי התפלגות הערכים תחת המדיניות האופטימאלית?

**שאלה 4:**

שלמה מעוניין להקים אתר סקי ברומניה. כדי להקים את האתר הוא יצטרך לסלול דרכים רחבות במדרונות הרכס, לרשת את הרכס במעליות סקי ולהקים מלונות שיספקו את כל צרכי הגולשים. העלות הכוללת מסתכמת ב-10 מיליון יורו.

שלמה מעריך כי במידה והכלכלה ברומניה תתאושש, יהפוך האתר למכרה זהב והוא יוכל למכור אותו ברווח נטו של 10 מיליון יורו. במידה והכלכלה תקרוס הוא יאלץ למכור את האתר ולהפסיד 5 מיליון יורו.

לשלמה אין שום מידע וודאי לגבי עתיד הכלכלה ברומניה ולכן הוא מעריך כי ההסתברויות להתאוששותה ולקריסתה שוות.

שלמה שוקל לפנות לפרשן הכלכלה מערוץ 2 על מנת לקבל את חוות דעתו באשר לעתיד הכלכלה הרומנית. הפרשן גובה 3000 יורו עבור עצתו.

ההסתברות שהפרשן יאמר כי הכלכלה תתאושש בתנאי שהיא אכן תתאושש היא 0.6 וההסתברות שהפרשן יאמר כי הכלכלה תקרוס בתנאי שהיא אכן תקרוס היא 0.9.

בנה עץ החלטות שיעזור לשלמה להגיע להחלטה אופטימלית. תאר החלטה זו. מהי תוחלת הרווח בהחלטה זו?

א. בנה עץ החלטות ותאר את האסטרטגיה האופטימלית של שלמה.

ב. מהו ערך האינפורמציה המלאה?

ג. מהי התפלגות הערכים תחת המדיניות האופטימלית?

ד. נניח ששלמה פנה לפרשן שאמר כי הכלכלה תתאושש. מהו ערך האינפורמציה המלאה בשלב זה?

פתרונות פרק 1פתרון שאלה 1:

א. ההחלטה האופטימאלית היא לשכור את שירותי משרד הייעוץ ולעשות כפי שהמשרד ממליץ. תוחלת הרווח תהיה \$900,000.

ב. \$210,000.

ג. \$200,000.

ד.

0.07	0.63	0.3
-\$510,000	\$1,490,000	-\$10,000

ה. \$50,000.

פתרון שאלה 2:

א. לדוד כדאי להשקיע בבורסה. תוחלת הרווח שלו תהיה 25,500 ₪.

ב. לדוד כדאי לא לפנות לחברו הכלכלן. החלטתו זהה לזו בסעיף א'.

ג. 675 ₪.

ד. 6000 ₪.

פתרון שאלה 3:

א. לחברה כדאי לשווק את החיסון ללא שירותי החברה החוזה. תוחלת הרווח תהיה

\$1,810,000.

ב. לא כדאי לשלם בכלל.

ג. \$140,000.

ד.

0.65	0.35
\$3,000,000	-\$400,000

פתרון שאלה 4:

א. שלמה יחליט ללכת לפרשן. אם הפרשן יאמר כי הכלכלה תתאושש הוא יקים את האתר.

אחרת, הוא לא יקים. תוחלת הרווח תהיה 2,746,250 יורו.

ב. 2,253,750 יורו.

ג.

0.65	0.29995	0.05005
-3,000	9,997,000	5,003,000

ד. 715,000 יורו.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

## פרק 2 - תכנון ליניארי: ניסוח בעיות ופתרון גרפי

**דוגמא:**

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$$

s. t.

$$2X_1 + 2X_2 \leq 8$$

$$4X_1 + X_2 \leq 8$$

$$X_1 - \text{מספר היחידות שנייצר ממוצר 1}$$

$$3X_2 \leq 9$$

$$X_2 - \text{מספר היחידות שנייצר ממוצר 2}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

פתור את הבעיה באופן גרפי. שרטט תחום אפשרי וחשב את הערך האופטימאלי של משתני ההחלטה ושל פונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.

### שאלה 1:

- מפעל מייצר 2 סוגי כובעים: כובעים כחולים וכובעים אדומים. עלות הייצור של הכובעים הכחולים הינה 5 ₪ לכובע ואילו של הכובעים האדומים 4 ₪ לכובע. המפעל מוכר את כל אחד מהכובעים ב-10 ₪. בייצור של כל אחד מהכובעים הכחולים יש צורך ב-2 מטרים של בד ובייצור של כל אחד מהכובעים האדומים יש צורך ב-3 מטרים של בד. לרשותו של המפעל 40 מטרים של בד כחול ו-30 מטרים של בד אדום. מנהל המפעל מוכן להקצות 100 ₪ לייצור הכובעים משני הצבעים. בנוסף, הוא אינו מעוניין לייצר יותר מ-20 כובעים אדומים.
- א. הגדר משתני החלטה ונסח את הבעיה בעזרת מודל תכנון ליניארי מתאים: פונקציית מטרה ואילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.
- ב. פתור את הבעיה שניסחת בסעיף א' באופן גרפי. שרטט תחום אפשרי וחשב את הערך האופטימאלי של משתני החלטה ושל פונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
- ג. מהם הערכים הדואליים של האילוצים? הסבר ונמק את תשובתך.
- ד. מצא חסמים על כל אחד מהמקדמים בפונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
- ה. מצא חסמים על אגף ימין של כל האילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.
- ו. חברו של מנהל המפעל מבקש לרכוש ממנו 10 מ' בד כחול תמורת 2 ₪ למטר. האם כדאי למנהל למכור? אם לא, הסבר. אם כן, חשב את השינוי ברווח.
- ז. מנהל המפעל קיבל הקצאה נוספת של 15 מ' בד אדום. האם ישפיע הדבר על הרווח הכולל? אם לא, הסבר. אם כן, חשב את השינוי ברווח ובכמויות הייצור.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

**שאלה 2:**

לתערובת מזון ששלמה מעוניין ליצור דרושים לפחות 60 יח' ויטמין C, 120 יח' של ויטמין A, 60 יח' של ויטמין D ו-210 יח' של ויטמין E.  
קיימים בחנות רק שני סוגי מזון המכילים את ארבעת סוגי הוויטמינים בהרכבים שונים:

E	D	A	C	
35	15	20	5	סוג מזון 1
21	15	15	30	סוג מזון 2

ק"ג מסוג מזון 1 עולה 5₪ ואילו ק"ג מסוג מזון 2 עולה 6₪. שלמה מעוניין לקנות כמות מסוימת מסוגי המזון הנ"ל על מנת לעמוד במגבלות ולמזער עלויות.

- הגדר משתני החלטה ונסח את הבעיה בעזרת מודל תכנון ליניארי מתאים: פונקציית מטרה ואילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.
- פתור את הבעיה שניסחת בסעיף א' באופן גרפי. שרטט תחום אפשרי וחשב את הערך האופטימאלי של משתני ההחלטה ושל פונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
- מהם הערכים הדואליים של האילוצים? הסבר ונמק את תשובתך.
- מצא חסמים על המקדם של  $X_1$  בפונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
- מצא חסמים על אגף ימין של כל האילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.

**שאלה 3:**

לקוח 'בנק השואלים' חסך 900,000₪ ומעוניין להשקיע את כספו (או חלק ממנו). הוא פנה לבנקאי האישי שלו לקבלת המלצה. הבנקאי פרש בפניו את 2 האפשרויות בטבלה הבאה:

רווח שנתי	אפיק ההשקעה
30%	מניות
20%	אג"ח

הלקוח מעוניין להשקיע לכל הפחות 400,000₪ באג"ח. כמו כן, הוא מעוניין להשקיע במניות לכל היותר חצי מהסכום שהוא משקיע באג"ח.

- הגדר משתני החלטה ונסח את הבעיה בעזרת מודל תכנון ליניארי מתאים: פונקציית מטרה ואילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.
- פתור את הבעיה שניסחת בסעיף א' באופן גרפי. שרטט תחום אפשרי וחשב את הערך האופטימאלי של משתני ההחלטה ושל פונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
- מהם הערכים הדואליים של האילוצים? הסבר ונמק את תשובתך.
- מצא חסמים על המקדם של  $X_1$  בפונקציית המטרה. הסבר ונמק את תשובתך.
- מצא חסמים על אגף ימין של כל האילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.
- חברו של הלקוח מעוניין לתת לו הלוואה בריבית של 20%. האם כדאי ללקוח לקחת את ההלוואה? עד איזה סכום הלוואה משתלמת? אם ההלוואה הינה בסכום של 100,000₪, מה יהיה השינוי ברווח ומהו סכום הכסף שהלקוח ישקיע בכל אחד מאפיקי ההשקעה?
- אם הרווח עבור השקעה במניות יגדל ל-60%, כיצד ישתנה רווחו הכולל של הלקוח?

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)



**שאלה 4:**

חנות טיפוח רוכשת מלאי חודשי של 2 סוגי קרמים בריחות וניל ותות. נפח קופסת קרמים בריח וניל (המכילה קרם גוף, קרם רגליים, קרם ידיים וקרם פנים) הינו 0.25 מ"ר ואילו נפח קופסת קרמים בריח תות הינו 0.2 מ"ר (קופסת הקרמים בריח תות לא מכילה קרם פנים). מנהל החנות, שמואל, קונה את הקרמים בסיטונאות ולכן מחירה של קופסת קרמים בריח וניל הינו 200 ₪ ואילו מחירה של קופסת קרמים בריח תות הינו 400 ₪ (תמציות התות יקרות יותר). שמואל מוכר כל קופסא בחנות במחיר גבוה פי 2.5 ממחיר קנייתו.

בתחילת חודש מאי, החליט שמואל לבצע הזמנה של קרמים. הוא הקציב לרכישה סכום כולל של 50,000 ₪. חברו הטוב, אלי, מוכן לספק לו הובלה חינם של הקופסאות לחנות. המקום אותו מקצה אלי במשאיתו להובלה הינו 30 מ"ר.

במידה ושמואל יחליט להזמין קופסא לא מלאה של קרמים, הוא יקבל את החלק היחסי של הקופסא. משמע, מספר הקופסאות שהוא מזמין לא חייב להיות מספר שלם. בנוסף, שמואל החליט שלכל היותר 70% מהמלאי בחודש מאי יהיה מורכב מקרמים בריח וניל. שמואל מעוניין להביא למקסימום את הרווח החודשי.

א. הגדר משתני החלטה ונסח את הבעיה בעזרת מודל תכנון ליניארי מתאים: פונקציית מטרה ואילוצים. הסבר ונמק את תשובתך.

ב. פתור את הבעיה שניסחת בסעיף א' באופן גרפי. שרטט תחום אפשרי וחשב את הערך האופטימאלי של משתני ההחלטה ושל פונקציית המטרה. מה מיוחד בפתרון המתקבל? הסבר ונמק את תשובתך.

פתרונות פרק 2פתרון שאלה 1:

א.

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 6X_2$$

S.T.

1)  $2X_1 \leq 40$

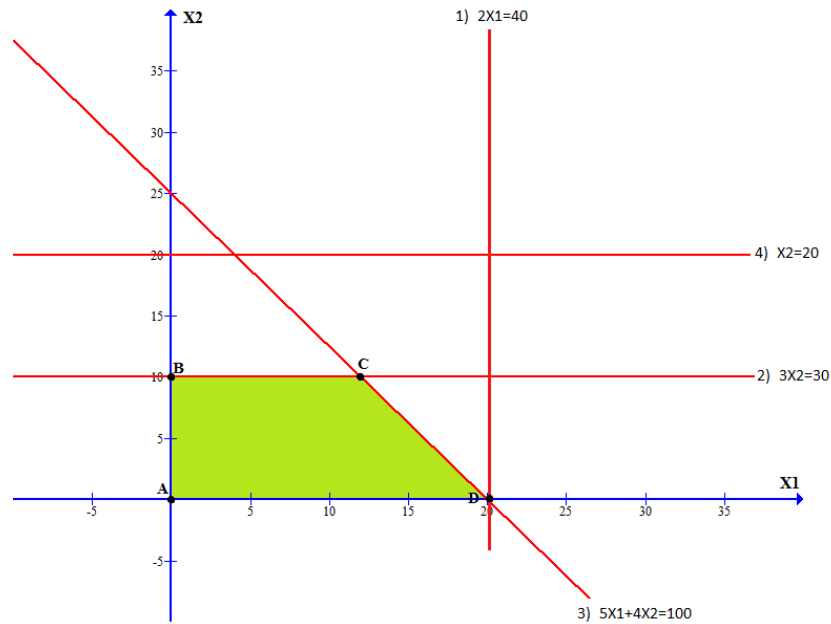
2)  $3X_2 \leq 30$

3)  $5X_1 + 4X_2 \leq 100$

4)  $X_2 \leq 20$

ושלמים  $X_1, X_2 \geq 0$

ב.



כמות הכובעים הכחולים שהמפעל ייצר הינה 12 וכמות הכובעים האדומים שהמפעל ייצר הינה 10. רווחו של המפעל יהיה 120 ₪.

ג. הערכים הדואליים של האילוצים:  $0, \frac{2}{3}, 1, 0$ .

ד.  $4 \leq C_2 \leq \infty, 0 \leq C_1 \leq 7.5$ .

ה. אילוץ 1:  $\infty, 24$ . אילוץ 2:  $0, 60$ . אילוץ 3:  $40, 140$ . אילוץ 4:  $10, \infty$ .

ו. כדאי. תוספת של 20 ₪ לרווח הכולל.

ז. הרווח הכולל יגדל ב-10 ₪. כמות הכובעים הכחולים שהמפעל ייצר הינה 8 וכמות

הכובעים האדומים שהמפעל ייצר הינה 15.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

פתרון שאלה 2:

א.

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 6X_2$$

S.T.

1)  $5X_1 + 30X_2 \geq 60$

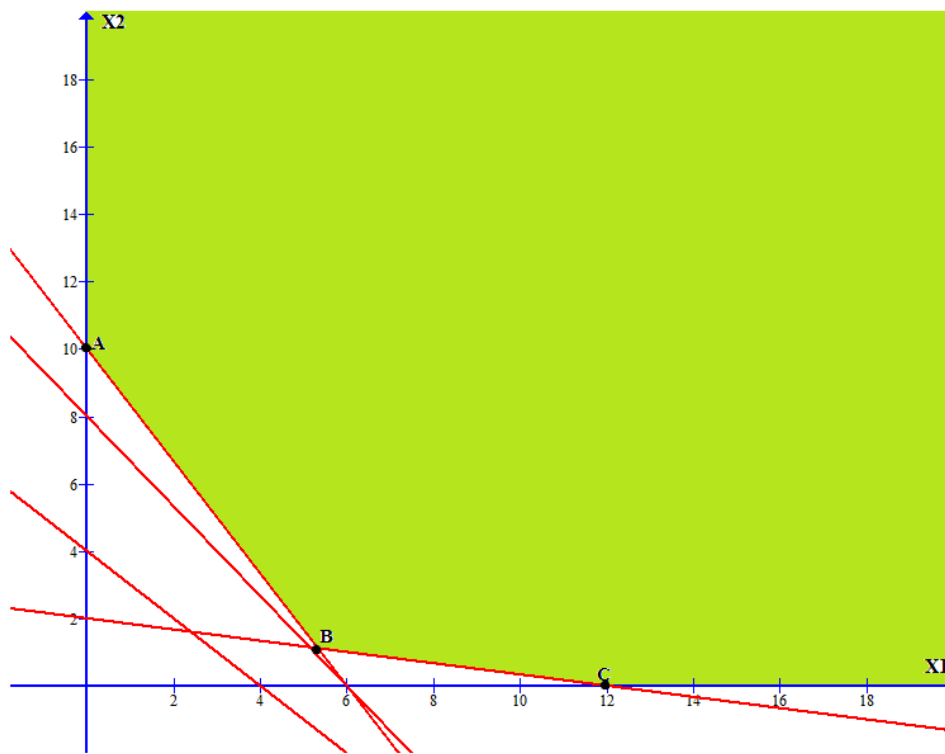
2)  $20X_1 + 15X_2 \geq 120$

3)  $15X_1 + 15X_2 \geq 60$

4)  $35X_1 + 21X_2 \geq 210$

$X_1, X_2 \geq 0$

ב.



שלמה יקנה  $5\frac{1}{3}$  ק"ג מסוג מזון 1 ו- $1\frac{1}{9}$  ק"ג מסוג מזון 2. עלותו הכוללת תהיה  $33\frac{1}{3}$ .

ג. הערכים הדואליים של האילוצים:  $\frac{8}{63}, 0, 0, \frac{1}{9}$ .

ד.  $1 \leq C_1 \leq 10$ .

ה. אילוץ 1: 300, 30. אילוץ 2:  $-\infty, 123\frac{1}{3}$ . אילוץ 3:  $-\infty, 96\frac{2}{3}$ . אילוץ 4: 204, 420.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

פתרון שאלה 3:

א.

$$\text{Max } Z = 1.3X_1 + 1.2X_2$$

S.T.

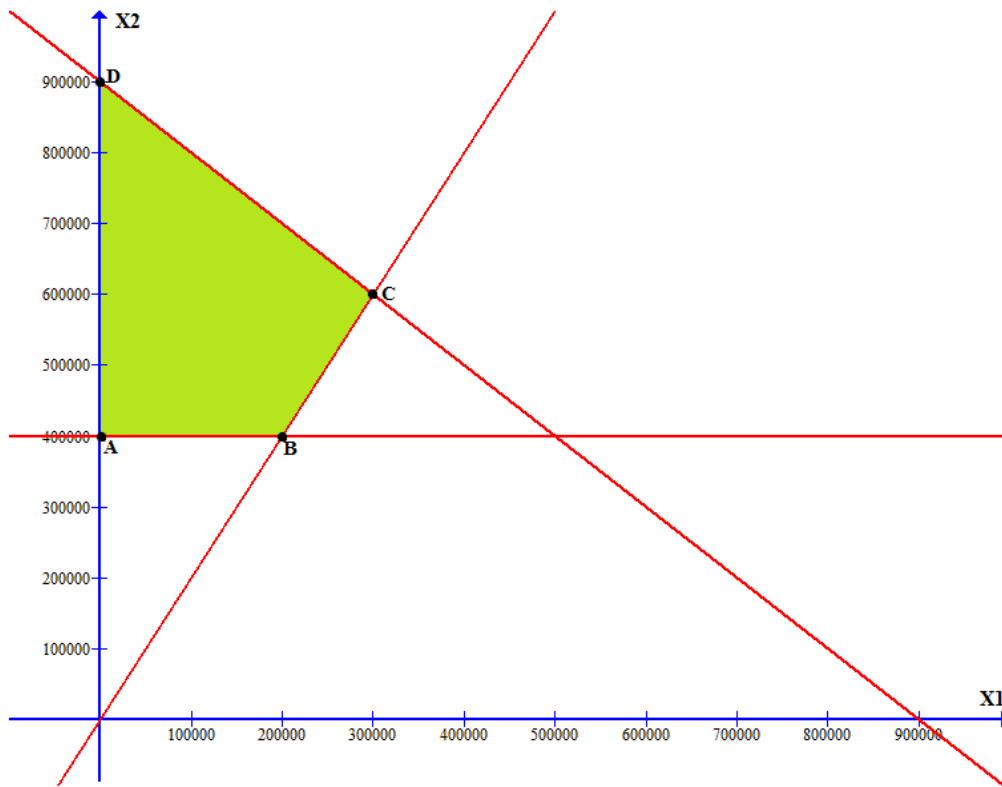
$$1) X_1 + X_2 \leq 900000$$

$$2) X_2 \geq 400000$$

$$3) X_1 - 0.5X_2 \leq 0$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

ב.



הלקוח ישקיע 300,000 ש"ח במניות ו- 600,000 ש"ח באג"ח. רווחו הכולל יהיה 1,110,000.

ג. הערכים הדואליים של האילוצים:  $1\frac{7}{30}, 0, \frac{1}{15}$ .

ד.  $1.2 \leq C_1$ .

ה. אילוץ 1: 600000,  $-\infty$ . אילוץ 2:  $-\infty, 600000$ . אילוץ 3: -450000, 300000.

ו. ההלוואה משתלמת בכל סכום.

ז. יגדל ב- 90000.

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

פתרון שאלה 4:

א.

$$\text{Max } Z = 300X_1 + 600X_2$$

S.T.

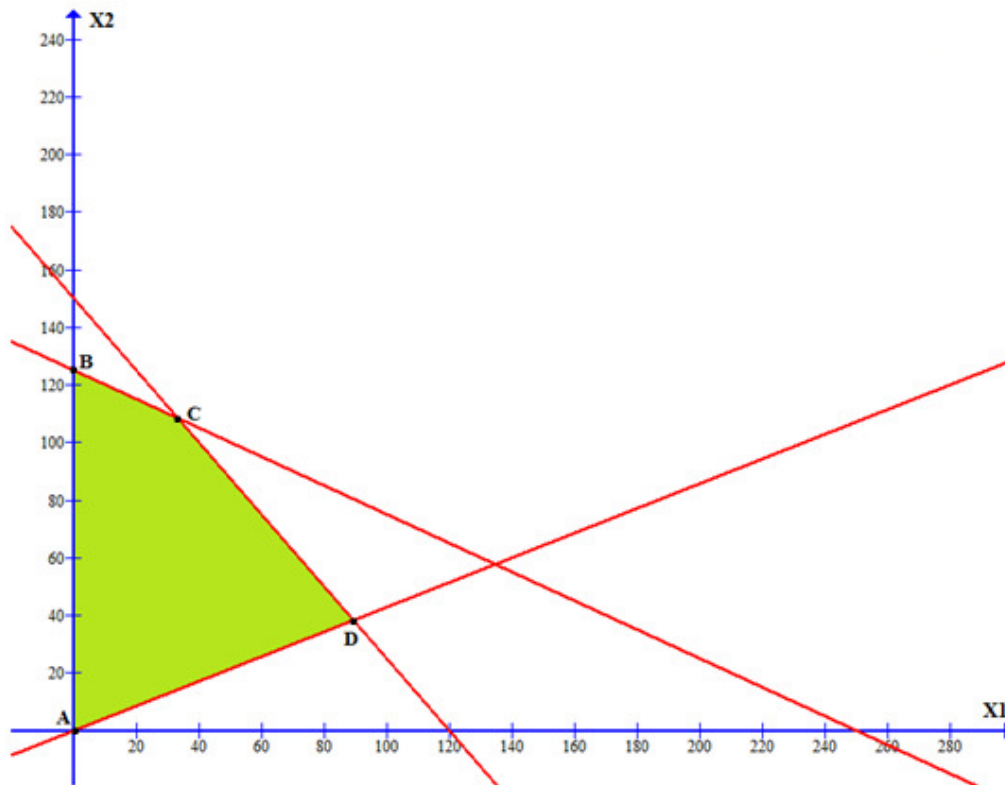
$$1) 200X_1 + 400X_2 \leq 50000$$

$$2) 0.25X_1 + 0.2X_2 \leq 30$$

$$3) 0.3X_1 - 0.7X_2 \leq 0$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

ב.



2 פתרונות אופטימאליים. רווחו הכולל של שמואל יהיה 75,000 ₪.

### פרק 3 - תכנון ליניארי: הכרה וניתוח פלט מחשב, תוכנת POM-QM

#### שאלה 1:

מאפיית לחמים רוכשת בכל שבוע סוכר, קמח, ומלח להכנת שלושה סוגים של מאפים. הטבלה הבאה מציגה את הכמות בק"ג הדרושה של שלושת המרכיבים להכנת מאפה אחד מכל סוג, מחיר ליחידה של כל חומר גלם ומחיר מכירת כל אחד מהמאפים:

מחיר לק"ג (₪)	מאפה 1	מאפה 2	מאפה 3	מחיר לק"ג (₪)
סוכר (ק"ג)	1	1.2	1	2
קמח (ק"ג)	1.1	1	1	1
אבקות קסמים (ק"ג)	1	1.2	1	2
מחיר מכירה (₪)	10	9	9	

כמות הסוכר שניתן לרכוש בכל שבוע הינה 100 ק"ג. כמו כן, ניתן לרכוש בכל שבוע לכל היותר 250 ק"ג של קמח ואבקות קסמים יחד. מנהל המאפייה מעוניין לדעת כמה ק"ג מכל חומר גלם לרכוש וכמה מאפים לייצר מכל סוג בשביל למקסם את רווחיו השבועיים.

המודל המתמטי של הבעיה הינו:

$$\text{Max } Z = 10X_1 + 9X_2 + 9X_3 - 2A - 1B - 2C$$

S.T.

- 1)  $X_1 + 1.2X_2 + X_3 - A = 0$
- 2)  $1.1X_1 + X_2 + X_3 - B = 0$
- 3)  $X_1 + 1.2X_2 + X_3 - C = 0$
- 4)  $A \leq 100$
- 5)  $B + C \leq 250$

## פלט מחשב:

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	100	0	10	9.1	Infinity
X2	0		9	-Infinity	
X3	0		9	-Infinity	
A	100	0	-2	-6.9	Infinity
B	110	0	-1	-5.4545	Infinity
C	100	0	-2	-6.9	Infinity
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Constraint 1	6.9	0	0	-100	19.0476
Constraint 2	1	0	0	-40	110
Constraint 3	2	0	0	-40	100
Constraint 4	4.9	0	100	0	119.0476
Constraint 5			250		

- א. הסבר את משמעות כל משתני ההחלטה והאילוצים. מה מייצגת פונקציית המטרה?
- ב. מה הקשר בין הערך הדואלי של אילוץ 1 לערך הדואלי של אילוץ 4? הסבר ונמק את תשובתך.
- ג. מחיר המכירה ליחידת מוצר 1 ירד ב-5%. האם ישפיע הדבר על הרווח השבועי? אם לא, הסבר. אם כן, חשב בכמה ישתנה הרווח השבועי של המאפיה. הסבר ונמק תשובתך.
- ד. מחיר אבקת הקסמים עלה ב-80%. האם ישפיע הדבר על הרווח השבועי? אם לא, הסבר. אם כן, חשב בכמה ישתנה הרווח השבועי של המאפיה. הסבר ונמק תשובתך.
- ה. נניח כי מגבלת הרכישה עבור קמח ואבקת קסמים הינה 220 ק"ג במקום 250 ק"ג. כיצד ישפיע השינוי על הרווח השבועי? הסבר ונמק תשובתך.
- ו. חשב את ערך משתנה הסרק של אילוץ 5, את הערך הדואלי שלו ואת החסמים על אגף ימין שלו. הסבר ונמק תשובתך.
- ז. בעלות של 4 ש"ק לק"ג, יכולה המאפיה לרכוש כמות נוספת של סוכר מספק אחר. האם הרכישה כדאית? אם לא, הסבר. אם כן, מהי הכמות הנוספת שכדאי לרכוש ובכמה ישתנה הרווח השבועי? הסבר ונמק את תשובתך.
- ח. בהתעלם מהסעיף הקודם, ספק חדש מציע למאפיה 24 ק"ג סוכר במחיר של 3.8 ש"ק לק"ג. חייבים לקנות 24 ק"ג לפחות. האם הרכישה כדאית? אם לא, הסבר. אם כן, בכמה ישתנה הרווח השבועי? הסבר ונמק את תשובתך.
- ט. מהו המחיר המופחת של X3 ומהו החסם העליון על מקדם X3 בפונקציית המטרה? הסבר ונמק תשובתך.
- י. האם המאפיה אופה מאפה מסוג 2? אם כן, מהי הכמות הנמכרת? אם לא, מה צריך להיות מחיר המכירה של המאפה כדי שכדאי יהיה לייצר למכירה? הסבר ונמק תשובתך.
- יא. מדוע שווה הערך הדואלי של אילוץ 3 למינוס המקדם של C בפונקציית המטרה? הסבר ונמק תשובתך.

**שאלה 2:**

במפעל ייצור מייצרים שלושה סוגי מוצרים. מוצרים 1 ו-2 מיוצרים ע"י שלוש מכונות ומוצר 3 ע"י שתי מכונות בלבד.

מוצר 1 מיוצר ע"י חומר גלם הקיים בכמות אינסופית וללא עלות. מוצרים 2 ו-3 מיוצרים ע"י חומר גלם אותו יש לרכוש. מוצר 2 דורש שתי יחידות חומר גלם ומוצר 3 דורש שלוש יחידות חומר גלם.

במלאי המפעל קיימות 55 יחידות חומר גלם מייצור קודם. בנוסף, ניתן לרכוש עד 40 יחידות נוספות של חומר גלם בעלות של 4 ₪ ליחידה.

הרווח מכל מוצר, הזמן הדרוש לייצור עבור כל מוצר בכל אחת מהמכונות, הביקוש המינימאלי למוצרים והזמינות הכוללת של זמן השימוש במכונות (לכל חודש) נתונים בטבלה הבאה:

זמינות כוללת	מוצר 3	מוצר 2	מוצר 1	
	200	310	100	רווח (₪)
92	3	1	3	זמן דרוש מכונה 1 (דקות)
191	2	6	3	זמן דרוש מכונה 2 (דקות)
173	0	4	5	זמן דרוש מכונה 3 (דקות)
	14	10	10	ביקוש מינימאלי

מנהל המפעל מעוניין בתוכנית ייצור אופטימאלית שתביא למקסימום את הרווח החודשי. המודל המתמטי של הבעיה הינו:

$$\text{Max } Z = 100X_1 + 310X_2 + 200X_3 - 4A$$

S. T.

$$1) 2X_2 + 3X_3 - A \leq 55$$

$$2) A \leq 40$$

$$3) 3X_1 + X_2 + 3X_3 \leq 92$$

$$4) 3X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 191$$

$$5) 5X_1 + 4X_2 \leq 173$$

$$6) X_1 \geq 10$$

$$7) X_2 \geq 10$$

$$8) X_3 \geq 14$$



## פלט מחשב:

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	10	0	100	-Infinity	906
X2	20	0	310	70.6667	Infinity
X3	14	0	200	-Infinity	918
A	27	0	-4	-138.3333	0
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Constraint 1	4	0	55	42	82
Constraint 2	0	13	40	27	Infinity
Constraint 3	302	0	92	82	94.1667
Constraint 4	0	13	191	178	Infinity
Constraint 5	0	43	173	130	Infinity
Constraint 6	-806	0	10	9.1333	13.3333
Constraint 7	0	10	10	-Infinity	20
Constraint 8	-718	0	14	13.1875	17.3333

- א. הביקוש המינימאלי של מוצר 1 בחודש הקרוב הינו 12. האם ישפיע הדבר על הרווח החודשי? אם לא, הסבר. אם כן, חשב בכמה ישתנה הרווח החודשי של המפעל. הסבר ונמק תשובתך.
- ב. בהשקעה חודשית של 500 ₪ ניתן להגדיל את הזמינות הכוללת של אחת מהמכונות ב-2 דקות. האם ההשקעה כדאית? אם לא, הסבר. אם כן, חשב בכמה ישתנה הרווח החודשי של המפעל. הסבר ונמק תשובתך.
- ג. הרווח ממוצר 3 עלה ב-300%. האם ישפיע הדבר על הרווח השבועי? אם לא, הסבר. אם כן, חשב בכמה ישתנה הרווח השבועי של המאפיה. הסבר ונמק תשובתך.
- ד. חנות חיצונית מעוניינת להזמין מהמפעל 3 יחידות ממוצר 3. מהו המחיר המינימאלי שהמפעל צריך לדרוש עבור כל יחידה, בהנחה שהוא מעוניין לספק את ההזמנה. הסבר ונמק תשובתך.
- ה. מהי העלות השולית של דקת עבודה נוספת של מכונה 1?
- ו. מנהל המפעל מעוניין להגדיל את הזמינות הכוללת של מכונה 2. האם ישפיע הדבר על הרווח החודשי? אם לא, הסבר. אם כן, חשב את השינוי ברווח החודשי של המפעל. הסבר ונמק תשובתך.
- ז. מה הקשר בין הערך הדואלי של אילוץ 8 לבין החסם העליון של המקדם של X3 בפונקציית המטרה? הסבר ונמק תשובתך.
- ח. אילו היה ריבוי פתרונות אופטימאליים לבעיה, כיצד היינו מזהים זאת בפלט הנ"ל? הסבר ונמק תשובתך.

פתרונות פרק 3

**פתרון שאלה 1:**

פלט מלא:

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	100	0	10	9.1	Infinity
X2	0	2.68	9	-Infinity	11.68
X3	0	.9	9	-Infinity	9.9
A	100	0	-2	-6.9	Infinity
B	110	0	-1	-5.4545	Infinity
C	100	0	-2	-6.9	Infinity
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Constraint 1	6.9	0	0	-100	19.0476
Constraint 2	1	0	0	-40	110
Constraint 3	2	0	0	-40	100
Constraint 4	4.9	0	100	0	119.0476
Constraint 5	0	40	250	210	Infinity

ג.  $\Delta Z = -50$

ד.  $\Delta Z = -160$

ה. השינוי לא ישפיע על הרווח השבועי.

ו.  $0, 40, \infty, 210$ .

ז.  $\Delta Z = 55.23804$  ק"ג, 19.0476.

ח.  $\Delta Z = 40.22844$

ט. 0.9 ₪, 9.9 ₪.

י. לא, 11.68 ₪.

**פתרון שאלה 2:**

פלט מלא:

Variable	Value	Reduced Cost	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
X1	10	0	100	-Infinity	906
X2	20	0	310	70.6667	Infinity
X3	14	0	200	-Infinity	918
A	27	0	-4	-138.3333	0
Constraint	Dual Value	Slack/Surplus	Original Val	Lower Bound	Upper Bound
Constraint 1	4	0	55	42	82
Constraint 2	0	13	40	27	Infinity
Constraint 3	302	0	92	82	94.1667
Constraint 4	0	13	191	178	Infinity
Constraint 5	0	43	173	130	Infinity
Constraint 6	-806	0	10	9.1333	13.3333
Constraint 7	0	10	10	-Infinity	20
Constraint 8	-718	0	14	13.1875	17.3333

א.  $\Delta Z = -1612$

ב.  $\Delta Z = 104$

ג.  $\Delta Z = 8400$

ד. 918

ה. 302

ו. לא.

ח. מחיר מופחת שערכו אפס עבור משתנה שאינו בסיסי.

## פרק 4 - תורת התורים

### שאלה 1:

בחנות כובעים עובד מוכר אחד. קצב ההגעה לחנות מתפלג פואסונית עם תוחלת של 10 קונים בשעה וזמן השירות מתפלג מעריכית עם תוחלת של 4 דקות לקונה. נתון  $Ws=0.2$ .

- א. בכמה קונים בממוצע מטפל המוכר בשעה?
  - ב. מהי ההסתברות שהמוכר נח (בטל)?
  - ג. מהי ההסתברות שקונה המגיע לחנות הכובעים ימצא לפניו תור של שלושה אנשים, בנוסף למקבל השירות?
  - ד. מהי ההסתברות שקונה שמגיע לחנות הכובעים ימצא לפניו תור של לפחות ארבעה אנשים כולל מקבל השירות.
  - ה. מהו אורך התור הממוצע?
  - ו. מהו ממוצע מספר הקונים שלא יקבלו שירות מידי?
  - ז. כמה דקות בממוצע ממתין קונה בתור?
  - ח. כמה דקות בממוצע נמצא קונה בחנות מרגע כניסתו ועד רגע יציאתו?
  - ט. כמה דקות בממוצע תהיה החנות ריקה במשך שעה?
- מנהל החנות שוקל להוסיף לחנות מוכר נוסף.
- י. במידה והמנהל אכן יעסיק שני מוכרים, מהי ההסתברות ששני המוכרים בטלים?
  - יא. באיזה אחוז מן הזמן אחד מהמוכרים עסוק והשני בטל?
  - יב. כמה מוכרים על מנהל החנות להעסיק אם הוא מעוניין שההסתברות שקונה יקבל שירות מידי תהיה גבוהה.
  - יג. כמה מוכרים על מנהל החנות להעסיק אם הוא מעוניין שההסתברות שקונה יגיע לחנות ולפניו יהיה תור של שני קונים תהיה נמוכה.
  - יד. כמה מוכרים על מנהל החנות להעסיק אם הוא מעוניין שדרגת התעסוקה של המערכת תהיה לפחות 55%.

עבור שני מוכרים :

k	Prob (num in sys = k)	Prob (num in sys <= k)	Prob (num in sys >k)
0	.5	.5	.5
1	.33	.83	.17
2	.11	.94	.06
3	.04	.98	.02
4	.01	1	0

עבור מוכר אחד :

k	Prob (num in sys = k)	Prob (num in sys <= k)	Prob (num in sys >k)
0	.33	.33	.67
1	.22	.56	.44
2	.15	.71	.3
3	.1	.81	.2
4	.07	.88	.13
5	.04	.92	.09
6	.03	.95	.06
7	.02	.97	.04
8	.01	.98	.03
9	0	.99	.02
10	0	.99	.01
11	0	1	0

**שאלה 2:**

לקראת תחילת הלימודים, מעסיקה המכללה את יוסי שיעסוק בחלוקת שי פתיחת שנה. אל יוסי פונים לקוחות בקצב המתפלג פואסונית עם תוחלת זמן בין-מופעי של 6 דקות ללקוח. זמן חלוקת השי ללקוח מתפלג מעריכית עם ממוצע של 4 דקות.

- א. אם המכללה משלמת ליוסי 20 ₪ לשעת עבודה וכל שי פתיחת שנה עולה לה 10 ₪, מהי העלות הכוללת שלה ליום עבודה של יוסי בו הוא עובד 8 שעות?
- ב. המכללה שמה לב שאם יש בתור 3 לקוחות או יותר, היא מקבלת תלונות על אורך התור. מהי ההסתברות שתקבל תלונות אם תעסיק רק את יוסי? מהי ההסתברות שתקבל תלונות אם תעסיק גם את אבי חברו (העובד באותו הקצב כמו יוסי) וכלל הלקוחות ימתינו בתור אחד משותף?
- ג. אם המכללה משלמת ליוסי ואבי שכר זהה, מה תהיה כעת עלותה הכוללת של יום עבודה לשני העובדים יחד?
- ד. מהו ממוצע זמן ההמתנה בתור כאשר יוסי ואבי עובדים יחד?
- ה. מהו ממוצע מספר האנשים במערכת באותו המצב? ובתור בלבד?
- ו. האם זמן השהייה במערכת קצר יותר כאשר אבי ויוסי עובדים יחד מאשר כשיוסי עובד לבד?

עבור שני עובדים :

k	Prob (num in sys = k)	Prob (num in sys <= k)	Prob (num in sys >k)
0	.5	.5	.5
1	.33	.83	.17
2	.11	.94	.06
3	.04	.98	.02
4	.01	1	0

עבור עובד אחד :

k	Prob (num in sys = k)	Prob (num in sys <= k)	Prob (num in sys >k)
0	.33	.33	.67
1	.22	.56	.44
2	.15	.7	.3
3	.1	.8	.2
4	.07	.87	.13
5	.04	.91	.09
6	.03	.94	.06
7	.02	.96	.04
8	.01	.97	.03
9	0	.98	.02
10	0	.99	.01
11	0	1	0

Parameter	Value	Parameter	Value
M/M/s		Average server utilization	.67
Arrival rate(lambda)	10	Average number in the queue(Lq)	1.33
Service rate(mu)	15	Average number in the system(Ls)	2
Number of servers	1	Average time in the queue(Wq)	.13
		Average time in the system(Ws)	

Parameter	Value	Parameter	Value
M/M/s		Average server utilization	.33
Arrival rate(lambda)	10	Average number in the queue(Lq)	
Service rate(mu)	15	Average number in the system(Ls)	.75
Number of servers	2	Average time in the queue(Wq)	
		Average time in the system(Ws)	

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

**שאלה 3:**

מכונה מטפלת במוצרים המגיעים בקצב פואסוני של 70 יחידות לשעה. המוצרים עוברים לקווי ייצור שונים בהם הם עוברים טיפולים שונים. קווי הייצור מטפלים בממוצע ב-25 מוצרים בשעה. זמן הטיפול מתפלג מעריכית.

עלות הפעלת קווי הייצור הינה 300 ₪ לשעה. מוצר שממתין זמן רב מידי לטיפול מאבד מערכו. ההנחה הינה שעלות ההמתנה היא 200 ₪ למוצר לשעה.

א. מהו המספר המינימאלי של קווי ייצור שחייבים להפעיל?

ב. כמה קווי ייצור כדאי להפעיל (מבחינת העלויות)?

ג. מהי הפרופורציית המוצרים שיקבלו טיפול ללא המתנה.

ד. כל מוצר שמגיע לתחילת קו הייצור ולפניו יתור' של 5 יחידות לפחות, נזרק לפח. עלות

ייצור מוצר היא 2 ₪. מהי העלות הממוצעת של המוצרים הנזרקים לפח בשעה?

Parameter	Value	Parameter	Value
M/M/s		Average server utilization	.93
Arrival rate(lambda)	70	Average number in the queue(Lq)	12.27
Service rate(mu)	25	Average number in the system(Ls)	15.07
Number of servers	3	Average time in the queue(Wq)	.18
		Average time in the system(Ws)	.22

Parameter	Value	Parameter	Value
M/M/s		Average server utilization	.7
Arrival rate(lambda)	70	Average number in the queue(Lq)	1
Service rate(mu)	25	Average number in the system(Ls)	3.8
Number of servers	4	Average time in the queue(Wq)	.01
		Average time in the system(Ws)	.05

Parameter	Value	Parameter	Value
M/M/s		Average server utilization	.56
Arrival rate(lambda)	70	Average number in the queue(Lq)	.24
Service rate(mu)	25	Average number in the system(Ls)	3.04
Number of servers	5	Average time in the queue(Wq)	0
		Average time in the system(Ws)	.04

טבלת הסתברויות עבור מערכת עם  $S=4$ :

k	Prob (num in sys = k)	Prob (num in sys <= k)
0	.05	.05
1	.14	.19
2	.2	.39
3	.18	.57
4	.13	.7
5	.09	.79
6	.06	.85
7	.04	.9
8	.03	.93
9	.02	.95

לפתרון מלא בסרטון וידאו היכנסו ל- [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)

**שאלה 4:**

בסניף משרד התחבורה מעריכים כי לקוחות מגיעים בקצב פואסוני של 40 אנשים בשעה. הנהלת הסניף מעריכה כי 60% מהם מעוניינים בהנפקת רישיון הנהיגה שלהם. בסניף שני עובדים כאשר משך הטיפול בלקוח מתפלג מעריכית עם ממוצע של 2 דקות.

משרד התחבורה שוקל לבצע שינוי ולהקצות עובד אחד לפחות לטיפול רק בנושא של הנפקת רישיונות הנהיגה (כיוון שכרגע יש בסניף רק 2 עובדים, ההקצאה תהיה של עובד אחד בדיוק לשם לכך והעובד השני יטפל ביתר הלקוחות).

- א. מהו אחוז הלקוחות הנאלצים לעמוד בתור לפני השינוי בבואם לסניף?
- ב. מהו זמן ההמתנה הממוצע בתור לפני השינוי?
- ג. מבין הלקוחות המעוניינים להנפיק רישיון נהיגה, מהו אחוז הלקוחות שיאלצו להמתין בתור לאחר השינוי?
- ד. חשב את זמן ההמתנה הממוצע עבור לקוח שבא להנפיק רישיון נהיגה לאחר השינוי. הסניף קיבל אישור להעסיק לכל היותר 4 עובדים סה"כ. עלות העסקת עובד במשרד התחבורה היא 80 ₪ לשעה כאשר עובד מקבל שכר רק כאשר הוא עובד בפועל. העלות הכרוכה בשעת המתנה של אזרח בתור היא 100 ₪ לשעה.
- ה. כמה עובדים כדאי להעסיק לפני השינוי אם השיקול הוא כלכלי בלבד?
- ו. לאחר השינוי, הוחלט להעסיק 4 עובדים. כמה עובדים ישובצו לטיפול בלקוחות שהגיעו להנפקת רישיונות הנהיגה וכמה לטיפול ביתר הלקוחות אם השיקול הוא כלכלי בלבד?

הרצה 7	הרצה 6	הרצה 5	הרצה 4	הרצה 3	הרצה 2	הרצה 1	
16	16	24	24	16	24	40	קצב הגעה (לשעה)
30	30	30	30	30	30	30	קצב שירות (לשעה)
3	2	3	2	1	1	2	מספר שרתים
0.5372	0.5742	0.8189	0.9524	1.1429	4	2.4	$L_s$
0.00386	0.0408	0.0189					$L_q$
<b>הסתברות ל-K לקוחות במערכת</b>							
0.5861	0.5789	0.4472	0.4286	0.4667	0.2	0.2	K=0
0.3126	0.3088	0.3577	0.3429	0.2489	0.16	0.2667	K=1
0.0834	0.0823	0.1431	0.1317	0.1327	0.128	0.1778	K=2
0.0148	0.022	0.0382	0.0549	0.0708	0.1024	0.1185	K=3

פתרונות פרק 4פתרון שאלה 1:

- א. 15 קונים בשעה  
 ב.  $\frac{1}{3}$   
 ג. 0.07  
 ד. 0.2  
 ה.  $1\frac{1}{3}$  קונים  
 ו.  $6\frac{2}{3}$   
 ז. 8 דקות  
 ח. 12 דקות  
 ט. 20 דקות  
 י. 0.5  
 יא. 33%  
 יב. שני מוכרים  
 יג. שני מוכרים  
 יד. מוכר אחד

פתרון שאלה 2:

- א. 960 ₪  
 ב. 0, 0.2  
 ג. 1120 ₪  
 ד. חצי דקה  
 ה. 0.75 אנשים, 0.0833 אנשים  
 ו. כאשר אבי ויוסי עובדים יחד

פתרון שאלה 3:

- א. שלושה קווי ייצור  
 ב. ארבעה קווי ייצור  
 ג. 0.57  
 ד. 9.8 ₪ בשעה



**פתרון שאלה 4:**

- א. 53.3%
- ב. 1.6 דקות
- ג. 80%
- ד. 8 דקות
- ה. 4 עובדים
- ו. 2 עובדים לכל תור