תוכן העניינים:

מערכות ספרתיות 2
אלגברה בוליאנית ופונקציות בוליאניות 2
אלגברה בוליאנית: 2
סיכום כללי: 2
שאלות: 5
תשובות סופיות: 8
פונקציות בוליאניות: 9
סיכום כללי: 9
שאלות: 9
תשובות סופיות: 12
צורות קנוניות וסטנדרטיות של פונקציות: 14
סיכום כללי: 14
שאלות: 15
תשובות סופיות: 17
פונקציות בוליאניות נוספות: 19
סיכום כללי: 19
שאלות: 20
תשובות סופיות: 22
פונקציות טבעיות ופונקציות דואליות עצמיות: 24
סיכום כללי: 24
שאלות: 25
תשובות סופיות: 25
מערכת פעולות שלמה: 26
סיכום כללי: 26
שאלות: 27
תשובות סופיות: 27
סיווג פונקציות ותכונות של פונקציות מיוחדות: 28
סיכום כללי: 28
שאלות: 33
תשובות סופיות: 34

מערכות ספרתיות

אלגברה בוליאנית ופונקציות בוליאניות

אלגברה בוליאנית:

סיכום כללי:

לוגיקה בינארית:

תחום העוסק בפעולות המכילות שתי תוצאות אפשרויות: True/False, נכון/לא נכון.
בהקשר שלנו נתייחס לתוצאות בתור '1' ו-'0' לוגים.

משתני מיתוג:

משתנה שיכול לקבל ערכים בינאריים '0', '1', נקרא **משתנה בינארי** או **משתנה מיתוג.**
סימון מקובל: $X\ ,Y\ ,Z\ ,....\quad a\ ,b\ ,c\ ,....$.

פעולות לוגיות יסודיות:

הפעולה	תיאור
AND ('וגם')	פעולה בינארית המיוצגת על ידי נקודת הכפל ופועלת על שני משתנים (או יותר) באופן הבא: $x\cdot y=z$. משמעה: $z=1$ אם $x=1$ וגם $y=1$, אחרת $z=0$.
OR ('או')	פעולה בינארית המיוצגת על ידי חיבור ופועלת על שני משתנים (או יותר) באופן הבא: $x+y=z$. משמעה: $z=1$ אם $x=1$ או $y=1$, אחרת $z=0$.
NOT (משלים)	פעולה אונרית המיוצגת ע"י ' או כובע $\overline{\square}$ באופן הבא: $z=\overline{x}$. משמעה היא שלילה, כלומר, אם $x=0$ אזי $z=1$, אך אם $x=1$ אזי $z=0$.

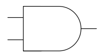
טבלת אמת:

טבלה המתארת את כל האפשרויות והצירופים של ערכי המשתנים ומבטאת את הקשר בין הערכים שיכולים לקבל המשתנים לבין המוצא.
זוג המשתנים x ו- y מתוארים בטבלה על ידי על האופציות שהם יכולים לקבל ו- z היא התוצאה של הפעולה.

טבלאות אמת של הפעולות הלוגיות:

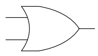
AND

x	y	$x\cdot y=z$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



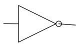
OR

x	y	$x+y=z$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



NOT

x	$\overline{x}=z$
0	1
1	0



הגדרת האלגברה הבוליאנית:

אלגברה בוליאנית היא מבנה אלגברי שמוגדר ע"י סט אלמנטים כלשהו B ושתי הפעולות $+$ ו- $\cdot$ אשר מקיים את ההנחות הבאות:

- המבנה סגור ביחס ל $+$.
- המבנה סגור ביחס ל $\cdot$.
- האלמנט '0' הוא הזהות של הפעולה $+$, כלומר: $x+0=0+x=x$.
- האלמנט '1' הוא הזהות של הפעולה $\cdot$, כלומר: $x\cdot 1=1\cdot x=x$.
- המבנה הוא קומוטטיבי ביחס ל$+$, כלומר: $x+y=y+x$.
- המבנה הוא קומוטטיבי ביחס ל $\cdot$, כלומר: $x\cdot y=y\cdot x$.
- האופרטור $+$ הוא פילוגי ביחס ל$\cdot$, כלומר: $x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$.
- האופרטור $\cdot$ הוא פילוגי ביחס ל $+$, כלומר: $x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)$.
- לכל איבר $x\in B$ קיים משלים $\overline{x}\in B$ המקיים: $x\cdot\overline{x}=0$, $x+\overline{x}=1$.
- יש לפחות שני איברים בסט: $x,y\in B$.

תכונות האלגברה הבוליאנית:

תכונה	תיאור עבור +	תיאור עבור •
סגירות	המבנה סגור ביחס ל +.	המבנה סגור ביחס ל •.
אדיש	$x+0=0+x=x$	$x\cdot 1=1\cdot x=x$
קומוטטיביות	$x+y=y+x$	$x\cdot y=y\cdot x$
פילוגיות	$x\cdot(y+z)=(x\cdot y)+(x\cdot z)$	$x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)$
משלים	$x+\overline{x}=1$	$x\cdot\overline{x}=0$

עקרון הדואליות:

אם נחליף את האופרטורים הבינאריים $\{\cdot\}$ ו- $\{+\}$ זה בזה ואת איברי היחידה זה בזה, 0 ל-1 וההפך. עקרון זה נקרא **עקרון הדואליות** והיא עקרון חשוב באלגברה בוליאנית.

טבלת אקסיומות ומשפטים שכיחים באלגברה בוליאנית:

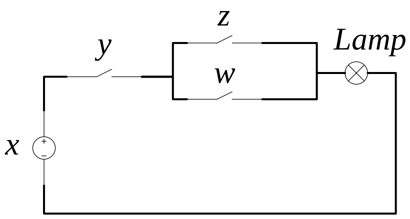
אקסיומות/משפטים	צורה (a)	צורה (b)
הנחה	$x+0=x$	$x\cdot 1=x$
הנחה	$x+\overline{x}=1$	$x\cdot\overline{x}=0$
הנחה	$x+y=y+x$	$x\cdot y=y\cdot x$
הנחה	$x(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$	$x+y\cdot z=(x+y)(x+z)$
משפט 1	$x+x=x$	$x\cdot x=x$
משפט 2	$x+1=1$	$x\cdot 0=0$
משפט 3 – היפוך	$\overline{\overline{x}}=x$	
משפט 4 – אסוציאטיביות	$(x+y)+z=x+(y+z)$	$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$
משפט 5 – דה מורגן	$\overline{x+y}=\overline{x}\cdot\overline{y}$	$\overline{xy}=\overline{x}+\overline{y}$
משפט 6 – צמצום	$x+xy=x$	$x\cdot(x+y)=x$

קדימות אופרטורים:

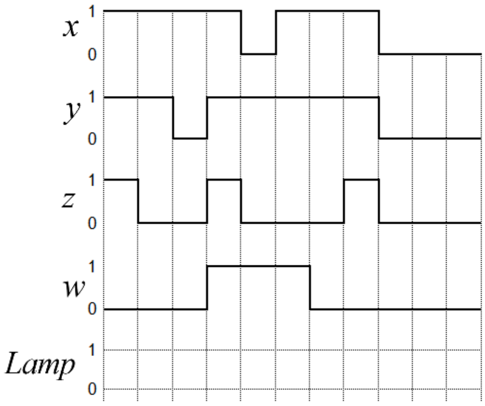
קדימות	שם האופרטור
1	( )
2	NOT
3	AND
4	OR

שאלות:

1) במעגל שלפניך מסמנים:
x - מקור מתח, w, z, y - מפסקים
ו- $Lamp$ היא מנורה שבמוצא המעגל.



לפניך גרף לוגי המתאר את מצבי המפסקים ומקור המתח כאשר ערך של '0' מעיד על מפסק סגור ומקור מתח כבוי, וערך של '1' לוגי מתאר מפסק פתוח ומקור מתח פעיל. בהינתן מצבי המתגים ומקור המתח בכל יחידת זמן, קבע האם המנורה תהיה דלוקה או כבויה:



2) הוכח את זהויות המיתוג הבאות בעזרת טבלת אמת:

א. צמצום: $x+xy=x$.

ב. חוק הפילוג: $x+(y\cdot z)=(x+y)\cdot(x+z)$.

ג. דה מורגן עבור שלושה משתנים: $\overline{x+y+z}=\bar{x}\cdot\bar{y}\cdot\bar{z}$.

ד. קונסנזוס (כלל ההסכמה): $xy+\bar{x}z+yz=xy+\bar{x}z$.

3) פשט את הביטויים הבאים (הסבר עבור כל מעבר בוליאני באיזה אקסיומה או זהות בוליאנית השתמשת):

א. $x+x'y$.

ב. $\bar{x}+\bar{y}+zy\bar{x}$.

ג. $ab+dab\bar{c}+\bar{a}b$.

ד. $\bar{A}B\bar{C}+A\bar{C}+\bar{A}\bar{B}+\bar{A}BC$.

ה. $\overline{\bar{b}\cdot(\bar{a}+\bar{c})}\cdot(b+a)+\bar{b}\cdot\bar{a}+\bar{b}\cdot\bar{c}$.

ו. $a+\bar{a}\cdot b+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c+\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot d+\ldots$.

4) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

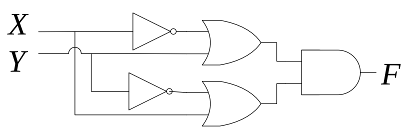
א. $(b+a)(b+\bar{a})(\bar{b}+\bar{a})(\bar{b}+a)=0$.

ב. $(a+b)\left(abc+\bar{b}(a+c)\right)+ab\bar{c}\left(a+a\bar{b}\right)=a$.

ג. $\bar{X}\bar{Z}+X\bar{Y}+YZ=\bar{X}Y+\overline{YZ}+XZ$.

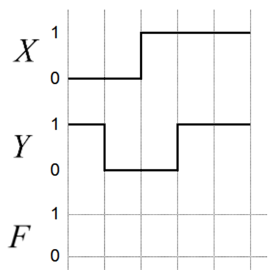
ד. $X\left(X+\bar{X}\right)+\left(\bar{Y}+X\right)\left(\bar{X}+X\right)=\bar{X}\bar{Y}$.

5) נתונה הדיאגרמה הלוגית הבאה:



א. כתוב ביטוי בוליאני מתאים לסרטוט.

ב. מה יהיה המוצא עבור ערכי כניסות X ו- Y כפי שמופיעים בציר הזמן הבא:



6) הוכח את הזהויות הבאות :

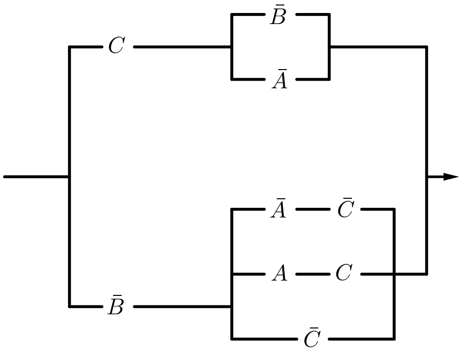
א. $\overline{\left(A+\bar{B}\right)C}+\overline{\left(\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\right)}+\overline{\left(\bar{A}B+C\right)}\bar{A}=B+\bar{C}$.

ב. $\overline{\bar{b}+\bar{c}+\bar{d}}+a\bar{b}+a\bar{c}+a\bar{d}=a+bcd$.

ג. $CD+\bar{B}\bar{D}+\bar{A}\bar{D}+\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{C}=\overline{AB}+CD$.

7) הזהות הבוליאנית : $\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}+AB\bar{C}=\overline{\bar{A}B}+C$ אינה נכונה, אך ניתן להפוך אותה לנכונה ע״י שינוי אחד בלבד. מצא איזה שינוי יש לבצע באגף ימין כדי שהזהות תהיה נכונה. נמק כל מעבר.

8) לפניך הרשת הבאה :



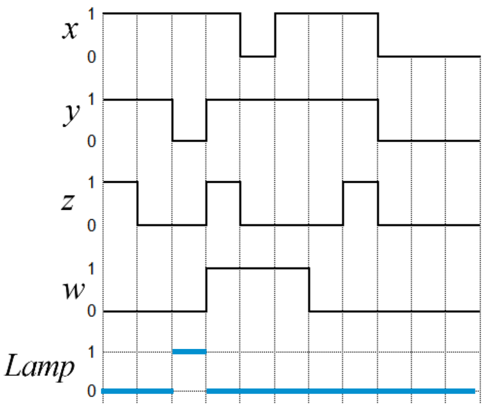
א. רשום ביטוי בוליאני המייצג את הרשת.

ב. פשט את הביטוי שקיבלת ככל האפשר.

ג. סרטט את הרשת, שהביטוי המפושט מייצג.

תשובות סופיות:

1) א. להלן איור:



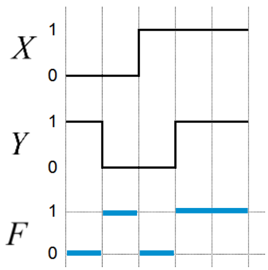
2) שאלת הוכחה.

3) א. $x+y$ ב. $\bar{x}+\bar{y}$ ג. b ד. $A\bar{C}+B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}+\bar{A}C$

ה. 1. ו. $a+b+c+d+\ldots$.

4) טענות נכונות: א', ב', ג' טענות שגויות: ד'.

5) א. $F=\left(\bar{X}+Y\right)\left(X+\bar{Y}\right)$ ב. להלן איור:



6) הוכחות.

7) יש להפוך את B למשלים.

8) א. $C\left(\bar{A}+\bar{B}\right)+\bar{B}\left(\bar{C}+AC+\bar{A}\bar{C}\right)$.

ב. $\bar{B}+\bar{A}C$.

ג. ראה סרטוט בפתרון הוידאו.

פונקציות בוליאניות:

סיכום כללי:

הגדרות:

- פונקציה בוליאנית היא ביטוי המכיל משתנים $f(x,y,z,...)$, שערים וסימני סוגריים. ערכי פונקציה בוליאנית יכולים להיות '0' או '1'.
- משתנה – אות שמופיעה בביטוי הבוליאני, כגון: $x,\ y,\ z$.
- ליטרל – עצם הקיום של איבר בפונקציה, גם אם יותר מפעם אחת.

משלים לפונקציה בוליאנית:

המשלים של פונקציה F הוא הפונקציה $\bar{F}$ המתקבלת על ידי החלפת 0 ב-1 וההיפך.

ניתן לקבל ביטוי אלגברי של הפונקציה המשלימה על ידי שימוש בהכללה של חוקי דה-מורגן או ע"י שימוש בעיקרון הדואליות והפיכת ערכי הליטרלים.

פונקציה דואלית:

פונקציה F_d המתקבלת ע"י הפיכת כל AND ל-OR (כל חיבור לכפל) ולהיפך, תיקרא הפונקציה הדואלית של F.

שאלות:

1) כתוב את טבלת האמת עבור הפונקציות הבאות:

א. $F = xyz$.

ב. $F = xy + \bar{x} + x\bar{y}$.

ג. $F = x(\bar{y} + y\bar{z}) + \bar{x}z$.

ד. $F = a + \bar{a}b + c(\bar{a} + \bar{b})$.

2) פשט את הפונקציות הבאות כך שמספר הליטרלים שיופיע בכל אחת מהן יהיה מינימלי:

א. $F=\bar{x}(x+y)+x$.

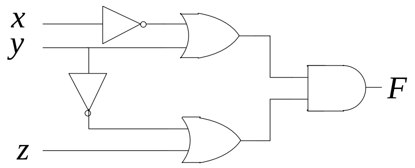
ב. $F=xy+wxy\bar{z}+\bar{x}y$.

ג. $F=xyzw+\bar{x}yzw+yz$.

ד. $F=x(\bar{y}z+\bar{z})+x\bar{y}+\bar{y}(\bar{x}+x\bar{z})$.

ה. $F=(x+y)\cdot(\bar{x}+z)\cdot(y+z)+x$.

3) נתונה הסכמה הלוגית הבאה:



א. כתוב את הפונקציה F בצורה מתמטית.

ב. רשום את טבלת האמת של הפונקציה.

4) בשאלה זו נעסוק בבדיקת זוגיות/ אי-זוגיות של סכום מספרים.
נתונה פונקציה המקבלת 2 קלטים באופן הבא:
x_1 מסמן את הזוגיות של המספר הראשון, 1 אם המספר זוגי ו-0 אם המספר אי-זוגי.
x_2 מסמן את הזוגיות של המספר השני, 1 אם המספר זוגי ו-0 אם המספר אי-זוגי.
המוצא של הפונקציה יהיה 0 אם הסכום של הקלטים x_1 ו-x_2 הוא אי-זוגי, ו-1 אם סכומם זוגי.

א. כתוב טבלת אמת עבור הפונקציה המתוארת.

ב. שרטט דיאגרמה לוגית בעזרת שערים לוגיים המממשת את הפונקציה הנ"ל.

5) לפניך טבלה עם הפונקציות f_1 ו-f_2:

a	b	c	f_1	f_2
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	0	1
1	1	1	1	0

א. כתוב את הביטוי הבוליאני המבטא את הפונקציות הנ"ל.
ב. שרטט דיאגרמה לוגית בעזרת שערים לוגיים המממשת את הפונקציות הנ"ל.

6) נתונה הפונקציה הבאה: $F_1 = \overline{x} \cdot \overline{z} + yz$:

א. מצא את המשלים לפונקציה $\overline{F_1}$.

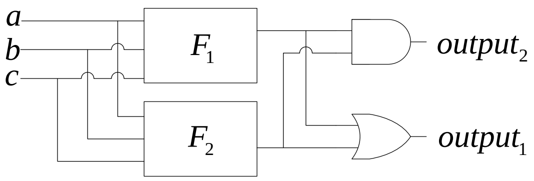
ב. הראה שמתקיים: $F_1\overline{F_1} = 0$.

ג. הראה שמתקיים: $F_1 + \overline{F_1} = 1$.

7) נתונה הפונקציה הבאה: $F_1 = ab\overline{c} + \overline{a}\overline{b} + c$.

א. ממש את הפונקציה באמצעות שערים לוגיים.

ב. מגדירים פונקציה נוספת, F_2 עבור אותם משתני כניסה.
בסכמה הבאה מתוארים שני חיבורים של הפונקציות F_1 ו-F_2.
ידוע כי המוצא $output_1$ שווה ל-1 לוגי עבור כל ערכי הכניסה.



i. כמה פונקציות אפשריות עבור F_2?

ii. מצא את F_2 עבורה $output_2 = 0$ לכל צירוף כניסה.

8) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, כתוב את הפונקציה הדואלית ואת הפונקציה המשלימה.

א. $f(x,y,z) = x\overline{y} + \overline{x}z$.

ב. $f(a,b,c,d) = ab\overline{c}(\overline{a}+d) + \overline{b}(a+c)(b+\overline{d})$.

תשובות סופיות:

1) להלן טבלאות אמת:

א.

$x\ y$	$F = xy + \bar{x}\cdot\bar{y}$
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

ב.

$x\ y\ z$	$F = xyz$
0 0 0	0
0 0 1	0
0 1 0	0
0 1 1	0
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

ג.

$x\ y\ z$	$F = x\left(\bar{y} + y\bar{z}\right) + \bar{x}z$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	0

ד.

$a\ b\ c$	$F = a + \bar{a}b + c\left(\bar{a} + \bar{b}\right)$
0 0 0	0
0 0 1	1
0 1 0	1
0 1 1	1
1 0 0	1
1 0 1	1
1 1 0	1
1 1 1	1

2) א. $F = x + y$ ב. $F = y$ ג. $F = yz$ ד. $F = x\bar{z} + \bar{y}$ ה. $F = x + y$.

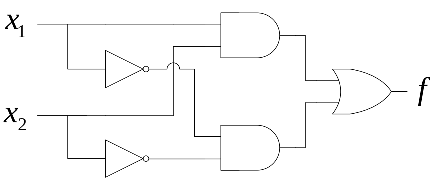
3) א. $F = \left(\bar{x} + y\right)\left(\bar{y} + z\right)$ ב. להלן טבלה:

$x\ y\ z$	$F = \left(\bar{x} + y\right)\left(\bar{y} + z\right)$
0 0 0	1
0 0 1	1
0 1 0	0
0 1 1	1
1 0 0	0
1 0 1	0
1 1 0	0
1 1 1	1

4) א. להלן טבלת האמת:

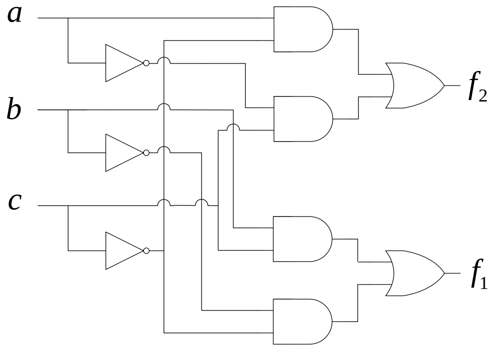
$x_1\ x_2$	f
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

ב. להלן דיאגרמה לוגית:



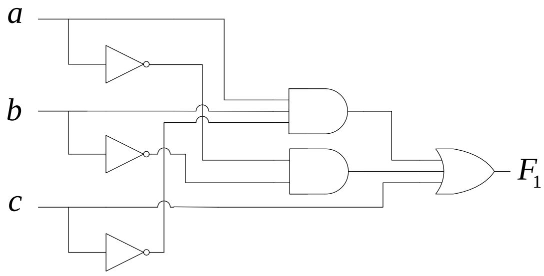
5) א. $f_2 = \bar{a}c + a\bar{c}$; $f_1 = bc + \bar{b}\bar{c}$.

ב. להלן דיאגרמה לוגית:



6) א. $\bar{F}_1 = x\bar{y} + z\bar{y} + x\bar{z}$.

7) א. להלן דיאגרמה לוגית:



ב. i. 64 פונקציות שונות.

ב. ii. $F_2 = \bar{a}b\bar{c} + a\bar{b}\bar{c}$.

8) א. $\bar{f} = \bar{x}\,\bar{z} + xy + y\bar{z}$; $f_d(x,y,z) = xz + \bar{x}\,\bar{y} + \bar{y}z$

ב. $\bar{f} = \bar{a}b + \overline{ac} + \bar{b}d + bc + ab\bar{d}$; $f_d(a,b,c,d) = a\bar{b} + ac + b\bar{d} + \bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}d$.

צורות קנוניות וסטנדרטיות של פונקציות:

סיכום כללי:

מינטרם (Minterm):

- מכפלה של n משתנים (בצורתם הרגילה או המשלימה).
- עבור n נקבל 2^n Minterms שונים אשר ימוספרו מ-0 ועד ל-2^n-1.
- סימון מינטרם: m_i : $0 \le i \le 2^n - 1$.

מקסטרם (Maxterm):

- סכום של n משתנים (בצורתם הרגילה או המשלימה).
- עבור n משתנים ישנם 2^n Maxterms שונים אשר ימוספרו מ-0 ועד ל-2^n-1.
- סימון מקסטרם: M_i : $0 \le i \le 2^n - 1$.

הצגת פונקציה בצורה סטנדרטית:

להלן טבלה עבור ערכי ה-Minterms ו-Maxterms של שלושה משתנים:

			מכפלות סטנדרטיות		סכומים סטנדרטיים	
x	y	z	Minterm	symbol	Maxterm	symbol
0	0	0	$\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}$	m_0	$x+y+z$	M_0
0	0	1	$\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z$	m_1	$x+y+\overline{z}$	M_1
0	1	0	$\overline{x}\cdot y\cdot\overline{z}$	m_2	$x+\overline{y}+z$	M_2
0	1	1	$\overline{x}\cdot y\cdot z$	m_3	$x+\overline{y}+\overline{z}$	M_3
1	0	0	$x\cdot\overline{y}\cdot\overline{z}$	m_4	$\overline{x}+y+z$	M_4
1	0	1	$x\cdot\overline{y}\cdot z$	m_5	$\overline{x}+y+\overline{z}$	M_5
1	1	0	$x\cdot y\cdot\overline{z}$	m_6	$\overline{x}+\overline{y}+z$	M_6
1	1	1	$x\cdot y\cdot z$	m_7	$\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}$	M_7

כללים והמרות בין צורות:

כל פונקציה ניתנת לכתיבה ע״י סכום (OR) כל ה- Minterms שבהם היא שווה ל-1.
צורה זו נקראת: SOP – Sum of Products.

כל פונקציה ניתנת לכתיבה ע״י מכפלת (AND) כל ה-Maxterms שבה היא שווה ל-׳0׳.
צורה זו נקראת: POS – Product of Sum.

שאלות:

1) המר כל אחת מהפונקציות הבאות לצורתה הקנונית השנייה:

א. $f(x,y,z)=\sum(2,4,6)$.

ב. $f(a,b,c)=\prod(0,2,3,5,6)$.

ג. $f(A,B,C,D)=\prod(0,2,3,9,10,12)$.

2) מצא את צורת POS ו SOP של הפונקציות הבאות,
כלומר, הצג אותן באמצעות $\prod$ ו- $\sum$:

א. פונקציות בשני משתנים:

x	y	f_1	f_2
0	0	1	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

ב. פונקציות בשלושה משתנים:

x	y	z	f_1	f_2
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	0

3) בטא את המשלים לפונקציות הבאות בצורה של SOP, כלומר בצורת $\sum$:

א. $f(x,y,z,w)=\sum(0,1,4,5,12,15)$.

ב. $f(x,y,z)=\prod(2,5,7)$.

4) מצא את צורת POS ו SOP של הפונקציות הבאות,
כלומר, הצג אותן באמצעות $\prod$ ו- $\sum$:

א. $f(x,y,z)=xy+\bar{x}\,\bar{y}+\bar{x}z$.

ב. $f(a,b,c)=(a+c)(a\bar{b}+\bar{a}c+\bar{b}c)$.

ג. $f(x,y,z,w)=\bar{y}w+xw+yw$.

ד. $f(a,b,c,d)=a\,\bar{b}\,\bar{d}+\bar{c}d+abd\bar{}+a\bar{b}d$.

ה. $f(a,b,c,d,e)=ab+c(d+e)$.

5) נתונה פונקציה בוליאנית $f(x_0,x_1,...,x_{n-1})$ בעלת n ערכי כניסה
כאשר x_0 הוא ה-MSB.

א. התייחס לפונקציה: $f(x_0,x_1,...,x_{n-1})=x_0$ וענה על השאלות הבאות:

i. כמה איברי minterms יש לפונקציה? כתוב אותם.

ii. עבור כמה ערכים הפונקציה תקבל ערך של '0'?

ב. התייחס לפונקציה: $f(x_0,x_1,...,x_{n-1})=x_0x_1$ וענה על השאלות הבאות:

i. כמה איברי minterms יש לפונקציה? כתוב אותם.

ii. עבור כמה ערכים הפונקציה תקבל ערך של '1'?

ג. כתוב ביטוי לפונקציה $f(x_0,x_1,...,x_{n-1})$ שיקבל '1' רק עבור שני ערכים.
כמה אפשרויות כאלו ישנן?

ד. כתוב ביטוי לפונקציה $f(x_0,x_1,...,x_{n-1})$ שיקבל '1' רק עבור ערך אחד
בלבד. כמה אפשרויות כאלה ישנן?

6) סרטט דיאגרמות לוגיות של הפונקציות הבאות הנתונות בצורות SOP ו-POS :

א. $f(x,y,z)=\sum(1,2,4,7)$.

ב. $f(a,b,c,d)=\sum(0,3,12,14)$.

ג. $f(x_0,x_1,x_2)=\prod(1,4,5)$.

ד. $f(x,y,z,w)=\prod(3,9,10,13)$.

תשובות סופיות:

1) א. $f(x,y,z)=\prod(0,1,3,5,7)$ ב. $f(a,b,c)=\sum(1,4,7)$

ג. $f(A,B,C,D)=\sum(1,4,5,6,7,8,11,13,14,15)$.

2) א. $f_1(x,y)=\sum(0,3)=\prod(1,2)$, $f_2(x,y)=\sum(1,2)=\prod(0,3)$.

ב. $f_1(x,y,z)=\sum(0,3,4,7)=\prod(1,2,5,6)$, $f_2(x,y,z)=\sum(1,2,5)=\prod(0,3,4,6,7)$.

3) א. $f(x,y,z,w)=\sum(2,3,6,7,8,9,10,11,13,14)$ ב. $f(x,y,z)=\sum(2,5,7)$.

4) א. $f(x,y,z)=\sum(0,1,3,6,7)=\prod(2,4,5)$ ב. $f(a,b,c)=\sum(1,3,4,5)=\prod(0,2,6,7)$

ג. $f(x,y,z,w)=\sum(1,3,5,7,9,11,13,15)=\prod(0,2,4,6,8,10,12,14)$

ד. $f(a,b,c,d)=\sum(1,5,8,9,10,11,12,13,14)=\prod(0,2,3,4,6,7,15)$

ה. $$f(a,b,c,d,e)=\sum(5,6,7,13,14,15,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31)$$
$$=\prod(0,1,2,3,4,8,9,10,11,12,16,17,18,19,20)$$

5) א. i. 2^{n-1} איברים והם: $f(x_0,..,x_{n-1})=m_{2^{n-1}}+m_{2^{n-1}+1}+...+m_{2^n-1}$.

א. ii. הפונקציה תקבל ערך '0' עבור 2^{n-1} האיברים הראשונים.

ב. i. 2^{n-2} איברים והם: $f(x_0,..,x_{n-1})=m_{3\cdot2^{n-2}}+m_{3\cdot2^{n-2}+1}+...+m_{2^n-1}$.

ב. ii. הפונקציה תקבל ערך '1' עבור 2^{n-2} האיברים האחרונים.

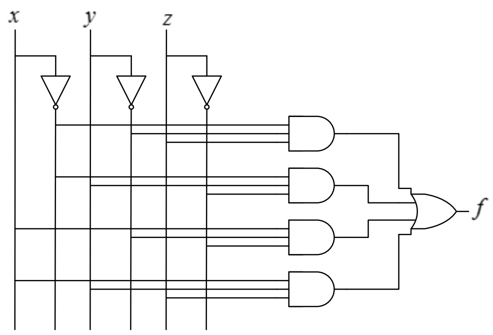
ג. כל פונקציה מהצורה: $f(x_0,..,x_{n-1})=\prod_{\substack{k=0\\k\neq t}}^{n-1}x_k$ כאשר $0\le t\le n-1$.

יש בסה"כ $n\cdot2^{n-1}$ צירופים אפשריים.

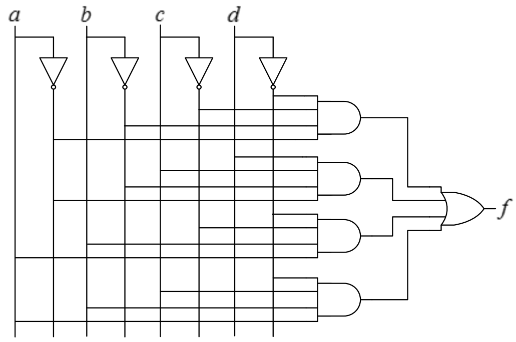
ד. רק פונקציה מהצורה: $f(x_0,..,x_{n-1})=\prod_{k=0}^{n-1}x_k$ כאשר קיימות 2^n אפשרויות כאלו.

6) להלן הדיאגרמות:

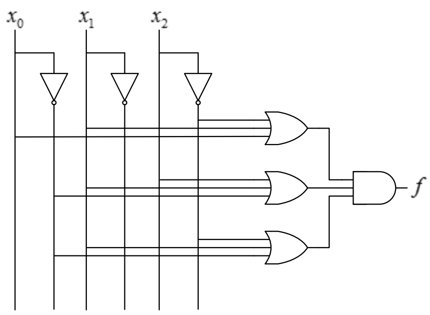
א.



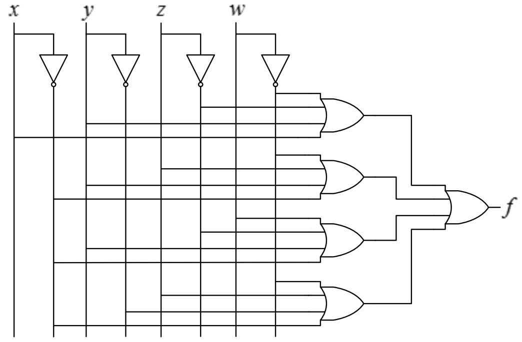
ב.



ג.



ד.



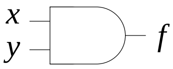
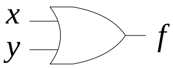
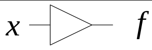
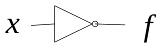
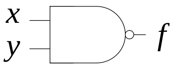
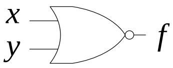
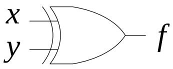
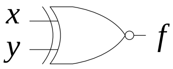
פונקציות בוליאניות נוספות:

סיכום כללי:

פונקציות נפוצות בשני משתנים:

פונקציה	סמל	שם	הערה
$f_0 = 0$		Null	קבוע 0
$f_1 = xy$	$x \cdot y$	AND	x וגם y
$f_2 = x\overline{y}$	x / y	Inhibition	x אך לא y
$f_3 = x$		Transfer	x
$f_4 = \overline{x}y$	y / x	Inhibition	y אך לא x
$f_5 = y$		Transfer	y
$f_6 = x\overline{y} + \overline{x}y$	$x \oplus y$	Exclusive-OR = XOR	x או y אך לא שניהם
$f_7 = x + y$	$x + y$	OR	x או y
$f_8 = \overline{x + y}$	$x \downarrow y$	NOR	לא OR
$f_9 = xy + \overline{x}\,\overline{y}$	$x \odot y$	Equivalence = XNOR	x שווה ל- y
$f_{10} = \overline{y}$		Complement	לא y
$f_{11} = x + \overline{y}$	$x \subset y$	Implication	אם y אז x
$f_{12} = \overline{x}$		Complement	לא x
$f_{13} = \overline{x} + y$	$x \supset y$	Implication	אם x אז y
$f_{14} = \overline{xy}$	$x \uparrow y$	NAND	לא AND
$f_{15} = 1$		Identity	קבוע 1

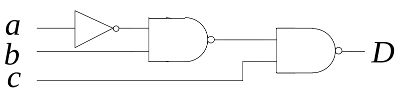
סמלים לוגים של פונקציות נפוצות:

פונקציה	שם	שער לוגי
$f = xy$	AND	
$f = x + y$	OR	
$f = x$	Buffer	
$f = \overline{x}$	Inverter	
$f = \overline{xy}$	NAND	
$f = \overline{x + y}$	NOR	
$f = x\overline{y} + \overline{x}y = x \oplus y$	XOR	
$f = xy + \overline{x}\,\overline{y} = x \odot y$	XNOR	

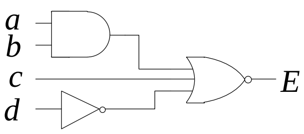
שאלות:

1) עבור הדיאגרמות הלוגיות הבאות רשום את הביטוי הבוליאני המתמטי המבטא את פעולת המעגל לכל אחת מפונקציות המוצא:

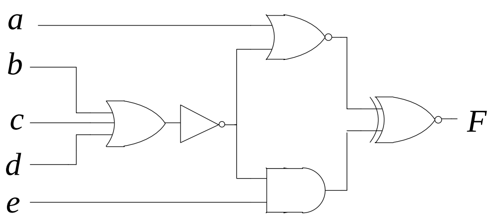
א.



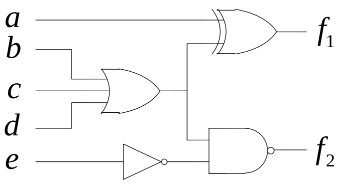
ב.



ג.



ד.



2) ממש את הפונקציה הבאה: $F = xy + \bar{x} \cdot \bar{y} + y\bar{z}$:

א. בעזרת שערי AND,OR ו- NOT בלבד.
ב. בעזרת שערי AND ו-NOT בלבד.
ג. בעזרת שערי NAND ו-NOT בלבד.
ד. בעזרת שערי OR ו-NOT בלבד.
ה. בעזרת שערי NOR ו-NOT בלבד.

3) ממש את הפונקציה הבאה: $F = x + y + \bar{x}z + y\bar{z}$:

א. בעזרת שערי OR, AND ו-NOT בלבד.
ב. בעזרת שערי AND ו-NOT בלבד.
ג. בעזרת שערי NAND ו-NOT בלבד.
ד. בעזרת שערי OR ו-NOT בלבד.
ה. בעזרת שערי NOR ו-NOT בלבד.

4) בדוק אסוציאטיביות (קיבוציות) וקומוטטיביות (חילופיות) לכל אחד מהאופרטורים הבאים:

א. אופרטור XOR.
ב. אופרטור NOR.
ג. אופרטור NAND.
ד. אופרטור equivalence.

5) הוכח כי האופרטורים NOR ו-NAND אינם פילוגים זה ביחס לזה.

תשובות סופיות:

1) א. $D=\overline{\overline{\bar{a}\cdot b}\cdot c}=\bar{a}b+\bar{c}$

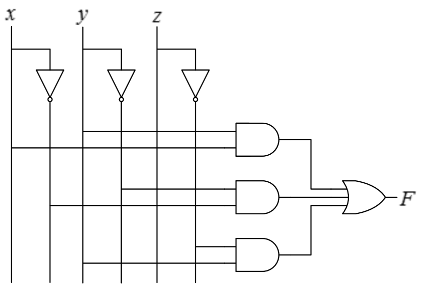
ב. $E=\overline{ab+c+\bar{d}}=\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot d+\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot d$

ג. $F=a\bar{e}+ab+ac+ad+\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}$

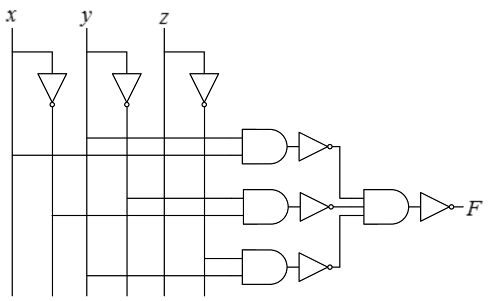
ד. $f_2=e+\bar{b}\bar{c}\bar{d}$, $f_1=a\bar{b}\bar{c}\bar{d}+\bar{a}b+\bar{a}c+\bar{a}d$.

2) להלן הדיאגרמות:

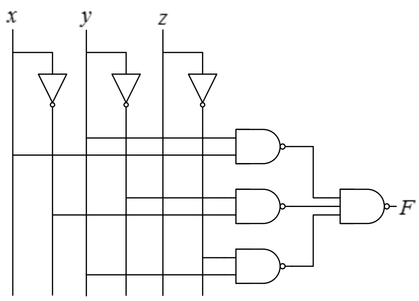
א.



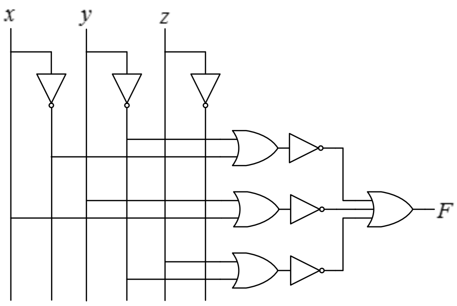
ב.



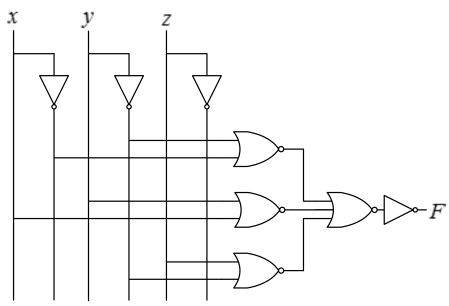
ג.



ד.

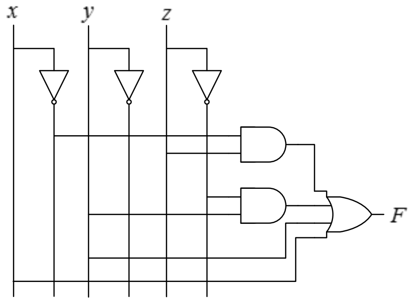


ה.

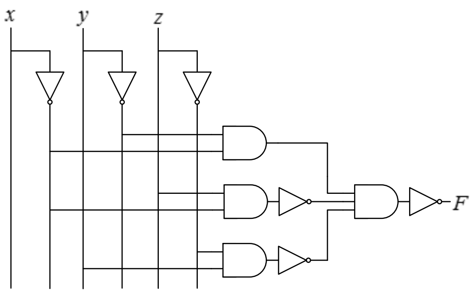


3) להלן הדיאגרמות:

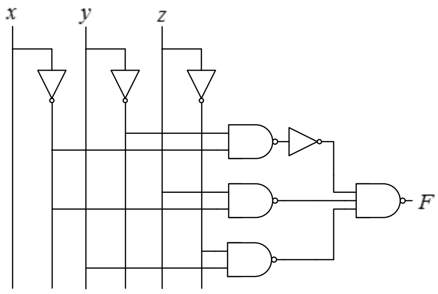
א.



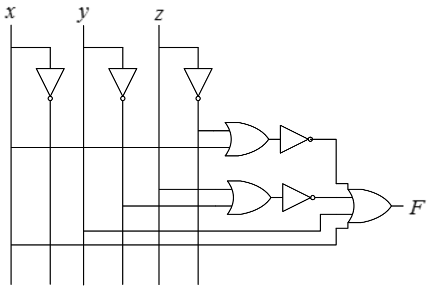
ב.



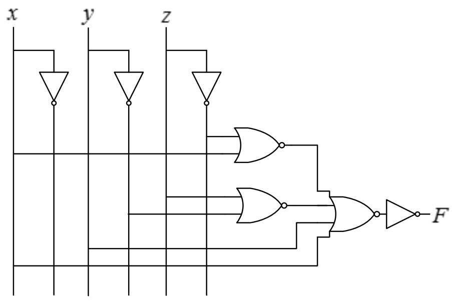
ג.



ד.



ה.



פונקציות טבעיות ופונקציות דואליות עצמיות:

סיכום כללי:

פונקציה טבעית:

פונקציה F בעלת n משתנים נקראת טבעית אם כמות ה-Minterms שלה שווה לכמות ה-Maxterms שלה, כלומר: $2^{n-1}=\frac{2^n}{2}=\sum(\prod(\ ))=\sum(\sum(\ ))$.

קיימות $\frac{2^n!}{2\left(2^{n-1}\right)!}=\binom{2^n}{2^{n-1}}$ פונקציות טבעיות.

פונקציות דואליות עצמיות (Self Dual Functions):

פונקציה בוליאנית F תיקרא דואלית-עצמית אם היא שווה לדואלית שלה: $F=F_d$.

תנאים לקיום פונקציה דואלית עצמית:

כדי שפונקציה F תהיה דואלית עצמית עליה לקיים:

- F חייבת להיות פונקציה טבעית.
- אסור ל- F להכיל מכפלות הדדיות אקסקלוסיביות (Mutually Exclusive Terms).

מכפלות הדדיות אקסקלוסיביות:

עבור פונקציה F בעלת n משתנים קיימים 2^n מינטרמים.
ניתן לקבץ את המינטרמים בזוגות, כך שכל Minterm יכיל את הליטרלים המשלימים של חברו.
לזוגות האלה קוראים בשם מכפלות הדדיות אקסקלוסיביות.

שאלות:

1) קבע אלו מהפונקציות הבאות הן דואליות עצמיות:

א. $f\left(a,b,c\right)=\sum\left(3,4,7\right)$.

ב. $f\left(A,B,C\right)=\sum\left(1,2,5,7\right)$.

ג. $f\left(x,y,z\right)=\prod\left(1,3,5,7\right)$.

ד. $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=\prod\left(2,3,4,7\right)$.

2) הוכח כי עבור פונקציה f בעלת n משתנים, זוגות המינטרמים שהם הדדים אקסקלוסיביים תמיד כוללים מינמטרים שהפרש ערכם הוא מספר אי-זוגי.

3) הוכח או הפרך את הטענות הבאות:

א. אם פונקציה f היא דואלית עצמית אז גם $\bar{f}$ היא דואלית עצמית.

ב. כל פונקציה טבעית היא דואלית עצמית.

ג. אם פונקציה $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ היא דואלית עצמית ופונקציה $g\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ היא גם דואלית עצמית אז בהכרח שהפונקציה $f+g$ תהיה דואלית עצמית.

4) ענה על הסעיפים הבאים:

א. האם פונקציה f הכוללת צירופים אדישים יכולה להיות:

i. טבעית.

ii. דואלית-עצמית.

ב. נתונה הפונקציה: $f\left(a,b,c,d\right)=\sum\left(0,3,4,9,14\right)+\Phi\left(1,2,5,7,8,10\right)$.

האם ניתן להשתמש בצירופים האדישים על מנת לכתוב פונקציה $\tilde{f}$ שתתאים ל- f ותהיה דואלית עצמית? אם כן - כמה פונקציות כאלה קיימות? אם לא - נמק מדוע.

תשובות סופיות:

1) רק פונקציה ג'.

2) ראה הוכחה בסרטון הוידאו.

3) א. נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.
(ראה הוכחות והפרכות בסרטון הוידאו).

4) א. לא כאשר היא כוללת צירופים אדישים. ראה הסבר בסרטון הוידאו.
ב. כן, קיימות 4 פונקציות אפשריות.

מערכת פעולות שלמה:

סיכום כללי:

שלמות פונקציונאלית:

סט פעולות מסוים מהווה מערכת פעולות שלמה (נקרא גם סט אוניברסלי) אם ניתן לממש באמצעותו כל פונקציה בוליאנית אפשרית.
הפעולות AND, OR ו-NOT מגדירות את הסט $\{AND\ ,\ OR\ ,\ NOT\}$ האוניברסלי.

מכללי דה-מורגן נקבל:

- הסט $\{AND\ ,\ NOT\}$ מאפשר לממש את פעולת OR ולכן גם הוא אוניברסלי.
- הסט $\{OR\ ,\ NOT\}$ מאפשר לממש את פעולת AND ולכן גם הוא אוניברסלי.

אופרטורים אונרים שמהווים מערכת פעולות שלמה:

- האופרטור NOR הינו מערכת פעולות שלמה.
- האופרטור NAND הינו מערכת פעולות שלמה.

פונקציה כמערכת פעולות שלמה:

בהינתן אופרטור/פונקציה f כלשהי אשר מגדירים סט פעולות $\{f\}$:

- אם ניתן לממש באמצעות $\{f\}$ את אחד מהבאים אז $\{f\}$ היא מערכת פעולות שלמה :
  - $\{AND\ ,\ NOT\}$.
  - $\{OR\ ,\ NOT\}$.
  - NOR או NAND.
- אם לא ניתן לממש את הנ"ל אז $\{f\}$ אינה אוניברסלית.
במקרה זה יש לבדוק האם הסט שמכיל את האופרטור f והקבועים 1 ו/או 0 יכול לממש את אחד מהנ"ל. אם כן אז הסט $\{f\ ,\ 1\}$ או $\{f\ ,\ 1\ ,\ 0\}$ יהיו אוניברסליים.

שאלות:

1) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\bar{x}yz+\bar{y}\,\bar{z}+x\bar{y}$.
הראה כי הסט $\{f\}$ מהווה מערכת פעולות שלמה.

2) נתונה הפונקציה: $f(x,y)=\bar{x}y$.
א. האם הסט $\{f\}$ מהווה מערכת פעולות שלמה?
ב. האם הסט $\{f,1\}$ מהווה מערכת פעולות שלמה?

3) קבע האם הפונקציה: $f(a,b,c,d)=ab(c+d)$ הוא אוניברסלי (כלומר סט הפונקציות $\{f\}$ מהווה מערכת פעולות שלמה).

4) מגדירים את האופרטור הבא: $\Gamma(a,b,c,d)=(\bar{a}+\bar{b}+\bar{c})\oplus bcd$.
האם הסט $\{\Gamma\ ,0\}$ הוא אוניברסלי? נמק.

תשובות סופיות:

1) שאלת הוכחה.
2) א. לא. ב. כן.
3) לא. לעומת זאת, הסט $\{f\ ,\mathrm{NOT}\}$ מהווה מערכת פעולות שלמה.
4) כן, ניתן לממש NOT ו-OR.

סיווג פונקציות ותכונות של פונקציות מיוחדות:

הערה:

נושא זה הינו בגדר נושא רשות.

סיכום כללי:

עבור n משתני כניסה ישנן 2^{2^n} פונקציות בוליאניות אפשריות.

במשפטים וההגדרות הבאות נתייחס לפונקציה בוליאנית בעלת n משתנים: $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

לצורך הנוחיות, נסמן אותה בפשטות ב- f ללא ציון המשתנים שלה.

הגדרה – שקילות פונקציות:

שתי פונקציות בוליאניות f ו- g נקראות שקולות אם ורק אם הן קובעות טבלת אמת יחידה. במקרה זה נסמן: $f = g$.

הגדרה – רמיזת פונקציות:

פונקציה בוליאנית f רומזת לפונקציה בוליאנית אחרת, g אם $g = 1$ לפחות בכל צירוף כניסה עבורו $f = 1$. במקרה זה נסמן: $f \Rightarrow g$.

משפט:

שתי פונקציות בוליאניות f ו- g נקראות שקולות אם ורק אם $f \Rightarrow g$ וגם $g \Rightarrow f$.

משפט:

בהינתן שתי פונקציות בוליאניות f ו- g, אז $f \Rightarrow g$ אם ורק אם $f + g = g$ ו- $fg = f$.

משפט:

שתי פונקציות בוליאניות נחשבות לשקולות אם ורק אם ניתן להעביר אחת באמצעות כללי האלגברה הבוליאניות בלבד לצורתה של הפונקציה השנייה.

הגדרה:

בהינתן פונקציה בוליאנית f נסמן מכפלה p של ליטרלים מתוך f.
אם $f \Rightarrow p$ אז נאמר כי p הוא גורם/גורר של f (נקרא: Implicant).
באותו האופן אם p הוא סכום של ליטרלים מתוך f המקיים $f \Rightarrow p$ אז נאמר כי p הוא גורם/גורר של f (נקרא: Implicate).

הגדרה:

סכום או מכפלה p יקראו גוררים ראשוניים של פונקציה f אם מתקיים $f \Rightarrow p$ ומחיקת כל אחד מהליטרלים של p יגרור $f \not\Rightarrow p$.

הגדרה:

פונקציה בוליאנית f תיקרא חיובית עבור ליטרל x_k אם ורק אם ניתן לבטא אותה בצורת SOP או POS ללא $\overline{x}_k$. באופן אנלוגי, f תיקרא שלילית עבור ליטרל x_k אם ורק אם ניתן לבטא אותה בצורת SOP או POS ללא x_k.

הגדרה:

פונקציה בוליאנית f תיקרא מאוחדת (unate) עבור ליטרל x_k אם היא חיובית או שלילית עבורו.

הגדרה:

פונקציה בוליאנית f נקראת אינה תלויה בליטרל x_k (Independent) אם הוא אינו מופיע כלל (בצורתו הרגילה והמשלימה) בצורת SOP או POS שלה. במקרה זה נאמר כי הליטרל x_k הוא מיותר (Redundant) וכי הפונקציה היא חיובית ושלילית בליטרל זה.

הגדרה:

פונקציה בוליאנית f תיקרא מונוטונית לא-יורדת (Monotonic nondecreasing) אם ורק אם היא חיובית בכל הליטרלים שלה.

באופן דומה היא תיקרא מונוטונית לא-עולה (Monotonic nonincreasing) אם ורק אם היא שלילית בכל הליטרלים שלה.

הגדרה - פונקציות מאוחדות:

פונקציה בוליאנית f תיקרא מאוחדת (Unate) אם ורק אם היא מאוחדת בכל הליטרלים שלה.

הגדרה – פונקציה סימטרית לחלוטין:

פונקציה בוליאנית f תיקרא סימטרית לחלוטין (Totally Symmetric) אם ורק אם ערכיה לא ישתנו תחת כל פרמוטציה של משתני הכניסה.

הגדרה – פונקציה סימטרית חלקית:

פונקציה בוליאנית f תיקרא סימטרית חלקית (Partially Symmetric) אם ורק אם קיים לפחות תת-סט אחד המכיל שני ליטרלים או יותר עבורם f היא סימטרית לחלוטין.

הגדרה – סימטריות משולבת:

פונקציה בוליאנית f תיקרא סימטרית משולבת (Mixed Symmetric) אם ורק אם קיים היא אינה סימטרית לחלוטין אבל ניתן להפוך אותה לסימטרית ע"י לקיחת המשלים של חלק מהליטרלים שלה.

הגדרה:

נתון סט של n משתנים $\mathrm{A}=\{x_1,x_2\ ,\ \ldots\ ,x_n\}$. נניח: $\mathrm{B}=\{y_1,y_2,\ldots,y_s\}$ כאשר $1\le s\le n-1$ ו- $\mathrm{C}=\{z_1,z_2,\ldots,z_r\}$ שני תתי-סטים של A המקיימים: $\mathrm{B}\cup\mathrm{C}=\mathrm{A}$.

הפונקציה: $f(\mathrm{A})$ תיקרא פריקה (Simple Decomposable Function) אם ורק אם קיימות שתי פונקציות G ו- H המקיימות: $f(\mathrm{A})=G(H(\mathrm{B}),\mathrm{C})$.

הגדרה:

אם מתקיים: $r=n-s$ אז הפונקציות G ו- H מייצגות הפרדה פשוטה (Simple Disjunctive Decomposition) של f.

משפט שאנון (Shannon):

פונקציה בוליאנית f בעלת n משתנים היא סימטרית לחלוטין אם ורק אם ניתן לייצג אותה ע"י קבוצה $\mathrm{A}=\{a_0,a_1,\dots,a_k\}$ (הנקראים מספרי שאנון) כאשר: $0\le a_j\le n$ ו- $j=0,1,\dots,k$, $k=0,1,\dots,n$, כך ש- $f=1$ רק כאשר a_j של המשתנים שווה ל-1.

הערה:

היות ויש $n+1$ ערכים עבור מספרי שאנון, $0,1,\dots,n$, קיימות: $\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}=2^{n+1}$ פונקציות סימטריות לחלוטין. באופן זהה, ניתן להוכיח כי ישנן $2^{(j+1)\cdot 2^{n-j}}$ פונקציות סימטריות חלקיות בעלות n משתנים.

הגדרה:

נסמן פונקציה סימטרית לחלוטין באופן הבא: S_{A}^{n} כאשר A מגדיר את סט מספרי שאנון ו- n מגדיר את מספר המשתנים של הפונקציות. למשל, הפונקציה $f(x,y,z)=xyz$ תסומן: S_1^3.

תכונות:

בהינתן S_{A}^{n} ו- S_{B}^{n} נקבל כי גם: $S_{\mathrm{C}}^{n}=S_{\mathrm{A}}^{n}+S_{\mathrm{B}}^{n}$ וגם: $S_{\mathrm{D}}^{n}=S_{\mathrm{A}}^{n}\cdot S_{\mathrm{B}}^{n}$ הן פונקציות סימטריות. הסטים C ו- D מקיימים: $\mathrm{C}=\mathrm{A}\bigcup\mathrm{B}$, $\mathrm{D}=\mathrm{A}\bigcap\mathrm{B}$.

באופן דומה המשלים של פונקציה סימטרית הוא גם סימטרי: $\overline{S_{\mathrm{A}}^{n}}=S_{\mathrm{I-A}}^{n}$ כאשר $\mathrm{I}=\{0,1,\dots,n\}$.
למשל, מעצם הידיעה כי $S_{1,3}^{4}$ הן סימטריות הרי שגם הפונקציות $S_{0,2,4}^{4}$ הן סימטריות.

משפט:

פונקציה בוליאנית $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ היא סימטרית לחלוטין אם ורק אם:

$$f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)=f(x_2,\dots,x_{n-1},x_1,x_n).$$

$$f(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_n)=f(x_1,x_2,\dots,x_{n-2},x_n,x_{n-1}).$$

זיהוי סימטריות באמצעות טבלת אמת:

כדי לוודא כי פונקציה היא סימטרית מתוך טבלת אמת, נבדוק כי היא שווה ל-1 לוגי עבור כל צירוף כניסה שמכיל מספר זהה של 1-ים. מספר ה-1-ים מהווה את מספר שאנון של הפונקציה.

הגדרה – פונקצית סף:

פונקצית סף (Threshold Function) בעלת n משתנים מוגדרת באופן הבא:

$$f\left(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n\right)=1 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} w_k x_k \ge T$$

$$f\left(x_1,x_2,\ldots\ldots,x_n\right)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} w_k x_k < T$$

המשקלים והסף $\{w_1,w_2,\ldots,w_n;T\}$ יכולים לקבל כל ערך ממשי כלשהו.

תכונות של פונקציות סף:

1) תהא פונקציה בוליאנית $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ אשר ממומשת ע״י פונקצית סף אחת עם וקטור $\{w_1,w_2,\ldots,w_n;T\}$. אם אחת הכניסות, x_k, תתהפך לערכה המשלים, ניתן יהיה לממש את הפונקציה החדשה ע״י פונקצית סף עם וקטור $\{w_1,w_2,\ldots,-w_k,\ldots,w_n;T-w_k\}$.

2) תהא פונקציה בוליאנית $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ אשר ממומשת ע״י פונקצית סף אחת עם וקטור $\{w_1,w_2,\ldots,w_n;T\}$. ניתן להפוך את הכניסות כרצוננו כדי לקבל פונקצית סף שבה כל המשקלים חיוביים או שליליים.

3) כל פונקציה הניתנת למימוש ע״י פונקצית סף היא בהכרח מאוחדת.

4) תהא פונקציה בוליאנית $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ אשר ממומשת ע״י פונקצית סף אחת עם וקטור $\{w_1,w_2,\ldots,w_n;T\}$. הפונקציה המשלימה $\bar{f}\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ גם היא ניתנת למימוש ע״י פונקצית סף: $\{-w_1,-w_2,\ldots,-w_n;-T\}$.

שאלות:

1) לפניך פונקציות שונות, קבע בכל מקרה האם הפונקציה היא:
מונוטונית לא יורדת, מונוטונית לא עולה, מאוחדת.

א. $f(x,y,z,w)=(x+\overline{y})(z+\overline{w})$.

ב. $f(x,y,z,w)=\overline{\overline{x}+y+\overline{z}}$.

ג. $f(x,y,z,w)=\overline{x+y}+\overline{zw}\cdot\overline{y}$.

2) ענה על השאלות הבאות:

א. כמה פונקציות מאוחדות בעלות 4 משתנים הכוללות את m_0 ישנן?

ב. כמה פונקציות מאוחדות בעלות 4 משתנים ישנן?

ג. כמה פונקציות מאוחדות בעלות n משתנים ישנן?

3) ענה על השאלות הבאות:

א. כמה פונקציות בעלות n משתנים אשר מאוחדות רק
עבור $n-1$ משתנים ישנן?

ב. כמה פונקציות בעלות n משתנים אשר מאוחדות רק
עבור k $(1\le k\le n)$ משתנים ישנן?

4) כתוב את הפונקציות הבאות כפונקציות סימטריות לחלוטין:

א. $f=\overline{x}_1\cdot S_{0,1,4}(x_2,x_3,x_4,x_5)+x_1\cdot S_{0,3,4}(x_2,x_3,x_4,x_5)$.

ב. $f=\overline{x}_1\cdot S_{0,1,4}(x_2,x_3,x_4,x_5)+x_1\cdot S_{0,3,4}(\overline{x}_2,\overline{x}_3,\overline{x}_4,\overline{x}_5)$.

5) קבע אלו מהפונקציות הבאות ניתנות למימוש באמצעות פונקצית סף.
מצא את וקטור המשקלים והסף במקרים המתאימים.

א. $f_1(a,b,c)=\sum(1,2,3,7)$.

ב. $f_2(a,b,c)=\sum(0,3,5,6)$.

6) מצא את הפונקציה $f(x,y,z,r)$ אשר ממומשת ע"י פונקצית הסף
הבאה: $(-1,2,-3,2;1)$.

תשובות סופיות:

1) א. חיובית עבור x , z ; שלילית עבור w , y . מאוחדת.
ב. חיובית עבור z , y , w ; שלילית עבור w , x . אינה תלויה ב- w .
אינה מונוטונית כללית ומאוחדת רק עבור z , y , x .
ג. שלילית בכל המשתנים. מונוטונית לא עולה. מאוחדת.

2) א. פונקציה אחת: $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4=m_0$.
ב. 16 פונקציות שונות: $f\left(x_1,x_2,x_3,x_4\right)=m_k$, $0\le k\le 15$.
ג. 2^n פונקציות שונות: $f\left(x_1,...,x_n\right)=m_k$, $0\le k\le 2^n-1$.

3) א. $n2^{n-1}$ ב. $\binom{n}{k}2^k$.

4) א. $S^5_{\{0,1,4,5\}}\left(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\right)$ ב. $S^4_{\{0,1,4\}}\left(x_2,x_3,x_4,x_5\right)$.

5) א. למשל: $\left\{-\frac{1}{2},1,1;1\right\}$ ב. לא ניתן לממש באמצעות פונקציית סף.

6) $f\left(x,y,z,r\right)=\sum\left(1,4,5,7,9,12,13\right)$.