תוכן העניינים:

שימו לב!

החוברת מחולקת לנושאים כפי שמוצגים באתר GOOL.
כל נושא פותח בסיכום תיאורטי קצר הכולל בנקודות את התכנים הנלמדים בהרחבה <u>בסרטוני התיאוריה</u> שבאתר GOOL. לאחר מכן ישנו מגוון תרגילים ברמה עולה בכל אחד מהנושאים – כולם נפתרים באריכות ובפירוט <u>בסרטוני השאלות</u> שבאתר.

תורת המעגלים החשמליים

פונקציות הלם מדרגה ומערכות LTI

אותות:

סיכום כללי:

מהו אות?

גודל בעל ערך פיזיקלי כלשהו המשתנה בזמן, במרחב או בשניהם.

(בהמשך הסיכום ראה פירוט של סוגי האותות הנפוצים).

פונקצית הדלתא של דיראק:

פונקצית הדלתא מוגדרת להיות: $\delta(x)=\lim\limits_{m\to\infty} f(x,m)$.

כאשר:

- פונקצית התפלגות, כלומר $f(x)\geq 0$ לכל x, וגם $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.
- הפונקציה דועכת לאפס ב- $\pm\infty$ חזק יותר מ- $\frac{1}{x}$, כלומר: $xf(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0$
- הפונקציה ממורכזת סביב ציר y במובן הבא: $\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx=\int\limits_{0}^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}$

תכונות:

1) לכל $x\neq 0$ מתקיים: $\delta(x)=0$.
2) עבור: $x=0$ נקבל: $\delta(x)\to\infty$.
3) כל הפונקציה מרוכזת סביב האפס. כלומר לכל $x>0$ נקבל:

$\int\limits_{-\infty}^{-x} f(x')dx'=0$; $\int\limits_{x}^{\infty} f(x')dx'=0$ וכן: $\int\limits_{-x}^{x} f(x')dx'=1$.

פונקצית מדרגה:

נסמן: $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx$ ונקבל לפי ההגדרה: $u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 1/2 & t=0\\ 0 & t<0\end{cases}$.

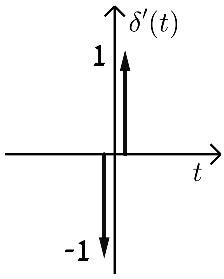
פונקצית רמפה: (העשרה)

נסמן: $r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(x)dx$ ונקבל לפי ההגדרה: $r(t)=tu(t)=\begin{cases}t & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$.

סיכום הקשר שבין פונקצית הדלתא, פונקצית המדרגה ופונקצית הרמפה:

מההגדרות: $r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(x)dx$, $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx$ נובע כי: $\delta(t)=\frac{du(t)}{dt}=\frac{d^2r(t)}{dt^2}$.

הנגזרת של פונקציית:

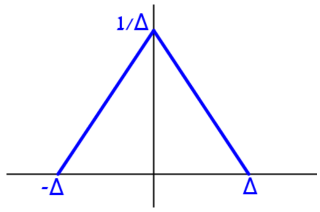
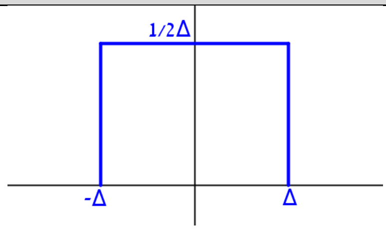


נסמן: $\delta'(t)$ וצורתה היא:

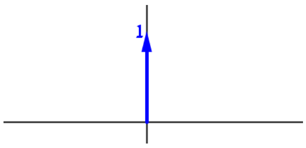
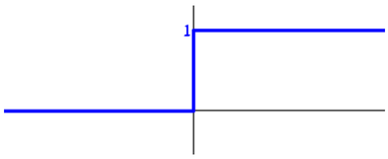
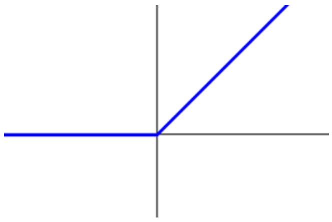
בפרט: $f(t)\delta'(t)=-f'(0)$.

הכללה: $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta^{(n)}(t)dt=(-1)^n f^{(n)}(0)$.

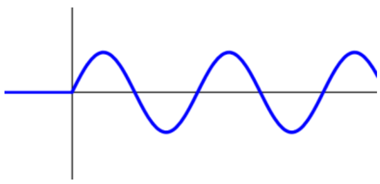
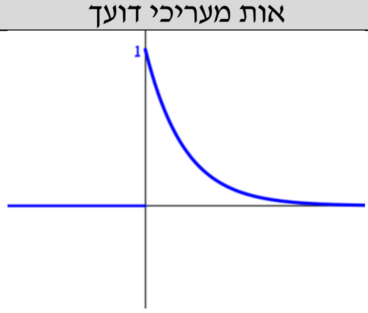
אותות כלליים:

פולס משולש	פולס ריבועי
	
$f(t)=\begin{cases} \frac{1}{\Delta^2}t+\frac{1}{\Delta} & -\Delta\le t\le 0 \\ -\frac{1}{\Delta^2}t+\frac{1}{\Delta} & 0\le t\le \Delta \\ 0 & else \end{cases}$	$f(t)=\begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & -\Delta\le t\le \Delta \\ 0 & else \end{cases}$

אותות מוכללים:

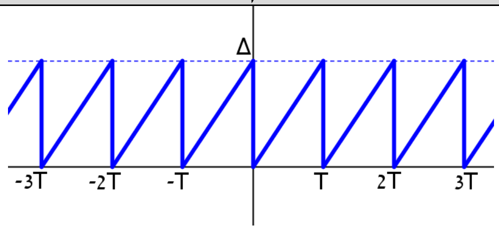
אות דלתא	אות מדרגה	אות רמפה
		
$\delta(t)=\begin{cases} \infty & t=0 \\ 0 & t\neq 0 \end{cases}$ $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta(t)\,dt=1$	$u(t)=\begin{cases} 1 & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$	$r(t)=\begin{cases} t & t\ge 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$

אותות טבעיים:

אות סינוס	אות מעריכי דועך
	
$f(t)=\sin(\omega t)u(t)$	$f(t)=e^{-\alpha t}u(t)$

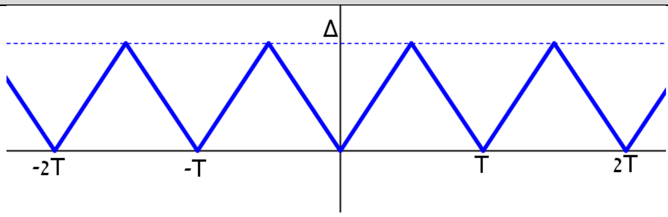
אותות מחזוריים:

אות שן מסור



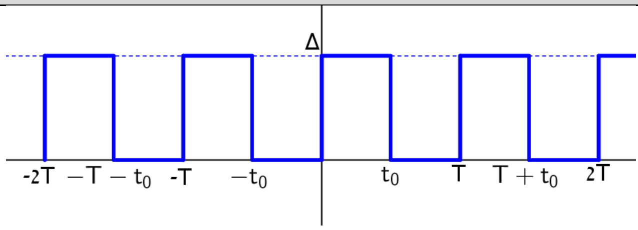
$$f(t)=\frac{\Delta}{T}t \quad kT \le t<(k+1)T \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

אות משולש מחזורי



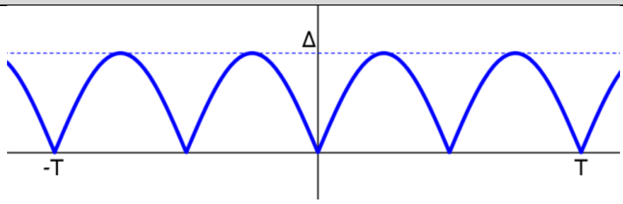
$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2\Delta}{T}t & kT\le t<(k+1/2)T \\ \dfrac{\Delta}{T}-\dfrac{2\Delta}{T}t & (k+1/2)T\le t<(k+1)T\end{cases} \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

פולס ריבועי מחזורי



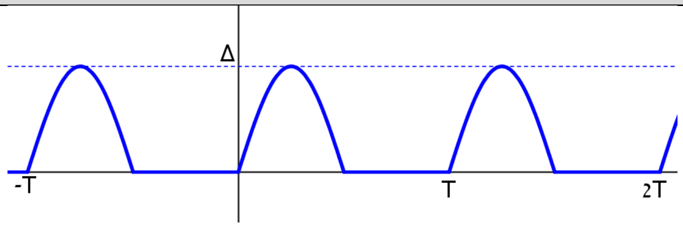
$$f(t)=\begin{cases}\Delta & kT\le t<t_0+kT \\ 0 & t_0+kT\le t<(k+1)T\end{cases} \ , \ 0<t_0<T \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

אות סינוס מיושר גל שלם



$$f(t)=\Delta\left|\sin(\omega t)\right|=\begin{cases}\Delta\sin(\omega t) & kT<t\le(k+1/2)T \\ -\Delta\sin(\omega t) & (k+1/2)T<t\le(k+1)T\end{cases} \ , \ \Delta>0 \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

אות סינוס מיושר חצי גל

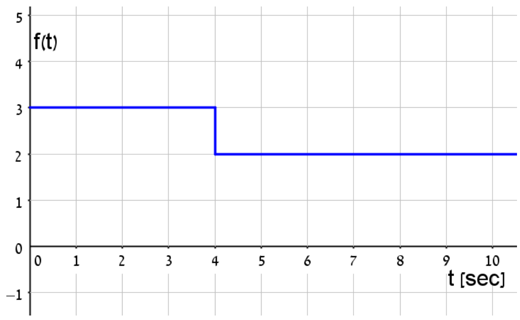


$$f(t)=\begin{cases}\Delta\sin(\omega t) & kT<t\le(k+1/2)T\\ 0 & (k+1/2)T<t\le(k+1)T\end{cases}$$

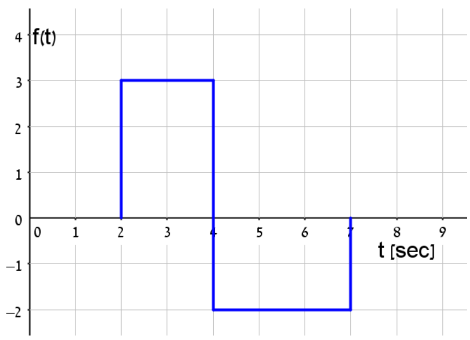
שאלות:

1) כתוב ביטוי מתמטי לכל אחד מאותות הכניסה במקרים הבאים:

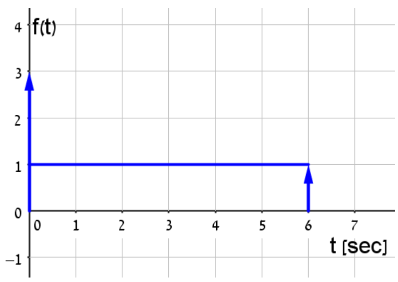
א.



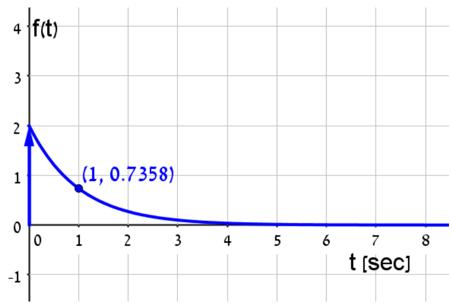
ב.



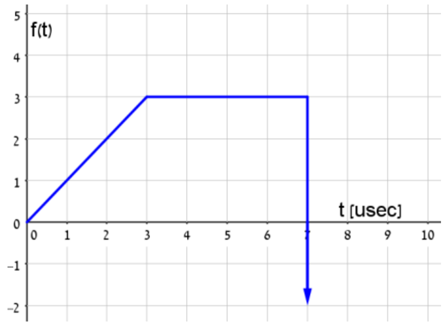
ג.



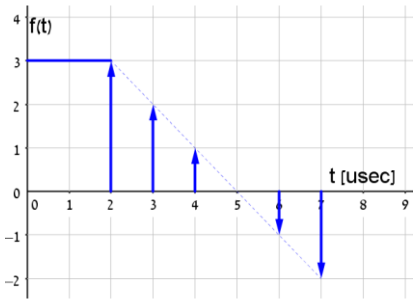
ד.



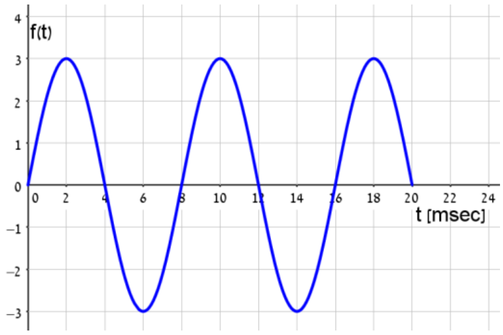
ה.



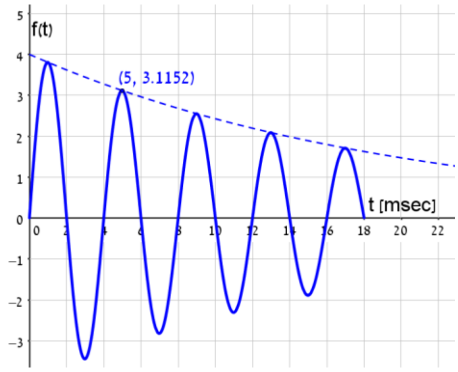
ו.



ז.



ח.



2) צייר את צורות הגל המתאימות בכל אחד מהמקרים הבאים :

א. $f(t)=2u(t)-3u(t-1)$

ב. $f(t)=3t\left[u(t)-u(t-5)\right]$

ג. $f(t)=10\sin(30t)u(t)$

ד. $f(t)=e^{-2t}\left(\delta(t)+\delta(t-1)+\delta(t-2)\right)$

ה. $f(t)=6\sin(10t)\left[u(t-1)-u(t-6)\right]$

ו. $f(t)=e^{-0.1t}\cos(4t)u(t)$

ז. $f(t)=e^{-10t}u(t)-2\delta(t)$

ח. $f(t)=\left(e^{-5t}-3e^{-15t}\right)\cdot\left(\delta(t)+u(t)\right)$

ט. $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}u(t-k)$

י. $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}4^{2-t}\delta(t-k)$

3) גזור את הפונקציות הזמניות הבאות :

א. $f(t)=e^{-20t}u(t)$

ב. $f(t)=\sin(\omega t)u(t)$

ג. $f(t)=tu(t)$

ד. $f(t)=t^2u(t)$

ה. $f(t)=e^{-5t}\left(\cos 3t-3\sin 3t\right)u(t)$

ו. $f(t)=\sum_{k=1}^{N}ku(t-k)$

ז. $f(t)=\delta(t)+\sum_{k=1}^{N}e^{-10kt}u(t-2k)$

תשובות סופיות:

1) א. $f(t)=3u(t)-u(t-4)$ ב. $f(t)=3u(t-2)-5u(t-4)+2u(t-7)$.

ג. $f(t)=3\delta(t)+\delta(t-6)+u(t)-u(t-6)$ ד. $f(t)=2\delta(t)+e^{-t}u(t)$.

ה. $f(t)=t\left[u(t)-u(t-3)\right]+3\left[u(t-3)-u(t-7)\right]-2\delta(t-7)$.

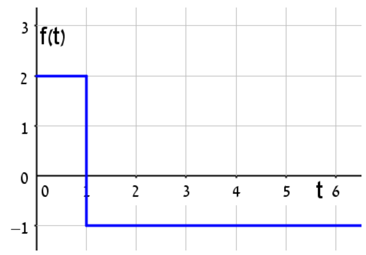
ו. $f(t)=3\left[u(t)-u(t-2)\right]+\sum_{k=2}^{7}(5-k)\delta(t-k)$.

ז. $f(t)=3\sin(250\pi t)\left[u(t)-u(t-0.02)\right]$.

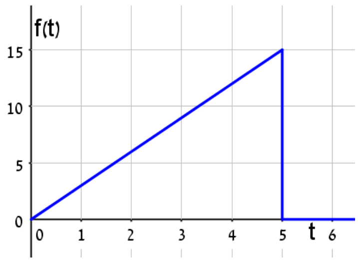
ח. $f(t)=4\sin(500\pi t)e^{-50t}\left[u(t)-u(t-0.018)\right]$.

2) להלן תוצאות התיאורים הגרפיים:

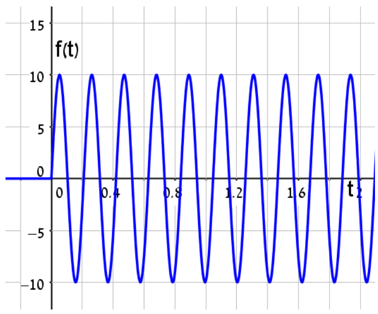
א.



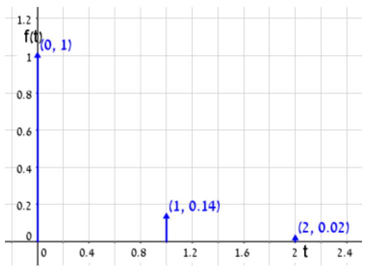
ב.



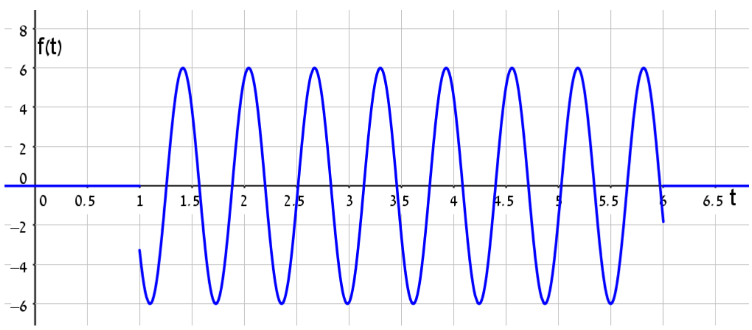
ג.



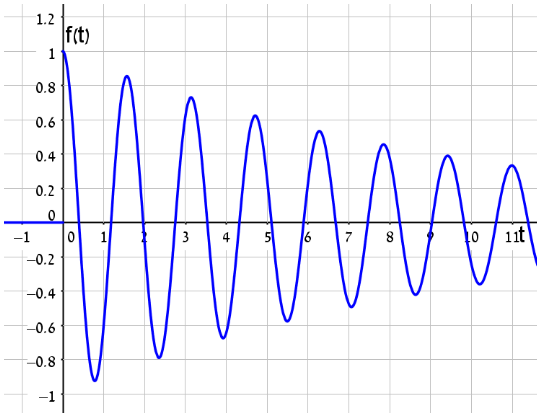
ד.



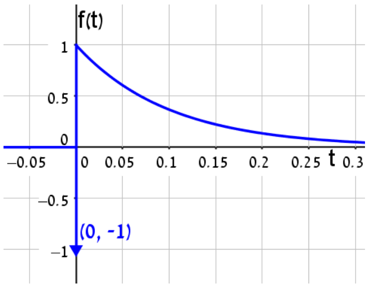
ה.



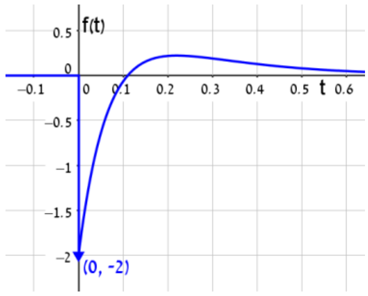
ו.



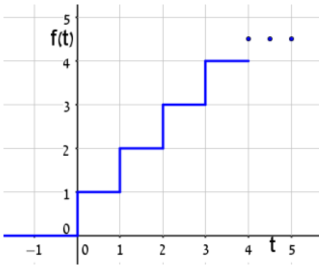
ז.



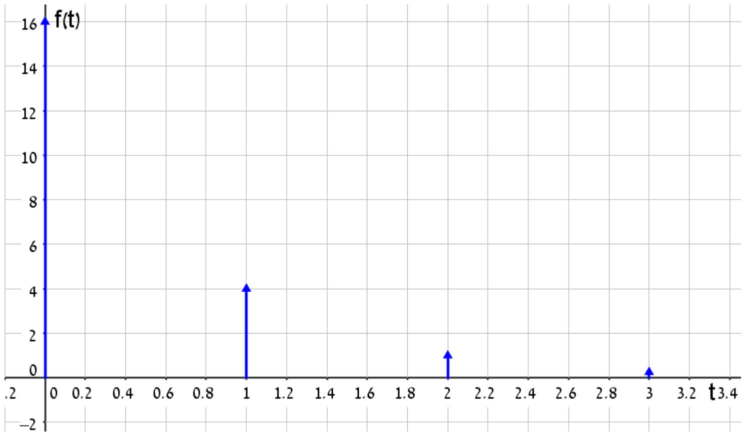
ח.



ט.



י.



3) א. $f'(t) = -20e^{-20t}u(t) + \delta(t)$ ב. $f'(t) = \omega\cos(\omega t)u(t)$ ג. $f'(t) = u(t)$

ד. $f'(t) = 2tu(t)$ ה. $f'(t) = 2e^{-5t}(6\sin 3t - 7\cos 3t)u(t) + \delta(t)$

ו. $f'(t) = \sum_{k=1}^{N} k\delta(t-k)$ ז. $f'(t) = \delta'(t) + \sum_{k=1}^{N}\left[-10ke^{-10kt}u(t-2k) + e^{-20k^2}(t-2k)\right]$.

מערכות ליניאריות:

סיכום:

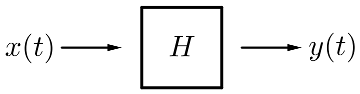
מערכת:

נתייחס לאות זמני הנכנס לקופסא בתור $x(t)$ ולאות היוצא מקופסא שכזו בתור $y(t)$.
הפעולה עצמה שהקופסא הסגורה מבצעת תסומן ב- H.

לקופסה הסגורה נקרא בשם **מערכת** ונכתוב את הקשר שבין האותות כך: $y(t)=H\{x(t)\}$.

צורת סימון נוספת: $x(t)\xrightarrow{H}y(t)$.

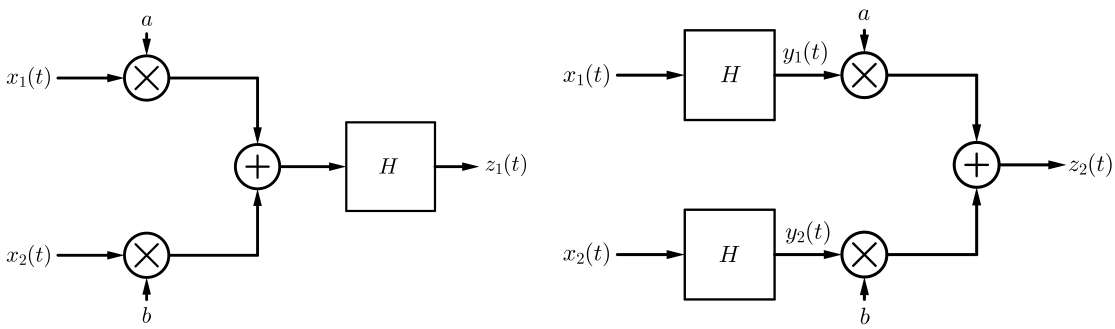
גרפית, מקובל לצייר באופן הבא:



מערכת ליניארית (Linear System):

נתונה מערכת H אשר אליה נכנסים שני אותות $x_1(t)$ ו- $x_2(t)$
כך ש: $y_1(t)=H\{x_1(t)\}$ ו- $y_2(t)=H\{x_2(t)\}$.
אם מתקיים: $H\{ax_1(t)+bx_2(t)\}=ay_1(t)+by_2(t)$ אז נאמר כי המערכת היא **ליניארית**.

גרפית, מקובל להציג מערכת שכזו באופן הבא:



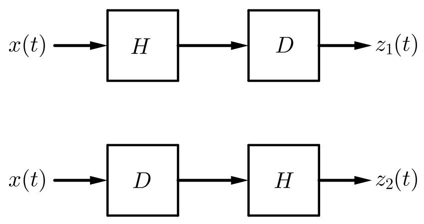
מערכת קבועה בזמן (Time Invariant):

מערכת הקבועה בזמן היא כזו שהשהיית האות בכניסתה גוררת השהייה זהה באות המוצא.

מתמטית, נניח כי: $y(t)=H\{x(t)\}$ אז מתקיים: $y(t-D)=H\{x(t-D)\}$ לכל $D\in\mathbb{R}$.

סימון נוסף לאופרטור ההזזה: $(s_Y f)\triangleq f(t-Y)$ כאשר $Y\in\mathbb{R}$ מתאר את ההזזה.

גרפית, נציג זאת באופן הבא:



מסקנות מיידיות:

1) מערכת המבצעת הכפלה בזמן, או כל פעולה התלויה בזמן, לא יכולה להיות קבועה בזמן (TI).
2) מערכת הקבועה בזמן כוללת פעולות שאינן תלויות בזמן בלבד, כגון הוספת קבועים או הכפלת אות הכניסה בקבוע.
3) מערכת המפוצלת לתחומי זמן שונים לעולם תהיה תלויה בזמן.

מערכת LTI:

מערכת המקיימת את תכונת הליניאריות והיא קבועה בזמן נקראת: Linear Time invariant.

בקיצור אנו נקרא להן **מערכות LTI**.

במסגרת הקורס שלנו אנו נעסוק במערכת LTI ונלמד את תכונותיהן.

תכונות של מערכות:

ניתן לאפיין מערכת (לאו דווקא מערכת LTI) ע"י מספר תכונות:

1) מערכת חסרת זיכרון (Memoryless System):
בה המוצא תלוי בערך הכניסה אך ורק בזמן הנתון ולא בזמנים אחרים.
מתמטית, נאמר כי עבור שתי כניסות $f(t)$ ו- $g(t)$ למערכת H, מתקיים לכל t_0 בתחום ההגדרה שלהן: $H\{f(t_0)\}=H\{g(t_0)\}$.

2) מערכת סיבתית (Casual System):
המוצא נקבע ע"י ערך הכניסה בזמן הווה ובזמני עבר, אך לא בזמני עתיד.

3) מערכת יציבה BIBO (Bounded Input Bounded Output):
מערכת שבה המוצא חסום בערכיו לכל כניסה החסומה גם היא.
מתמטית נסמן: $\forall t \in \Omega : |x(t)| \le M < \infty \quad \rightarrow \quad |y(t)| \le N < \infty$
(כאשר: Ω הוא תחום ההגדרה של אות הכניסה $x(t)$).

4) מערכת הפיכה (Inversible System):
מערכת שבה ניתן לשחזר את אות הכניסה מאות המוצא ביחידות (חח"ע).

התגובה להלם:

נוכל לתאר את המוצא של כל אות כניסה $x(t)$ ע"י פירוקו להלמים (קרי: דלתאות).

כדי לבצע זאת נגדיר את מוצא המערכת עבור כניסת דלתא בתור **תגובת המערכת להלם**.
התגובה להלם של המערכת תסומן: $h(t)$ ונכתוב: $h(t) = H\{\delta(t)\}$ או, בכתיבה יותר מפורטת: $x(t) = \delta(t) \xrightarrow{H} y(t) = h(t)$.
על מנת שנוכל לתאר כל אות מוצא ממערכת באמצעות התגובה להלם, המערכת חייבת להיות LTI. רק כך תתאפשר ההזזה בזמן והליניאריות בין הכניסה למוצא.

אינטגרל הקונבולוציה:

נסמן: $\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \triangleq x(t)*h(t)$.
הוא נקרא **אינטגרל הקונבולוציה** בין שני אותות.

משפט הקונבולוציה:

המוצא של כל מערכת LTI ניתן לתיאור ע"י קונבולוציה בין אות הכניסה ותגובת המערכת להלם: $y(t) = x(t)*h(t)$.