

סטודנטים יקרים

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק במתמטיקה והוא מתאים לסטודנטים במכינה של מכללת שנקר.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכנית הלימוד של המכינה בשנקר. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

הפתרונות מוגשים בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

תוכן

3פרק 1 – משוואות
12פרק 2 - הפונקציות האלמנטריות
21פרק 3- גבול של פונקציה
24פרק 4 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי
45פרק 5- חשבון דיפרנציאלי
60פרק 6- חשבון דיפרנציאלי
94פרק 7 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות (פירוק לשברים חלקיים)
108פרק 8- אינטגרלים – שיטות אינטגרציה מתקדמות האינטגרל הלא מסויים
111פרק 9-אי-שיוויונים מסוגים שונים
117פרק 10 – סדרות

פרק 1 - משוואות

משוואה ממעלה ראשונה

- בסרטון זה מוסבר מהי משוואה.
- בסרטון זה מוסבר מהי המשוואה הליניארית וכיצד פותרים אותה.

1. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & 6x+2=8 & \text{ב.} & 7-2x=7 & \text{ג.} & 2x+x=24 \\ \text{ד.} & 2x+6=8+x & \text{ה.} & -7x+5+2x=4x-13 & \text{ו.} & 6x-3+5-7x=x-5x-7 \\ \text{ז.} & 2-5x+7=-3x+8 & & & & \end{array}$$

2. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & 3(x-1)-4=2 & \text{ב.} & 7x-4(3-4x)=-x & \text{ג.} & 6(4-x)-(6-x)=3x \\ \text{ד.} & 5x-(3x-7)4=21 & \text{ה.} & x(x-5)=x^2-7x+8 & \text{ו.} & (7-x)(1-x)-(x-3)^2=0 \end{array}$$

תשובות סופיות:

1) א. $x=1$ ב. $x=0$ ג. $x=8$ ד. $x=2$ ה. $x=2$ ו. $x=-3$ ז. $x=\frac{1}{2}$

2) א. $x=3$ ב. $x=\frac{1}{2}$ ג. $x=2\frac{1}{4}$ ד. $x=1$ ה. $x=4$ ו. $x=-1$

שתי משוואות בשני נעלמים ממעלה ראשונה

1. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & \begin{cases} 3x+y=11 \\ y=5 \end{cases} & \text{ב.} & \begin{cases} -3x+2y=-16 \\ x=5y+14 \end{cases} & \text{ג.} & \begin{cases} 5x-2y=-2 \\ x+4y=4 \end{cases} \\ \text{ד.} & \begin{cases} 2x+3y=5 \\ 5x+7y=11 \end{cases} & \text{ה.} & \begin{cases} y=x-3 \\ y=2x+4 \end{cases} & & \end{array}$$

2. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \begin{cases} 3y-x+2=4x+2-3y \\ 2x-3-y=5y-4x+3 \end{cases} \\ \text{ב.} & \begin{cases} \frac{x-3}{8}-\frac{x+y}{16}=\frac{y-1}{4} \\ 3(2x-y)-4x-11=0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{ג.} & \begin{cases} \frac{3x-1}{4}-\frac{2}{5}(x-y)=\frac{3}{10}(x+3) \\ \frac{x+1}{4}-\frac{y}{2}=1 \end{cases} \end{array}$$

3. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{3}{y} = 2 \\ \frac{9}{x} - \frac{4}{y} = -7 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{5}{x} - \frac{1}{y} = 4 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 4x - \frac{7}{y} = -3 \\ 5x + \frac{2}{y} = 7 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{cases} xy = 20 \\ y(3x-4) = 20 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

$$\begin{cases} x(y+2) + y = xy - 5 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad \text{א.}$$

$$\begin{cases} 5x - 4xy = 22 \\ 6x + xy = -20 \end{cases} \quad \text{ג.}$$

תשובות סופיות:

1 א. (2,5) ב. (4,-2) ג. (0,1) ד. (-2,3) ה. (-7,-10) ו. $x = -3$ ז. $x = \frac{1}{2}$

2 א. (6,5) ב. (7,1) ג. (7,2) ד. (1,1) ה. (-3,1) ו. (1,1)

4 א. (-1,-3) ב. (2,10) ג. (-2,4) ד. $\left(-\frac{4}{5}, 9\right)$

משוואה ממעלה שנייה:

1. פתור את המשוואות הבאות:

ב. $32x^2 - 18 = 0$

א. $x^2 - 36 = 0$

2. פתור את המשוואות הבאות:

ב. $5x^2 - x = 0$

א. $-7x^2 - 14x = 0$

3. פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x^2 + 10x - 16 = 0$

א. $x^2 + 3x - 10 = 0$

ד. $2x^2 - 6x + 5 = 0$

ג. $25x^2 - 20x + 4 = 0$

4. פתור את המשוואות הבאות:

ב. $-x(x-5) = (1-3x)(1-x) + 4$

א. $4x^2 - 5x + 7 = 4 - x^2 + 3$

ג. $2(x-5)^2 - (2x-3)^2 = 10x + 21$

תשובות סופיות:

- (1) א. $x = \pm 6$ ב. $x = \pm \frac{3}{4}$ (2) א. $x_1 = 0, x_2 = -2$ ב. $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{5}$
- (3) א. $x_1 = 2, x_2 = -5$ ב. $x_1 = 2, x_2 = 8$ ג. $x = \frac{2}{5}$ ד. אין פתרון למשוואה.
- (4) א. $x_1 = 0, x_2 = 1$ ב. $x_1 = 0, x_2 = -1$ ג. $x_1 = -1, x_2 = -10$ ד. $x_1 = 1, x_2 = -10$

טרינום:

פרק את הביטויים הבאים לפי פירוק טרינום:

1. $4x^2 + 8x + 3$ 2. $2x^2 + 7x - 15$
3. $3x^2 - 11x + 6$ 4. $6x^2 + 5x + 1$
5. $2x^2 + x - 6$ 6. $x^2 + 5x + 4$
7. $x^2 - 8x + 15$ 8. $x^2 - 33x + 62$

פרק את הביטויים הבאים:

9. $4x^2 + 8x + 3$
10. $6x^2 + 5x + 1$
11. $x^2 + 5x + 4$

תשובות סופיות:

- (1) $(2x+1)(2x+3)$ (2) $(2x-3)(x+5)$ (3) $(3x-2)(x-3)$
- (4) $(3x+1)(2x+1)$ (5) $(x+2)(2x-3)$ (6) $(x+1)(x+4)$
- (7) $(x-3)(x-5)$ (8) $(x-2)(x-31)$ (9) $(2x+1)(2x+3)$
- (10) $(3x+1)(2x+1)$ (11) $(x+1)(x+4)$

משוואות עם מכנה:

1. פתור את המשוואות הבאות:

- א. $\frac{x}{3} - \frac{x}{9} = -4$
- ב. $\frac{4x}{15} - \frac{3x}{10} = 1$
- ג. $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5}x = x - \frac{7}{15}$
- ד. $\frac{5x+1}{6} - \frac{6x-1}{5} = \frac{3x+1}{4} - 1$
- ה. $\frac{2}{5}(x-3) - \frac{3}{15}(4-x) = x+2$
- ו. $5\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{7}\right) - x = 1$

2. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{1}{4} - \frac{2}{x} = 0 \\ \text{ב.} & \frac{1}{2} - \frac{x}{x-1} = 0 \\ \text{ג.} & \frac{3}{x} = \frac{1}{x+2} \\ \text{ד.} & \frac{5}{2x-1} = \frac{4}{3x+2} \\ \text{ה.} & \frac{x+5}{3x^2} - \frac{1}{6x} = \frac{1}{x} \end{array}$$

3. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{x^2+2}{3x^2+5x} = \frac{3x-1}{9x+15} \\ \text{ב.} & \frac{7}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} + \frac{3}{2-2x} = 0 \\ \text{ג.} & \frac{3}{(2-x)^2} + \frac{5}{12-3x^2} = 0 \\ \text{ד.} & \frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12 \end{array}$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א.} & \frac{4x+1}{3} - \frac{x+2}{2} = \frac{2}{x} \\ \text{ב.} & \frac{x^2-9}{x+3} + x = x^2 - 18 \\ \text{ג.} & \frac{3}{2x+2} - \frac{2x-5}{2(x-1)^2} - \frac{4}{1-x^2} = 0 \end{array}$$

תשובות סופיות:

1. א. $x = -18$ ב. $x = -30$ ג. $x = -1$ ד. $x = 1$ ה. $x = -10$ ו. $x = -21$
 2. א. $x = 8$ ב. $x = -1$ ג. $x = -3$ ד. $x = -2$ ה. $x = 2$
 3. א. $x = -6$ ב. $x = -7$ ג. $x = -7$ ד. $x = 6, x \neq 3$
 4. א. $x_1 = 2, x_2 = -1.2$ ב. $x = 5, x \neq -3$ ג. $x_1 = 0, x_2 = -5$

משוואות מעריכיות:

- בסרטון זה הסבר על חוקי החזקות.
- בסרטון זה הסבר על משוואות מעריכיות.
- בסרטון זה הסבר על משוואות מעריכיות עם חיבור וחסור.

פתור את המשוואות הבאות:

$$\begin{array}{ll} 1. & (25 \cdot 0.2^{2x})^2 = \left(\frac{1}{125}\right)^{1-x} \\ 2. & \left(\frac{3}{4}\right)^{2-x} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3x} = \left(\frac{9}{16}\right)^{7+x} \\ 3. & \sqrt{27} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 9\sqrt{3} \end{array}$$

4. פתור את המשוואות הבאות:

$$3^x = 5^x \quad \text{א.} \quad 5^{3-x} = \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^{\frac{2x}{3}-2} \quad \text{ב.}$$

$$5. \text{ פתור את המשוואה } e^x \cdot \sqrt{e^{3x-1}} = \left(\frac{1}{e^x}\right)^{1-3x}$$

6. פתור את המשוואות הבאות:

$$5 \cdot 3^x - 3^{x+1} = 162 \quad \text{א.} \quad 2 \cdot 6^x + 6^{x+2} - 6^{x-1} = 227 \quad \text{ב.}$$

$$7. \text{ פתור את המשוואה } 5^{-x} + 25^{\frac{1-x}{2}} - 5^{-x-1} = 145$$

$$8. \text{ פתור את המשוואה } e^2 \cdot e^x - e^{x+1} = e - 1$$

$$9. \text{ פתור את המשוואה } 2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$$

10. פתור את המשוואות הבאות:

$$6^x - 4 \cdot 6^{-x} + 3 = 0 \quad \text{א.} \quad \left(\frac{4}{9}\right)^x - \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-x-1} = -\frac{2}{3} \quad \text{ב.}$$

11. פתור את המשוואות הבאות:

$$\frac{20}{9^x+1} = 3 - \frac{8}{9^x-1} \quad \text{א.} \quad e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad \text{ב.}$$

$$12. \text{ פתור את המשוואה } e^{1+x} + e^{1-x} = e^2 + 1$$

תשובות סופיות:

- (1) $x=1$ (2) $x=-2$ (3) $x=-\frac{1}{2}$ (4) $x=0$ (5) $x=3$ (6) $x_1=1, x_2=\frac{1}{6}$ (7) $x=1$ (8) $x=-2$ (9) $x=\pm 1$ (10) $x=0$ (11) $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$ (12) $x=\pm 1$
 (1) $x=1$ (2) $x=-2$ (3) $x=-\frac{1}{2}$ (4) $x=0$ (5) $x=3$ (6) $x_1=1, x_2=\frac{1}{6}$ (7) $x=1$ (8) $x=-2$ (9) $x=\pm 1$ (10) $x=0$ (11) $x_1=1, x_2=-\frac{1}{2}$ (12) $x=\pm 1$

משוואות לוגריתמיות:

- בסרטון זה הסבר על הגדרת הלוגריתמים.
- בסרטונים 2-4 הסבר על כללי הלוגריתמים.
- בסרטון זה הסבר על הגדרת הלן.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 1.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 2.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 3.
- בסרטון זה הסבר על משוואות לוגריתמיות מסוג 4.

1. מצא את ערכו של x :

א. $\log_{36} 6 = x$

ב. $\log_2 x = 16$

ג. $\log_{\frac{1}{9}} x = -1.5$

ד. $\log_x 64 = 3$

ה. $\log_x 25 = 2$

ו. $\log_x (3x+4) = 2$

ח. $\ln x = -\frac{1}{2}$

ז. $\ln x = 2$

2. פתור את המשוואות הבאות :

א. $\log_x (x^2 + 6x) = 3$

ב. $\log_3 (\log_x (x^2 + 6x)) = 1$

3. פתור את המשוואות הבאות :

א. $\log_5 (25^x - 20) = x$

ב. $\ln \left(e^{2x} - \frac{1}{2} \right) + \ln 2 = x$

4. פתור את המשוואה $\log_4 x + \log_x 4 = 2\frac{1}{2}$.

5. פתור את המשוואות הבאות :

א. $\log x \cdot \log (10x) = 2$

ב. $\ln(e^2 x^3) \cdot \ln \frac{1}{x} = \ln(ex^2)$

6. פתור את המשוואות הבאות :

א. $x^{\log_5 x} = \frac{25}{x}$

ב. $x^{\ln x} = e^6 x$

7. מצא את ערכו של x :

- א. $2^x = 5$
 ב. $5^x = 8$
 ג. $e^x = 2$
 ד. $e^x = \frac{1}{2}$
 ה. $e^x = -1$

8. פתור את המשוואה $\frac{\log_2 x - 6}{x^4} = \frac{4}{x}$.

9. פתור את המשוואה $\frac{\log_{5-x}(x+1)}{\log_{5-x}(x-1)} - 1 = \frac{1}{\log_{5-x}(x-1)}$.

10. פתור את המשוואה $\left(\frac{1}{x}\right)^{2-3\ln x} = \frac{1}{e} \cdot x^{1+\ln x}$.

תשובות סופיות:

1 א. $x = \frac{1}{2}$ ב. $x = 65,536$ ג. $x = 27$ ד. $x = 4$ ה. $x = 5$ ו. $x = 4$ ז. $x = e^2$

ח. $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ 2 א. $x = 3$ ב. $x = 3$ 3 א. $x = 1$ ב. $x = 0$ 4 $x_1 = 16, x_2 = 2$

5 א. $x_1 = \frac{1}{100}, x_2 = 10$ ב. $x_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}, x_2 = \frac{1}{e}$ 6 א. $x_1 = \frac{1}{25}, x_2 = 5$

ב. $x_1 = e^3, x_2 = \frac{1}{e^2}$ 7 א. $x = 2.322$ ב. $x = 1.292$ ג. $x = 0.693$ ד. $x = -0.693$

ה. אין פתרון 8 $x_1 = 16, x_2 = \frac{1}{4}$ 9 $x = 3$ 10 $x_1 = \sqrt{e}, x_2 = e$

משוואות עם שורשים:

1. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{4x-3} = 5$

2. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x+2} = x$

3. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{3x+1} + x = 13$

4. פתור את המשוואה הבאה: $2x = 16 - 3\sqrt{x-1}$

5. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{3x+5} = \sqrt{x+17}$

6. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x^2 - 5x + 12} = 2\sqrt{6-x}$

7. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{2x-5} = \sqrt{11-x^2}$

8. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{2x-1} + 3 = \sqrt{7x+1}$

9. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{9x-8} - 3\sqrt{x+4} = -2$

10. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{2x-3} + \sqrt{3-x} = 2$

11. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = \sqrt{4x+1}$

12. פתור את המשוואה הבאה: $\sqrt{2x-2} + \sqrt{5x-4} = \sqrt{3x-2}$

13. פתור את המשוואה הבאה: $3\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-3} = 2\sqrt{x+2}$

תשובות סופיות:

$x = 5$ (8) $x = 3$ (7) $x = 4, -3$ (6) $x = 6$ (5) $x = 5$ (4) $x = 8$ (3) $x = 2$ (2) $x = 7$ (1)
 $x = 2$ (13) $x = 1$ (12) $x = 6$ (11) $x = 2, 2\frac{8}{9}$ (10) $x = 12$ (9)

פרק 2 - הפונקציות האלמנטריות

מושג הפונקציה - סרטונים בלבד

הפונקציה הלינארית - סרטונים בלבד

הפונקציה הריבועית - סרטונים בלבד

הפונקציה המעריכית והלוגריתמית - סרטונים בלבד

פונקציות בסיסיות וההזזות (שיקופים) שלהן - סרטונים בלבד

תרגול הפונקציה הלינארית:

1. בסרטון זה מוסבר כיצד מוצאים משוואה של ישר.
 - א. מצא משוואת ישר ששיפועו 2 ועובר דרך הנקודה (3,4).
 - ב. מצא משוואת ישר ששיפועו -3 ועובר דרך הנקודה (0,-1).
 - ג. מצא משוואת ישר ששיפועו הוא 0 והוא עובר בנקודה (-2,5).
2. בסרטון זה מוסבר כיצד מוצאים משוואת ישר בעזרת שתי נקודות.
 - א. מצא את הישר העובר דרך הנקודות: (4,1) ו- (6,5).
 - ב. מצא משוואת ישר, העובר דרך הנקודות (-7,-9) ו- (-5,1).
 - ג. מצא משוואת ישר, העובר דרך הנקודות (2,4) ו- (3,4).
 - ד. מצא משוואת ישר, העובר דרך הנקודות (2,7) ו- (2,-1).
3. מצא את משוואת הישר ששיפועו 3 ועובר דרך הנקודה (2,8).
4. מצא משוואת הישר ששיפועו $-\frac{1}{2}$ ועובר דרך הנקודה (0,-7).
5. מצא משוואת הישר ששיפועו 0 ועובר דרך הנקודה (-1,-3).
6. מצא משוואת הישר ששיפועו $-\frac{5}{8}$ ועובר דרך הנקודה (-8,2).
7. מצא משוואת הישר ששיפועו 1 ועובר דרך ראשית הצירים.
8. מצא משוואת הישר העובר דרך הנקודות (3,6) ו- (1,8).
9. מצא משוואת הישר העובר דרך הנקודות (-4,-6) ו- (0,6).

10. מצא משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(4, 2)$ ו- $(-2, 3)$.
11. מצא משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(7, -2)$ ו- $(4, -2)$.
12. מצא משוואת הישר העובר דרך הנקודות $(3, 9)$ ו- $(3, 5)$.
13. **בסרטון זה מוסבר כיצד לבדוק האם שני ישרים מקבילים.**
- א. האם הישר העובר דרך הנקודות $(1, -5)$ ו- $(3, 7)$ מקביל לישר העובר דרך הנקודות $(-1, -2)$ ו- $(0, 4)$?
- ב. האם הישר $2y - 6x + 4 = 0$ מקביל לישר $y = 3x$?
- ג. האם הישר העובר דרך הנקודות $(1, -5)$ ו- $(4, -3)$ מקביל לישר $3y - 2x = 9$?
14. ענה על הסעיפים הבאים:
- א. מצא משוואת ישר המקביל לישר $y = 3x - 5$ ועובר דרך הנקודה $(1, 0)$.
- ב. מצא משוואת ישר העובר דרך ראשית הצירים ומקביל לישר $4y - 7x + 18 = 0$.
- ג. מצא משוואת ישר העובר דרך הנקודה $(-1, -2)$ ומקביל לישר העובר דרך הנקודות $(4, 11)$ ו- $(1, 2)$.
15. מצא משוואת הישר המקביל לישר $y = -4x + 9$ ועובר דרך הנקודה $(-5, 7)$.
16. מצא משוואת הישר המקביל לישר $y - 7x + 12 = 0$ ועובר דרך הנקודה $(-2, -3)$.
17. מצא משוואת הישר המקביל לישר $5y - 4x + 9 = 0$ ועובר דרך ראשית הצירים.
18. מצא משוואת הישר המקביל לישר $y = 5$ ועובר דרך הנקודה $(-1, 7)$.
19. מצא משוואת ישר החותך את ציר ה- y בנקודה $(0, -3)$ ואינו חותך את ציר ה- x .
20. מצא משוואת ישר החותך את ציר ה- x בנקודה $x = 3$ ומקביל לישר העובר דרך הנקודות $(0, 1)$ ו- $(-3, 4)$.

תשובות סופיות::

- (1) א. $y = 2x - 2$ ב. $y = -3x - 1$ ג. $y = 5$
- (2) א. $y = 2x - 7$ ב. $y = 5x + 26$ ג. $y = 4$ ד. $x = 2$ (3) $y = 3x + 2$
- (4) $y = -\frac{1}{2}x - 7$ (5) $y = -3$
- (6) $y = -\frac{5}{8}x - 3$ (7) $y = x$ (8) $y = -x + 9$ (9) $y = 3x + 6$
- (10) $y = -\frac{1}{6}x + 2\frac{2}{3}$ (11) $y = -2$ (12) $x = 3$ (13) א. כן ב. כן ג. כן
- (14) א. $y = 3x - 3$ ב. $y = 1\frac{3}{4}x$ ג. $y = 3x + 1$ (15) $y = -4x - 13$
- (16) $y = 7x + 11$ (17) $y = \frac{4}{5}x$ (18) $y = 7$ (19) $y = -3$ (20) $y = -x + 3$

תרגול הפונקציה הריבועית:

1. בסרטון זה מוסבר מהי משוואה ריבועית וכיצד פותרים אותה.

פתור את המשוואות הבאות:

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \quad .1 \quad -x^2 + 10x - 16 = 0 \quad .2$$

$$25x^2 - 20x + 4 = 0 \quad .3 \quad 2x^2 - 6x + 5 = 0 \quad .4$$

• פתור את המשוואות הבאות:

$$4x^2 - 9x - 9 = 0 \quad .2 \quad -2x^2 + 6x - 5 = 0 \quad .3 \quad 8x^2 - 24x + 18 = 0 \quad .4$$

$$x^2 - 13x - 30 = 0 \quad .5 \quad -5x^2 - 2x + 24 = 0 \quad .6 \quad 4x^2 = 9 \quad .7$$

$$8x^2 - 50 = 0 \quad .8 \quad x^2 - 3 = 0 \quad .9 \quad 3x^2 - 18 = 0 \quad .10$$

$$x^2 + 8 = 0 \quad .11 \quad x^2 - 5x = 0 \quad .12 \quad -5x^2 + 55x = 0 \quad .13$$

$$x^2 + 9x = 0 \quad .14 \quad 3x^2 + 12 = 0 \quad .15 \quad 4x^2 - 5x = 0 \quad .16$$

$$2x^2 + 4x - x^2 = -10 - 2x - 2x - 6 \quad .17$$

$$(x - 6)(x + 3) = 4(1 - 3x) \quad .18$$

$$(1 - 4x)^2 + 3 - (3x + 2)^2 = x \quad .19$$

$$1 - 3(x - 2)(x + 1) = (8 - x)(2x - 1) \quad .20$$

$$(6 - 4x)^2 - (2x - 1)(2x + 1) = (3 - 2x)^2 \quad .21$$

$$\frac{x+1}{3} - \frac{2}{x+6} = 0 \quad .23$$

$$\frac{x}{8} - \frac{8}{x} = 0 \quad .22$$

$$\frac{1}{x-5} - \frac{5}{3x+15} = \frac{8}{x^2-25} \quad .25$$

$$\frac{6}{x+1} - 1 = \frac{2}{x} \quad .24$$

$$\frac{x+12}{2x(x-2)} - \frac{6}{x+2} = \frac{6}{x^2-4} - \frac{2}{x} \quad .26$$

$$\frac{1}{2x-4} + \frac{3}{2x^2-8} = \frac{3}{x-2} - \frac{11}{x+2} \quad .27$$

$$\frac{8x^2-18}{2x+3} = 20 \quad .29$$

$$\frac{3}{2x+2} + \frac{4}{x^2-1} = \frac{2x-5}{2(x-1)^2} \quad .28$$

$$\frac{x^2-25}{x+5} - x^2 + x = -40 \quad .31$$

$$\frac{4x^2-24x+36}{x-3} = 12 \quad .30$$

32. פתור את המשוואות הבאות:

הערה: לא נדרשת פתירה באמצעות הנוסחה להפרש ריבועים.

$$x^3 - x = 0 \quad .ב$$

$$x^3 - 3x^2 = 0 \quad .א$$

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \quad .ד$$

$$x^4 - 16x^2 = 0 \quad .ג$$

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \quad .ו$$

$$2x^3 = 18x^2 - 28x \quad .ה$$

33. בסרטון זה מוסבר מהי פרבולה וכיצד משרטטים אותה.

34. בסרטון זה מוסבר כיצד מוצאים נקודות חיתוך של פרבולה עם ציר ה- x ועם ציר ה- y .

35. בסרטון זה מוסבר כיצד מוצאים נקודות חיתוך של פרבולה וישר.

א. מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולה $y = -x^2 + 4x + 3$ והישר $y = x - 1$.

ב. מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולה $y = x^2 - 2x + 3$ והישר $y = 2x - 1$.

36. בסרטון זה מוסבר כיצד מוצאים נקודות חיתוך בין שתי פרבולות.

- א. מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות: $y = x^2 + 4$, $y = 2x^2 - 3x$.
- ב. מצא את נקודות החיתוך בין הפרבולות: $y = x^2 + x - 3$, $y = x^2 - 4x + 7$.

37. שרטט את הגרפים של הפרבולות הבאות: $y = (x+1)(x-4)$, $y = x^2 - 4x + 5$.

38. שרטט את הגרפים של הפרבולות הבאות: $y = -x^2$, $y = -2 - x^2$.

39. ענה על שתי השאלות הבאות:

- א. נתונה הפונקציה: $y = x^2 + 2x - 3$.
- איזה סוג פרבולה מייצגת הפונקציה שלפניך?
 - מצא את שיעורי הקדקוד של הפרבולה.
 - מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הצירים.
 - שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - מהו הערך המינימלי של הפונקציה ובאיזה נקודה מתקבל ערך זה?

- ב. נתונה הפונקציה: $y = -2x^2 - 4x - 7$.
- מצא את קדקוד הפרבולה ונקודות החיתוך עם הצירים.
 - שרטט סקיצה של גרף הפרבולה.
 - מהו הערך המכסימלי של הפונקציה?

40. נתונה הפונקציה $y = x^2$.

- מצא את קדקוד הפרבולה.
- מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הצירים.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מהו הערך המינימלי של הפונקציה? באיזה נקודה מתקבל הערך המינימלי?

41. בסרטון זה מוסברים המושגים תחומי עלייה ותחומי ירידה של פרבולה

ומוסבר כיצד לחשב אותם.

- א. נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + 6x - 10$.
- מצא את קדקוד הפרבולה.
 - עבור אילו ערכי x הפונקציה עולה ועבור אילו ערכי x הפונקציה יורדת?

- ב. נתונה הפונקציה: $y = 3x^2 - 2x - 7$.
- מצא את קדקוד הפרבולה.
 - מצא את תחומי העלייה ותחומי הירידה של הפונקציה.

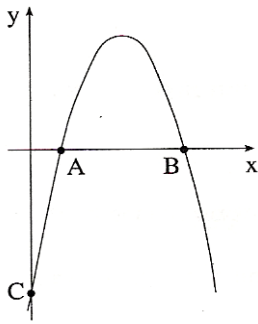
42. ענה על שתי השאלות הבאות:

א. נתונה הפונקציה: $y = (x-3)^2$

1. מצא את קדקוד הפרבולה.
2. שרטט סקיצה של הפרבולה.
3. מהו הערך המינימלי של הפונקציה?
4. עבור אלו ערכי x הפונקציה עולה?
5. רשום שני ערכים של x שבהם הפונקציה יורדת.

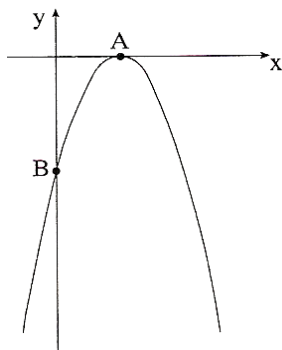
ב. נתונה הפונקציה: $y = (x+4)(6-x)$

1. מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.
2. מצא את נקודות החיתוך של הפרבולה עם הצירים.
3. מהו הערך המכסימלי של הפונקציה? (היעזר בשרטוט סקיצה של גרף הפונקציה).
4. רשום עבור אילו ערכי x הפונקציה יורדת.
5. רשום שני ערכי x עבורם הפונקציה עולה..



43. לפניכם סרטוט של גרף הפונקציה: $y = -x^2 + 6x - 5$

- א. חשבו את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. חשבו את שיעורי נקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- y .
- ג. מהו המרחק בין הנקודה C (ראו סרטוט) לראשית הצירים?
- ד. מצאו את המרחק בין הנקודה A לנקודה B (ראו סרטוט).
- ה. מצאו את המרחק בין הנקודה A לראשית הצירים.



44. לפניכם סרטוט של גרף הפונקציה: $y = -x^2 + 4x - 4$

- א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרף עם הצירים.
- ב. מצאו את מרחק הנקודה A (ראו סרטוט) מראשית הצירים.
- ג. מצאו את מרחק הנקודה B (ראו סרטוט) מראשית הצירים.
- ד. מצאו את תחומי העלייה והירידה של הפרבולה.

45. נתונה הפונקציה: $y = -x^2 + x + 6$

- א. מצאו את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. מצאו את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ג. מצאו את המרחק בין נקודות החיתוך של הפרבולה עם ציר ה- x .

ד. מצאו את תחום הירידה של הפרבולה.

46. נתונה הפונקציה: $y = x^2 + 6x + 9$.

- א. מצאו את הנקודה המשותפת לגרף הפונקציה ולציר ה- x .
 ב. מצאו את הנקודה המשותפת לגרף הפונקציה ולציר ה- y .
 ג. מהו המרחק בין הנקודה המשותפת לגרף הפונקציה ולציר ה- y לבין ראשית הצירים?

47. נתונה פרבולה שנקודת המינימום שלה היא $(2, 3)$.

כמה נקודות חיתוך יש לפרבולה זו עם ציר ה- x ? וכמה עם ציר ה- y ? נמק.

48. נתונות הפונקציות $y = 2x^2 - x - 3$ ו- $y = x + 1$.

מצא את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות, ואת משוואת הישר העובר דרכן.

49. נתונה הפרבולה $y = x^2 - 4x + 5$.

מצא את משוואת המשיק לפרבולה העובר בנקודה.

50. נתונות הפונקציות $y + x^2 = 6x + 5$ ו- $y = x^2 - 4x + 5$.

- א. מצאו את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות, וסמנו אותן ב-A ו-B.
 ב. מצאו את משוואת הישר AB.
 ג. שרטטו את שתי הפונקציות במערכת צירים אחת (ציינו נק' חיתוך עם הצירים ונק' קיצון).

51. נתונה הפרבולה $y = x^2 - 6x - 7$. הפרבולה חותכת את ציר ה- x בנקודות A ו-B (A קרובה יותר לראשית הצירים), ואת ציר ה- y בנקודה C. קדקוד הפרבולה הוא בנקודה D.

- א. מצא את הנקודות המצוינות מעלה ושרטט סקיצה של הפרבולה.
 ב. בנקודה בה הפרבולה חותכת את ציר ה- y (נקודה C), העבירו ישר המקביל לציר ה- x . מצא משוואת ישר זה.
 ג. הישר שקיבלת בסעיף ב' חותך את הפרבולה בנקודה נוספת E. מצא את הנקודה.

52. ענה על השאלות הבאות:

א. מהי ההצגה האלגברית המתאימה ביותר לפרבולה שבשרטוט?

$$y = -x^2 - 4x + 5 \qquad y = 2x^2 - 6x - 3$$

$$y = x^2 - 5x + 6 \qquad y = -2x^2 - 6x - 4$$

נמק במילים או ע"י חישוב מדוע פסלת את האפשרויות האחרות.

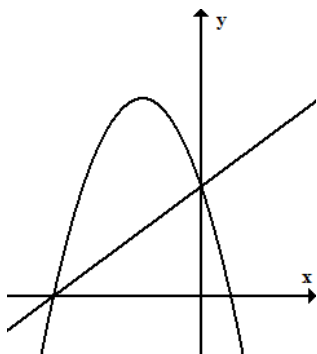
ב. מהי ההצגה האלגברית המתאימה ביותר לישר שבשרטוט?

$$y = 5x - 1 \qquad y = -x + 5$$

$$y = 5x - 5 \qquad y = x + 5 \qquad y = -5x + 1$$

נמק במילים או ע"י חישוב מדוע פסלת את האפשרויות האחרות.

ג. מצא את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות שבחרת בסעיפים א' ו-ב'.



53. נתונות הפונקציות $y = x + 1$ ו- $y = 2x^2 - x - 3$. מצא את נקודות החיתוך בין שתי הפונקציות, ואת משוואת הישר העובר דרכן.

תשובות סופיות:

- (1) 1. $x_1 = 2, x_2 = -5$ 2. $x_1 = 2, x_2 = 8$ 3. $x_1 = x_2 = \frac{2}{5}$ 4. אין פתרון.
- (2) 3. $x_1 = 3, x_2 = -\frac{3}{4}$ אין פתרון. 4. $x = 1.5$ 5. $x_1 = 15, x_2 = -2$
- (6) 7. $x_1 = -2.4, x_2 = 2$ 8. $x = \pm 1.5$ 9. $x = \pm \sqrt{3}$
- (10) 11. $x = \pm \sqrt{6}$ אין פתרון. 12. $x_1 = 0, x_2 = 5$ 13. $x_1 = 0, x_2 = 11$
- (14) 15. $x_1 = 0, x_2 = -9$ 16. $x_1 = 0, x_2 = 1.25$
- (17) 18. $x = -4$ 19. $x_1 = 2, x_2 = -11$ 20. $x_1 = 0, x_2 = 3$ 21. $x_1 = 1, x_2 = -15$
- (21) 22. $x_1 = 3.5, x_2 = 1$ 23. $x = \pm 8$ 24. $x_1 = 0, x_2 = -7$ 25. $x = 8$ 26. $x_1 = 4, x_2 = -\frac{2}{7}$ 27. $x = 3$ 28. $x_1 = 0, x_2 = -5$ 29. $x = 6.5$
- (30) 31. $x = 6$ 32. $x = 7$ א. $x_1 = 0, x_2 = 3$ ב. $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1$
- ג. $x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = -4$ ד. $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -2$ ה. $x_1 = 0, x_2 = 2$
- ו. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4$ ז. $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 4$ ח. $x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = -2$ ט. אין נקודת חיתוך.
- (36) א. $(4, 20), (-1, 5)$ ב. $(2, 3)$ 39. א. 1. פרבולה ישרה. 2. $(-1, -4)$
3. $(0, -3), (-3, 0), (1, 0)$ 5. $x = -1, y = -4$ ב. 1. $(-1, -5)$ 3. $y = -5$
- (40) א. 1. $(0, 0)$ 2. $(0, 0)$ 4. $y = 0$ ב. 1. $(2, -2)$ 2. לא. 3. $y = -2$
4. $(0, -6), (4, -6)$ א. 1. $(3, -1)$ 2. תחומי עלייה: $x < 3$, תחומי ירידה: $x > 3$.
- ב. 1. $(\frac{1}{3}, -7\frac{1}{3})$ 2. תחומי עלייה: $x > \frac{1}{3}$, תחומי ירידה: $x < \frac{1}{3}$ א. 1. $(3, 0)$ 3.
4. $y = 0$ 5. $x > 3$ ב. 1. $x = 2, x = 1$ 2. $(1, 25)$ 3. $(0, 24), (-4, 0), (6, 0)$
4. $y = 25$ 5. $x > 1$ א. 1. $x = 0, x = -1$ 43. א. $(1, 0), (5, 0)$ ב. $(0, -5)$
- ג. 5. ד. 4. ה. 1. 44. א. $(2, 0), (0, -4)$ ב. 2. ג. 4. ד. עליה: $x < 2$, ירידה: $x > 2$ א. $(-2, 0), (3, 0)$ ב. $(0, 6)$ ג. 5. ד. $x > 0.5$
- (46) א. $(-3, 0)$ ב. $(0, 9)$ ג. 9. 47. אין נקודת חיתוך עם ציר ה- x , נקודת חיתוך אחת עם ציר ה- y 48. $(2, 3), (-1, 0)$ 49. $y = x + 1$ 50. $A(0, 5), B(5, 10)$
- ב. 51. $y_{AB} = x + 5$ א. $A(-1, 0), B(7, 0), C(0, -7), D(3, -16)$ ב. $y = -7$ ג. $E(6, -7)$
- א. 52. $y = -x^2 - 4x + 5$ ב. $y = x + 5$ ג. $(0, 5), (-5, 0)$ 53. $(0, 5), (-1, 0)$ א. $y = x + 1, (2, 3), (-1, 0)$

פרק 3 - גבול של פונקציה

1. חשב את הגבולות הבאים (הצבה):

$$\lim_{x \rightarrow 100} 20 \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 10} \frac{x+1}{x+2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 4} x^2 + x + 1 \quad (1)$$

2. חשב את הגבולות הבאים (צמצום/פירוק לגורמים):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n - x}{x-1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^7 - x}{x-1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 - 50}{2x^2 + 3x - 35} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 9} \quad (1)$$

3. חשב את הגבולות הבאים (כפל בצמוד):

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 - 1} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x+6}}{2x-6} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt{x}}{1-x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1-x} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{3x+1}}{1 - \sqrt{2x-1}} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+5}}{x-4} \quad (5)$$

4. חשב את הגבולות הבאים (פונקציה השואפת לאינסוף):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{(x-2)(x-5)} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2}{(2-x)^2} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)^2}{x-2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 4}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 + 2 \ln x - 3) \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{1}{2} \ln(2-x) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \cot x \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \quad (9)$$

5. חשב את הגבולות הבאים (x שואף לאינסוף) :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x} \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x + e^x \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x})^{\ln x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{2x + 10} - \frac{x}{2} \right) \quad (6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^3 + 10x} \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9x^6 - 5x}}{x^3 - 2x^2 + 1} \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-3}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \quad (11)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4 + 2x^2 + 6 + 27x^6}}{\sqrt{3x^3 + 10x + 4x^4}} \quad (10)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot 9^x + 3^{x+1}}{81^{0.5x} + 3^{x+3}} \quad (14)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16^x + 4^{x+1}}{2^{4x+2} + 2^{x+3}} \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^4 + 10x}} \quad (18)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x^3 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 + 1} \right) \quad (17)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{4x^2 + 2}{x^2 + 1000x}} \quad (16)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x) \quad (21)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[5]{\frac{ax+1}{bx+2}} \quad (20)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \left(\frac{x^4 + 2x^2 + 6}{3x^5 + 10x} \right) \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad (24)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - x) \quad (23)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + kx} - x) \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + ax} - \sqrt{x^2 + bx}) \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + x^2 + 1} - x^2) \quad (25)$$

תשובות סופיות:

$$.40 (4 \quad 2 (3 \quad \frac{11}{12} (2 \quad 21 (1 (1$$

$$.n-1 (4 \quad 6 (3 \quad \frac{10}{8.5} (2 \quad \frac{5}{6} (1 (2$$

$$.\frac{1}{3} (7 \quad \frac{3}{4} (6 \quad \frac{1}{6} (5 \quad \frac{3}{8} (4 \quad -\frac{1}{12} (3 \quad 4 (2 \quad 0.5 (1 (3$$

$$1 (10 \quad 0 (9 \quad \phi (8 \quad \infty (7 \quad \infty (6 \quad -\infty (5 \quad \phi (4 \quad -\infty (3 \quad \phi (2 \quad \phi (1 (4$$

$$.-\infty (12 \quad \phi (11$$

$$1.5 (10 \quad -3 (9 \quad -1 (8 \quad 1 (7 \quad -5 (6 \quad 0 (5 \quad -\infty (4 \quad 4 (3 \quad -\frac{\pi}{2} (2 \quad 0 (1 (5$$

$$e^{1/3} (18 \quad \ln 3 (17 \quad 2 (16 \quad \frac{1}{9} (15 \quad 4 (14 \quad 0 (13 \quad 0.25 (12 \quad \frac{1-\sqrt{3}}{2-\sqrt{5}} (11$$

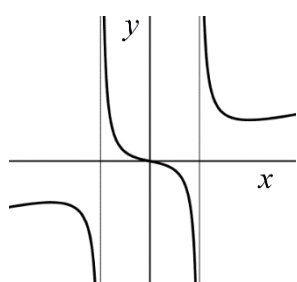
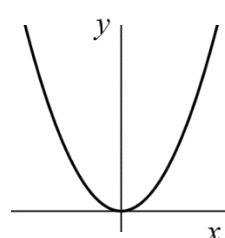
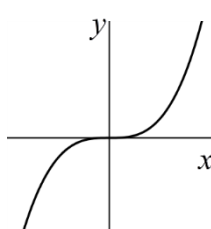
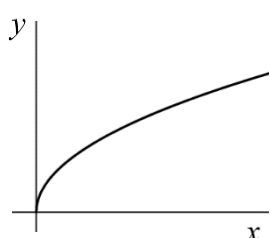
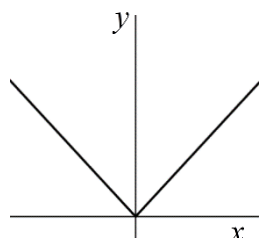
$$.\frac{a-b}{2} (26 \quad \frac{1}{2} (25 \quad -\frac{1}{2} (24 \quad \frac{1}{2} (23 \quad \frac{k}{2} (22 \quad 2.5 (21 \quad \sqrt[5]{\frac{a}{b}} (20 \quad 0 (19$$

פרק 4 - חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי

נגזרות ומשיקים

פונקציות נפוצות:

הפונקציה $f(x) = x^2$: הפונקציה $f(x) = x^3$: הפונקציה $f(x) = \sqrt{x}$: הפונקציה $f(x) = |x|$:



פונקציה עם מכנה, למשל: $f(x) = \frac{5x^3 + 4x}{x^2 - 1}$:

הנגזרת:

לכל פונקציה $f(x)$ קיימת פונקציה, הנקראת פונקציית הנגזרת (או רק "הנגזרת") ומסומנת $f'(x)$, המתקבלת ממנה על פי כללי הגזירה.

כללי הגזירה:

1. כלל גזירה מס' 1: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.
2. כלל גזירה מס' 2 (כפל בקבוע): $f(x) = ax^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot ax^{n-1}$.
3. כלל גזירה מס' 3 (נגזרת של קבוע): $f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$.
4. כלל גזירה מס' 4 (סכום והפרש): $f(x) = u \pm v \Rightarrow f'(x) = u' \pm v'$.
5. כלל גזירה מס' 5 (פונקציה מורכבת): $f(x) = u^n \Rightarrow f'(x) = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.
6. כלל גזירה מס' 6 (נגזרת של $\frac{1}{x}$): $f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
7. כלל גזירה מס' 7 (מכפלה): $f(x) = u \cdot v \Rightarrow f'(x) = u'v + v'u$.
8. כלל גזירה מס' 8 (מנה): $f(x) = \frac{u}{v} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
9. כלל גזירה מס' 9 (שורש): $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

שיפוע של פונקציה

1. השיפוע (m) של פונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה הוא ערך הנגזרת בנקודה $A(x_1, y_1)$, כלומר: $m = f'(x_1)$.
2. השיפוע של המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעל הפונקציה שווה לשיפוע הפונקציה בנקודה $A(x_1, y_1)$.
3. משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $A(x_1, y_1)$ שעליה מתקבלת על ידי הנוסחה למציאת ישר: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

שאלות:

1. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3$	ב. $f(x) = x^7$	ג. $f(x) = x^2$
ד. $f(x) = x$	ה. $f(x) = x^{-3}$	ו. $f(x) = x^{-1}$
ז. $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	ח. $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	ט. $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 2x^3$	ב. $f(x) = 3x^7$	ג. $f(x) = \frac{1}{2}x^4$
ד. $f(x) = \frac{x^6}{7}$	ה. $f(x) = 8x$	ו. $f(x) = 3x^{-2}$
ז. $f(x) = \frac{4}{x}$	ח. $f(x) = 6x^{\frac{1}{2}}$	ט. $f(x) = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = 12$	ב. $f(x) = \frac{7}{8}$
----------------	-------------------------

4. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 5$	ב. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{x^3}{6} + \frac{3x}{4} - \frac{2}{5}$
---------------------------------	---

5. גזור את הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = (5x - 2)^3$	ב. $f(x) = (x^3 + 6)^5$	ג. $f(x) = 3(x - x^2)^2$
ד. $f(x) = \frac{(5-x)^3}{4}$	ה. $f(x) = \frac{2(x+1)^4}{3}$	

6. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \frac{3}{x} & \text{ב.} & f(x) = -\frac{2}{x} & \text{ג.} & f(x) = \frac{1}{x^2} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{3}{x^3} & \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x} & \text{ו.} & f(x) = \frac{2}{3-x} \\ \text{ז.} & f(x) = \frac{6}{x+5} & & & & \end{array}$$

7. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\text{א.} \quad f(x) = (5x+1)(x-3) \quad \text{ב.} \quad f(x) = (5x+1)^3(x-3) \quad \text{ג.} \quad f(x) = x^3(6-x)^4$$

8. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \frac{3x-1}{1+2x} & \text{ב.} & f(x) = \frac{x^2+1}{5x-12} & \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{x^2+8}{x-1} & \text{ה.} & f(x) = \frac{1}{x} & \text{ו.} & f(x) = \frac{3}{x^3} \end{array}$$

9. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} & \text{ב.} & f(x) = 4\sqrt{x+1} & \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^3-1} \\ \text{ד.} & f(x) = (3x+1)\sqrt{x} & \text{ה.} & f(x) = x^2\sqrt{x+3} & \text{ו.} & f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x}} \end{array}$$

10. גזור את הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = ax^4 - bx & \text{ב.} & f(x) = \frac{ax^2}{3} - \frac{x}{b} + c & \text{ג.} & f(x) = \frac{x-2a}{x-4a} \\ \text{ד.} & f(x) = a\sqrt{bx^2+c} & & & & \end{array}$$

11. מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = 2x^3 - 7x$ בנקודה $(2,2)$.

12. מצא את שיפוע הפונקציה $f(x) = \frac{1}{x^2-3}$ בנקודה שבה $x = -2$.

13. מצא את שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = 4\sqrt{x}$ בנקודה שבה $x = 1$.

14. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 2(4x+3)^3$ בנקודה שבה $x = -1$.

15. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{8}{x+1}$ בנקודה שבה $y = 2$.

16. מצא את משוואת המשיק לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$ בנקודה שבה: $x = 1$.

17. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = 3x^2 - 8\sqrt{x}$ בנקודה שבה: $x = 4$.

18. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = 4x - 2\sqrt{x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה המקביל לישר: $y = 3x - \frac{1}{2}$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x .

19. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = x^2 - 2x - 8$ בנקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x .

20. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^4 - 2x$ ששיפועו 2.

21. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x-1}}$ ששיפועו -2.

22. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = \frac{1}{3x^3}$ היוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה- x זווית של 135° .

23. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = ax^2 - 4x$, (a פרמטר) בנקודה שבה $x = 3$ הוא 8. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

24. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{2}{ax+3}$, (a פרמטר) בנקודה שבה $y = 2$ הוא -4. מצא את ערכו של הפרמטר a ואת משוואת המשיק.

25. נתונה הפונקציה: $y = x^3 + a\sqrt{x}$, (a פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 5. מצא את ערך הפרמטר a .

26. נתונה הפונקציה: $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{A}{x}$ (A פרמטר).

שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא 2.

מצא את ערך הפרמטר A.

27. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{a}{\sqrt{bx-1}}$ (פרמטרים a, b) בנקודה (1,6) הוא -6.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת משוואת המשיק.

28. א. בטא באמצעות t את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = x^2 + 1$ בנקודה שבה $x=t$.

ב. מצא את ערכיו של t אם נתון שהמשיק עובר בנקודה (-1,1).

תשובות סופיות:

(1) א. $3x^2$ ב. $7x^6$ ג. $2x$ ד. 1 ה. $-\frac{3}{x^4}$ ו. $-\frac{1}{x^2}$ ז. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$

(2) א. $6x^2$ ב. $21x^6$ ג. $2x^3$ ד. $\frac{6x^5}{7}$ ה. 8 ו. $-\frac{6}{x^3}$ ז. $-\frac{4}{x^2}$ ח. $\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

(3) א. 0 ב. 0 ג. $3x^2 + 4x - 3$ ד. $x^3 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{4}$

(5) א. $15(5x-2)^2$ ב. $15x^2(x^3+6)^4$ ג. $6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $\frac{8(x+1)^3}{3}$

(6) א. $-\frac{3}{x^2}$ ב. $\frac{2}{x^2}$ ג. $-\frac{2}{x^3}$ ד. $-\frac{9}{x^4}$ ה. $-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $-\frac{6}{(x+5)^2}$

(7) א. $10x-14$ ב. $(5x+1)^2(20x-44)$ ג. $x^2(6-x)^3(18-7x)$

(8) א. $\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $\frac{8x}{(x^2+3)^2}$ ד. $\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $-\frac{1}{x^2}$ ו. $-\frac{9}{x^4}$

(9) א. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$ ד. $\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

(10) א. $4ax^3 - b$ ב. $\frac{2ax}{3} - \frac{1}{b}$ ג. $\frac{-2a}{(x-4a)^2}$ ד. $\frac{abx}{\sqrt{bx^2+c}}$ (11) $m=17$ (12) $m=4$

(13) $m=2$ (14) $y=24x+22$ (15) $y=-\frac{1}{2}x+3\frac{1}{2}$ (16) $y=-\frac{1}{2}x+2\frac{1}{2}$

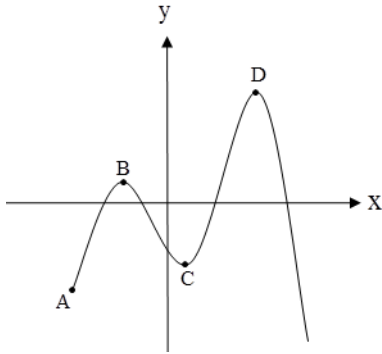
$$\cdot y = 6x - 24, y = -6x - 12 \text{ (19)} \left(\frac{1}{3}, 0 \right) \cdot \neg y = 3x - 1 \cdot \mathcal{N} \text{ (18)} y = 22x - 56 \text{ (17)}$$

$$\cdot y = -x + 1\frac{1}{3}, y = -x - 1\frac{1}{3} \text{ (22)} y = -2x + 8 \text{ (21)} y = 2x - 3 \text{ (20)}$$

$$\cdot A = 1 \text{ (26)} a = 4 \text{ (25)} \cdot a = 2, y = -4x - 2 \text{ (24)} a = 2, y = 8x - 18 \text{ (23)}$$

$$\cdot t = 0, t = -2 \cdot \neg y = 2tx - t^2 + 1 \cdot \mathcal{N} \text{ (28)} b = 2, a = 6, y = -6x + 12 \text{ (27)}$$

חקירת פולינום



נקודות קיצון (נקודות מינימום/מקסימום):

מינימום או מקסימום מקומי (פנימי) - B, C, D
 מינימום או מקסימום קצה - A
 מינימום או מקסימום מוחלט - D

נקודות קיצון מקומיות:

שיפוע המשיק לפונקציה בנקודות קיצון מקומיות הוא אפס.
 בנקודה שבה שיפוע המשיק לפונקציה הוא אפס תיתכן נקודת קיצון מקומית – נקודה
 כזו נקראת נקודה חשודה כקיצון. ניתן לבדוק אם היא אכן נקודת קיצון.

מציאת נקודות קיצון מקומיות:

- א. נגזור את הפונקציה.
- ב. נשווה את הנגזרת לאפס ונחלץ את ערכי ה- x של הנקודות החשודות כקיצון.
- ג. נציב את ערכי ה- x מסעיף ב' בפונקציה המקורית לקבלת ערכי ה- y .
- ד. נקבע אם הנקודה היא נקודת קיצון ונסווג את סוג הקיצון על ידי טבלה.

שאלות:

- (1) מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x) = 10x - x^2$.
- (2) נתונה הפונקציה $f(x) = x^3 - 12x$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (3) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (4) נתונה הפונקציה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$.
 א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?
 ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?
- (5) לפונקציה: $f(x) = ax - x^3 - 5$ יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -1$.
 מצא את ערכו של הפרמטר a .
- (6) לפונקציה: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 1$, (A, B) פרמטרים יש נקודת קיצון ב- $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים A, B .
- (7) לפונקציה: $f(x) = Ax^3 + Bx^2 - 4x$ יש נקודת קיצון ב- $x = -1$ וב- $x = 4$.
 מצא את ערכי הפרמטרים ואת שיעורי ה- y של שתי נקודות הקיצון.
- (8) לפונקציה: $f(x) = ax^4 + bx^2 + 35$ יש נקודת קיצון ששיעוריה $(2, 3)$.
 מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
- (9) נתונה הפונקציה: $f(x) = 10x - x^2$. ענה על הסעיפים הבאים:
 א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(10) נתונה הפונקציה : $f(x) = x^3 - 12x$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(11) נתונה הפונקציה : $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(12) נתונה הפונקציה : $f(x) = x^4 - 4x^3 + 32$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה : $f(x) = x^3$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

(הגרפים לשאלות החקירה מופיעים בסוף התשובות).

(1) $\max(5,25)$ א. $\min(2,-16)$, $\max(-2,16)$

ב. עלייה: $x > 2$, $x < -2$ ירידה: $-2 < x < 2$

(3) א. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

ב. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$ או $x > \sqrt{5}$ ירידה: $0 < x < \sqrt{5}$ או $x < -\sqrt{5}$

(4) א. $\min(3,5)$ ב. עלייה: $x > 3$ עלייה: $x < 3$, $x \neq 0$ (5) $a = 3$

(6) $A = -1$, $B = 3$ (7) $\left(4, -18\frac{2}{3}\right)$, $\left(-1, 2\frac{5}{6}\right)$, $B = -\frac{3}{2}$, $A = \frac{1}{3}$

(8) $a = 2$, $b = -16$

(9) א. כל x ב. $\max(5,25)$ ג. עלייה: $x < 5$ ירידה: $x > 5$ ד. $(0,0)$, $(10,0)$

(8) א. כל x ב. $\max(-2,16)$, $\min(2,-16)$.

ג. עלייה: $x < -2$, $x > 2$ ירידה: $-2 < x < 2$ ד. $(0,0)$, $(\sqrt{12},0)$, $(-\sqrt{12},0)$.

(9) א. כל x ב. $\min(-\sqrt{5},-16)$, $\min(\sqrt{5},-16)$, $\max(0,9)$

ג. עלייה: $-\sqrt{5} < x < 0$ או $x > \sqrt{5}$ ירידה: $0 < x < \sqrt{5}$ או $x < -\sqrt{5}$

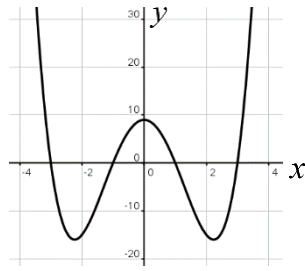
ד. $(0,9)$, $(\pm 1,0)$, $(\pm 3,0)$.

(10) א. כל x ב. $\min(3,5)$ ג. תחומי עלייה: $x > 3$ תחומי ירידה: $x < 3$ ד. $(0,32)$.

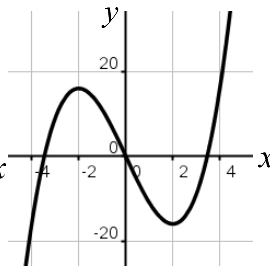
(11) א. כל x ב. אין. ג. עולה לכל x ד. $(0,0)$.

סקיצות לשאלות החקירה:

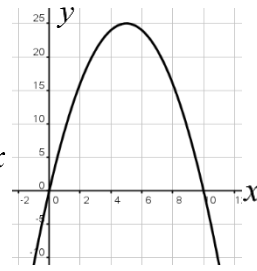
(9)



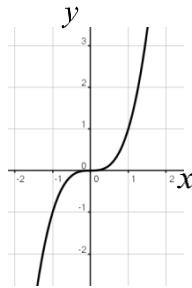
(8)



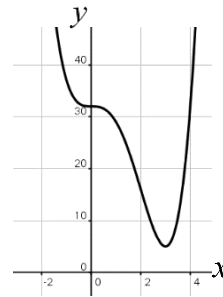
(7)



(11)



(10)



חקירת פונקציות מנה ופונקציות שורש

סעיפי חקירה מלאה של פונקציה:

1. תחום הגדרה.
2. נקודות קיצון.
3. תחומי עלייה וירידה.
4. נקודות חיתוך עם הצירים.
5. אסימפטוטות מקבילות לצירים.
6. שרטוט.

תחום הגדרה של פונקציה:

1. כל פולינום מוגדר לכל x .
2. בפונקציה עם מכנה, אסור שיתקבל אפס במכנה.
3. בפונקציה עם שורש, אסור שיתקבל מספר שלילי בתוך השורש.

אסימפטוטות:

1. אסימפטוטה אנכית:

בעבור ערכי x שמאפסים את המכנה, אבל לא את המונה יש אסימפטוטה אנכית. כאשר ערך x מאפס את המכנה וגם את המונה יש לפרק את המונה והמכנה (על ידי נוסחאות כפל מקוצר או טרינום למשל) ולצמצם. אם אחרי הצמצום אותו ערך של x עדיין מאפס את המכנה תתקבל אסימפטוטה אנכית, אך אם ערך x זה לא מאפס את המכנה אחרי צמצום אין אסימפטוטה אנכית אלא נקודת אי הגדרה.

2. אסימפטוטה אופקית:

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$ (יש בפונקציה קו שבר אחד!)

- אם $m > n$, לפונקציה אין אסימפטוטה אופקית.
- אם $m = n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = \frac{a}{b}$.
- אם $m < n$, לפונקציה יש אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 0$.

שאלות:**1** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x & \text{ב.} & f(x) = 4x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \\ \text{ב.} & f(x) = \frac{2x}{x-3} & \text{ג.} & f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-2x-8} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{5x^3+4x}{x^2-1} & \text{ה.} & f(x) = \frac{x^2}{x^3-4x} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{6}{x^2+1} & & \end{array}$$

2 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{lll} \text{א.} & f(x) = \sqrt{x} & \text{ב.} & f(x) = 2\sqrt{x-3} \\ \text{ב.} & f(x) = 3x\sqrt{1-2x} & \text{ג.} & f(x) = \sqrt{x^2+3x-10} \\ \text{ד.} & f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}} & \text{ה.} & f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}} \\ \text{ו.} & f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}} & & \end{array}$$

3 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{6x}{x^2-10x+9}$

א. מהן נקודות הקיצון של הפונקציה?

ב. מהם תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

4 מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = x^2 - 4x - 12$ **5** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x-2} + 3$ **6** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{5x^2+1}{x^2-9}$ **7** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2x^2-5x+2}{1+3x^2}$ **8** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{3x}{x^2-2x-15}$ **9** מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x^3}$

(10) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{6x^3 - 5x + 1}{1 + 2x^2}$

(11) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{ax + b}{x - b}$

(12) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

(13) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 7x + 12}$

(14) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{x^2 + 6x - 16}{x - 2}$

(15) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{x^2}{2x^2 - 4x}$

(16) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(17) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$

(18) מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה : $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x^2 - 4}$

(19) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{ax^2 - x + b}$

לפונקציה אסימפטוטה אופקית שמשוואתה $y = 2$ ואסימפטוטה אנכית שמשוואתה $x = -1$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(20) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{ax + 8}{x + b\sqrt{x}}$. הפונקציה חותכת את האסימפטוטה

האופקית שלה בנקודה $(2, 16)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(21) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים :

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(22) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(23) נתונה הפונקציה: $f(x) = x + \frac{1}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(24) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x}{x^2 - 5x + 4}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{6x^2 - 10x + 6}{3x^2 - 10x + 3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. מציאת אסימפטוטות המקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{x-3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(27) נתונה הפונקציה: $f(x) = (x-4)\sqrt{x-1}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(28) נתונה הפונקציה: $f(x) = x\sqrt{6-x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(30) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}$. חקור את הפונקציה לפי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום הגדרה.
- ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.
- ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים.
- ו. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

(1) א. כל x ב. כל x ג. $x \neq 3$ ד. $x \neq \pm 1$ ה. $x \neq 0, 2, -2$ ו. $x \neq 4, -2$ ז. כל x .

(2) א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \leq \frac{1}{2}$ ד. $x > -4$ ה. $x \geq 2$ או $x \leq -5$ ו. $x > 3$ או

$$-3 < x < 0$$

ז. $x \leq 2$ וגם $x \neq -2, 1$ (3) א. $\min\left(-3, -\frac{3}{8}\right), \max\left(3, -1\frac{1}{2}\right)$.

ב. תחומי עלייה: $-3 < x < 3$ וגם $x \neq 1$ תחומי ירידה: $3 < x \neq 9$ או $x < -3$.

(4) אין (5) אופקית: $y = 3$ אנכית: $x = 2$ (6) אופקית: $y = 5$ אנכית: $x = \pm 3$.

(7) אופקית: $y = \frac{2}{3}$ (8) אופקית: $y = 0$, אנכית: $x = 5, x = -3$ (9) $x = 0, y = 0$.

(10) אין (11) אופקית: $y = a$, אנכית: $x = b$ (12) אופקית: $y = 1$ אנכית: $x = 1$,

נקודת אי הגדרה: $(2, 4)$ (13) $x = 4, y = 1$ (14) אין, לפונקציה יש נקודת אי

הגדרה ששיעוריה הם $(2, 10)$ (15) אופקית: $y = \frac{1}{2}$, אנכית: $x = 2$ נקודת

אי הגדרה: $(0, 0)$

(16) $x = 0, y = 0$ (17) $x = -1, y = 0$ (18) אופקית: $y = 0$, אנכית: $x = 2$.

(19) $b = -3, a = 2$ (20) $b = 1, a = 2$.

(21) א. $x \neq 0$ ב. $\min(1, 2), \max(-1, -2)$ ג. תחומי עלייה: $1 < x$ או $x < -1$,

תחומי ירידה: $-1 < x < 1, x \neq 0$ ד. אין ה. $x = 0$.

(22) א. $x \neq 3$ ב. אין ג. הפונקציה יורדת בכל ת.ה. ד. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right), \left(0, -\frac{1}{3}\right)$.

ה. $y = 2, x = 3$.

(23) א. $x \neq 1, x \neq 4$ ב. $\min\left(-2, -\frac{2}{3}\right), \max(2, -6)$.

ג. תחומי עלייה: $-2 < x < 2, x \neq 1$, תחומי ירידה: $2 < x \neq 4$ או $x < -2$.

ד. $(0, 0)$ ה. $y = 0, x = 1, x = 4$.

(24) א. כל x ב. $\min\left(1, -\frac{1}{2}\right), \max\left(-3, 1\frac{1}{2}\right)$.

ג. תחומי עלייה: $1 < x$ או $x < -3$, תחומי ירידה: $-3 < x < 1$ ד. $(3, 0), (0, 0)$.

ה. $y = 1$.

(25) א. $x \neq \frac{1}{3}, x \neq 3$ ב. $\min\left(-1, 1\frac{3}{8}\right), \max\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$

וגם $x \neq \frac{1}{3}$ תחומי ירידה: $1 < x \neq 3$ או $x < -1$ ד. $(0, 2)$

ה. $x = 3, x = \frac{1}{3}, y = 2$.

(26) א. $x \geq 3$ ב. $\min(3, 0)$ קצה ג. הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה ד. $(3, 0)$.

(27) א. $x \geq 1$ ב. $\max(1, 0), \min(2, -2)$ קצה ג. תחומי עלייה: $2 < x$.

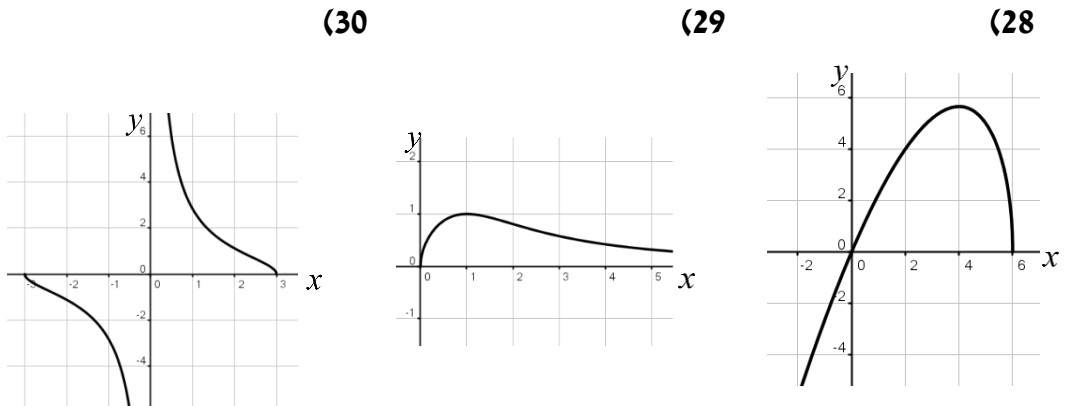
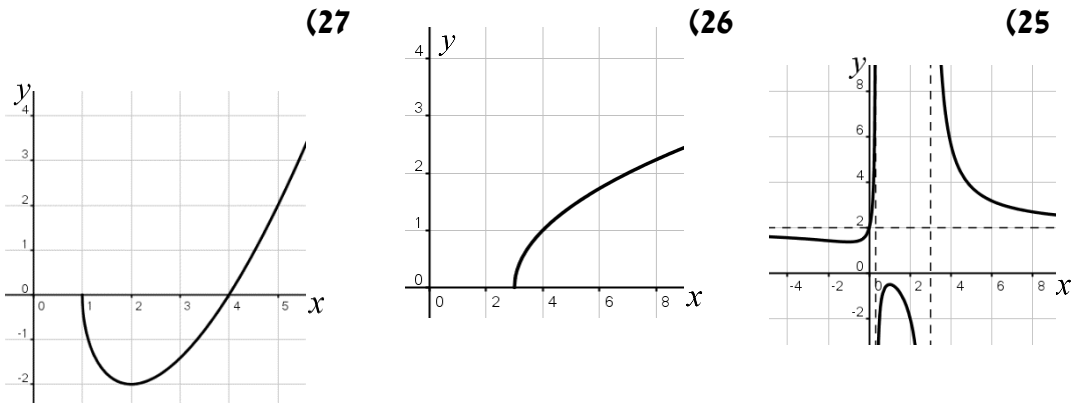
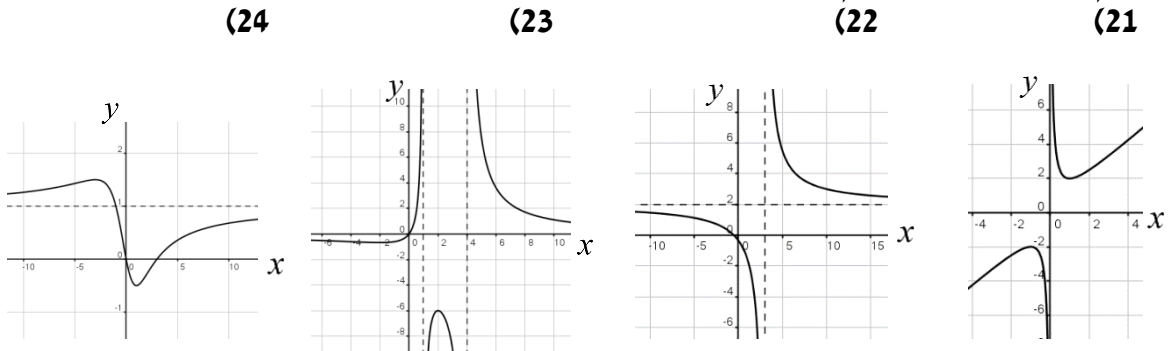
יורדת: $1 < x < 2$ ד. $(1,0), (4,0)$.

(28) א. $x \leq 6$ ב. $\min(6,0), \max(4,4\sqrt{2})$ קצה ג. עולה: $x < 4$, יורדת: $4 < x < 6$ ד. $(0,0), (6,0)$.

(29) א. $x \geq 0$ ב. $\min(0,0), \max(1,1)$ קצה ג. עולה: $0 < x < 1$, יורדת: $1 < x$ ד. $(0,0)$.

(30) א. $-3 \leq x \leq 3$ וגם $x \neq 0$ ב. $\max(-3,0)$ קצה, $\min(3,0)$ קצה ג. עולה: אף x , יורדת: $-3 \leq x \leq 3$, $x \neq 0$ ד. $(-3,0), (3,0)$ ה. $x = 0$.

סקיצות לשאלות החקירה:
(21) (22)



חקירת פונקציה עם פרמטר

סיווג נקודות קיצון באמצעות "y :

אם הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת קיצון אז :

אם $f''(x_1) > 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מינימום.

אם $f''(x_1) < 0$ הנקודה $A(x_1, y_1)$ היא נקודת מקסימום.

שאלות:

(1) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^3 - 12x$.

(2) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^2 - 6x - 16$.

(3) מצא וסווג את נקודות הקיצון של הפונקציה : $f(x) = x^3 - 3b^2x$, $b > 0$ פרמטר. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(4) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{2x}{a^2 + x^2}$ ($a > 0$). חקור לפי הסעיפים הבאים :

א. מציאת תחום הגדרה.

ב. מציאת נקודות קיצון של הפונקציה.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

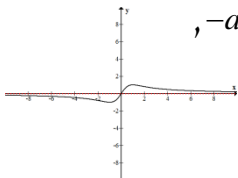
ה. שרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

(1) $\min(2, -16)$, $\max(-2, 16)$ (2) $\min(3, -25)$ (3) $\min(b, -2b^3)$, $\max(-b, 2b^3)$

(4) א. כל x . ב. $\max\left(a, \frac{1}{a}\right)$, $\min\left(-a, -\frac{1}{a}\right)$. ג. תחומי עלייה : $-a < x < a$.

תחומי ירידה : $x < -a$ או $x > a$. ד. $(0, 0)$. ה. אופקית : $y = 0$.



פרק 5 - חשבון אינטגרלי

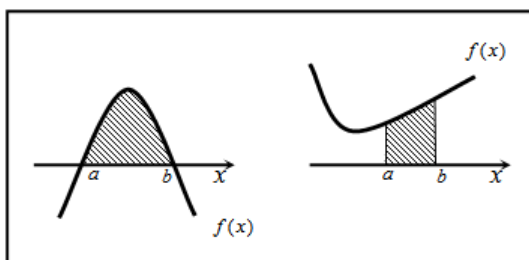
הגדרה וחוקים יסודיים:

כלל האינטגרציה של פונקציה פולינומית: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$

עבור מקדם קבוע a נקבל: $\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c, (n \neq -1)$.

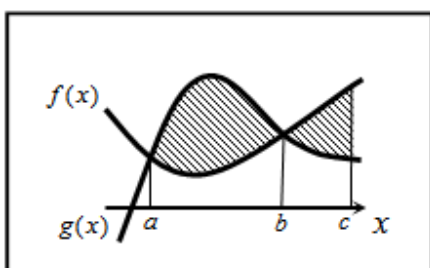
חישוב שטחים באמצעות האינטגרל:

1. שטח הכלוא בין גרף פונקציה וציר ה- x :



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

2. שטח הכלוא בין שני גרפים כד שגרף אחד כולו מעל השני:

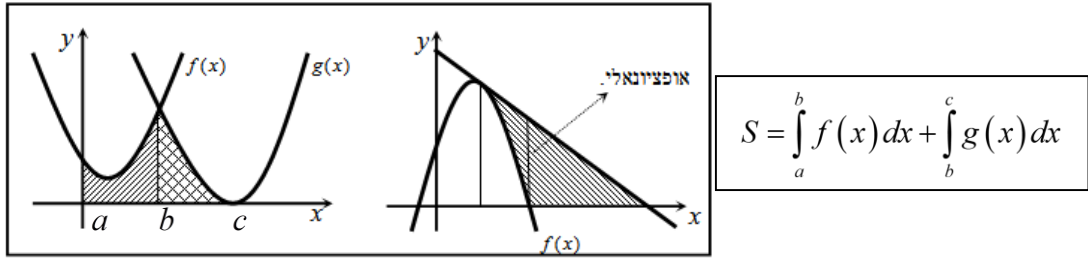


$$S_1 = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$

$$S_2 = \int_b^c (f(x) - g(x)) dx$$

$$S = S_1 + S_2$$

3. שטח הכלוא בין שני גרפים וציר ה- x :



שאלות יסודיות - חישובי אינטגרלים:

1. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\int x^3 dx = \text{א.} \quad \int 12x^5 dx = \text{ב.}$$

$$\int x^4 dx = \text{ג.} \quad \int 2x^3 dx = \text{ד.}$$

$$\int \frac{2}{3}x^5 dx = \text{ה.} \quad \int 7dx = \text{ו.}$$

$$\int \left(\frac{5}{6}x^4 + 16x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3} \right) dx = \text{ז.} \quad \int \left(\frac{4x^3}{5} - ax^2 - \frac{2ax}{b} + b \right) dx = \text{ח.}$$

2. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\int x^{-3} dx = \text{א.} \quad \int \frac{1}{x^3} dx = \text{ב.}$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^4} - \frac{a}{x^3} + \frac{x}{a} \right) dx = \text{ג.} \quad \int \frac{2x^3 + x - 2}{x^3} dx = \text{ד.}$$

3. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\int x^{\frac{1}{2}} dx = \text{א.} \quad \int \sqrt{x} dx = \text{ב.}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \text{ג.} \quad \int \left(\frac{4}{\sqrt{x}} + 3\sqrt{x} \right) dx = \text{ד.}$$

4. מצא את האינטגרלים הבאים:

$$\int (5x-1)^3 dx = \text{א.} \quad \int 3(2-7x)^4 dx = \text{ב.} \quad \int \frac{18}{(6x+5)^2} dx = \text{ג.}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{6x-3}} dx = \text{ד.} \quad \int \sqrt{ax+b} dx = \text{ה.}$$

שאלות יסודיות – מציאת פונקציה קדומה:5. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 3x^2 - 7$.מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(2, -1)$.6. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - 6$.

ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5. מצא את הפונקציה.

7. הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = x^2 - 8x + 2$. נתון: $f(-2) = 1$.
 א. מצא את $f(x)$.

ב. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = 1$.

8. נתונה הנגזרת של פונקציה $f(x)$: $f'(x) = 9x^2 - 4$.
 ערך הפונקציה בנקודה $x = 1$ הוא 3.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 1$.
 ב. מצא את $f(x)$.

ג. מצא את נקודות החיתוך של המשיק עם הצירים.

9. הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 2x - 3$. לפונקציה משיק ששיפועו הוא -3.
 א. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא 7.

10. הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -6x - 5$.

המשיק לפונקציה בנקודה A יוצר זווית של 45° עם הכיוון החיובי של ציר ה- x .
 א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה A.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה באותה הנקודה הוא -6.

ג. מצא את משוואת המשיק.

11. הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = 3x - 4$.

הישר $y = 2x + 5$ משיק לגרף הפונקציה. מצא את $f(x)$.

12. נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x) = 8x - 6$.

א. מצא את $f'(x)$ אם ידוע כי לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x = 2$.

ב. מצא את $f(x)$ אם ידוע כי ערך הפונקציה בנקודת הקיצון הוא $2/3$.

13. נתונה הנגזרת השנייה של הפונקציה $f(x)$: $f''(x) = 2x - 3$.

א. שיפוע המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 1$ הוא 4. מצא את $f'(x)$.

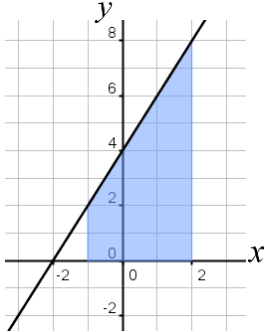
ב. ערך הפונקציה בנקודת ההשקה הוא 5. מצא את $f(x)$.

האינטגרל המסוים:

14. בסרטון זה מוסבר האינטגרל המסוים.

$$\int_{-2}^1 (x^2 - 6x + 1) dx$$

חשב את האינטגרל המסוים הבא:

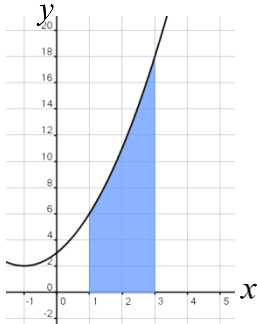
**חישובי שטחים – פונקציה פולינומית:**

15. בסרטון זה מוסבר כיצד להשתמש באינטגרל המסוים כדי לחשב שטחים.

$$y = 2x + 4$$

חשב את השטח המוגבל שמתחת הישר,

$$x = -1 \text{ ו- } x = 2$$



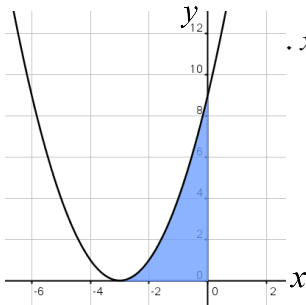
16. חשב את השטח המוגבל בין גרף

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

$$x = 1 \text{ ו- } x = 3$$

17. נתונה הפונקציה $y = (x+3)^2$ א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לצירים.

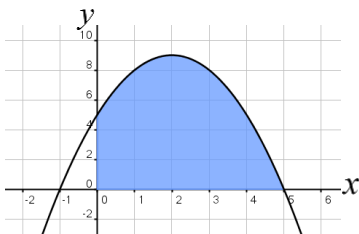
18. נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4x + 5$

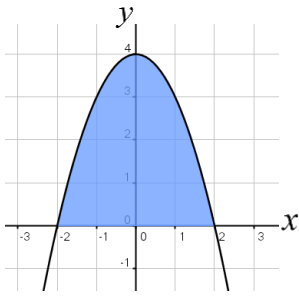
א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה

$$x \text{ ו- } y$$

ב. מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,

$$x \text{ ו- } y$$



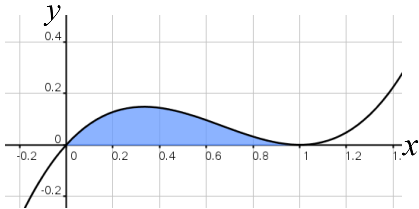


19. נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לציר ה- x .

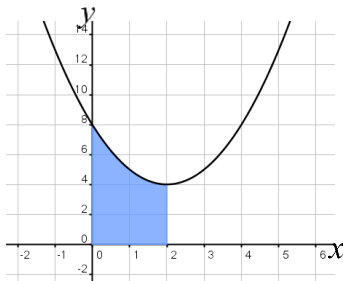
20. מצא את השטח המוגבל תחת הפונקציה: $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

וציר ה- x כמתואר באיור:

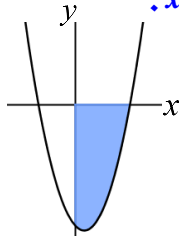


21. נתונה הפונקציה $y = x^2 - 4x + 8$.

חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הצירים וקדקוד הפרבולה.

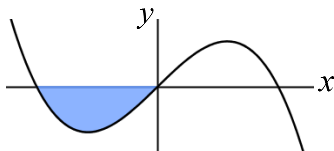


22. בסרטון זה מוסבר כיצד לחשב שטח שמתחת לציר ה- x .



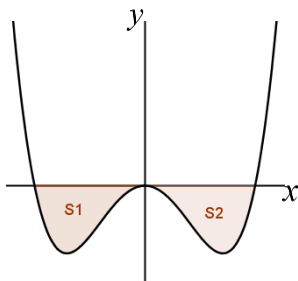
נתונה הפונקציה $y = x^2 - x - 6$.

חשב את השטח המוגבל שמתחת לפונקציה ולצירים שברביע הרביעי.



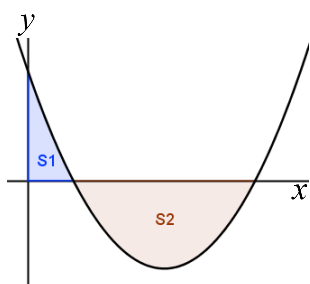
23. נתונה הפונקציה $f(x) = x(4 - x^2)$.

חשב את השטח המוגבל שמתחת הפונקציה וציר ה- x שברביע השלישי.



24. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$.

חשב את השטח המוגבל שבין הפונקציה לציר ה- x .



25. חשב את האינטגרל המסוים של

הפונקציה $y = x^2 - 6x + 5$ בין 0 ל-5.

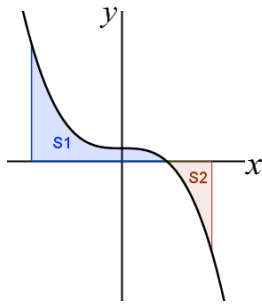
האם התוצאה מייצגת את סכום השטחים: $S_1 + S_2$?

אם כן, הסבר. אם לא, נמק וחשב את סכום זה.

26. א. חשב את ערך האינטגרל הבא: $\int_{-2}^2 (-x^3 + 1) dx$.

ב. נתונה הפונקציה: $f(x) = -x^3 + 1$.

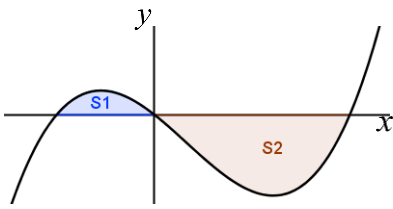
מעבירים ישרים: $x = 2$ ו- $x = -2$ כך שנוצרים השטחים S_1 ו- S_2 כמתואר באיור. חשב את סכום השטחים: $S_1 + S_2$ והסבר מדוע תוצאת החישוב שונה מסעיף א'.



27. נתונה הפונקציה: $y = x^3 - x^2 - 2x$.

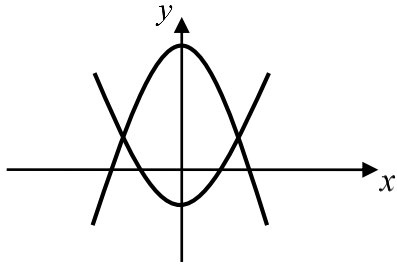
יוצרים את השטחים S_1 ו- S_2 בין גרף הפונקציה וציר ה- x כמתואר באיור.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x .



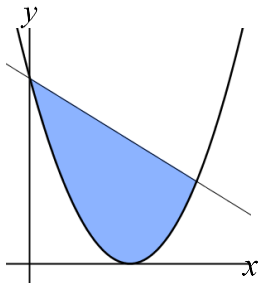
28. נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = 7 - x^2$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.



29. נתונות הפונקציות: $y = -x + 9$; $y = (x - 3)^2$.

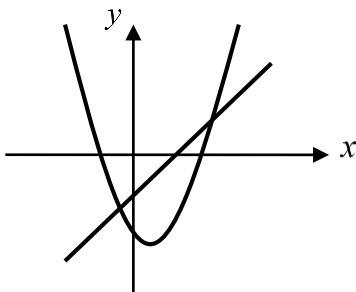
חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.



30. נתונות הפונקציות הבאות:

$f(x) = x^2 - 4x - 12$, $g(x) = x - 6$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הגרפים של הפונקציות הנ"ל.

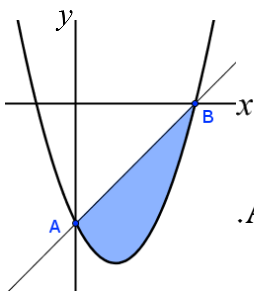


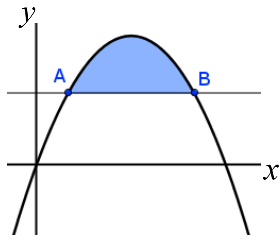
31. נתונה הפונקציה: $y = 3x^2 - 6x - 9$.

א. מצא נקודות חיתוך של הפונקציה

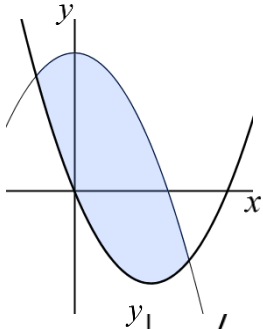
עם הצירים (נסמן ב-A ו-B).

ב. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AB.

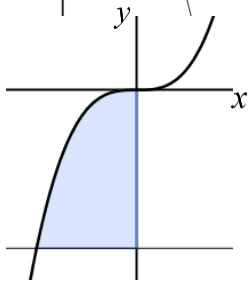




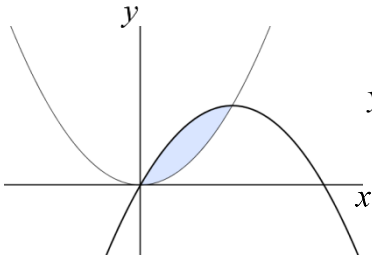
32. נתונה הפרבולה: $y = -x^2 + 6x$ והישר $y = 5$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפרבולה לישר.



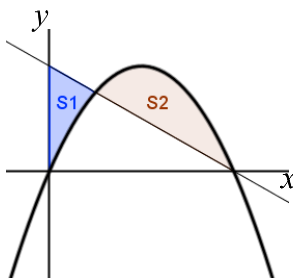
33. חשב את השטח המוגבל בין גרפים של
הפונקציות: $y = x^2 - 4x$; $y = -x^2 + 6$.



34. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3$.
חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה,
הישר $y = -8$ וציר ה- y כמתואר באיור.



35. מצא את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה: $y = x^2$
לבין גרף הפונקציה: $y = 2x - x^2$.



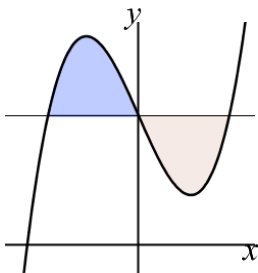
36. נתונות הפונקציות הבאות:

$$g(x) = -x + 4; f(x) = -x^2 + 4x$$

מסמנים את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y ב- S_1 ,
ואת המשך השטח הכלוא בין הגרפים ב- S_2 כמתואר באיור.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות.

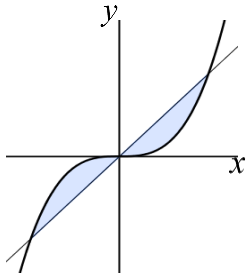
ב. חשב את היחס שבין השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.



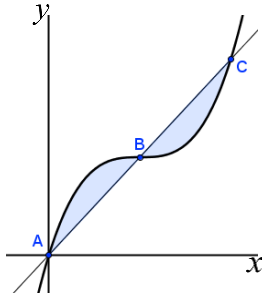
37. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 4x + 5$ והישר $y = 5$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה והישר.

ב. חשב את השטח המוגבל ביניהן.



38. נתונות הפונקציות: $y = x^3$; $y = x$.
חשב את השטח המוגבל ביניהן.



39. נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.
הישר AC חותך את גרף הפונקציה
בנקודות הבאות: $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,2)$.
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה לישר AC.

40. הפונקציות: $f(x) = x^2$ ו- $g(x) = -x^2 + 2x - 1$ נחתכות ב-2 נקודות.

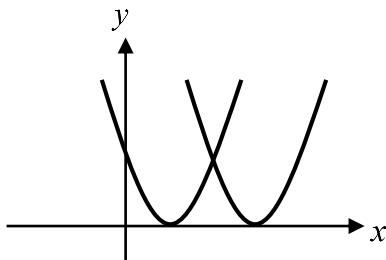
- א. מצא את נקודות החיתוך.
ב. מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות.

41. נתונות הפונקציות: $f(x) = x^2 - 6x + 8$ ו- $g(x) = x + 2$.

- א. סרטט את הפונקציות במערכת צירים אחת.
ב. מצא את השטח המוגבל בין הגרפים והצירים.

42. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות: $f(x) = x^3$, $g(x) = x$.

43. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה $f(x) = x^3 - 4x$ לציר ה- x .

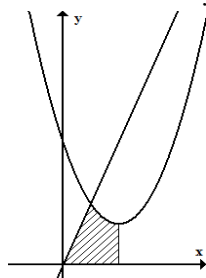


44. נתונות שתי פונקציות:

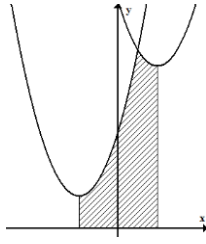
$$f(x) = x^2 - 2x + 1, \quad g(x) = x^2 - 6x + 9$$

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות
ובין ציר ה- x .

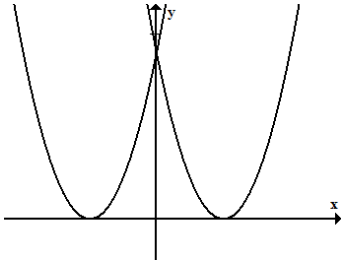
45. הפונקציות המתוארות בשרטוט הן: $y = 3x$; $y = x^2 - 4x + 6$.



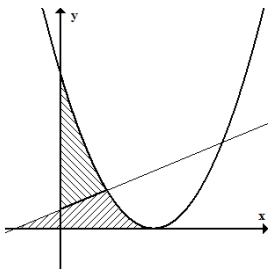
- א. מצא את קדקוד הפרבולה.
ב. מצא נקודת חיתוך של הפרבולה עם הישר.
ג. חשב את השטח המסומן שבשרטוט.



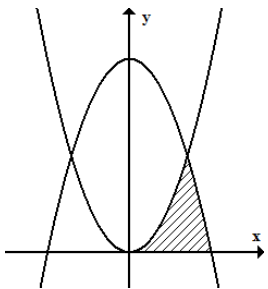
46. נתונות הפונקציות: $y = x^2 - 4x + 14$, $y = x^2 + 4x + 6$.
- מצא את שיעורי ה- x של קדקודי הפרבולות.
 - חשב את נקודת החיתוך בין שתי הפונקציות.
 - חשב את השטח המסומן בשרטוט.



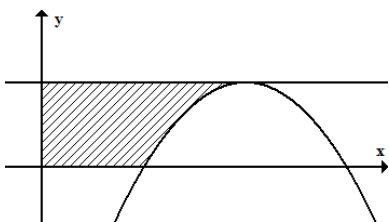
47. נתונות הפונקציות: $f(x) = (x-3)^2$, $g(x) = (x+3)^2$.
- חשב את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות וציר ה- x .



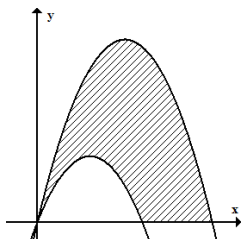
48. נתונות שתי הפונקציות: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$, $y = (x-2)^2$.
- מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- x .
 - מצא את השטח המוגבל בין שתי הפונקציות לציר ה- y .



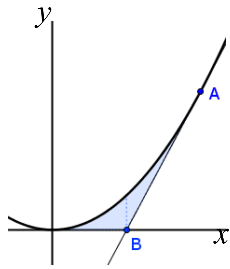
49. נתונות הפונקציות: $y = x^2$, $y = 8 - x^2$.
- חשב את השטח המוגבל על ידי שתי הפונקציות וציר ה- x ברביע הראשון.



50. נתונה הפרבולה: $y = -x^2 + 4x - 3$.
- מעבירים ישר המקביל לציר ה- x מקדקוד הפרבולה.
- מצא את שיעורי קדקוד הפרבולה.
 - מצא את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, הישר והצירים.



51. נתונות הפרבולות הבאות:
- $f(x) = -x^2 + 5x$, $g(x) = -x^2 + 3x$
- חשב את השטח המוגבל בין הגרפים של הפרבולות וציר ה- x .

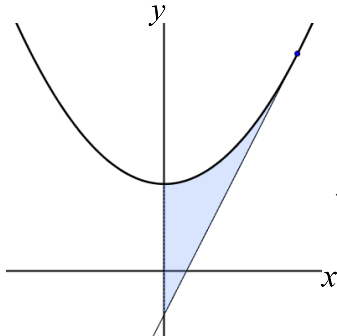


52. נתונה הפונקציה: $y = 2x^2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה מהנקודה: $A(1, 2)$.

המשיק חותך את ציר ה- x בנקודה B .

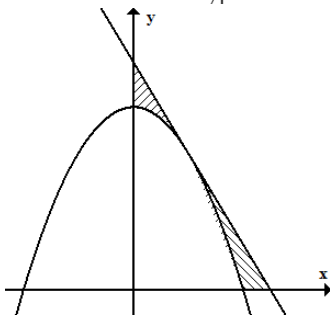
חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .



53. נתונה הפונקציה: $y = 3x^2 + 2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה $(1, 5)$.

חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה, המשיק וציר y .



54. נתונה הפונקציה $y = -x^2 + 4$

בנקודה $(1, 3)$ העבירו משיק.

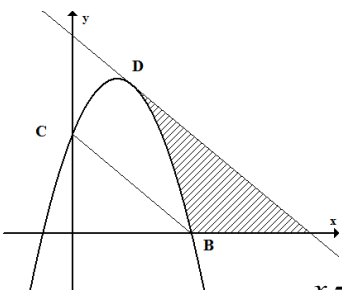
א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הפונקציה,

המשיק וציר ה- y .

ג. חשב את השטח המוגבל בין הפונקציה,

המשיק וציר ה- x .



55. משוואת הפרבולה היא: $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$

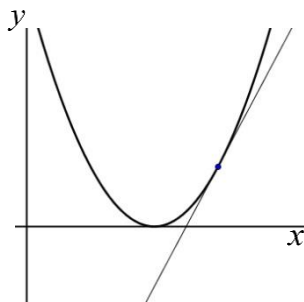
הנקודות $B(2, 0)$, $C(0, 2)$ הן נקודות חיתוך של הפרבולה

עם הצירים. המשיק לפרבולה בנקודה D מקביל לישר BC .

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- x .

ג. מצא את השטח המוגבל בין הפרבולה, המשיק וציר ה- y .



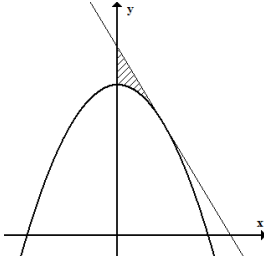
56. נתונה הפונקציה: $y = (x-4)^2$.

מעבירים משיק לגרף הפונקציה דרך הנקודה שבה: $x = 6$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, המשיק וציר ה- x .

שאלות עם פרמטר:

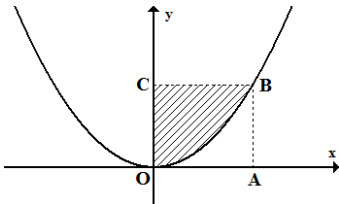
57. נתונה הפרבולה: $y = ax^2 + 8$.

שיפוע המשיק לגרף הפרבולה בנקודה שבה $x = 2$ הוא -2 .

א. חשב את a .

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי המשיק,

הפרבולה וציר y .



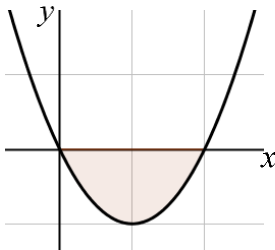
58. הפונקציה המתוארת בשרטוט היא: $y = ax^2$ (a פרמטר).

המרובע ABCD הוא ריבוע.

הקדקוד B נמצא על גרף הפונקציה.

ידוע כי אורך צלע הריבוע היא 2 יחידות.

מצא את ערך הפרמטר a ואת השטח המסומן בשרטוט.

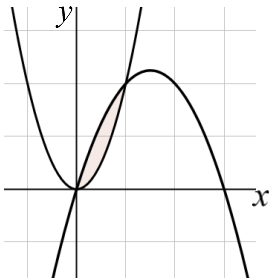


59. הפונקציה: $y = ax^2 + bx$ ($a > 0$, פרמטרים b, a) חותכת

את ציר ה- x בנקודות $(0,0)$ ו- $(2,0)$.

חשב את ערכי הפרמטרים b, a אם ידוע כי השטח

המוגבל ע"י גרף הפונקציה וציר ה- x הוא 8 יחידות שטח.

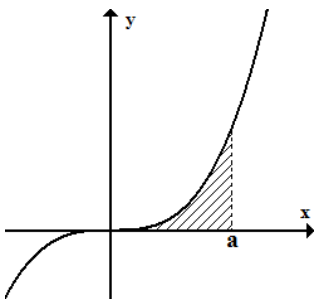


60. הפונקציות $y = 2x^2$ ו- $y = ax^2 + bx$ ($a < 0$) נחתכות

בנקודות: $(0,0)$ ו- $(1,2)$. ידוע כי השטח הכלוא

בין הגרפים של שתי הפונקציות הוא 0.5 יחידות שטח.

מצא את ערכי הפרמטרים b, a .



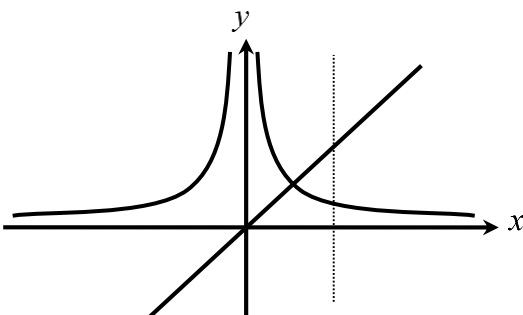
61. נתונה הפונקציה $y = x^3$.

מעבירים אנך לציר ה- x : $x = a$ (a פרמטר חיובי) כך שנוצר

שטח הכלוא בין האנך, גרף הפונקציה וציר ה- x .

א. הבע באמצעות a את השטח המקווקו בציור.

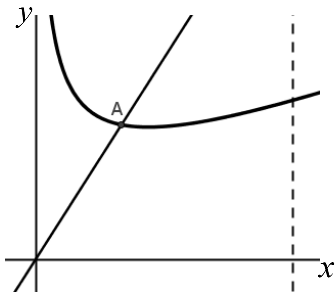
ב. חשב את a אם ידוע כי שטח זה שווה ל- a^2 .

חישובי שטחים – פונקציה רציונאלית:

62. נתונות שתי פונקציות: $g(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 2$ וציר ה- x .

חישובי שטחים - פונקצית שורש:

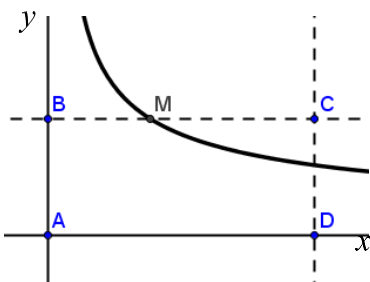
63. באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x}} + x$.

מעבירים ישר: $y = 4x$ החותך את גרף הפונקציה בנקודה A המסומנת באיור.

א. מצא את שיעורי הנקודה A.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$,

הישר $y = 4x$, ציר ה- x ואנך לציר ה- x : $x = 4$.



64. באיור שלפניך מתוארת הפונקציה: $f(x) = \frac{9}{\sqrt{2x-1}}$.

מעבירים את הישרים המקבילים לצירים: $x = 13$

ו- $y = 3$ כך שנוצר המלבן ABCD כמתואר באיור.

הישר $y = 3$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה M.

א. מצא את שיעורי הנקודה M.

ב. מסמנים את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

והישרים ב- S_1 ואת שטח המלבן ב- S_2 . הראה כי: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2}{13}$.

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } \frac{x^4}{4} + c \quad \text{ב. } 2x^6 + c \quad \text{ג. } \frac{x^5}{5} + c \quad \text{ד. } \frac{x^4}{2} + c \quad \text{ה. } \frac{x^6}{9} + c \quad \text{ו. } 7x + c$$

$$\text{ז. } \frac{x^4}{5} - \frac{ax^3}{3} - \frac{ax^2}{b} + bx + c \quad \text{ח. } \frac{x^5}{6} + 4x^4 - \frac{x^3}{6} + 2x^2 - \frac{1}{3}x + c$$

$$(2) \text{ א. } -\frac{x^{-2}}{2} + c \quad \text{ב. } -\frac{1}{2x^2} + c \quad \text{ג. } -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{a}{2x^2} + \frac{x^2}{2a} + c \quad \text{ד. } 2x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + c$$

$$(3) \text{ א. } \frac{x^{1.5}}{1.5} + c \quad \text{ב. } \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c \quad \text{ג. } 2\sqrt{x} + c \quad \text{ד. } 8\sqrt{x} + 2\sqrt{x^3} + c$$

$$(4) \text{ א. } \frac{(5x-1)^4}{20} + c \quad \text{ב. } -\frac{3(2-7x)^5}{35} + c \quad \text{ג. } -\frac{3}{6x+5} + c \quad \text{ד. } \frac{\sqrt{6x-3}}{3} + c$$

$$\text{ה. } \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c \quad (5) \quad f(x) = x^3 - 7x + 5 \quad (6) \quad f(x) = x^2 - 6x + 14$$

$$(7) \text{ א. } f(x) = \frac{x^3}{3} - 4x^2 + 2x + 23 \frac{2}{3} \quad \text{ב. } y = -5x + 27$$

$$(8) \text{ א. } y = 5x - 2 \quad \text{ב. } f(x) = 3x^3 - 4x + 4 \quad \text{ג. } (0, -2), (0, 4, 0)$$

$$(9) \text{ א. } x = 0 \quad \text{ב. } f(x) = x^2 - 3x + 7$$

$$(10) \text{ א. } x = -1 \quad \text{ב. } f(x) = -3x^2 - 5x - 8 \quad \text{ג. } y = x - 5 \quad (11) \quad f(x) = 1.5x^2 - 4x + 11$$

$$(12) \text{ א. } f'(x) = 4x^2 - 6x - 4 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{4x^3}{3} - 3x^2 - 4x - 6$$

$$(13) \text{ א. } f'(x) = x^2 - 3x + 6 \quad \text{ב. } f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 6x + \frac{1}{6}$$

$$(14) \text{ 15 יחיש. } (15) \text{ 15 יחיש. } (16) \text{ } 22\frac{2}{3} \text{ יחיש. } (17) \text{ } (-3, 0) \text{ א. } (18) \text{ 9 יחיש.}$$

$$(18) \text{ א. } (-1, 0), (5, 0) \quad \text{ב. } 33\frac{1}{3} \text{ יחיש. } (19) \text{ א. } (-2, 0), (2, 0) \quad \text{ב. } 10\frac{2}{3}$$

$$(20) \text{ } \frac{1}{12} \text{ יחיש. } (21) \text{ } 10\frac{2}{3} \text{ יחיש. } (22) \text{ } 13.5 \text{ יחיש. } (23) \text{ } 4 \text{ יחיש. } (24) \text{ } 4\frac{4}{15} \text{ יחיש.}$$

$$(25) \text{ א. } -8\frac{1}{3} \quad \text{ב. } 13 \quad (26) \text{ א. } 4 \quad \text{ב. } 9.5 \text{ יחיש. } (27) \text{ א. } (-1, 0), (0, 0), (2, 0) \quad \text{ב. } 3\frac{1}{12} \text{ יחיש.}$$

$$(28) \text{ } 21\frac{1}{3} \text{ יחיש. } (29) \text{ } 20\frac{5}{6} \text{ יחיש. } (30) \text{ } 57\frac{1}{6} \text{ יחיש. } S =$$

$$(31) \text{ א. } A(0, -9), B(3, 0) \quad \text{ב. } 13.5 \text{ יחיש.}$$

$$(32) \text{ } 10\frac{2}{3} \text{ יחיש. } (33) \text{ } 21\frac{1}{3} \text{ יחיש. } (34) \text{ } 12 \text{ יחיש. } (35) \text{ } \frac{1}{3} \text{ יחיש.}$$

$$(36) \text{ א. } (1, 3), (4, 0) \quad \text{ב. } 2\frac{5}{11} \quad (37) \text{ א. } (-2, 5), (0, 5), (2, 5) \quad \text{ב. } 8 \text{ יחיש.}$$

$$(38) \text{ } \frac{1}{2} \text{ יחיש. } (39) \text{ } \frac{1}{2} \text{ יחיש. } (40) \text{ א. } (0, 0), (1, 1) \quad \text{ב. } \frac{1}{3} \text{ יחיש. } (41) \text{ } 7\frac{1}{3} \text{ יחיש.}$$

$$(42) \text{ } 0.5 \text{ יחיש. } (43) \text{ } 8 \text{ יחיש. } (44) \text{ } \frac{2}{3} \text{ יחיש.}$$

(45) א. (2,2) ב. (1,3) ג. $3\frac{5}{6}$ יח"ש.

(46) א. $x=2, x=-2$ ב. (1,11) ג. $25\frac{1}{3}$ יח"ש. (47) 18 יח"ש.

(48) א. $\frac{4}{3}$ יח"ש ב. $1\frac{7}{12}$ יח"ש. (49) $4\frac{5}{12}$ יח"ש.

(50) א. (2,1) ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש (51) $16\frac{1}{3}$ יח"ש. (52) $\frac{1}{6}$ יח"ש. (53) 1 יח"ש.

(54) א. $y=-2x+5$ ב. $\frac{1}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{7}{12}$ יח"ש.

(55) א. $y=-x+4$ ב. $2\frac{2}{3}$ יח"ש. ג. $\frac{2}{3}$ יח"ש.

(56) א. $y=4x-20$ ב. $\frac{2}{3}$ יח"ש. (57) א. $a=-\frac{1}{2}$ ב. $\frac{4}{3}$ יח"ש.

(58) $a=\frac{1}{2}, a=2\frac{2}{3}$ יח"ש. (59) $a=6, b=-12$ (60) $a=-1, b=3$ (61) א. $\frac{a^4}{4}$ ב. $a=2$.

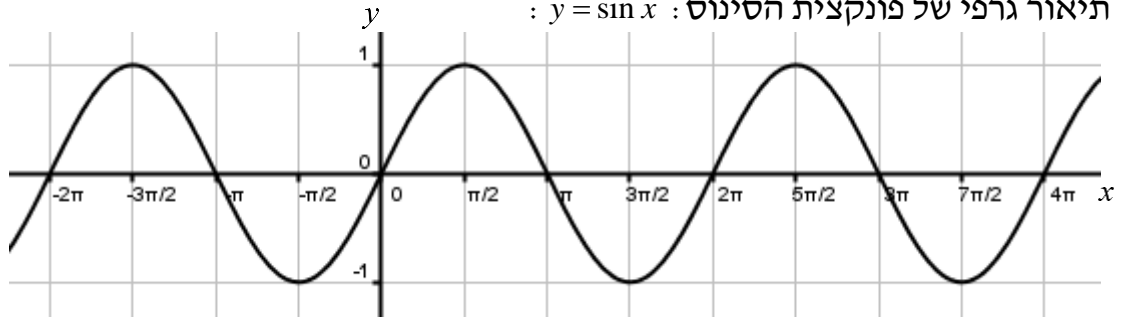
(62) 1 יח"ש S (63) א. $A(1,4)$ ב. 15.5 יח"ש. (64) א. $M(5,3)$.

פרק 6 - חשבון דיפרנציאלי

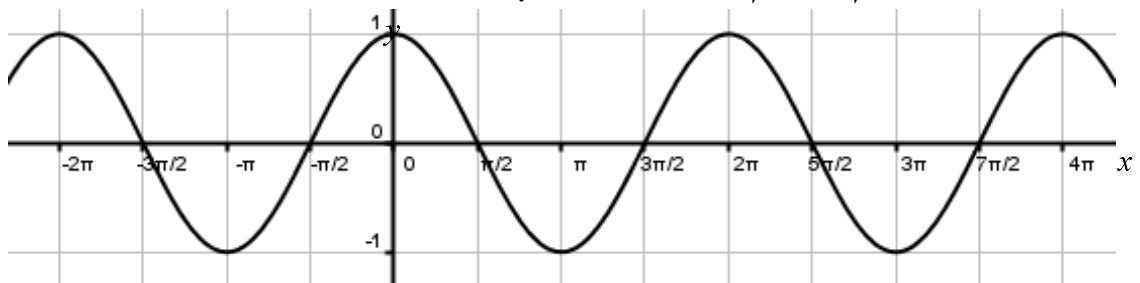
פונקציות טריגונומטריות

הגדרות כלליות:

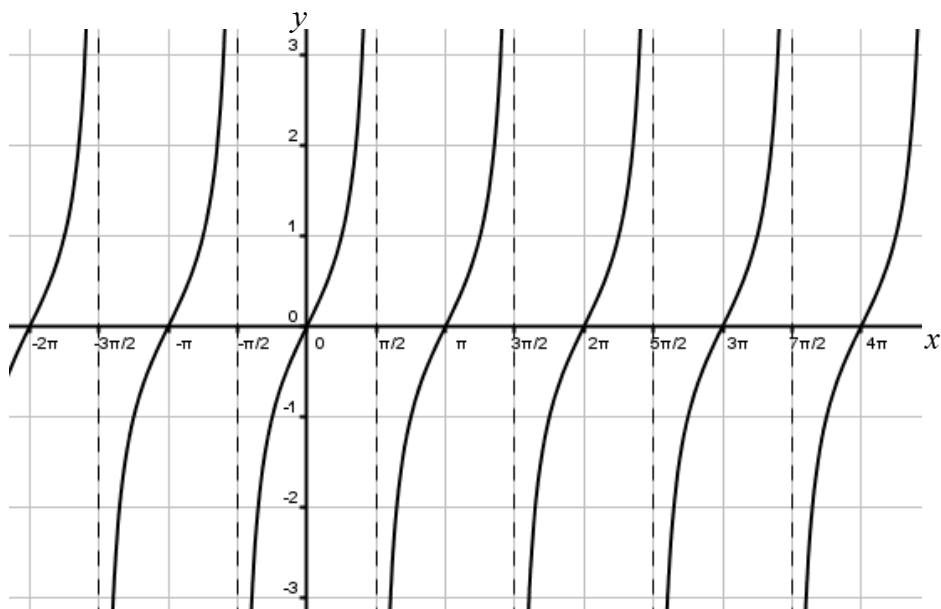
תיאור גרפי של פונקצית הסינוס : $y = \sin x$



תיאור גרפי של פונקצית הקוסינוס : $y = \cos x$



תיאור גרפי של פונקצית הטנגנס : $y = \tan x$



הנגזרות הטריגונומטריות היסודיות:

הנגזרת	הפונקציה
$y' = \cos x$	$y = \sin x$
$y' = -\sin x$	$y = \cos x$
$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \tan x$
$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \cot x$

זוגיות של פונקציות:

1. פונקציה $f(x)$ תקרא זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = f(-x)$.
2. פונקציה $f(x)$ תקרא אי-זוגית אם היא מקיימת את התכונה הבאה: $f(x) = -f(-x)$.
3. פונקציה אשר אינה מקיימת אף אחת מהתכונות הנ"ל אינה זוגית ואינה אי-זוגית.

מחזוריות של פונקציות:

1. פונקציה $f(x)$ תיקרא מחזורית במחזור T אם היא מקיימת:

$$f(x+T) = f(x)$$
 לכל x בתחום הגדרתה.
2. מחזור של פונקציות טריגונומטריות:
 - הפונקציה $f(x) = \sin x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\sin(x+2\pi) = \sin x$.
 - הפונקציה $f(x) = \cos x$ מחזורית במחזור $T = 2\pi$ שכן: $\cos(x+2\pi) = \cos x$.
 - הפונקציה $f(x) = \tan x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\tan(x+\pi) = \tan x$.
 - הפונקציה $f(x) = \cot x$ מחזורית במחזור $T = \pi$ שכן: $\cot(x+\pi) = \cot x$.

3. מחזור של פונקציות מהצורה: $y = a + c \cdot f(mx+n)$ (כאשר $f(x)$ מחזורית

במחזור T) תלוי רק במקדם של x והוא: T/m . דוגמאות:

- הפונקציה $f(x) = \sin(3x)$ מחזורית במחזור $T = 2\pi/3$.
- הפונקציה $f(x) = 5 - 2\cos(2x - \pi)$ מחזורית במחזור $T = \pi$.
- הפונקציה $f(x) = \tan(0.1x)$ מחזורית במחזור $T = \pi/0.1 = 10\pi$.

שאלות:

1. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x} \quad \text{ג.} \quad f(x) = 2x \sin x + 4 \tan x \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sin x + 3 \cos x + x \quad \text{א.}$$

2. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sin 3x + 2 \cos 5x \quad \text{א.}$$

3. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 2 \cos^4 x \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sin^3 x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \sin^3 2x \quad \text{ד.} \quad f(x) = \sin^2 x \quad \text{ג.}$$

$$f(x) = \tan^2 4x \quad \text{ו.} \quad f(x) = \cos^2 2x \quad \text{ה.}$$

4. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sqrt{\sin 3x} \quad \text{א.}$$

5. גזור את הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \sin^4 2x - \cos^4 2x \quad \text{ב.} \quad f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x \quad \text{ג.}$$

6. מצא את המחזור של הפונקציות הבאות:

$$y = \sin^2 x \quad \text{ד.} \quad y = \tan \frac{x}{3} \quad \text{ג.} \quad y = 5 + 3 \sin(4x + 1) \quad \text{ב.} \quad y = 2 \sin x \quad \text{א.}$$

7. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \cos x$ בנקודה $A\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.8. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \sin 2x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{2}$.9. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \tan 3x$ בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{9}$.

10. מצא את משוואות המשיקים לפונקציה: $f(x) = 4\sin^2 x$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = 1$ בתחום $[0, \pi]$.
11. שיפוע המשיק לפונקציה: $f(x) = \sqrt{\sin x + a}$, (פרמטר a) בנקודה שבה $y = 1$ בתחום $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ הוא $\frac{\sqrt{3}}{4}$. מצא את ערך הפרמטר a .
12. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות בתחום הנתון:
- א. $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos 2x}$ $[0, 2\pi]$ ב. $f(x) = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ $[-\pi, \pi]$
- ג. $f(x) = \tan x$ $[0, 2\pi]$
13. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x + \cos x$ בתחום: $[0: 2\pi]$.
14. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}x$ בתחום: $[0: 2\pi]$.
15. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin x + 1}{\sin x - 1}$ בתחום: $[0: 2\pi]$.
16. מצא את נקודות הקיצון המוחלטות של הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x$ בתחום: $[0: 1.5\pi]$.
17. לפונקציה: $f(x) = a\sin x + b\sin^3 x$, (פרמטרים a, b) יש נקודת קיצון ששיעוריה $\left(\frac{7\pi}{6}, -1\right)$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .
18. מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin 3x}$ בתחום: $[0: \pi]$.
19. מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}$ בתחום: $[0: \pi]$.
20. מצא את האסימפטוטות האנכיות לפונקציה: $f(x) = \tan x$ בתחום: $[-\pi: \pi]$.

21. נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\cos x$ בתחום $[0, 2\pi]$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

22. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$ בתחום $[0, \pi]$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מציאת אסימפטוטות אנכיות.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

23. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$.

- מצא בתחום $[0, \pi]$ את נקודות החיתוך עם הצירים של הפונקציה ואת נקודות הקיצון שלה.
- הוכח שהפונקציה זוגית.
- שרטט את הפונקציה בתחום $[-\pi, \pi]$.

24. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4x - 3\tan x$ בתחום $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

- חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:
- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
 - מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
 - תחומי עלייה וירידה של גרף הפונקציה.
 - מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
 - מציאת אסימפטוטות אנכיות.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

25. נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan(x^2 - 4x)$ בתחום $[0, 4]$.

חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלות מבחינות:

26. נתונה הפונקציה: $f(x) = a \sin^2 x - 5 \sin x + ax$ (פרמטר a) בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

ידוע כי הישר: $y = ax - 2$ חותך את גרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{6}$.

- מצא את a וכתוב את הפונקציה $f(x)$.
- מצא נקודה על גרף הפונקציה בתחום הנתון שבה שיפוע המשיק הוא: $m = 2$.
- האם קיימות נקודות נוספות בתחום הנתון ששיפוע המשיק דרכן הוא 2? נמק את תשובתך.
- כתוב את משוואת המשיק העובר דרך הנקודה שמצאת.

27. נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = x^2 + \cos^2 x$ ו- $g(x) = x^2 + \sin^2 x$.

- הוכח כי ההפרש: $f(x) - g(x)$ שווה ל- $\cos 2x$.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות בתחום: $-\pi < x < \pi$.
- ישר $x = t$, $(0 < t < 1)$ חותך את הגרפים בנקודות A ו-B ומהן מעבירים משיקים לפונקציות. ידוע כי ההפרש בין שיפוע המשיק של גרף הפונקציה $g(x)$ לשיפוע המשיק של גרף הפונקציה $f(x)$ הוא 1. מצא את כל הערכים האפשריים עבור t .

28. נתונה הפונקציה: $f(x) = 4 \sin 2x - 2$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים את הישר $y = k$. היעזר בסקיצה ומצא לאילו ערכי k הישר יחתוך את גרף הפונקציה בשתי נקודות בדיוק.
- העבירו ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום המוחלט שלה. כמו כן העבירו מנקודה זו אנך לציר x . מצא את שטח המלבן הנוצר על ידי הצירים, המשיק והאנך.

29. נתונה הפונקציה: $f(x) = \cos^2 x - \cos x - 2$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגן.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

30. נתונה הפונקציה: $y = \cos x + \frac{1}{m} \sin mx$, $1 < m < 3$, (m פרמטר).

הנגזרת של הפונקציה מתאפסת כאשר: $x = -\frac{\pi}{2}$.

- א. מצא את ערך הפרמטר m .
- ב. האם הנקודה שבה: $x = -\frac{\pi}{2}$ היא נקודת קיצון? אם כן קבע את סוגה.
אם לא נמק מדוע.
- ג. מצא כמה נקודות קיצון מקומיות יש לגרף הפונקציה בתחום: $0 < x < 2\pi$.
- ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון.

31. נתונה הפונקציה הבאה: $y = (\sin x + 1) \cdot \cos x$ בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- ב. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה.
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ד. כמה פתרונות יש למשוואה: $(\sin x + 1) \cdot \cos x = 1$ בתחום הנתון?

32. נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan 2x - 8 \sin 2x$ בתחום: $-0.25\pi < x < 0.25\pi$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים בתחום הנתון.
- ב. כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- ג. מצא את נקודות הקיצון של גרף הפונקציה בתחום הנתון.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

33. נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cos x - x$ בתחום: $-3\pi \leq x \leq 3\pi$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- ב. 1. הראה כי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x מאפסות את הנגזרת של הפונקציה.
2. קבע אלו נקודות מנקודות החיתוך הן נקודות קיצון ואלו אינן נקודות קיצון ומצא את סוג הקיצון בכל מקרה.

34. נתונה הפונקציה: $y = (\cos x + k)^2$, פרמטר, בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.

הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x = \frac{2\pi}{3}$.

- מצא את k וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודת המקסימום שאיננה מוחלטת בתחום הנתון.
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות מינימום שאינן מוחלטות? אם כן מהן?

35. נתונה הפונקציה: $f(x) = m \sin x + k \cos^2 x$, (m פרמטר).

מעבירים משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \pi$ שמשוואתו

$$y = -6x + 6\pi + \sqrt{7}.$$

- מצא את ערכי הפרמטרים k ו- m .
- מצא את נקודות הקיצון בתחום: $-0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה וקבע עפ"י הסקיצה בכמה נקודות גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בתחום הנ"ל.

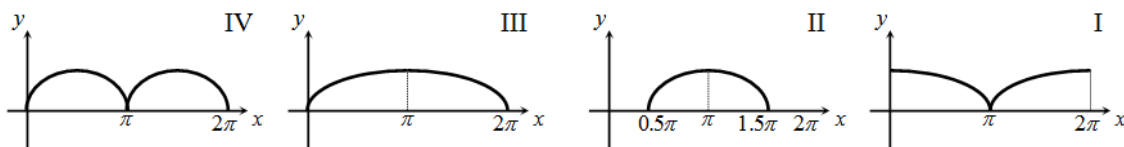
36. נתונה הפונקציה: $f(x) = \tan x + kx$, (k פרמטר) בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

- מצא את האסימפטוטה האנכית של הפונקציה בתחום הנתון.
- הפונקציה: $g(x) = \tan^2 x + kx$ חותכת את הפונקציה $f(x)$ בשתי נקודות החיתוך שלה עם ציר ה- x בתחום הנתון.
- מצא את ערך הפרמטר k .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

37. לפניך הפונקציות הבאות: $f(x) = \sqrt{-\cos x}$ ו- $g(x) = \sqrt{\cos x + 1}$.

הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בתחום $0.5\pi \leq x \leq 1.5\pi$ והפונקציה $g(x)$ מוגדרת בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

- האם הגרפים חותכים את ציר ה- x בתחום הנתון? הראה חישוב מתאים.
- האם הגרפים חותכים זה את זה בתחום הנתון? אם כן מצא את נקודות החיתוך.
- מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון וקבע את סוגה.
- לפניך ארבעה איורים: I, II, III, ו-IV. קבע על סמך הסעיפים הקודמים איזה איור מתאר את הגרף של $f(x)$ ואיזה מתאר את הגרף של $g(x)$. נמק.



תשובות סופיות:

- (1) א. $\cos x - 3\sin x + 1$. ב. $2\sin x + 2x\cos x + \frac{4}{\cos^2 x}$. ג. $\frac{\cos x}{(1 + \sin x)^2}$.
- (2) א. $3\cos 3x - 10\sin 5x$. ב. $-\frac{2}{1 + \sin x}$. ג. $3\sin^2 x \cdot \cos x$. ד. $-8\cos^3 x \sin x$.
- (3) א. $\sin 2x$. ב. $6\sin^2 2x \cos 2x$. ג. $-2\sin 4x$. ד. $\frac{8\tan 4x}{\cos^2 4x}$.
- (4) א. $\frac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}$. ב. $\frac{\cos^2 2x + 1}{\cos 2x\sqrt{\cos 2x}}$. ג. $2\sin 2x$. ד. $4\sin 4x$. ה. $-\sin 4x$.
- (5) א. 2π . ב. 0.5π . ג. 3π . ד. π .
- (6) א. $y = -2x + \pi$. ב. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$. ג. $y = -2\sqrt{3}x + \frac{5\pi\sqrt{3}}{3} + 1$. ד. $y = 2\sqrt{3}x - \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1$.
- (7) א. $a = \frac{1}{2}$. ב. $a = \frac{1}{2}$. ג. $a = \frac{1}{2}$. ד. $a = \frac{1}{2}$.
- (8) א. $0 \leq x \leq 2\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. ב. $-\pi \leq x \leq \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}$.
- (9) א. $0 \leq x \leq 2\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$. ג. $0 \leq x \leq 2\pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.
- (10) א. $\min(0, 1)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, $\min\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$, $\max(2\pi, 1)$ קצה.
- (11) א. $\min(0, 0)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$, $\min\left(\frac{5\pi}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{5\pi}{6}\right)$, $\max(2\pi, -\pi)$ קצה.
- (12) א. $\max\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ מוחלט. ב. $\min\left(\frac{\pi}{2}, -2\frac{2}{15}\right)$. ג. $\max\left(\frac{3\pi}{2}, 2\frac{2}{15}\right)$. ד. $b = -4, a = 3$.
- (13) א. $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$. ב. $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$. ג. $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$.
- (14) א. $0 < x < 2\pi$. ב. $\max(2\pi, 2\pi + 2)$ קצה, $\min\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} - \sqrt{3}\right)$, $0 < x < 2\pi$.
- (15) א. $\max\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\right)$, $\min(0, 2)$ קצה. ג. תחומי עלייה: $\frac{5\pi}{6} < x < 2\pi$ או $0 < x < \frac{\pi}{6}$.
- (16) א. $0 < x < \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$. ב. $\min\left(\frac{\pi}{4}, 2\sqrt{2}\right)$. ד. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.
- (17) א. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$ תחומי ירידה: $0 < x < \frac{\pi}{4}$. ד. $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$.
- (18) א. תחומי ירידה: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. ד. $(0, 2)$.
- (19) א. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$. ב. $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$.
- (20) א. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$. ב. $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$.
- (21) א. תחומי עלייה: $\frac{\pi}{4} < x < \pi$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$. ב. $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$.
- (22) א. חיתוך: $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, קיצון: $\min(\pi, -2)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$, $\min(0, 0)$ קצה.

(24) א. $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$ וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$ ב. $\min\left(\frac{2\pi}{3}, 13.57\right)$ קצה, $\max\left(\frac{\pi}{6}, 0.36\right)$

ג. עולה: $-\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$, יורדת: $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$ $\min\left(-\frac{\pi}{6}, -0.36\right)$ קצה

וגם $x \neq \frac{\pi}{2}$ ד. $(0,0)$ ה. אנכית: $x = \frac{\pi}{2}$

(25) א. $0 \leq x \leq 4$ וגם $x \neq 0.44, x \neq 3.56$

ב. $\max(0,0)$ קצה, $\min(2,-1.16)$, $\max(4,0)$ קצה.

(26) א. $f(x) = 2\sin^2 x - 5\sin x + 2x$, $a = 2$ ב. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi - 3\right)$ ג. לא. ד. $y = 2x - 3$

(27) ב. $\left(-\frac{3\pi}{4}, 6.05\right)$, $\left(-\frac{\pi}{4}, 1.11\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}, 1.11\right)$, $\left(\frac{3\pi}{4}, 6.05\right)$ ג. $t_{1,2} = \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$

(28) א. $\left(\frac{\pi}{12}, 0\right)$; $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$; $(0, -2)$

ב. $\min(0, -2), \max\left(\frac{\pi}{4}, 2\right), \min\left(\frac{3\pi}{4}, -6\right), \max(\pi, -2)$ ד. $-6 < k < 2$, $k \neq -2$ ה. $\frac{\pi}{2}$

(29) א. $(\pi, 0)$, $(0, -2)$ ב. $Max(\pi, 0)$, $Min\left(\frac{\pi}{3}, -2.25\right)$, $Max(0, -2)$

ג. עולה: $1\frac{2}{3}\pi < x < 2\pi$, $\frac{\pi}{3} < x < \pi$ $Min\left(1\frac{2}{3}\pi, -2.25\right)$, $Max(2\pi, -2)$

יורדת: $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $\pi < x < 1\frac{2}{3}\pi$

(30) א. $m = 2$ ב. נקודת פיתול ג. 2 נקודות ד. $(0.5\pi, 0)$, $(1.5\pi, 0)$

(31) א. $(0,1)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, $(1.5\pi, 0)$ ב. $\left(\frac{\pi}{6}, 1.29\right)$, $\left(\frac{5\pi}{6}, -1.29\right)$, $(0,1)$ ד. 2 פתרונות.

(32) א. $(0,0)$, $(\pm 0.23\pi, 0)$ ב. $x = \pm 0.25\pi$ ג. $Min\left(\frac{\pi}{6}, -\sqrt{27}\right)$, $Max\left(-\frac{\pi}{6}, \sqrt{27}\right)$

(33) א. $(-2\pi, 0)$, $(2\pi, 0)$, $(0,0)$ ב. 1. $Min(-2\pi, 0)$, $Max(2\pi, 0)$, $(0,0)$ 2. $(0,0)$ פיתול.

(34) א. $y = (\cos x + 0.5)^2$, $k = 0.5$ ב. $(\pi, 0.25)$ ג. לא.

(35) א. $m = 6$, $k = \sqrt{7}$ ב. $(-0.5\pi, -6)$, $(0.5\pi, 6)$, $(1.5\pi, -6)$ ג. בשתי נקודות.

(36) א. $x = 0.5\pi$ ב. $k = -\frac{4}{\pi} \approx -1.27$

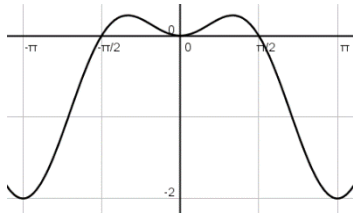
ג. $Max(0,0)$, $Min(0.15\pi, -0.07)$, $Max(0.84\pi, -3.9)$, $Min(\pi, -4)$

(37) א. כן. $f(x): (0.5\pi, 0)$, $(1.5\pi, 0)$ ב. כן. $g(x): (\pi, 0)$, $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

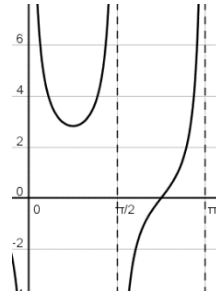
ג. $Max(\pi, 1)$ ד. איור I - $g(x)$ איור II - $f(x)$

סקיצות לשאלות החקירה:

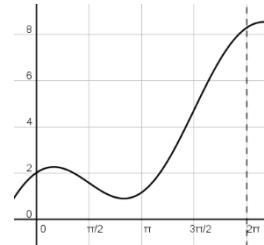
(23)



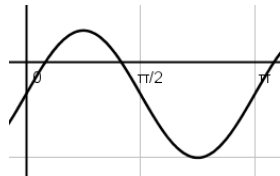
(22)



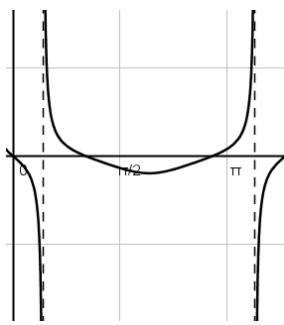
(21)



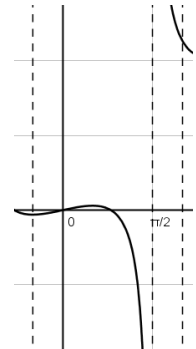
(28)



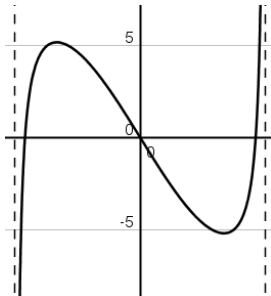
(25)



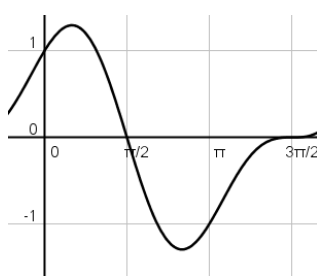
(24)



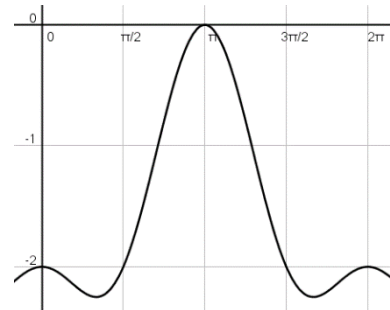
(32)



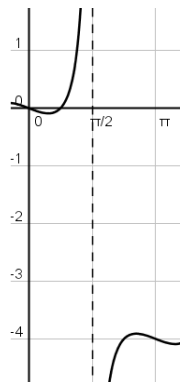
(31)



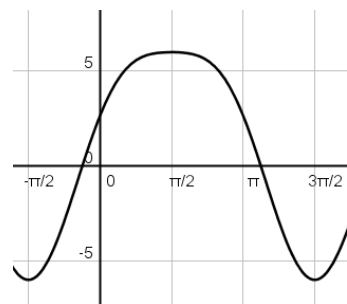
(29)



(36)



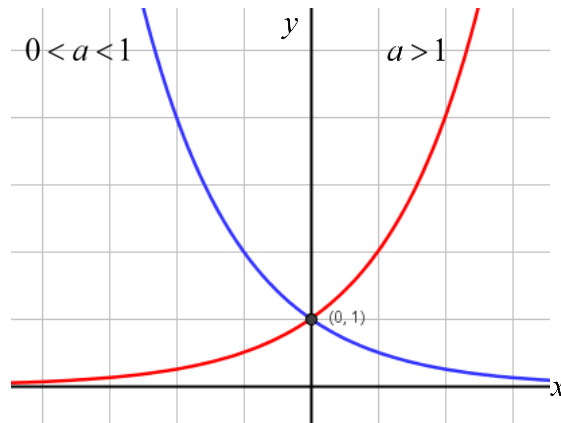
(35)



פונקציות מעריכיות

הגדרות כלליות:

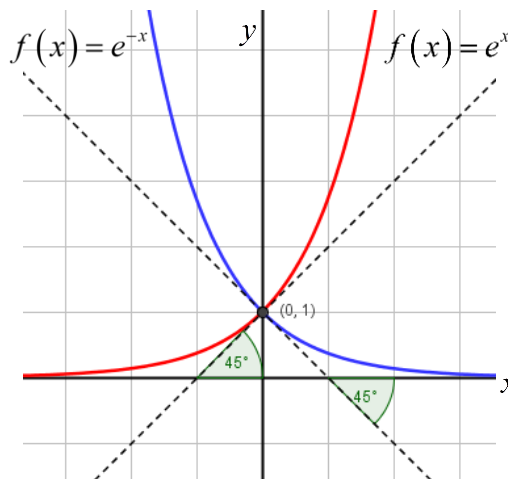
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה מעריכית כללית מהצורה: $f(x) = a^x$
 עבור: $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:



תכונות כלליות:

1. הפונקציות מוגדרות לכל x .
2. הפונקציות תמיד חיוביות.
3. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- y בנקודה: $(0, 1)$.
4. עבור: $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x) = e^x$ ו- $f(x) = e^{-x}$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא 1.
2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = e^{-x}$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- y הוא -1.

נגזרות של פונקציות מעריכיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$
$y = a^{f(x)}$	$y' = a^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln a$
$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = e^{f(x)}$	$y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

תזכורת – כללי הגזירה:

כלל	הפונקציה	תיאור	הנגזרת
.1	$y = a \cdot f(x)$	מכפלה בקבוע	$y' = a \cdot f'(x)$
.2	$y = f(x) + g(x)$	סכום פונקציות	$y' = f'(x) + g'(x)$
.3	$y = f(x) \cdot g(x)$	מכפלת פונקציות	$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
.4	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	מנת פונקציות	$y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
.5	$y = f(g(x))$	פונקציה מורכבת	$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

שאלות:

(1) גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

$$f(x) = e^{x^2-3x} + ex \quad \text{ב.} \quad f(x) = 3e^x + e^{2x} + e^{-x} + 2x + 1 \quad \text{א.}$$

$$f(x) = 3^{x^2} + 4^{-x} \quad \text{ד.} \quad f(x) = 2^{3x} \quad \text{ג.}$$

(2) גזור את הפונקציות הבאות (מכפלת פונקציות):

$$f(x) = (x+1) \cdot 2^x \quad \text{ג.} \quad f(x) = x^2 \cdot e^{4x} \quad \text{ב.} \quad f(x) = x \cdot e^x \quad \text{א.}$$

(3) גזור את הפונקציות הבאות (מנת פונקציות):

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{x^2}{e^x} \quad \text{א.}$$

(4) גזור את הפונקציות הבאות (פונקציה מורכבת):

$$f(x) = \sqrt{e^{2x} + e^{-2x}} \quad \text{ב.} \quad f(x) = 5(e^{2x} - 1)^3 \quad \text{א.}$$

(5) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^x$ בנקודה $A(1, e)$.(6) מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = e^{2x} + xe^{-x}$ בנקודה שבה $x = 0$.(7) מצא את משוואות המשיקים לפונקציה $f(x) = (e+1)e^x - e^{2x}$ בנקודות החיתוך של הפונקציה עם הישר $y = e$.(8) שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = a \cdot 3^{2x-1} + 3^{x-b}$ בנקודה $(1, 15)$ הוא $21 \ln 3$. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

(9) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \quad \text{ג.} \quad f(x) = \frac{3}{e^x-1} \quad \text{ב.} \quad f(x) = \frac{2x-1}{e^x} \quad \text{א.}$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \quad \text{ו.} \quad f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^x} \quad \text{ה.} \quad f(x) = \frac{1}{e^{2x} - 3e^x + 2} \quad \text{ד.}$$

(10) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 e^x$.

(11) מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה : $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$.

(12) נתונה הפונקציה : $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 9}{e^x}$.

הפונקציה משיקה לציר ה- x בנקודה שבה $x = 1.5$.
מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b ואת נקודות הקיצון של הפונקציה.

(13) נתונה הפונקציה : $f(x) = 8^x + p \cdot 2^x + q$. לפונקציה יש נקודת קיצון

בנקודה $(\log_2 3, -19)$. מצא את ערכי הפרמטרים p ו- q .

(14) נתונה הפונקציה $f(x) = (x-3)e^x$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(15) נתונה הפונקציה $f(x) = e^{2x} - 8e^x + 6x + 10$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- מציאת נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(16) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{4x}{e^{0.5x^2}}$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
- תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
- נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(17) נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$. חקור על פי הסעיפים הבאים :

- מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.

- ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
 ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
(18) נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \cdot 3^x$. חקור את הפונקציה על פי הסעיפים הבאים:

- א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה.
 ג. תחומי עלייה וירידה של הפונקציה.
 ד. נקודות חיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלות מבחינות:

(19) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{3x}}{12x^2 + 1}$

- א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

(20) שיפוע המשיק לגרף הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+k}}$ בנקודה שבה: $x=1$ הוא: $-\frac{12}{e^{10}}$.

- א. מצא את ערך הפרמטר k וכתוב את הפונקציה.
 ב. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה.
 ג. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.
 ד. הוכח על סמך הסקיצה את אי-השוויון הבא: $0 < \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}} \leq e^2$.

(21) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

וידוע כי כאשר $x = \ln \frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x) + f''(x) = 8$.

- א. מצא את a .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 16x + 7 - 16 \ln 2$.

- ב. מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.
 ג. מצא את b .
 ד. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .

(22) נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = 6x - e^x$ ו- $g(x) = ae^x - e^{2x} + b$.

ידוע כי לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה אותו שיעור x וכי שתיהן

נפגשות על ציר ה- y .

א. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

ב. הראה כי לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה משותפים.

(23) לגרף הפונקציה: $f(x) = ax^2 \cdot e^{-bx^2}$ יש נקודת קיצון: $(2, \frac{4}{e})$. $a, b \neq 0$.

- מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון הנוספות של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- מעבירים ישר: $y = k$. באיזה תחום ערכים צריך להימצא k כדי שהישר יחתוך את גרף הפונקציה ב-4 נקודות שונות?

(24) לפונקציה: $f(x) = \frac{x^2 - 6x - 7}{e^{ax-1}}$ יש קיצון בנקודה שבה: $x = 1$.

- מצא את ערך הפרמטר a .
- האם יש לגרף הפונקציה נקודות קיצון נוספות? אם כן מצא אותן.
- כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(25) הישר $x = \sqrt{6}$ הוא אסימפטוטה אנכית של הפונקציה: $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + m}$.

- מצא את ערך הפרמטר m וכתוב את הפונקציה.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(26) נתונה הפונקציה: $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$.

- מצא את הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$ וקבע כמה מהן הן נקודות קיצון.
- מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים של הפונקציה.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- בכמה נקודות חותך הישר $y = -0.01$ את גרף הפונקציה?

(27) נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = e^{2x} + ae^x + b$. גוזרים את הפונקציה פעמיים

וידוע כי כאשר $x = \ln \frac{2}{3}$ הנגזרות מקיימות: $f'(x) + f''(x) = 12$.

- מצא את a .

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה מסוימת היא: $y = 22x + 28 - 22 \ln 2$.

- מצא את שיעור ה- x של נקודת ההשקה.

- מצא את b .

ד. האם הפונקציה חותכת את ציר ה- x ? אם כן מצא את הנקודות.

(28) נתונה הפונקציה: $f(x) = x \cdot a^x$, $(a > 0)$.

לפונקציה יש נקודת קיצון שבה: $x = -\frac{1}{\ln 2}$.

א. מצא את a .

ב. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

הנקודה שבה $x = 2$ היא נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם

גרף הפונקציה: $g(x) = x^2 \cdot 2^x - kx \cdot 2^x$.

ג. מצא את k .

ד. מצא נקודה נוספת שבה הגרפים נחתכים.

(29) נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^{2x} + 2 \cdot 3^{1-x}$.

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה

עם ציר ה- y .

ב. הוכח כי גרף הפונקציה אינו חותך את ציר ה- x .

ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.

תשובות סופיות:

1) א. $3e^x + 2e^{2x} - e^{-x} + 2$ ב. $(2x-3)e^{x^2-3x} + e$ ג. $3 \ln 2 \cdot 2^{3x}$

2) א. $(1+x)e^x$ ב. $2xe^{4x}(1+2x)$ ד. $2x \ln 3 \cdot 3^{x^2} - \ln 4 \cdot 4^{-x}$

ג. $2^x(1+x \ln 2 + \ln 2)$

3) א. $\frac{x(2-x)}{e^x}$ ב. $\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$ 4) א. $30e^{2x}(e^{2x}-1)^2$ ב. $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{-2x}}}$

5) $y = ex$ 6) $y = 3x + 1$ 7) $y = (e-1)x + e$, $y = (-e^2 + e)x + e^2$

8) $a = 2$, $b = -1$ 9) א. כל x ב. $x \neq 0$ ג. $x \neq \ln 5$ ד. $x \neq 0$, $x \neq \ln 2$

ה. כל x ו. $0 \leq x \neq \frac{2}{5}$

10) $\min(0, 0)$, $\max\left(-2, \frac{4}{e^2}\right)$ 11) $\min(3, e^3)$

12) $a = 4$, $b = -12$, $\max\left(3\frac{1}{2}, 0.483\right)$, $\min\left(1\frac{1}{2}, 0\right)$ 13) $p = -27$, $q = 35$

14) א. כל x ב. $\min(2, -e^2)$ ג. תחומי עלייה: $2 < x$ תחומי ירידה: $x < 2$.

ד. $(3, 0)$, $(0, -3)$.

15) א. כל x ב. $\max(0, 3)$, $\min(\ln 3, 1.59)$

ג. תחומי עלייה: $x > \ln 3$ או $x < 0$ תחומי ירידה: $0 < x < \ln 3$. ד. (0,3)

(16) א. כל x . ב. $\min\left(-1, -\frac{4}{e^{0.5}}\right), \max\left(1, \frac{4}{e^{0.5}}\right)$. ג. תחומי עלייה: $-1 < x < 1$

תחומי ירידה: $x < -1$ או $1 < x$. ד. (0,0).

(17) א. כל x . ב. $\max\left(3, \frac{27}{e^3}\right)$. ג. תחומי עלייה: $x < 3$, תחומי ירידה: $x > 3$

ד. (0,0).

(18) א. כל x . ב. $\min(-0.91, -0.67)$. ג. תחומי עלייה: $-0.91 < x$

תחומי ירידה: $x < -0.91$. ד. (0,0).

(19) א. כל x . ב. $\max\left(\frac{1}{6}, \frac{3\sqrt{e}}{4}\right), \min\left(\frac{1}{2}, \frac{e^{1.5}}{4}\right)$. ג. עולה: $x < \frac{1}{6}, x > \frac{1}{2}$

יורדת: $\frac{1}{6} < x < \frac{1}{2}$. ד. (0,1).

(20) א. $f(x) = \frac{1}{e^{3x^2+6x+1}}, k=1$. ב. $(-1, e^2)$.

ד. ניתן לראות עפ"י הגרף כי ערך הפונקציה $f(x)$ נמצא בתחום $0 < f(x) \leq e^2$.

(21) א. $a=4$. ב. $x = \ln 2$. ג. $b=-5$. ד. (0,0).

(22) א. $a=12, b=-12$. ב. עולות: $x < \ln 6$ יורדות: $x > \ln 6$.

(23) א. $f(x) = x^2 e^{-\frac{1}{4}x^2}, a=1, b=0.25$. ב. $\min(0,0), \max\left(-2, \frac{4}{e}\right)$. ג. (0,0)

ה. $0 < k < \frac{4}{e}$.

(24) א. $a = \frac{1}{3}$. ב. כן: $\left(11, \frac{48}{e^{\frac{2}{3}}}\right)$. ג. עולה: $1 < x < 11$ יורדת: $x < 1, x > 11$.

ד. $(-1,0), (7,0), (0,-7e)$.

(25) א. $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2-6}, m=-6$. ב. $\min\left(3, \frac{e^6}{3}\right), \max\left(-2, -\frac{1}{2e^4}\right)$. ג. $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$.

(26) א. $x=0, -1.5$. נקודת הקיצון היא: $\min\left(-1.5, -3\frac{3}{8}e^{-3}\right)$. ב. $y=0$

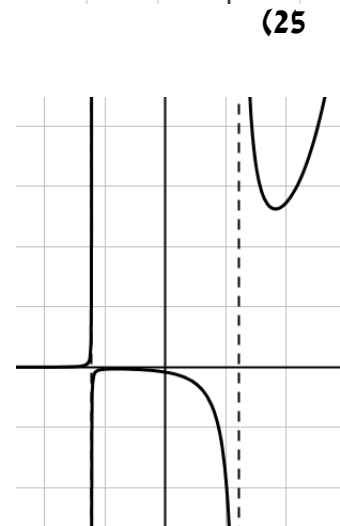
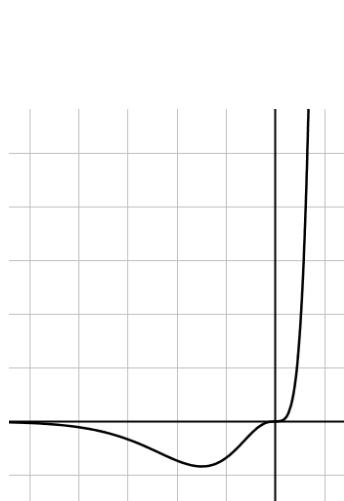
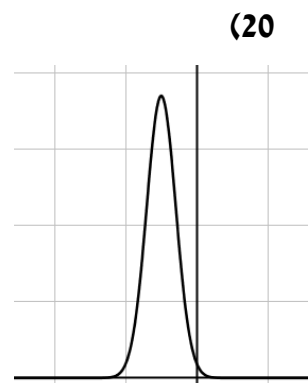
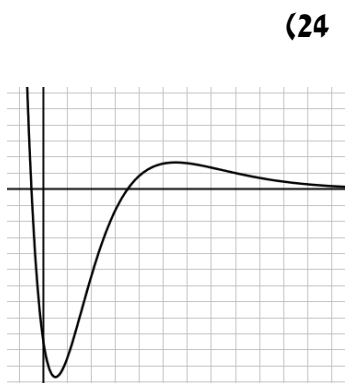
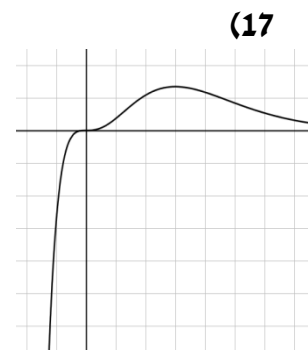
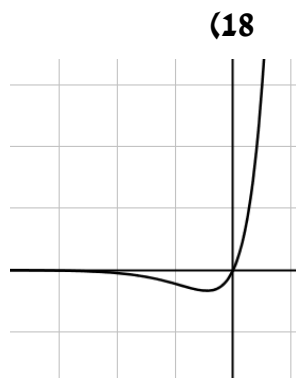
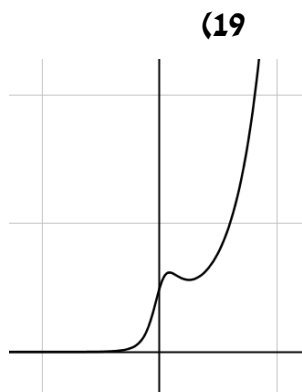
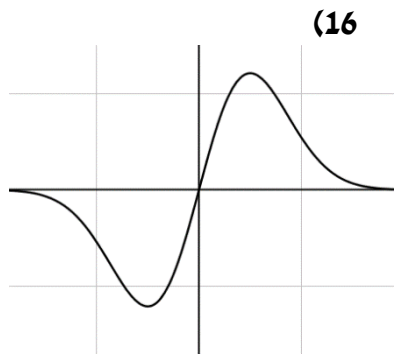
ד. 2 נקודות.

(27) א. $a=7$. ב. $x = \ln 2$. ג. $b=10$. ד. לא.

(28) א. $a=2$. ב. עולה: $x > -\frac{1}{\ln 2}$ יורדת: $x < -\frac{1}{\ln 2}$. ג. $k=1$. ד. (0,0).

(29) א. $y = -x \ln 81 + 7$. ג. $\min\left(\frac{1}{3}, \sqrt[3]{243}\right)$.

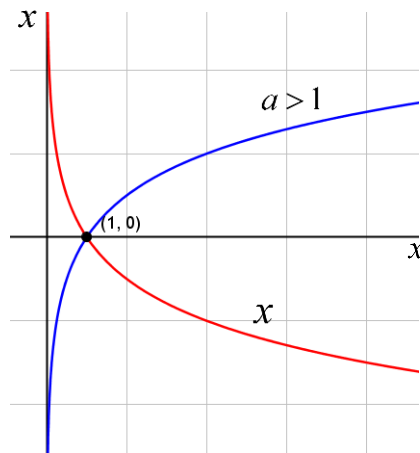
סקיצות לשאלות החקירה:



פונקציות לוגריתמיות

הגדרות כלליות:

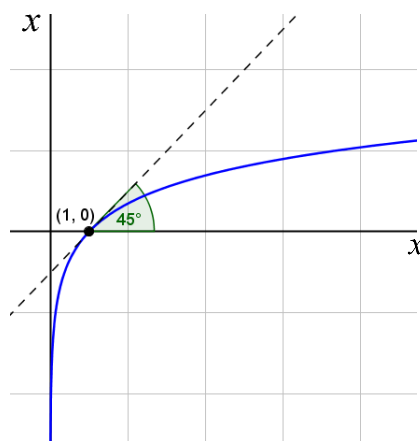
להלן תיאורים גרפיים של פונקציה לוגריתמית כללית מהצורה: $f(x) = \log_a x$
 עבור: $a > 1$ ו- $0 < a < 1$:



תכונות כלליות:

1. לפונקציות תחום הגדרה: $x > 0$.
2. הפונקציות תמיד חותכות את ציר ה- x בנקודה: $(1, 0)$.
3. עבור: $a > 1$ הפונקציה עולה בכל ת.ה. ועבור: $0 < a < 1$ הפונקציה יורדת בכל ת.ה.

עבור הפונקציות $f(x) = \ln x = \log_e x$ נקבל:



תכונות נוספות:

1. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודת החיתוך עם ציר ה- x הוא 1.

תחום הגדרה של פונקציה לוגריתמית:

תחום ההגדרה של פונקציה לוגריתמית מהצורה: $y = \log f(x)$ הוא: $f(x) > 0$.

נגזרות של פונקציות לוגריתמיות:

הפונקציה	הנגזרת
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
$y = \log_a f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln a}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \ln f(x)$	$y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$

שאלות:

1. גזור את הפונקציות הבאות (סכום פונקציות):

א. $f(x) = 3 \ln x + 4 \ln(x+2) - \ln(5x-1)$ ב. $f(x) = \ln(x^2 - 3x)$

ג. $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ ד. $f(x) = \ln(e^x + 1)$

ה. $f(x) = \log_2(x) + 5 \log_3(2x-1)$

2. גזור את הפונקציות הבאות (מכפלה ומנה של פונקציות):

א. $f(x) = x \ln x$ ב. $f(x) = (3x+1)^2 \ln x$

ג. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ד. $f(x) = \frac{\ln x - 2}{\ln x + 2}$

ה. $f(x) = \sqrt{\ln x + x}$

3. גזור את הפונקציות הבאות (פונקציות מורכבות):

א. $f(x) = \ln^3 x$ ב. $f(x) = 3 \ln^2 x$

ג. $f(x) = x^2 \ln^2 x$ ד. $f(x) = \frac{\ln^2 x + 1}{(\ln x + 1)^2}$

4. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x) = \ln x$ בנקודה $A(e,1)$.

5. שיפוע המשיק לפונקציה $f(x) = \frac{\ln^2 x + a}{\ln x + b}$ בנקודה $\left(\frac{1}{e}, -1\right)$ הוא $\frac{e}{3}$.

מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

6. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \ln x$ ב. $f(x) = \ln(x^2)$ ג. $f(x) = \log_3(x^2 - 8x - 20)$

ד. $f(x) = \ln(e^x - 4)$ ה. $f(x) = \frac{x-1}{\ln x - 1}$ ו. $f(x) = \frac{1}{\ln^2 x - 2 \ln x - 3}$

ז. $f(x) = \sqrt{\ln x - 1}$

7. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = 2 \ln x - x^2$.

8. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = x^2 \ln x$.

9. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{\sqrt{2 \ln x - 1}}{x}$.

10. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה הבאה: $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$.

11. נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{a \ln x + b}{x}$. הנקודה $\left(e^2, \frac{1}{e^2}\right)$ היא נקודת קיצון של

הפונקציה. מצא את ערכי הפרמטרים a ו- b .

12. נתונה הפונקציה $f(x) = 2x \ln^2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. מציאת תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

13. נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$. חקור לפי הסעיפים הבאים:

א. תחום הגדרה של הפונקציה.

ב. מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.

ג. כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.

ד. מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ה. סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

- ו. מצא לאלו ערכי k הישר $y = k$ חותך את הפונקציה בשתי נקודות.
14. נתונה הפונקציה $f(x) = \log_4^2 x - \log_2 x$. חקור לפי הסעיפים הבאים:
- תחום הגדרה של הפונקציה.
 - מציאת נקודות הקיצון של הפונקציה וקביעת סוגן.
 - כתיבת תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 - מציאת נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 - סרטוט סקיצה של גרף הפונקציה.

שאלות מבחינות:

15. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

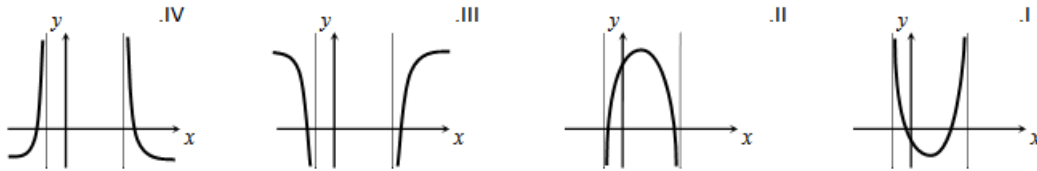
- מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - הוכח כי גרף הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתו.
- מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = \ln x$.
- מצא את נקודות החיתוך של שני הגרפים.
 - הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$. ידוע כי לנקודות A ו-B אותו שיעור x , $(x_A = x_B)$.
- מצא את שיעור ה- x של שתי הנקודות אם ידוע כי המשיקים לגרפים של הפונקציות בנקודות אלו מקבילים.

16. נתונה שתי הפונקציות הבאות: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ ו- $g(x) = \frac{\ln x}{x}$.

- קבע אילו מהמשפטים הבאים נכונים ואלו שגויים. נמק זאת ע"י חישוב מתאים ותקן במשפטים השגויים את הטעות.
 - לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 - לשתי הפונקציות יש נקודת קיצון מאותו סוג ובעלות שיעור x זהה.
 - לשתי הפונקציות תחומי עלייה וירידה זהים.
 - לשתי הפונקציות יש אסימפטוטות אנכיות.
- בוחרים באקראי שתי נקודות, אחת על כל גרף, כך ששיעור ה- x שלהן זהה. הוכח כי מכפלת שיעורי ה- y של כל זוג נקודות כאלו שווה ל-1.

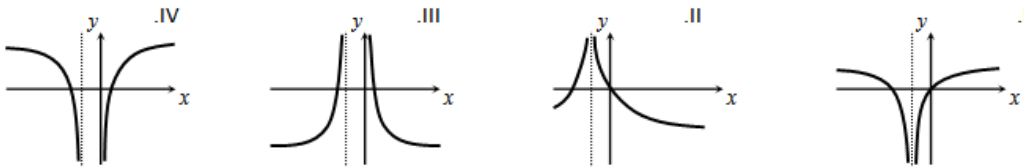
17. נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln(x^2 - 6x - 7)$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מהן האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה- y ?
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



18. נתונה הפונקציה : $y = \ln(x^2 + 2x + 1)$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- מהי האסימפטוטה של הפונקציה המקבילה לציר ה- y ?
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- לפניך 4 גרפים: I, II, III, ו-IV. איזה מהגרפים מתאים לפונקציה הנתונה. נמק.



ה. העזר בגרף שבחרת וכתוב את תחומי השלילות של הפונקציה.

19. לפניך הפונקציה הבאה : $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

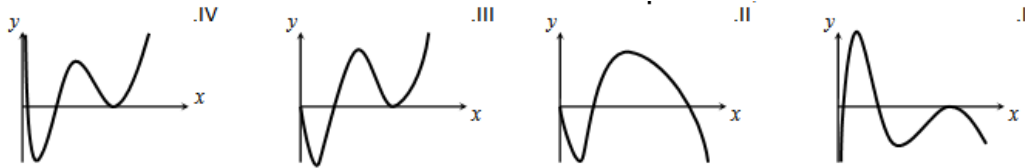
- מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
- הוכח כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

20. נתונה הפונקציה הבאה : $y = \ln \frac{2x+1}{x-1}$.

- מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
- כתוב את האסימפטוטות האנכיות של גרף הפונקציה.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
- הראה כי גרף הפונקציה יורד בכל תחום הגדרתו.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

21. נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = x(\ln^3 x + 2\ln^2 x)$.

- א. הראה כי נגזרת הפונקציה היא : $f'(x) = \ln^3 x + 5\ln^2 x + 4\ln x$.
- ב. מצא את התחום בו הפונקציה עולה.
- ג. 1. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
2. מצא את התחום בו הפונקציה חיובית.
- ד. לפניך 4 גרפים. קבע איזה מהם מתאר את הפונקציה $f(x)$ ונמק את בחירתך.



22. נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln^3 x - 3\ln x$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה.
- ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הפונקציה : $g(x) = \ln x$.

23. א. פתור את המשוואה הבאה : $\ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e}) = \ln 2 - 0.5$.

נתונה הפונקציה : $f(x) = \ln(x+e) - \ln(x\sqrt{e})$.

- ב. הראה כי הפונקציה יורדת בכל תחום הגדרתה.
- ג. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה : $x = e$.

24. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \frac{x+a}{\ln(x+a)}$, a פרמטר חיובי, $a \neq 1$.

א. הבע באמצעות a את:

1. תחום ההגדרה של הפונקציה.
 2. הנקודה המקיימת $y' = 0$.
 3. נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
 4. האסימפטוטה האנכית של הפונקציה.
- ב. ידוע כי גרף הפונקציה עולה רק בתחום: $x > e-2$. מצא את a .
- ג. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום $x > -1$.
- ד. נתון הישר: $y = k$. מצא בסקיצה את תחום הערכים של k עבורו לישר ולגרף הפונקציה לא תהיה אף נקודה משותפת.

25. נתונה הפונקציה הבאה: $y = \ln x + \frac{1}{x}$.

- א. 1. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
2. יש לגרף הפונקציה אסימפטוטה מקבילה לציר y ? אם כן מצא אותה.
- ב. מצא את נקודת הקיצון של גרף הפונקציה וקבע את סוגה.
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של גרף הפונקציה.

תשובות סופיות:

$$(1) \text{ א. } f'(x) = \frac{3}{x} + \frac{4}{x+2} - \frac{5}{5x-1} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x} \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{-2}{(x-1)(x+1)}$$

$$\text{ד. } f'(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad \text{ה. } f'(x) = \frac{1}{x \ln 2} + \frac{10}{(2x-1) \ln 3}$$

$$(2) \text{ א. } f'(x) = \ln x + 1 \quad \text{ב. } f'(x) = (3x+1) \left(6 \ln x + \frac{3x+1}{x} \right) \quad \text{ג. } f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$$\text{ד. } f'(x) = \frac{4}{x(\ln x + 2)^2} \quad \text{ה. } f'(x) = \frac{1+x}{2x\sqrt{\ln x + x}}$$

$$(3) \text{ א. } f'(x) = \frac{3 \ln^2 x}{x} \quad \text{ב. } f'(x) = \frac{6 \ln x}{x} \quad \text{ג. } f'(x) = 2x \ln x (\ln x + 1)$$

$$\text{ד. } f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x(\ln x + 1)^3} \quad (4) \quad y = \frac{1}{e} x \quad (5) \quad a = 2, b = -2$$

$$(6) \text{ א. } x > 0 \quad \text{ב. } x \neq 0 \quad \text{ג. } 10 < x \text{ או } x < -2 \quad \text{ד. } x > \ln 4$$

$$\text{ה. } 0 < x \neq e \quad \text{ו. } 0 < x \quad \text{ז. } e^3, e^{-1} \quad \text{ח. } x \neq e \quad \text{ט. } x \geq e \quad (7) \quad \max(1, -1)$$

$$(8) \quad \min\left(\frac{1}{\sqrt{e}}, -\frac{1}{2e}\right) \quad (9) \quad \min(\sqrt{e}, 0) \text{ קצה, } \max\left(e, \frac{1}{e}\right) \quad (10) \quad \min(4, -1)$$

$$(11) \quad a = 1, b = -1$$

$$(12) \text{ א. } 0 < x < \frac{1}{e^2} \text{ ב. } \min(1, 0) \text{ ג. עלייה: } 1 < x \text{ או } 0 < x < \frac{1}{e^2} \text{ ד. } \max\left(\frac{1}{e^2}, \frac{8}{e^2}\right)$$

ירידה: $\frac{1}{e^2} < x < 1$. ד. $(1, 0)$.

$$(13) \text{ א. } 0 < x \neq e \text{ ב. } \min(e^2, e^2) \text{ ג. עלייה: } e^2 < x \text{ , ירידה: } 0 < x < e^2 \text{ וגם } x \neq e$$

ד. אין . ה. $k > e^2$.

$$(14) \text{ א. } 0 < x < 4 \text{ ב. } \min(4, -1) \text{ ג. עלייה: } 4 < x \text{ , ירידה: } 0 < x < 4 \text{ ד. } (1, 0) , (16, 0)$$

$$(15) \text{ א. } x \geq 1 \text{ ב. מתקבל: } f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}} > 0 \text{ ג. } (e, 1) , (1, 0) \text{ ד. } x = \sqrt[4]{e}$$

$$(16) \text{ א. 1. לא נכון. תחום ההגדרה של } f(x) \text{ הוא: } x > 0, x \neq 1 \text{ ותחום ההגדרה}$$

של $g(x)$ הוא: $x > 0$.

2. לא נכון. לשתי הפונקציות נקודת קיצון שבה $x = e$ אך עבור $f(x)$

מדובר במינימום ועבור $g(x)$ מדובר במקסימום.

3. לא נכון. עבור $f(x)$: עולה: $x > e$ יורדת: $0 < x < e, x \neq 1$.

ועבור $g(x)$: עולה: $0 < x < e$ יורדת: $x > e$.

4. נכון.

$$\text{ב. לגבי כל נקודה נאמר כי שיעור ה-} y \text{ שלה הוא: } y = \frac{x}{\ln x} \text{ ו-} y = \frac{\ln x}{x}$$

$$\text{נכפול: } y = \frac{x}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 1$$

$$(17) \text{ א. } x < -1, x > 7 \text{ ב. } x = 7, -1 \text{ ג. עולה: } x > 7 \text{ יורדת: } x < -1$$

ד. III. הסבר: באיורים I ו-II גרף הפונקציה לא בתחום.

באיור IV תחומי העלייה והירידה הפוכים.

$$(18) \text{ א. } x \neq -1 \text{ ב. } x = -1 \text{ ג. עולה: } x > -1 \text{ יורדת: } x < -1$$

ד. I. הסבר: באיור II תחומי העלייה והירידה הפוכים.

באיורים III ו-IV יש אסימפטוטה מיותרת. ה. $x \neq -1, -2 < x < 0$.

$$(19) \text{ א. } 0 < x < e \text{ (שימו לב כי תנאי ת.ה. הם: } 1 - \ln x > 0 \text{ וגם } x > 0 \text{)}$$

$$\text{ב. } f'(x) = \frac{-\frac{1}{x}}{1 - \ln x} = -\frac{1}{x(1 - \ln x)} < 0 \text{ ולכן הפונקציה יורדת בת.ה. ג. } (1, 0)$$

$$(20) \text{ א. } x < -\frac{1}{2}, x > 1 \text{ ב. } x = -\frac{1}{2}, 1 \text{ ג. } (-2, 0) \text{ ד. מתקבל: } y' = \frac{-3}{(2x+1)(x-1)} < 0$$

$$(21) \text{ ב. } e^{-4} < x < e^{-1}, x > 1$$

ג. 1. 2 נקודות והן: $(1, 0)$, $(e^{-2}, 0)$. הנקודה שבה: $x = 0$ לא קיימת עקב ת.ה.

$$2. x \neq 1, x > e^{-2}$$

ד. III – בראשית הצירים יש חור ולא אסימפטוטה.

שאר הנתונים כפי שהתקבלו בסעיפים הקודמים.

(22) א. $x > 0$. ב. $(e^{-\sqrt{3}}, 0)$, $(e^{\sqrt{3}}, 0)$, ג. $(1, 0)$, $(e^{-1}, 2)$, $(e, -2)$.
 ה. $(1, 0)$, $(e^2, 2)$, $(e^{-2}, -2)$.

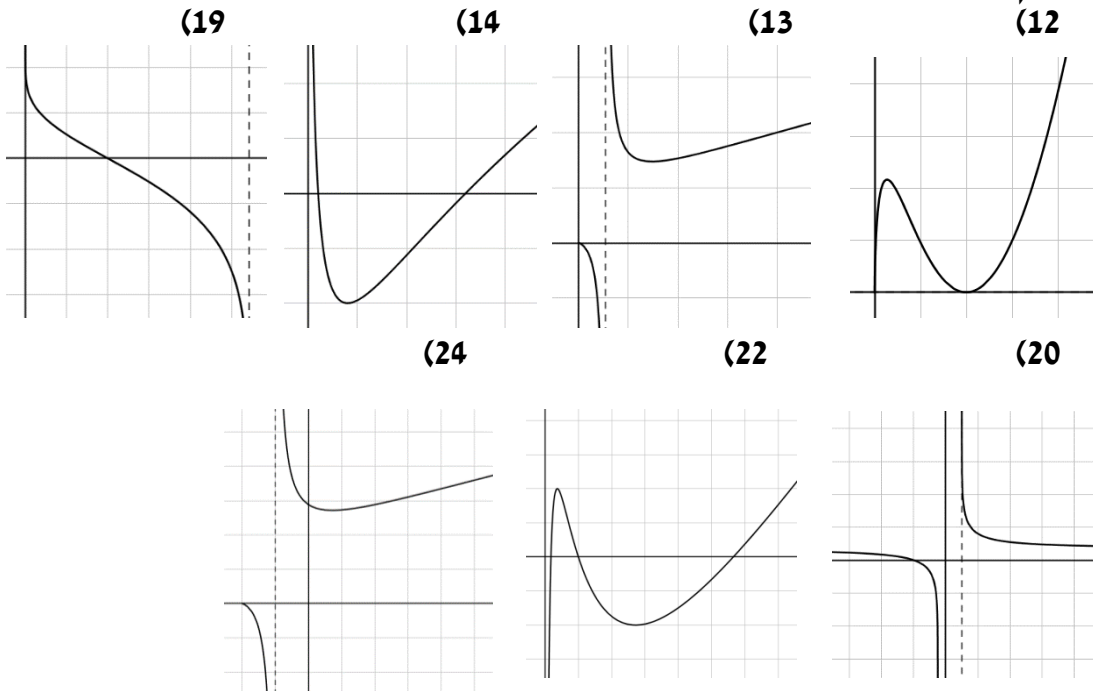
(23) א. $x = e$. ב. מתקבל: $y' = \frac{-e}{x(x+e)} < 0$. ג. $y = -\frac{1}{2e}x + \ln 2$.

(24) א. 1. $x > -a$, $x \neq 1-a$. 2. $(e-a, e)$. 3. $(0, \frac{a}{\ln a})$. 4. $x = 1-a$.

ב. $a = 2$. ד. $k < e$.

(25) א. 1. $x > 0$. 2. $x = 0$. ב. $Min(1, 1)$. ג. עולה: $x > 1$ יורדת: $0 < x < 1$.

סקיצות לשאלות:
 (12)



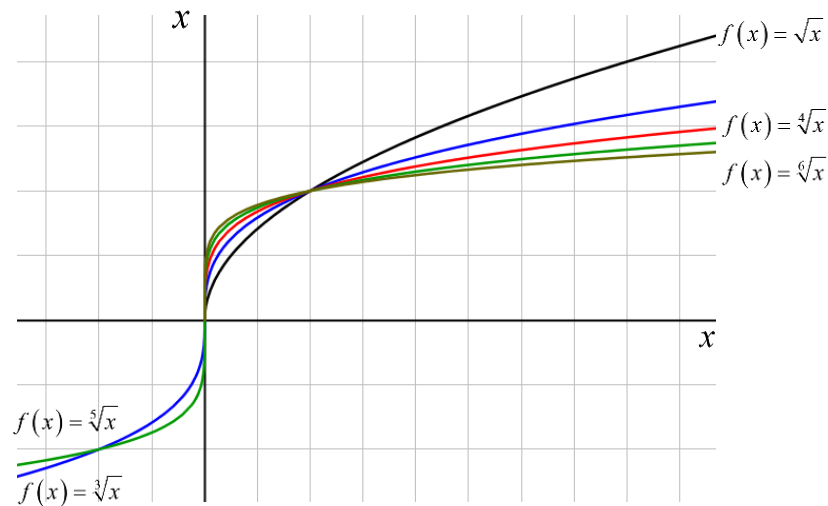
פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי

הגדרות כלליות:

הצורה הכללית של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי: $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$.

תזכורת: $\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m = a^{\frac{m}{n}}$.

להלן מספר דוגמאות לפונקציה מהצורה: $f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.



תכונות כלליות:

1. פונקצית חזקה: $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור n אי-זוגי ומוגדרת לכל $x \geq 0$ עבור n זוגי.
2. הפונקציה: $f(x) = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$ מוגדרת לכל x עבור n אי-זוגי ולכל $x \geq -\frac{b}{a}$ עבור n זוגי.

נגזרת של פונקצית חזקה:

הנגזרת	הפונקציה
$y' = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n}-1}$	$y = x^{\frac{m}{n}}$
$y' = a \cdot \frac{m}{n} (ax+b)^{\frac{m}{n}-1}$	$y = (ax+b)^{\frac{m}{n}}$

דוגמאות:

$$. f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{x^{1/3}} = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} .1$$

$$. f(x) = \sqrt[10]{x} = x^{\frac{1}{10}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{10} x^{\frac{1}{10}-1} = \frac{1}{10} \cdot x^{-\frac{9}{10}} = \frac{1}{10} \frac{1}{x^{9/10}} = \frac{1}{10} \frac{1}{\sqrt[10]{x^9}} .2$$

$$. f(x) = \sqrt[4]{2x-5} = (2x-5)^{\frac{1}{4}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{4} (2x-5)^{-\frac{3}{4}} \cdot 2 = \frac{1}{2} \frac{1}{(2x-5)^{3/4}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt[4]{(2x-5)^3}} .3$$

$$. f(x) = \sqrt[5]{(6-5x)^2} = (6-5x)^{\frac{2}{5}} \rightarrow f'(x) = \frac{2}{5} (6-5x)^{-\frac{3}{5}} \cdot (-5) = -2 \frac{1}{(6-5x)^{3/5}} = \frac{-2}{\sqrt[5]{(6-5x)^3}} .4$$

$$. f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x+7}} = \frac{1}{(x+7)^{1/4}} = (x+7)^{-\frac{1}{4}} \rightarrow f'(x) = -\frac{1}{4} (x+7)^{-\frac{5}{4}} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt[4]{(x+7)^5}} .5$$

שאלות:**שאלות מבחינות:**

$$.1 \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 6$$

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 - ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
 - ג. הוכח כי הפונקציה עולה בכל תחום הגדרתה.
 - ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ה. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x) = -f(x)$.
1. קבע לגבי כל טענה האם היא נכונה או שגויה. נמק.
 1. לשתי הפונקציות אותו תחום הגדרה.
 2. שתי הפונקציות חותכות את הצירים באותן הנקודות.
 3. שתי הפונקציות עולות בכל תחום הגדרתן.

$$.2 \text{ נתונה הפונקציה: } f(x) = x^3 + k\sqrt[3]{x} + 8, k \text{ פרמטר.}$$

$$. x = -2.741 \text{ ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה-} x \text{ בנקודה שבה}$$

- א. מצא את ערך הפרמטר k , עגל למספר שלם.
- ב. הראה כי אחת מנקודות הקיצון של הפונקציה נמצאת גם היא על ציר ה- x .
- ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
- ה. העזר בסקיצה וקבע כמה פתרונות יהיו למשוואה הבאה: $x^3 + 9\sqrt[3]{x} = 8$.

3. נתונות הפונקציות הבאות: $f(x) = (x-2)^2$, $g(x) = \sqrt[3]{2x+2.6}$.

- א. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציות עם ציר ה- x .
- ב. מגדירים פונקציה חדשה: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- כתוב מפורשות את הפונקציה $h(x)$ ואת תחום הגדרתה.
- ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה $h(x)$.
- ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $h(x)$.
- ה. מצא עבור אלו ערכים של k יחתוך הישר $y = k$ את גרף הפונקציה ב-3 נקודות שונות.

4. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \frac{5x^2 - 66x - 440}{\sqrt[6]{x}}$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
האם יש לפונקציה אסימפטוטה אנכית?
 - ב. האם הפונקציה חותכת את הצירים בתחום: $[0:18]$? נמק ע"י חישוב.
 - ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה.
 - ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
 - ה. מגדירים פונקציה נוספת: $g(x)$ המקיימת: $g(x) = -f(x)$.
- לפניך מספר טענות המתייחסות לפונקציה $g(x)$. קבע אלו מהטענות הבאות נכונות ואלו שגויות. נמק ע"י הסבר או חישוב מתאים.
1. $g(x)$ חיובית בכל התחום $[0:18]$.
 2. ל- $g(x)$ אותן נקודות קיצון (אותם שיעורים ואותו סוג) כמו $f(x)$.
 3. ל- $g(x)$ אותו תחום הגדרה כמו ל- $f(x)$.

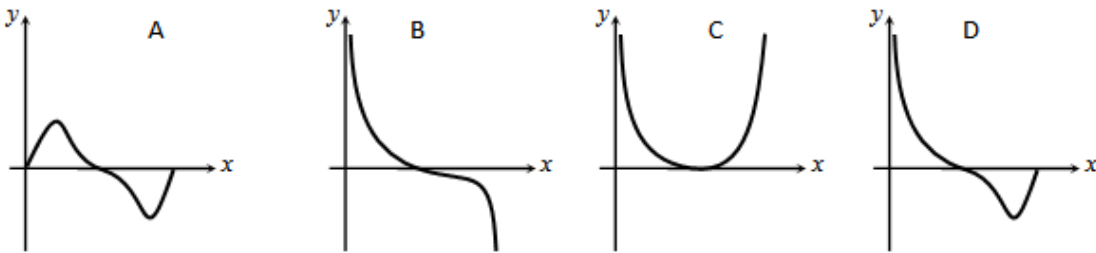
5. נתונה הפונקציה הבאה: $f(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x}$.

- א. מה הוא תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה (מקומיות וקצה) וקבע את סוגן.
 ג. כתוב את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
 ד. על סמך הסעיפים הקודמים קבע כמה פתרונות יש למשוואה הבאה: $\sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{9-x} = k$ כאשר:

1. $k = -2$.

2. $k = 1$.

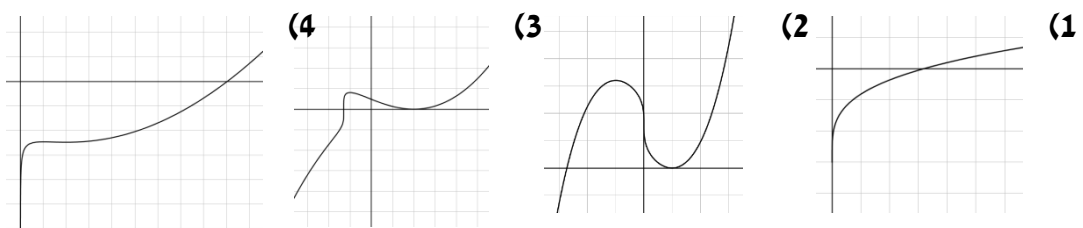
ה. קבע איזה מבין הגרפים הבאים מתאר את הנגזרת של הפונקציה. נמק.



תשובות סופיות:

1. א. $x \geq 0$. ב. $(0, -6)$, $(64, 0)$. ג. הנגזרת: $f'(x) = \frac{1+2\sqrt[6]{x}}{6x^{5/6}} > 0$. ה. 1. נכון. 2. לא נכון. החיתוך עם ציר ה- y שונה. 3. לא נכון.
2. א. $k = -9$. ב. $Max(-1, 16)$; $Min(1, 0)$. ג. עולה: $x < -1$, $x > 1$; יורדת: $-1 < x < 1$. ה. 2.
3. א. $(-1.3, 0)$, $(2, 0)$. ב. $h(x) = (x-2)^2 \sqrt[5]{2x+2.6}$, כל x . ג. $Max(-1, 9)$; $Min(2, 0)$. ה. $0 < k < 9$.
4. א. $x > 0$, $x = 0$ אסימפטוטה אנכית. ב. לא. ג. $Max(2, -491.77)$; $Min(4, -495.27)$. ה. 1. נכון. 2. לא נכון. 3. נכון.
5. א. $0 \leq x \leq 9$. ב. $Max(6, 3.22)$; $Min(0, 0)$ קצה, $Min(9, 0)$ קצה. ג. עולה: $0 < x < 6$, יורדת: $6 < x < 9$. ד. אין פתרון. $k = -2$ או $k = 1$ שני פתרונות. ה. B.

סקיצות לשאלות:



פרק 7 - חשבון אינטגרלי**פונקציות טריגונומטריות****אינטגרלים מיידים של פונקציות טריגונומטריות:**

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int (\sin x) dx = -\cos x + c$	$\int (\sin(ax+b)) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + c$
$\int (\cos x) dx = \sin x + c$	$\int (\cos(ax+b)) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + c$

שאלות:

1. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int \left(\cos 3x - 2 \sin 4x + \frac{4}{\cos^2 3x} \right) dx \quad \text{ב.} \quad \int \left(\sin x - 3 \cos x + \frac{4}{\cos^2 x} + 5 \right) dx \quad \text{א.}$$

$$\int \left(\sin(\pi - x) + \frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right) dx \quad \text{ג.}$$

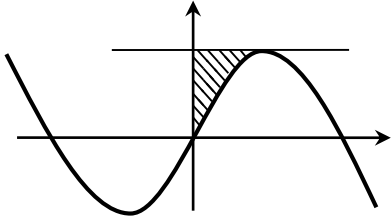
2. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\int (2 \sin x \cos x) dx \quad \text{א.} \quad \int (\sin 3x \cos 3x) dx \quad \text{ב.}$$

$$\int (\sin^4 x - \cos^4 x) dx \quad \text{ג.}$$

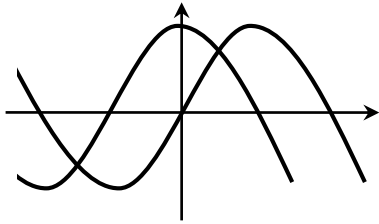
3. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = \cos x + 4 \sin 2x$.מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה: $\left(\frac{\pi}{6}, 1\frac{1}{2}\right)$.4. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2 \sin x + \frac{1}{\cos^2 x}$.מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה: $\left(\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}\right)$.

5. נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x) = -4\sin 2x - \cos x$.
שיפוע הפונקציה בנקודה (π, π) הוא 3. מצא את הפונקציה.



6. נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin x$.

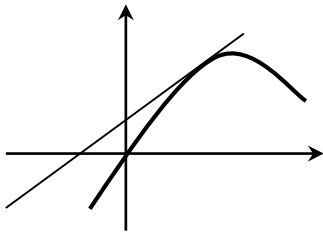
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, ישר המשיק לפונקציה בנקודת המקסימום שלה הקרובה ביותר לציר ה- y וציר ה- x .



7. נתונות הפונקציות: $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.
חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לציר ה- y ברביע הראשון.

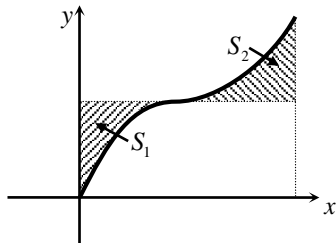
8. נתונה הפונקציה: $f(x) = x + 2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.



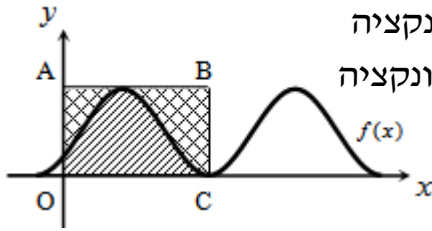
- א. מצא את משוואת המשיק.
ב. חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x ברביעים הראשון והשני.

9. באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $y = \sin x + x$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.



- א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון בתחום הנתון? אם כן, מהן? הוכח.
ב. מורידים אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה: $x = 2\pi$. מעבירים ישר המקביל לציר ה- x דרך הנקודה שמאפסת את הנגזרת. הראה כי השטחים S_1 ו- S_2 המסומנים בסרטוט שווים.

10. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה: $f(x) = \frac{\sin 2x + 1}{2}$ בתחום: $0 \leq x \leq 2\pi$.



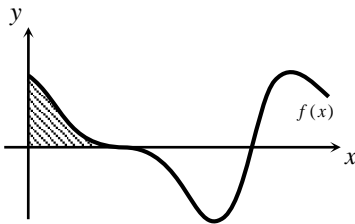
מעבירים משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה ומעלים אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x - C, כך שנוצר המלבן ABCO. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה לציר ה- x יסומן ב- S_1 (המקווקו). השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 (שביהלום).
א. מצא את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשב את היחס: $\frac{S_1}{S_2}$.

11. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\cos 2x - \sin x$.

א. מצא את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות: $f'(x) = 0$ בתחום: $0 < x < 2\pi$.

ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x) = 0$ אשר אינה קיצון נמצאת על ציר ה- x .



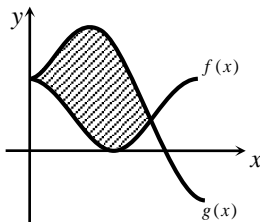
ב. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

12. באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה הבאות:

$f(x) = \cos^2 x$ ו- $g(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ בתחום: $0 \leq x \leq \pi$.

א. מצא את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמש בזהות: $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$



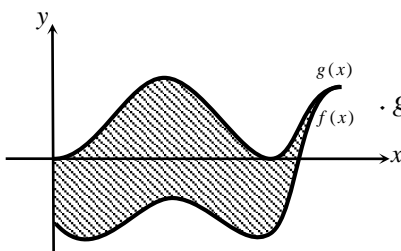
13. נתונות הנגזרות הבאות: $f'(x) = \sin 2x - \cos x + k$, $g'(x) = \sin 2x$.

ידוע כי לפונקציות $f(x)$ ו- $g(x)$ יש משיק משותף בנקודה שבה: $x = 1.5\pi$.

א. מצא את ערך הפרמטר k .

ב. ידוע כי משוואת המשיק המשותף היא: $y = 1$.

הראה כי: $f(x) = -\cos^2 x - \sin x$ ו- $g(x) = \sin^2 x$.



באיור שלפניך מתוארים הגרפים של שתי הפונקציות בתחום: $0 \leq x \leq 1.5\pi$.

ג. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים.

בתחום הנתון.

14. הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = \cos x + \sin x$.

א. ידוע כי הפונקציה המקורית עוברת בראשית הצירים.

הוכח כי הנגזרת $f'(x)$ והפונקציה המקורית $f(x)$ מקיימות את

$$f(x) + f'(x) = 2\sin x + 1.$$

ב. מגדירים פונקציה חדשה $g(x)$ באופן הבא: $g(x) = f(x) + f'(x)$.

1. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה

ביותר לציר ה- y של הפונקציה $g(x)$.

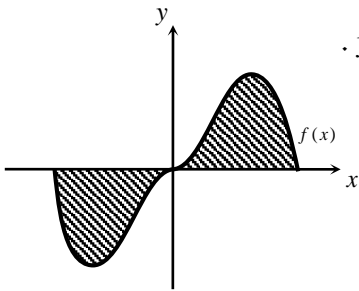
2. מצא את נקודת המקסימום הנמצאת ברביע הראשון והקרובה

ביותר לציר ה- y של הפונקציה $f(x)$.

3. כתוב את משוואת הישר העובר דרך שתי הנקודות שמצאת.

15. א. נתונה הפונקציה: $y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$.

הוכח כי הנגזרת של הפונקציה היא: $y' = x^2 \sin x$.



באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = x^2 \sin x$

בתחום: $-\pi \leq x \leq \pi$.

ב. הראה כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.

ג. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה

וציר ה- x בתחום הנתון.

תשובות סופיות:

- (1) א. $-\cos x - 3\sin x + 4\tan x + 5x + c$. ב. $\frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\cos 4x}{2} + \frac{4\tan 3x}{3} + c$. ג. $\cos(\pi - x) + \tan x + x + c$.
- (2) א. $-\frac{1}{2}\cos 2x + c$. ב. $-\frac{\cos 6x}{12} + c$. ג. $-\frac{\sin 2x}{2} + c$.
- (3) א. $f(x) = \sin x - 2\cos 2x + 2$ (4) ב. $f(x) = -2\cos x + \tan x + 1$.
- (5) א. $f(x) = \sin 2x + \cos x + x + 1$ (6) ב. $\frac{\pi}{2} - 1$ יח"ש S (7) ג. 0.41 יח"ש S .
- (8) א. $y = x + 2$. ב. π יח"ש S .
- (9) א. אין נקודות קיצון, הנקודה: (π, π) היא נקודת פיתול.
 ב. השטח המתקבל הוא: $S = 0.5\pi^2 - 2 = 2.934$.
- (10) א. $y = 1$. ב. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{3\pi + 2}{3\pi - 2} = 1.538$.
- (11) א. $x = \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$. ב. $f(x) = -\frac{1}{2}\sin 2x + \cos x$. ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש S .
- (12) א. $(0, 1), \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{1}{4}\right)$. ב. $1.5\frac{\sqrt{3}}{2} = 1.299$ יח"ש S .
- (13) א. $k = 0$. ג. $1.5\pi + 1$ יח"ש S .
- (14) א. $(0.5\pi, 3)$. ב. $(0.75\pi, \sqrt{2} + 1)$. ג. $y = -0.746x + 4.172$.
- (15) $S = 2(\pi^2 - 4) \approx 11.74$ יח"ש S .

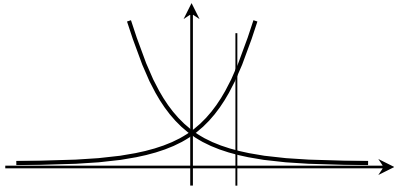
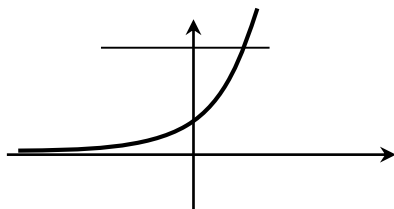
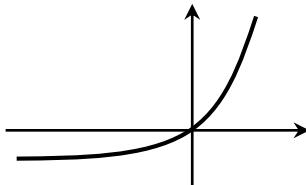
פונקציות מעריכיותאינטגרלים מיידיים של פונקציות מעריכיות:

אינטגרלים יסודיים	אינטגרלים של פונקציות מורכבות
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{a^{mx+n}}{m \cdot \ln a} + c$
$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{mx+n} dx = \frac{e^{mx+n}}{m} + c$

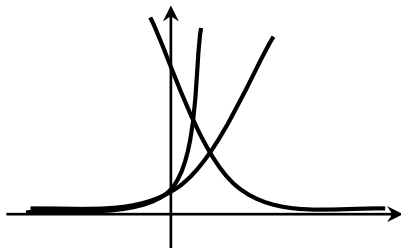
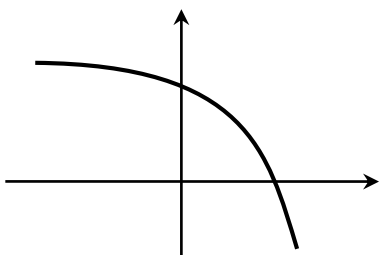
שאלות:

1. חשב את האינטגרלים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \int (3^x + 5^{2x}) dx & \text{ב.} \\ \int (e^x + e^{-x})^2 dx & \text{ד.} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \int (5e^x - e^{3x} + e^{-x} + 1) dx & \text{א.} \\ \int (6\sqrt{e^{4x-1}}) dx & \text{ג.} \end{array}$$

2. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2e^x - \frac{1}{e^x}$.מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה $(\ln 2, 3\frac{1}{4})$.3. נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = e^{2x} + e^x - 2$.מצא את הפונקציה אם ידוע שערך הפונקציה בנקודת המינימום שלה הוא $\frac{1}{2}$.4. נתונות הפונקציות: $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$. מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות לישר $x = \ln 3$.5. נתונה הפונקציה: $f(x) = 3^x$.מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, הישר $y = 9$ וציר ה- y .6. נתונה הפונקציה: $f(x) = e^{2x} - e^x$.לפונקציה העבירו משיק בראשית הצירים. מצא את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק והישר $x = 2$.

7. נתונות הפונקציות:

 $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{3x}$, $h(x) = 16e^{-x}$
 חשב את גודל השטח הכלוא שבין שלוש הפונקציות.
8. נתונה הפונקציה: $f(x) = 5 - e^x$.
 העבירו לפונקציה משיק ששיפועו $-e$.
 חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x .
 ניתן להשאיר e ו- \ln בתשובה.


תשובות סופיות:

$$\text{א (1) } 5e^x - \frac{e^{3x}}{3} - e^{-x} + x + c \quad \text{ב. } \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{5^{2x}}{2\ln 5} + c \quad \text{ג. } 3e^{2x-\frac{1}{2}} + c$$

$$\text{ד. } \frac{1}{2}e^{2x} + 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + c \quad \text{ה. } f(x) = 2e^x + e^{-x} - 1.25$$

$$\text{ו. } f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x - 1 \quad \text{ז. } S = \text{יח"ש} \quad \text{ח. } S = \text{יח"ש} \quad \text{ט. } S = 10.72$$

$$\text{י. } S = 18.41 \quad \text{יא. } S = 3\frac{1}{3} \quad \text{יב. } S = 0.192 \quad \text{יג. } S = \ln 2$$

$$\text{יד. } A(1, -e-2) \quad \text{יט. } y = -(e+2)x \quad \text{כ. } S = 4.744$$

$$\text{כא. } f(x) = \frac{e^x + e^{-2x}}{4}, a = -2 \quad \text{כב. } 1.52$$

$$\text{כג. } A(1,4), B\left(1\frac{1}{3}, 2.52\right), C(0,1) \quad \text{כד. } S = 1.03 \quad \text{כה. } y' = xe^x \quad \text{כו. } a = 2$$

פונקציות לוגריתמיות

אינטגרלים מיידיים של פונקציות לוגריתמיות:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + c$

שאלות:

(1) חשב את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{x+1} - \frac{4}{3x-1} \right) dx$ ב. $\int \frac{x^2+3x-4}{x} dx$ ג. $\int \frac{x+3}{x^2-9} dx$

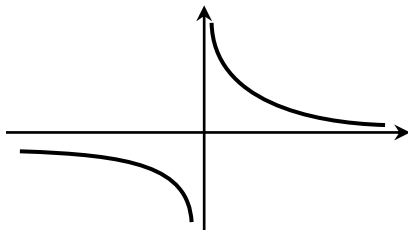
(2) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x) = 2x - \frac{1}{x-4}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (5, 28).

(3) נתונה נגזרת שנייה של פונקציה: $f''(x) = 6x - \frac{1}{x^2}$.

מצא את הפונקציה אם ידוע שהיא עוברת בנקודה (1, -2) וששיפועה

בנקודה זו הוא 3.

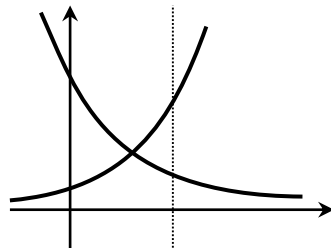


(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה,

הישרים $x = -1$ ו- $x = -4$ וציר ה- x .

ניתן להשאיר \ln בתשובה.



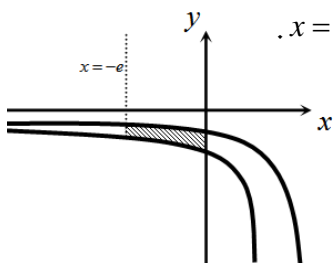
(5) נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{2}{x+1}$, $g(x) = \frac{4}{8-x}$.

חשב את גודל השטח הכלוא בין הפונקציות,

הישר $x = 4$ והצירים.

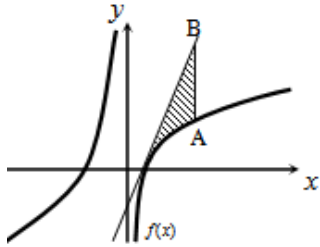
(6) באיור שלפניך נתונות הפונקציות: $f(x) = \frac{a}{x-1}$ ו- $g(x) = \frac{a-1}{x-2}$ בתחום: $x < 0$.

ידוע כי הגרפים של הפונקציות נחתכים בנקודה שבה $x = 3$.



- א. מצא את a וכתוב את שתי הפונקציות.
 ב. חשב את השטח המוגבל ע"י הגרפים של שתי הפונקציות, ציר ה- y והישר $x = -e$.

(7) נתונה הפונקציה: $f(x) = 7 + ax + \frac{b}{x}$.



ידוע כי משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x היא: $y = 18x - 9$.

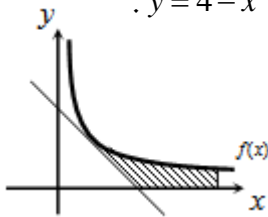
- א. מצא את a ו- b וכתוב את הפונקציה.

מעבירים ישר המקביל לציר ה- y שחותך את גרף הפונקציה בנקודה A ואת משוואת המשיק בנקודה B. אורך הקטע AB הוא 18.

- ב. מצא את משוואת הישר הנ"ל אם ידוע כי הנקודה A נמצאת מימין לנקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק והישר.

(8) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{4}{x^2}$.

משוואת המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה: $x = 2$ היא: $y = 4 - x$.



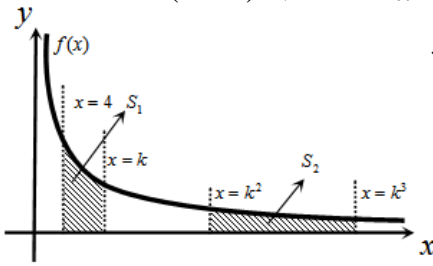
- א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. באיור שלפניך מתוארים גרף הפונקציה $f(x)$

והמשיק בתחום: $x > 0$. חשב את השטח המוגבל בין גרף הפונקציה, המשיק, ציר ה- x והישר $x = e^2$.

9) באיור שלפניך נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{x}$ בתחום: $x > 0$.

מעבירים את הישרים: $x = k^3$, $x = k^2$, $x = k$, $x = 4$ כמתואר ($k > 4$).

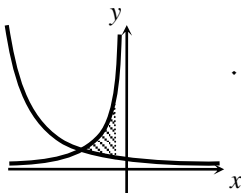


א. הבע באמצעות k את השטחים: S_1 ו- S_2 .

ב. הראה כי ההפרש: $S_2 - S_1$ אינו תלוי ב- k וחשב את ערכו.

ג. נתון כי השטח S_2 גדול פי 3 מהשטח S_1 . מצא את k .

10) נתונות הפונקציות: $f(x) = -\frac{4}{x}$ ו- $g(x) = \frac{k}{2x+5}$.



גרף הפונקציה $g(x)$ חותך את ציר ה- y בנקודה שבה $y = 0.4$.

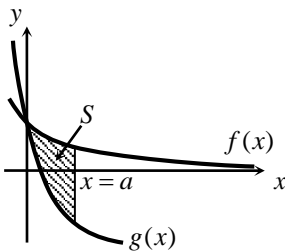
א. מצא את הפונקציה $g(x)$.

ב. מצא את נקודת החיתוך של שני הגרפים.

ג. חשב את השטח המוגבל ע"י שני הגרפים והישר $x = -1$.

11) באיור מתוארים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \ln(e^{-x} + 1)$

ו- $g(x) = \ln(e^{-2x} + e^{-3x})$ בתחום: $x \geq 0$.



א. הראה כי הגרפים נחתכים על ציר ה- y .

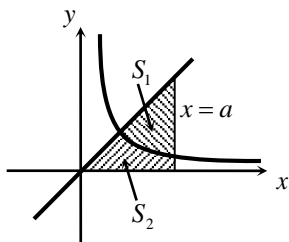
ב. מעבירים ישר $x = a$, ($a > 1$) המאונך לציר ה- x

אשר חותך את הגרפים של שתי הפונקציות ויוצר את השטח S (ראה איור).

מצא את ערכו של a עבורו מתקיים: $S = 4$.

12) באיור שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציה: $f(x) = \frac{2}{3x-1}$ והישר: $y = x$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הפונקציות הנמצאת ברביע הראשון.



מעבירים אנך לציר ה- x - $x = a$ הנמצא מימין לנקודת החיתוך שמצאת בסעיף הקודם. האנך החותך את הגרפים ויוצר את השטחים S_1 ו- S_2 המתוארים האיור.

ב. מצא את הערך של a עבורו השטח S_2

יהיה שווה ל- $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \ln 7$.

ג. עבור ערך ה- a שמצאת בסעיף הקודם חשב את יחס השטחים: $\frac{S_1}{S_2}$.

תשובות סופיות:

(1) א. $\frac{4 \ln|3x-1|}{3} + c$. ב. $3 \ln|x| + 2 \ln|x+1| - \frac{x^2}{2} + 3x - 4 \ln|x| + c$. ג. $\ln|x-3| + c$.

(2) $f(x) = x^2 - \ln|x-4| + 3$ (3) $f(x) = x^3 + \ln|x| - x - 2$ (4) $\ln 4$ יח"ש $S =$

(5) 2.17 יח"ש $S =$ (6) א. $g(x) = \frac{1}{x-2}$, $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $a = 2$. ב. 1.76 יח"ש $S =$

(7) א. $a = 2$, $b = -4$, $f(x) = 7 + 2x - \frac{4}{x}$. ב. $x = 2$. ג. 11.54 יח"ש $S \approx 6 + \ln 256$.

(8) א. $f(x) = \frac{4}{x}$. ב. $6 - 4 \ln 2$ יח"ש $S =$

(9) א. $S_2 = 2 \ln k$, $S_1 = 2 \ln k - \ln 16$. ב. $S_2 - S_1 = \ln 16$. ג. $k = 8$.

(10) א. $g(x) = \frac{2}{2x+5}$. ב. $(-2, 2)$. ג. $\ln 5^{\frac{1}{3}} \approx 1.674$ יח"ש $S =$ (11) ב. $a = 2$.

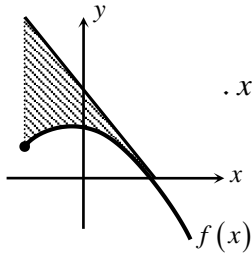
(12) א. $(1, 1)$. ב. $a = 5$. ג. $\frac{S_1}{S_2} = 5.955$.

פונקצית חזקה עם מעריך רציונאליאינטגרלים מיידיים של פונקצית חזקה עם מעריך רציונאלי:

אינטגרל יסודי	אינטגרל של פונקציה מורכבת
$\int \sqrt[n]{x^m} dx = \int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n}+1}}{\frac{m}{n}+1} + c$	$\int \sqrt[n]{(ax+b)^m} dx = \int (ax+b)^{\frac{m}{n}} dx = \frac{(ax+b)^{\frac{m}{n}+1}}{a \cdot \left(\frac{m}{n}+1\right)} + c$

תנאי לקיום האינטגרציה: $\frac{m}{n} \neq -1$.

שאלות:



(1) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - ax$, a פרמטר.

ידוע כי גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בנקודה שבה $x = 2$.

א. מצא את הפרמטר a וכתוב את הפונקציה.

ב. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ג. מצא את נקודת קיצון הקצה של הפונקציה.

ד. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה העובר

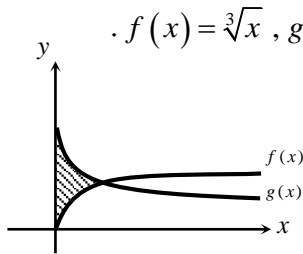
דרך נקודת החיתוך שלה עם ציר ה- x .

ה. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה $f(x)$ והמשיק שמצאת בסעיף

הקודם. מורידים אנך מהמשיק אל נקודת קיצון הקצה של הפונקציה

שמצאת בסעיף ג'. חשב את השטח הנוצר בין גרף הפונקציה $f(x)$

והמשיק.



(2) באיור שלפניך נתונים הגרפים של הפונקציות: $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = 2 - \sqrt[6]{x}$.

א. מצא את נקודת החיתוך של הגרפים.

ב. חשב את השטח הכלוא בין שני הגרפים וציר ה- y .

(3) הנגזרת של הפונקציה $f(x)$ היא: $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt[5]{(6-5x)^4}}$

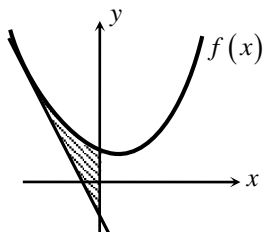
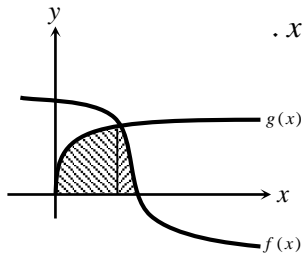
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה: $x = 1.2$.

א. מצא את הפונקציה $f(x)$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף

הפונקציה $f(x)$, גרף הפונקציה: $g(x) = \sqrt[10]{x}$

וציר ה- x .



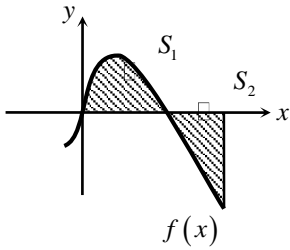
(4) נתונה הפונקציה: $f(x) = \frac{3}{\sqrt[3]{5-x}} + \frac{1}{2}x^2$

א. מצא את משוואת המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה שבה $x = -3$.

ב. חשב את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה $f(x)$,

המשיק וציר ה- y .



(5) נתונה הפונקציה: $f(x) = \sqrt[3]{x} - 4x$.

- א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?
 ב. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x .
 ג. באיור שלפניך מתואר גרף הפונקציה ברביע הראשון. השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x יסומן ב- S_1 . מעבירים ישר $x=k$ אשר יוצר את השטח S_2 כמתואר. מצא את k אם ידוע כי: $S_1 = S_2$.

תשובות סופיות:

(1) א. $f(x) = \sqrt[4]{5x+6} - x, a=1$ ב. $x \geq -1.2$ ג. $(-1.2, 1.2)$ ד. $y = -\frac{27}{32}x + \frac{27}{16}$

ה. $S = 0.48$ יח"ש

(2) א. $(1,1)$ ב. $\frac{11}{28}$ יח"ש $S =$ (3) א. $f(x) = (6-5x)^{\frac{1}{5}}$ ב. $1\frac{5}{66}$ יח"ש $S =$

(4) א. $y = -2\frac{15}{16}x - \frac{45}{16}$ ב. 4.56 יח"ש $S =$

(5) א. כל x ב. $(-\frac{1}{8}, 0), (\frac{1}{8}, 0), (0, 0)$ ג. $k = (\frac{3}{8})^{1.5} = 0.2296..$

פרק 8 - אינטגרלים - שיטות אינטגרציה מתקדמות

האינטגרל הלא מסויים (הנגזרת כבר בפנים)

חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int \frac{x^2}{x^3+1} dx \quad (3) \qquad \int \cot x dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad (5) \qquad \int \tan x dx \quad (4)$$

$$\int e^{-2x^2} x dx \quad (9) \qquad \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} 2x dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int \cos(\sin x) \cdot \cos x dx \quad (11) \qquad \int \cos(2x^2+1) \cdot 4x dx \quad (10)$$

$$\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (15) \qquad \int \sin(x^2+1) x dx \quad (14) \qquad \int \cos(10x^4+1) x^3 dx \quad (13)$$

$$\int \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x} dx \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \sqrt{x^2+1} \cdot 2x dx \quad (21) \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2 \sin x}} dx \quad (20) \qquad \int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (19)$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2} dx \qquad \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \quad (23) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^2 dx \quad (22)$$

* הערה : את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.
* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

האינטגרל הלא מסויים (אינטגרציה בחלקים)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים :

$$\int x \sin x dx \quad (3) \quad \int x^4 \ln x dx \quad (2) \quad \int x e^x dx \quad (1)$$

$$\int x^2 \sin 4x dx \quad (5) \quad \int x \cos 2x dx \quad (4) \quad \int (x^2 + 2x + 3) \ln x dx \quad (4)$$

$$\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \quad \int \ln x dx \quad (7) \quad \int x^2 e^{-4x} dx \quad (6)$$

$$\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx \quad (11) \quad \int \arcsin x \quad (10) \quad \int \arctan x \quad (9)$$

$$\int x \arctan x \quad (14) \quad \int \frac{\ln x}{x^2} dx \quad (13) \quad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (12)$$

$$\int \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx \quad (17) \quad \int \ln^2 x dx \quad (16) \quad \int x^2 \ln(x^2 + 1) dx \quad (15)$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx \quad (20) \quad \int e^{2x} \sin 4x dx \quad (19) \quad \int e^x \cos x dx \quad (18)$$

$$\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx \quad \int x \tan^2 x dx \quad (22) \quad \int \frac{x e^x}{(x+1)^2} dx \quad (21)$$

(2) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int x^4 e^x dx$.

(3) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(4) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \cos^4 x dx$.

(5) א. מצא נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ באשר n טבעי. ב. חשב $\int \frac{1}{(1+x^2)^4} dx$.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

האינטגרל הלא מסויים (שיטת ההצבה)

(1) חשב את האינטגרלים הבאים (הצבות רגילות):

$$\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx \quad (3) \qquad \int \sqrt{x^3+4} \cdot x^5 dx \quad (2) \qquad \int \frac{2x}{(x^2+1)^2} dx \quad (1)$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} dx \quad (6) \qquad \int \frac{1}{x \ln^4 x} dx \quad (5) \qquad \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \quad (4)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx \quad (9) \qquad \int e^{\sqrt[3]{x}} dx \quad (8) \qquad \int e^{x^2} x^3 dx \quad (7)$$

$$\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x} dx \quad (12) \qquad \int x^3(3x^2-1)^{14} dx \quad (11) \qquad \int \cos(x^2+1) \cdot 2x^3 dx \quad (10)$$

$$\int \frac{x^3 dx}{x^8+2} \quad (15) \qquad \int \ln^3 x dx \quad (14) \qquad \int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} dx \quad (13)$$

$$\int \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln(\ln x)} \quad (18) \qquad \int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2} dx \quad (17) \qquad \int \frac{\ln^4 x}{x} dx \quad (16)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}} dx \quad (21) \qquad \int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} dx \quad (20) \qquad \int \arctan \sqrt{x} dx \quad (19)$$

$$\int x^5 \cdot \sqrt[3]{x^3+1} dx \quad (24) \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})} dx \quad (23) \qquad \int \cos(\ln x) dx \quad (22)$$

הערה: בחלק מהתרגילים, לאחר ההצבה, תידרש לאינטגרציה בחלקים.

* בדוק תשובתך על ידי גזירה!

פרק 9 – אי-שוויונים מסוגים שונים

אי-שוויונים

- בסרטונים 1-5 מוסבר מהו אי שוויון.

אי-שוויון ממעלה ראשונה

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$6x > 2(3x-1)$.2	$45x - 26 > 109$.1
$(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20$.4	$2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6)$.3
$4(6x-8) < 8(3x-4)$.6	$\frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3}$.5
$\frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7$.8	$\frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x$.7

פתרונות

(1) $x > 3$ (2) כל x (3) אף x (4) $x > -2$ (5) $x < 5$ (6) אף x (7) $x \geq 12$ (8) $x > -13$

אי-שוויון ממעלה שנייה

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$x^2 - 12x > -32$.2	$x^2 < 144$.1
$(x+2)(x+4) < 35$.4	$(x+2)(x+5) < 0$.3
$(x-3)(x-7) \geq 8x-56$.6	$-x^2 + 13x + 30 < 0$.5
$(5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2$.8	$(x-5)^2 + x(x+2) < 89$.7
$x^2 - 10x + 25 > 0$.10	$-3x^2 + 12x > 0$.9
$2x^2 + 2x + 24 \geq 0$.12	$(x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x$.11

פתרונות

(1) $-12 < x < 12$ (2) $x > 8$ או $x < 4$ (3) $-5 < x < -2$ (4) $-9 < x < 3$ (5) $x > 15$ או $x < -2$
 (6) $x \geq 11$ או $x \leq 7$ (7) $-4 < x < 8$ (8) $-4 \leq x \leq 0$ (9) $0 < x < 4$ (10) $x < 5$ או $x > 5$
 (11) $x > 5$ או $x < 3$ (12) כל x

אי-שוויון ממעלה שלישית

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} x(x^2 + x + 1) > 0 & .2 \\ x^3 - 25x \geq 0 & .4 \\ (x^2 + 8x + 20)(3x - 5) \leq 0 & .6 \\ x^3 - 6x^2 + 9x \leq 0 & .8 \\ (x - 2)(x - 4)(x - 1) < 0 & .10 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (x - 1)(x - 2)(x - 3) > 0 & .1 \\ (-2x^2 - 3x + 2)(x + 1) \leq 0 & .3 \\ (x^2 + 3x + 5)(x - 2) > 0 & .5 \\ (x^2 - x - 6)(x - 1) < 0 & .7 \\ (x^2 + 6)(x + 3) > 0 & .9 \end{array}$$

פתרונות

$$\begin{array}{l} -5 \leq x \leq 0 \text{ או } x \geq 5 \text{ (4)} \quad -2 \leq x \leq -1 \text{ או } x \geq \frac{1}{2} \text{ (3)} \quad x > 0 \text{ (2)} \quad 1 < x < 2 \text{ או } x > 3 \text{ (1)} \\ 2 < x < 4 \text{ (10)} \quad x > -3 \text{ (9)} \quad x \leq 0 \text{ או } x = 3 \text{ (8)} \quad x < -2 \text{ או } 1 < x < 3 \text{ (7)} \quad x \leq 1 \frac{2}{3} \text{ (6)} \quad x > 2 \text{ (5)} \\ \text{או } x < 1 \end{array}$$

אי-שוויון עם מנה

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} \frac{x-1}{3x+2} \geq -3 & .2 \\ \frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0 & .4 \\ \frac{1}{-3(x-1)} < 0 & .6 \\ \frac{1}{x^2-5x+6} < 0 & .8 \\ \frac{1}{x^2-8x+12} \geq 0 & .10 \end{array} \quad \begin{array}{ll} \frac{x-1}{x^2-9} > 0 & .1 \\ \frac{1}{x^2-16} > 0 & .3 \\ \frac{2x-1}{x-5} \leq 0 & .5 \\ \frac{x-1}{x+2} \leq 1 & .7 \\ \frac{x^2-7x+6}{-x^2+3x-7} \geq 0 & .9 \end{array}$$

פתרונות

$$\begin{array}{l} 2 < x < 3 \text{ או } x > 3 \text{ (4)} \quad x < -4 \text{ או } x > 4 \text{ (3)} \quad x < -\frac{2}{3} \text{ או } x \geq \frac{1}{2} \text{ (2)} \quad -3 < x < 1 \text{ או } x > 3 \text{ (1)} \\ x < 2 \text{ או } x > 6 \text{ (10)} \quad 1 \leq x \leq 6 \text{ (9)} \quad 2 < x < 3 \text{ (8)} \quad x > -2 \text{ (7)} \quad x > 1 \text{ (6)} \quad \frac{1}{2} \leq x < 5 \text{ (5)} \end{array}$$

מערכת וגם

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$0 < \frac{1}{x+4} < 2 \quad .2$$

$$3 < x+1 < 5 \quad .1$$

$$0 < \frac{8-3x}{5-2x} < 4 \quad .4$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad .3$$

$$6 < \frac{2x+10}{3} \leq \frac{7x-20}{5} \quad .6$$

$$6x-38 \leq x-3 \leq 5x+7 \quad .5$$

$$\frac{4x+5}{15} > \frac{3x-8}{5} + \frac{9-x}{3} > 11 \quad .8$$

$$-1 \leq \frac{2x-6}{4} < \frac{x+2}{3} \quad .7$$

פתרונות

$$x \geq 10 \quad (6) \quad -\frac{5}{3} \leq x \leq 7 \quad (5) \quad x < 2\frac{2}{5} \text{ או } x > 2\frac{2}{3} \quad (4) \quad x > 0 \quad (3) \quad x > -3\frac{1}{2} \quad (2) \quad 2 < x < 4 \quad (1) \\ \phi \quad (8) \quad 1 \leq x \leq 13 \quad (7)$$

אי-שוויונים מעריכיים

• **בסרטונים זה מוסבר מהו אי-שוויון מעריכי.**

1. פתור את אי השוויון הבא: $3^{2x+1} < 27^{1-\frac{1}{3}x}$

2. פתור את אי השוויון הבא: $\sqrt{2^x} \leq 4^{x^2-1\frac{1}{4}}$

3. פתור את אי השוויון הבא: $e^{\sqrt{x+1}} > e^{2x}$

4. פתור את אי השוויון הבא: $e^x > 3$

5. פתור את אי השוויון הבא: $\left(\frac{1}{7}\right)^{5x} \geq \left(\frac{1}{7}\right)^{1-3x}$

6. פתור את אי השוויון הבא: $25^x + 5 < 6 \cdot 5^x$

7. פתור את אי השוויון הבא: $e^{2x} - 5e^x + 4 > 0$

8. פתור את אי השוויון הבא: $e^{2x} - 2e^x + 1 \leq 0$

פתרונות

(1) $x < \frac{2}{3}$ (2) $x \leq -1 \cup 1\frac{1}{4} \leq x$ (3) $0 \leq x < 1$ (4) $x > \ln 3$ (5) $x \leq \frac{1}{8}$ (6) $0 < x < 1$
 (7) $x < 0 \cup \ln 4 < x$ (8) $x = 0$

אי-שוויונים לוגריתמיים

• **בסרטונים זה מוסבר מהו אי-שוויון לוגריתמי.**

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\log_6(x^2 - 5x) < 1 \quad .2$$

$$\log_2 x < \log_2(5x - 20) \quad .1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(1 - 3x) \geq \log_{\frac{1}{2}}(7 - x) \quad .4$$

$$\log_3 x > \log_9(15 - 2x) \quad .3$$

$$\ln x < 3 \quad .6$$

$$\ln x \geq \ln(x^2 - 12) \quad .5$$

$$\frac{6}{\ln^2 x} \geq 2 - \frac{1}{\ln x} \quad .8$$

$$\ln^2 x - 6 \ln x < 7 \quad .7$$

פתרונות

$$0 < x < e^3 \quad (6) \quad 2\sqrt{3} < x \leq 4 \quad (5) \quad -3 \leq x < \frac{1}{3} \quad (4) \quad 3 < x < 7\frac{1}{2} \quad (3) \quad x < 0 \text{ או } x > 5 \quad (2) \quad x > 5 \quad (1)$$

$$x \neq 1 \text{ וגם } \frac{1}{\sqrt{e^3}} \leq x \leq e^2 \quad (8) \quad \frac{1}{e} < x < e^7 \quad (7)$$

תחום הגדרה

1. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = 2\sqrt{x-3} \quad .ב$$

$$f(x) = \sqrt{x} \quad .א$$

$$f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}} \quad .ד$$

$$f(x) = 3x\sqrt{1-2x} \quad .ג$$

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}} \quad .ו$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+3x-10} \quad .ה$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}} \quad .ז$$

מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x+2}-3} \quad .2 \quad \frac{1}{x+\sqrt{x+6}} \quad .3$$

$$\sqrt{\frac{2x^2+x-3}{x^2+5x+9}} \quad .4 \quad \frac{\sqrt{x^2+5x+6}}{x-1} \quad .5$$

6. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \frac{2x-1}{e^x} \quad .א \quad f(x) = \frac{3}{e^x-1} \quad .ב$$

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x-5} \quad .ג \quad f(x) = \frac{1}{e^{2x}-3e^x+2} \quad .ד$$

$$f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} \quad .ה \quad f(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{5x-2} \quad .ו$$

$$f(x) = \sqrt{e^{2x}-4e^x+3} \quad .ז$$

7. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$f(x) = \ln x \quad .א \quad f(x) = \ln(x^2) \quad .ב$$

$$f(x) = \log_3(x^2-8x-20) \quad .ג \quad f(x) = \ln(e^x-4) \quad .ד$$

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x-1} \quad .ה \quad f(x) = \frac{1}{\ln^2 x-2\ln x-3} \quad .ו$$

$$f(x) = \sqrt{\ln x-1} \quad .ז$$

פתרונות

1. א. $x \geq 0$ ב. $x \geq 3$ ג. $x \leq \frac{1}{2}$ ד. $x > -4$ ה. $x > 2$ או $x < -5$ ו. $x > 3$ או $-3 < x < 0$ ז.

2. $x < -2$ או $-2 < x < 1$ או $1 < x \leq 2$ 3. $x \geq 7$ 4. $-6 \leq x \neq -2$ או $x \geq 1$ או $x \leq -1\frac{1}{2}$

5. $-2 \leq x \neq 1$ או $x \leq -3$ 6. א. כל x ב. $x \neq 0$ ג. $x \neq \ln 5$ ד. $x \neq 0, \ln 2$ ה. כל x

7. $0 \leq x \neq \frac{2}{5}$ ז. $x \geq \ln 3$ או $x \leq 0$ 8. א. $x > 0$ ב. $x \neq 0$ ג. $x > 10$ או $x < -2$

ד. $x > \ln 4$ ה. $0 < x \neq e$ ו. $x > 0$ וגם $\frac{1}{e^3}, \frac{1}{e}$ ז. $x > e$

פרק 10 – סדרות:**סדרה חשבונית:****1. נוסחת האיבר הכללי:**

נוסחת האיבר הכללי של סדרה חשבונית המתחילה באיבר a_1 והפרשה הוא d נתונה ע"י: $a_n = a_1 + d(n-1)$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

2. כלל נסיגה של סדרה חשבונית:

כלל נסיגה של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = d$.

3. נוסחת הסכום של סדרה חשבונית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית a_n שהפרשה הוא d ואיברה

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \text{ : נתון ע"י: } a_1 \text{ הראשון הוא}$$

$$S_n = \frac{n(2a_1 + d(n-1))}{2} \text{ : בהצבת נוסחת האיבר הכללי מקבלים:}$$

שאלות:

- (1) נתונה הסדרה החשבונית: $17, 11, 5, -1, -7, \dots$. מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 43 איברים.
- (2) בסדרה חשבונית האיבר השישי הוא 15 והאיבר העשירי הוא 31. מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהו הפרש הסדרה.
- (3) מצא כמה איברים יש בסדרה החשבונית: $2, 4\frac{1}{2}, 7, 9\frac{1}{2}, 12, 14\frac{1}{2}, \dots, 49\frac{1}{2}$.
- (4) בסדרה חשבונית סכום האיברים השני, החמישי והשמיני הוא 87 והפרש בין האיבר השנים-עשר לאיבר השישי הוא 24. מצא כמה איברים בסדרה אם ידוע שהאיבר האחרון בה הוא 201.
- (5) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 3 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 46 קפיצות?

6) כמה מספרים תלת ספרתיים שמתחלקים ב-6 יש בין 201 ל-550?

7) כמה איברים חיוביים ישנם בסדרה החשבונית: $91, 88, 85, 82, \dots$.

8) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית:

$$x-3, 3x-4, x^2-1$$

$$9) \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_1 = 5 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:}$$

הוכח שהסדרה חשבונית ומצא מהו האיבר התשעה-עשר שלה.

10) מצא את סכום ארבעה-עשר האיברים הראשונים

$$\text{בסדרה החשבונית: } -3, 2, 7, 12, \dots$$

11) נתונה הסדרה החשבונית: $-13, -7, -1, 5, \dots$

כמה איברים יש לחבר בסדרה (החל מהראשון) כדי להגיע לסכום של 987?

12) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב.

מנהגה של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 11 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ 2 קפיצות יותר מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 416 קפיצות?

13) נתונה הסדרה החשבונית: $-71, -67, -63, \dots$

כמה איברים לכל הפחות יש לחבר בסדרה כדי שהסכום המתקבל יהיה חיובי?

14) נתונה הסדרה החשבונית: $4, 13, 22, 31, \dots$. בסדרה יש 36 איברים.

חשב את סכום ארבעה-עשר האיברים האחרונים בסדרה.

15) נתונה הסדרה החשבונית: $4, 9, 14, 19, \dots, 599$

מחקו כל איבר שלישי בסדרה. מצא את סכום האיברים שנותרו.

16) סכום n האיברים האחרונים בסדרה חשבונית בת $3n$ איברים גדול ב-1024 מסכום n האיברים הראשונים שבה.

א. בטא את n באמצעות הפרש הסדרה, d .

ב. נתון כי הפרש הסדרה הוא 8. כמה איברים בסדרה?

17) נתונה סדרה שבה $S_n = 2n^2 + 4n$.

א. מצא את ערכם של שלושת האיברים הראשונים בסדרה.

ב. הוכח כי הסדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

18) נתונה הסדרה החשבונית: $-21, -17, -13, \dots$

בסדרה יש 18 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות

האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

(19) בסדרה חשבונית שהפרשה d ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות האי-זוגיים הוא 552 וסכום האיברים במקומות הזוגיים הוא 612. הוכח כי $nd = 60$.

(20) בסדרה חשבונית, שבה מספר אי-זוגי של איברים, גדול סכום כל איברי הסדרה פי $1\frac{14}{15}$ מסכום איברי הסדרה הנמצאים במקומות האי-זוגיים. כמה איברים יש בסדרה?

שאלות מבחינות:

(21) בסדרה חשבונית ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-5, ה-7, וה-16 הוא אפס. כמו כן ידוע כי סכום שלושת האיברים הראשונים הוא 132.

א. מצא את האיבר הראשון בסדרה ואת הפרש הסדרה.
 ב. מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.
 ג. מצא כמה איברים יש לחבר (החל מהאיבר הראשון) כדי לקבל סכום 210.

(22) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $x-5$, $x-16$, $2x+23$.

- א. 1. מצא את x .
 2. מצא את הפרש הסדרה.
 ב. ידוע כי: $a_{12} = 0$. מצא את a_1 .
 ג. האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 308$.
 מצא את סכום כל האיברים החיוביים העומדים במקומות האי-זוגיים.

(23) בסדרה חשבונית a_n . a_1, a_2, a_3 ידוע כי סכום ארבעת האיברים הראשונים

- וסכום האיברים ה-6 עד ה-9 הם מספרים נגדיים.
- א. הוכח: $a_5 = 0$.
 ב. נתון: $a_3 - a_{11} = 24$. מצא את: a_1 ואת d .
 ג. מגדירים סדרה חשבונית חדשה b_n המקיימת: $b_n = 2a_n - 3$.
 מצא את ערך האיבר השלישי הראשון בסדרה ואת מיקומו הסידורי.

24 נתונים שני טורים חשבוניים: $150, 144, 138, \dots$ ו- $90, 93, 96, \dots$.

לשני הטורים אותו מספר איברים. ידוע כי סכום האיברים האחרונים של שני הטורים (האיבר האחרון מהטור הראשון והאיבר אחרון מהטור השני) הוא אפס.

- מצא את מספר האיברים שבכל טור.
- מחברים את n האיברים הראשונים מהטור הראשון יחד עם n האיברים הראשונים מהטור השני. ידוע כי חיבור הסכומים הוא 3480.
- מצא את n אם ידוע שהוא קטן מ-20.

25 בסדרה חשבונית שבה מספר זוגי של איברים נתון כי סכום ריבועי האיברים העומדים במקומות ה-4 וה-5 שווה לריבוע האיבר העומד במקום ה-6. האיבר הראשון אינו אפס.

א. הוכח את הטענות הבאות:

ב. 1. $a_1 = -4d$.

2. $S_9 = 0$.

האיבר העומד במקום ה-6 גדול ב-2 מהאיבר העומד במקום ה-5.

ג. מצא את a_1 ואת d .

ד. מצא את מספר איברי הסדרה אם ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים הוא 504.

26 נתונות שתי סדרות החשבוניות הבאות: a_n שהפרשה הוא d_1 ו- b_n שהפרשה הוא d_2 . ידוע כי: $d_1 = -2d_2$. סכום 50 האיברים הראשונים של שתי הסדרות שווה והאיבר העומד במקום ה-20 בסדרה a_n גדול ב-1 מהאיבר העומד במקום ה-37 בסדרה b_n .

א. מצא את הפרש הסדרה $a_n - d_1$.

ב. ידוע כי האיבר a_{10} קטן ב-1 מ-5 פעמים האיבר b_{50} .

מצא את a_1 ואת b_1 .

27 אדם המעוניין לקנות רכב קיבל שתי הצעות מחיר.

ההצעה הראשונה: לשלם בתשלום הראשון 1000 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הגדול ב-500 ₪ מהתשלום הקודם.

ההצעה השנייה: לשלם בתשלום הראשון 7200 ₪ ובכל תשלום שאחריו סכום הקטן ב-450 ₪ מהתשלום הקודם. ידוע כי מספר התשלומים בהצעה השנייה קטן ב-4 ממספר התשלומים שבהצעה הראשונה.

א. כמה תשלומים יצטרך לשלם לפי כל הצעה.

ב. מה מחיר הרכב?

28 בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים ידוע כי סכום כל האיברים גדול ב-66 מפעמיים סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח כי $dn = 66$.

ב. ידוע כי הפרש הסדרה הוא 3.

הבע באמצעות a_1 את סכום n האיברים הראשונים.
 ג. סכום n האיברים הראשונים הוא 187.
 מצא את האיבר החיובי הקטן ביותר בסדרה ואת מיקומו
 הסידורי בסדרה.

תשובות סופיות:

- (1) $a_{43} = -235$ (2) $d = 4, a_1 = -5$ (3) 20 איברים (4) 48 איברים (5) 15 קפיצות.
 (6) 58 מספרים (7) 31 איברים חיוביים (8) $x = 1, x = 4$ (9) $a_{19} = 59$.
 (10) $S_{14} = 413$ (11) 21 איברים. (12) 16 דקות (13) 37 איברים. (14) 3647.
 (15) 23920 (16) א. $n = \sqrt{\frac{512}{d}}$ ב. 24 איברים.
 (17) א. $a_1 = 6, a_2 = 10, a_3 = 14$ ב. $d = 4$ (18) זוגיים: $S = 135$ זוגיים: $S = 99$
 (20) 29 איברים. (21) א. $d = -6, a_1 = 50$ ב. $a_{10} = -4$ ג. $n = 6$.
 (22) א. 1. $x = -50$ 2. $d = 11$ ב. $a_1 = -121$ ג. $S = 2156$.
 (23) ב. $d = -3, a_1 = 12$ ג. $b_3 = -3$ (24) א. $n = 81$ ב. $n = 16$.
 (25) ב. $d = 2, a_1 = -8$ ג. $n = 36$ (26) א. $d_1 = 4$ ב. $a_1 = -52, b_1 = 95$.
 (27) א. 12 לפי הראשונה ו-8 לפי השנייה ב. 45000 שם.
 (28) ב. $S = 22a_1 + 693$ ג. $a_9 = 1$.

סדרה הנדסית:

1. נוסחת האיבר הכללי:

נוסחת האיבר הכללי של סדרה הנדסית המתחילה באיבר a_1 ומנתה היא q נתונה ע"י הנוסחה: $a_n = a_1 q^{n-1}$, כאשר: n הוא מיקום האיבר שערכו a_n בסדרה.

2. כלל נסיגה של סדרה הנדסית:

כלל נסיגה של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה הראשון הוא a_1 נתון ע"י הקשר הבא: $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

3. נוסחת הסכום של סדרה הנדסית:

סכום n האיברים הראשונים של סדרה הנדסית a_n שמנתה היא q ואיברה

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \text{ הראשון הוא } a_1 \text{ נתון ע"י:}$$

שאלות:

- (1) נתונה הסדרה ההנדסית: $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, \dots$
מצא את האיבר האחרון בסדרה אם ידוע שיש בה 9 איברים.
- (2) מצא כמה איברים יש בסדרה ההנדסית: $\frac{9}{64}, \frac{3}{16}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{64}{81}$.
- (3) בסדרה הנדסית האיבר השישי הוא 8 והאיבר העשירי הוא 128.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (4) בסדרה הנדסית ההפרש בין האיבר השביעי לאיבר החמישי הוא 432 וההפרש בין האיבר החמישי לשלישי הוא 48.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.
- (5) בסדרה הנדסית עולה ההפרש בין האיבר השמיני לאיבר הרביעי הוא 3120 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 5.2.
מצא מהו האיבר הראשון בסדרה ומהי מנת הסדרה.

6) תחביב אחה"צ של שימי הפרעוש הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של שימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 4 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 3 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של שימי אם ידוע שבדקה האחרונה הוא קופץ 324 קפיצות?

7) מצא את ערכו של x אם ידוע שהאיברים הבאים הם איברים עוקבים בסדרה הנדסית. מצא גם את מנת הסדרה: $x-6, x+4, 4x+1$.

$$8) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n \\ a_1 = 3 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת באמצעות כלל הנסיגה הבא:}$$

הוכח שהסדרה הנדסית ומצא מהו האיבר השמיני בה.

9) מצא את סכום תשעת האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית: $5, 10, 20, 40, \dots$.

10) תחביב אחה"צ של מימי הפרעושה הוא לקפוץ על טומי הכלב. מנהגו של מימי הוא לקפוץ בדקה הראשונה 2 קפיצות ובכל דקה שאחריה לקפוץ פי 5 קפיצות מדקה הקודמת. כמה דקות אורך תחביב אחה"צ של מימי אם ידוע שבכל אחה"צ היא קפצה 1562 קפיצות?

11) סכום n האיברים האחרונים בסדרה הנדסית בת $3n$ איברים שמנתה 2, גדול פי 256 מסכום n האיברים הראשונים בה. כמה איברים בסדרה?

12) בסדרה הנדסית עולה שבה n איברים, סכום $n-3$ האיברים האחרונים גדול פי 8 מסכום $n-3$ האיברים הראשונים בה. מצא את מנת הסדרה.

13) סכום כל האיברים בסדרה הנדסית הוא 252. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-120 מהאיבר השני בה. מצא כמה איברים יש בסדרה אם ידוע שמנתה 2.

14) נתונה הסדרה ההנדסית: $7, 14, 28, \dots$.

בסדרה יש 8 איברים. חשב את סכום האיברים הנמצאים במקומות האי-זוגיים ואת סכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים.

15) בסדרה הנדסית ובה $2n$ איברים סכום האיברים במקומות הזוגיים גדול פי 4 מסכום האיברים במקומות האי-זוגיים. חשב את מנת הסדרה.

16) נתונה סדרה הנדסית שמנתה q ובה מספר זוגי של איברים. בטא באמצעות q את היחס בין סכום איברי הסדרה כולה לסכום האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים שבה.

17) בסדרה הנדסית שבה $2n+1$ איברים, סכום n האיברים הראשונים קטן פי 9 מסכום n האיברים הבאים אחריהם. האיבר האחרון בסדרה גדול ב-30 מהאיבר הראשון שבה. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

שאלות מבחינות:

- 18 א.** הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת בסדרה.
- בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כי האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים קטן פי 4 מסכום כל איברי הסדרה.
- האיבר הראשון בסדרה זו קטן ב-2 ממנת הסדרה.
- ב. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.
- ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 324.
- 19** באחת ממדינות המזרח היה מלך שאהב משחקי חשיבה.
- לכבוד יום הולדתו הכין לו השר הבכיר שבממלכתו משחק מיוחד המכיל 25 משבצות ו-2 חיילי משחק. המלך, מרוב התלהבות ושמחה לא ידע כיצד לגמול לשר החכם ושאל אותו מה ירצה בתמורה. השר סרב לקבל דבר על מתנתו עד שלבסוף החליט המלך לתת לשר מחצית מכל אוצרות הממלכה המונים כ-40 מיליון אבנים יקרות. לאחר ששמע על כך השר, הוא החליט לאתגר את המלך והעלה את ההצעה הבאה: תן לי אבן יקרה אחת והכפל אותה בכל משבצת שבמשבצות המשחק באופן הבא: כנגד המשבצת הראשונה - אבן אחת, כנגד השנייה - שתי אבנים, כנגד השלישית - ארבע אבנים וכן הלאה... המלך הסכים להצעה.
- א. כמה אבנים המלך ייתן לשר כנגד המשבצת האחרונה במשחק?
- ב. העזר בכמות האבנים שברשותו של השר וקבע האם הצעתו שוות-ערך יותר מהחלטת המלך לתת לו מחצית מאוצרות הממלכה.
- ג. סמוך לפני שנתן המלך את האבנים לשר, הציעה בתו של המלך הצעה נוספת והיא: תן עבור כל משבצת זוגית 2^n אבנים, כאשר n הוא מספר המשבצת. האם כדאי למלך לקבל את הצעת בתו או להישאר עם הצעת השר?
- 20** המספרים: $3-2x$, $9-x$, $13-x$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית עולה שכל איבריה חיוביים.
- א. מצא את x .
- ב. 1. כתוב את נוסחת האיבר הכללי בסדרה זו.
2. מצא שני איברים סמוכים בסדרה שסכומם הוא 18750.
- ג. ידוע כי האיבר האחרון בסדרה הוא: $a_n = 5^{11}$.
- מצא את סכום 7 האיברים האחרונים בסדרה.
- 21** בסדרה הנדסית שבה 12 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 3 מסכום האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
- א. מצא את מנת הסדרה.
- ידוע כי ההפרש בין האיבר החמישי לאיבר הרביעי בסדרה הוא 8.
- ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה.
- ג. חשב את סכום כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים בסדרה.
- 22** נתונה הסדרה הבאה: $a_n, 36, 12, 4, \dots$
- מוסיפים לכל איבר בסדרה זו שישיית מהאיבר הבא אחריו ויוצרים סדרה חדשה באופן הבא: b_n

$$.b_1 = a_1 + \frac{a_2}{6}, b_2 = a_2 + \frac{a_3}{6}, b_3 = a_3 + \frac{a_4}{6}, \dots, b_n = a_n + \frac{a_{n+1}}{6}$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. הראה כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין

סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא $\frac{2}{3}$.

ג. מצא שני איברים סמוכים בסדרה b_n שסכומם מהווה $\frac{2}{9}$ מ- a_8 .

תשובות סופיות:

$$.q = \pm 3, a_1 = \frac{2}{3} \quad (4) \quad a_1 = \pm \frac{1}{4}, q = \pm 2 \quad (3) \quad n = 7 \quad (2) \quad a_9 = 729 \quad (1)$$

$$.x = -\frac{2}{3} \rightarrow q = -\frac{1}{2}, x = 11 \rightarrow q = 3 \quad (7) \quad 5 \text{ דקות.} \quad (6) \quad q = 5, a_1 = \frac{1}{25} \quad (5)$$

$$.n = 6 \quad (13) \quad q = 2 \quad (12) \quad .n = 12 \quad (11) \quad 5 \text{ דקות.} \quad (10) \quad S_9 = 2555 \quad (9) \quad a_8 = 384 \quad (8)$$

$$.a_1 = \frac{3}{8} \quad (17) \quad \frac{q+1}{q} \quad (16) \quad q = 4 \quad (15) \quad S = 1190 \quad \text{זוגיים:} \quad S = 595 \quad \text{אי-זוגיים:} \quad (14)$$

$$a_{25} = 16,777,216 \quad \text{א.} \quad (19) \quad .a_5, a_6 \quad \text{ג.} \quad a_n = 3^{n-1} \quad \text{ב.} \quad \frac{S_{n(o)}}{S_{2n}} = \frac{1}{q+1} \quad \text{א.} \quad (18)$$

ב. לפי הצעת השר יהיו לו 33,554,431 אבנים ולפי הצעת המלך יהיו

לו 20,000,000 אבנים. ג. הסדרה שתתקבל לפי הצעת הבת

היא: $4, 16, 64, \dots, 2^{24}$. כדאי למלך לקבל את הצעת בתו.

$$.S_7^* = 61,034,375 \quad \text{ג.} \quad a_6, a_7 \quad 2. \quad a_n = 5^{n-1} \quad 1. \quad \text{ב.} \quad x = 14 \quad \text{א.} \quad (20)$$

$$.b_5, b_6 \quad \text{ג.} \quad q = 3 \quad \text{א.} \quad (22) \quad .S_{6(p)} = 2730 \quad \text{ג.} \quad a_1 = 1 \quad \text{ב.} \quad q = 2 \quad \text{א.} \quad (21)$$

סדרות מעורבות:

שאלות מבחינות:

- (1) ההפרש של סדרה חשבונית שווה למנה של סדרה הנדסית עולה.
 האיבר הראשון בסדרה ההנדסית הוא 6 וידוע כי סכום 2 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית שווה לסכום שני האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 2 מהאיבר השלישי בסדרה החשבונית.
 א. מצא את שלושת האיברים של הסדרה החשבונית.
 ב. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום: 60.
 ג. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה ההנדסית הגדול פי 12 מהאיבר האחרון שחובר בסכום הסדרה החשבונית שחישבת בסעיף הקודם.

- (2) נתונות שתי הסדרות הבאות: סדרה חשבונית: a_1, a_2, a_3, \dots וסדרה הנדסית: b_1, b_2, b_3, \dots . ידוע כי האיבר הראשון בשתי הסדרות שווה. האיבר השלישי בסדרה ההנדסית גדול פי 4 מהאיבר הראשון בסדרה החשבונית.
 א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית אם ידוע כי היא אינה עולה.
 ב. נתון גם כי האיבר החמישי בסדרה ההנדסית שווה לאיבר הרביעי בסדרה החשבונית. הוכח כי הפרש הסדרה החשבונית גדול פי 5 מהאיבר הראשון.
 ג. בכל סדרה יש 10 איברים. הסכום של כל האיברים של שתי הסדרות יחד הוא 212. מצא את האיבר הראשון של שתי הסדרות.

תשובות סופיות:

- (1) א. 8, 10, 12. ב. 5. ג. 6. (2) א. $q = -2$. ג. $a_1 = 2$.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

1. הגדרה:

סדרה הנדסית a_n המקיימת: $|q| < 1$, $(q \neq 0)$ נקראת סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת.

2. נוסחת הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

הסכום של סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת a_n ניתן לחישוב ע"י שימוש בכלל: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ והצבתו בנוסחת הסכום של סדרה הנדסית.

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{מתקבל הכלל הבא:}$$

3. סכום סופי של איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

• כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים ראשונים בסדרה הנדסית

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{אינסופית מתכנסת יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה:}$$

• כאשר מתבקשים לחשב סכום של n איברים בסדרה הנדסית אינסופית מתכנסת המתחילים באיבר a_k יש להשתמש בנוסחת הסכום הרגילה באופן

$$S_n = \frac{a_k(q^n - 1)}{q - 1} \quad \text{הבא:}$$

שאלות:

(1) מצא את סכום כל איברי הסדרה ההנדסית הבאה: $12, 4, 1\frac{1}{3}, \dots$

(2) סכום כל איברי סדרה הנדסית אינסופית שמנתה $\frac{1}{4}$ הוא 32. מצא את האיבר הראשון בסדרה.

(3) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה $62\frac{1}{2}$. ידוע כי האיבר השני בסדרה הוא 10. מצא את האיבר הראשון ואת מנת הסדרה (שתי אפשרויות).

(4) האיבר הראשון בסדרה הנדסית אינסופית יורדת הוא 14. סכום האיברים במקומות הזוגיים הוא $9\frac{1}{3}$. מצא את סכום האיברים במקומות האי-זוגיים.

- 5 נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 24. מאיברי הסדרה הנתונה יצרו את סדרה חדשה באופן הבא: $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4 + a_5, \dots$.
- א. הוכח שהסדרה החדשה היא הנדסית אינסופית יורדת.
- ב. ידוע שסכום כל איברי הסדרה החדשה הוא 32. מצא את האיבר הראשון והמנה של הסדרה המקורית.

שאלות מבחינות:

- 6 בסדרה הנדסית אינסופית יורדת a_n ידוע כי סכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים גדול פי $1\frac{2}{3}$ מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
- א. מצא את מנת הסדרה.
- מחברים כל שני איברים בסדרה הנתונה ויוצרים סדרה חדשה b_n .
- ב. הוכח כי הסדרה b_n גם היא הנדסית יורדת ומצא את מנתה.
- ג. הראה כי סכום הסדרה b_n שווה לסכום הסדרה a_n .
- ד. סכום שתי הסדרות יחד הוא 1000. מצא את האיבר הראשון בסדרה a_n .

- 7 נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2n}$ שמנתה היא q .
בונים סדרה חדשה מריבועי כל האיברים הסדרה באופן הבא:
 $a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_{2n}^2$

- א. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים בסדרת הריבועים ובין סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הנתונה תלוי רק באיבר הראשון של הסדרה.

- בסדרה הנדסית אינסופית יורדת שסכומה 640 ידוע כי סכום 10 האיברים הראשונים כאשר מעלים אותם בריבוע גדול פי 320 מסכום 10 האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
- ב. מצא את מנת הסדרה.
- ג. מחברים את כל איברי הסדרה החל מאיבר a_n כלשהו. ידוע כי סכום זה קטן פי 16 מסכום הסדרה המקורי. מצא את האיבר a_n .

8 נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , $(0 < q < 1)$.

נגדיר את הסכומים הבאים:

$$1. \quad V = a_3 + a_7 + a_{11} + \dots$$

$$2. \quad T = a_1 + a_2 + a_5 + a_6 + a_9 + a_{10}, \dots$$

$$T = 6V \text{ נתון כי:}$$

א. מצא את מנת הסדרה q .

ב. פי כמה קטן V מסכום כל האיברים העומדים במקומות

האי-זוגיים בסדרה?

ג. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום האיברים העומדים

במקומות האי-זוגיים הוא $\frac{1}{3} \cdot 1365$.

9 נתונה סדרה הנדסית אינסופית a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q , $(q \neq 0, |q| < 1)$.

$$V = a_2 + a_7 + a_{12} + \dots \quad T = a_1 + a_3 + a_6 + a_8 + a_{11} + a_{13}, \dots$$

$$V = 0.3T \text{ נתון כי:}$$

א. מצא את מנת הסדרה q .

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים

ומתקבלת סדרה חדשה שסכומה הוא 12.

ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה המקורית.

ג. מעלים את כל איברי הסדרה בריבוע. חשב את סכום הסדרה כעת.

תשובות סופיות:

$$1) \quad S = 18 \quad 2) \quad a_1 = 24 \quad 3) \quad a_1 = 50, \quad q = \frac{1}{5} \quad \text{או} \quad a_1 = 12\frac{1}{2}, \quad q = \frac{4}{5} \quad 4) \quad S = 18\frac{2}{3}$$

$$5) \quad \text{ב.} \quad a_1 = 16, \quad q = \frac{1}{3} \quad \text{א.} \quad q = 0.6 \quad \text{ב.} \quad \frac{b_{n+1}}{b_n} = q^2$$

$$\text{ג.} \quad S_{(a_n)} = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1(1+q)}{(1+q)(1-q)} = \frac{a_1+a_2}{1-q^2} = \frac{b_1}{1-q^2} = S_{(b_n)} \quad \text{ד.} \quad a_1 = 200$$

$$7) \quad \text{א.} \quad \frac{S_{n(s)}}{S_{n(o)}} = a_1 \quad \text{ב.} \quad q = 0.5 \quad \text{ג.} \quad a_5 = 20 \quad \text{א.} \quad q = \frac{1}{2} \quad \text{ב.} \quad \text{פי 5.} \quad \text{ג.} \quad a_1 = 1024$$

$$9) \quad \text{א.} \quad q = \frac{1}{3} \quad \text{ב.} \quad a_1 = -16 \quad \text{ג.} \quad S = 288$$

סדרות כלליות וסדרות נסיגה:

שאלות:

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n - 11 \\ a_1 = -6 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

- א. מצא את האיבר השלישי בסדרה.
 ב. נתון כי האיבר השלושה-עשר בסדרה הוא 18. מצא את a_{14} ו- a_{12} .
 ג. נתון כי האיבר השלושים ואחת בסדרה הוא k . הבע באמצעות k את a_{32} ו- a_{30} .
 ד. מצא את מיקומם של שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 113.
 ה. הסבר מדוע אין שני איברים סמוכים בסדרה שההפרש ביניהם הוא 62.

$$(2) \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2n \\ a_1 = 0 \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

נתון כי $a_k = 72$. הבע באמצעות k את a_{k+2} .

$$(3) \quad \begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + n^2 - 31 \\ a_7 = t \end{cases} \quad \text{נתונה סדרה המוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא:}$$

מצא את t עבורו האיברים a_7, a_8, a_9 הם איברים עוקבים בסדרה חשבונית.

$$(4) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = a_n + 6n - 2.$$

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_{n+1} - a_n$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה חשבונית ומצא את הפרשה.

ב. חשב את b_1 .

$$(5) \quad \text{סדרה שהאיבר הכללי בה הוא } a_n \text{ מוגדרת על פי כלל הנסיגה הבא: } a_{n+1} = 3a_n + 4.$$

מגדירים סדרה חדשה שהאיבר הכללי בה הוא b_n באופן הבא: $b_n = a_n + 2$.

א. הוכח שהסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומצא את מנתה.

ב. נתון: $b_5 = 162$. חשב את a_1 .

שאלות מבחינות:

6 סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_1 = 1, a_{n+1} = 3n - a_n - 7$.

- חשב את 5 האיברים הראשונים וקבע האם הסדרה היא חשבונית.
- הוכח כי לכל n טבעי מתקיים: $a_{n+2} = a_n + 3$.
- כתוב נוסחה לסכום n האיברים הראשונים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה.
- חשב את הסכום הבא: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{17}$.

7 סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה הבא: $a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n + 2$.

- הבע את a_{n+2} באמצעות a_n .
- מצא את מיקומו הסידורי של איבר הגדול ב-652 מהאיבר העומד שני מקומות לפניו.
- הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים של אחת מהסדרות המיוצגות ע"י כלל הנסיגה הנ"ל היא: $S_n = 1.5 \cdot 3^n + n^2 + n - 1.5$.
חשב את הסכום הבא: $a_6 + a_7 + a_8 + \dots + a_{11}$.
- מהו האיבר הראשון של הסדרה המיוצגת ע"י כלל הנסיגה ונוסחת הסכום הנ"ל?

8 סדרה מוגדרת לכל n טבעי ע"י הנוסחה: $a_1 = k, a_{n+1} = 8n - a_n + 3$.

- הבע באמצעות k את ארבעת האיברים הראשונים בסדרה.
- הוכח כי סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים וסדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים הן חשבוניות ומצא את הפרשן.
- חשב את סכום 20 האיברים הראשונים בסדרה.

9 סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה: $a_1 = 6, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 5}$.

מגדירים סדרה חדשה b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = \frac{a_n + 3}{a_n}$.

- הוכח כי הסדרה b_n היא הנדסית ומצא את מנתה.
- כתוב נוסחה ל- b_n באמצעות n בלבד.
- חשב את הסכום הבא: $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots - b_{10}$.

- 10** סדרה מוגדרת ע"י הכלל: $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + 10n - 5$.
 מגדירים סדרה חדשה המקיימת לכל n טבעי: $b_n = a_n + 5n$.
- הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית.
 - חשב את האיבר b_5 .
 - חשב את הסכום: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{12}$.

- 11** סדרה מוגדרת ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 3}$.
 מגדירים סדרה חדשה לפי: $b_n = \frac{4 - 7a_n}{a_n}$.
- הוכח כי הסדרה b_n היא חשבונית ומצא את הפרשה.
 - חשב את הסכום הבא: $b_2 + b_4 + b_6 + \dots + b_{22}$.

תשובות סופיות:

- (1) א. $a_3 = -22$ ב. $a_{12} = 5, a_{14} = 33$ ג. $a_{30} = k - 49, a_{32} = k + 51$ ד. a_{62}, a_{63} ה. ההפרש בין שני איברים סמוכים נתון ע"י: $a_{n+1} - a_n = 2n - 11$.
 כאשר נשווה את הפרש זה ל-62 נקבל כי: $n = 36.5$ אשר לא ייתכן.
 מכאן שלא קיימים שני איברים סמוכים בסדרה שהפרשם הוא 62.
- (2) $a_{k+2} = 74 + 4k$ (3) $t = -33$ (4) $d = 6$ א. $b_1 = 4$ (5) $q = 3$ ב. $a_1 = 0$
- (6) א. $a_1 = 1, a_2 = -5, a_3 = 4, a_4 = -2, a_5 = 7$ ג. $S_{n(o)} = 1.5n^2 - 0.5n$ ד. $S_{9(o)} = 117$
- (7) א. $a_1 = 5$ ב. $a_{n+2} = a_n + 8 \cdot 3^n + 4$ ג. $S_{6-11} = 265458$
- (8) א. $a_1 = k, a_2 = 11 - k, a_3 = k + 8, a_4 = 19 - k$ ב. 8 ג. 830
- (9) א. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 2.5$ ב. $b_n = 1.5 \cdot 2.5^{n-1}$ ג. $S_{10}^* = -4086.74$
- (10) א. $b_{n+1} = 3b_n$ ב. $b_5 = 648$ ג. $S = 1594320$
- (11) א. $d = 2\frac{2}{3}$ ב. $S_{11(p)} = 267\frac{2}{3}$

תירגול נוסף:

סדרה חשבונית:

(1) לפניך שלושה איברים סמוכים בסדרה חשבונית: $2x - 39$, $6x - 3$, $x^2 + 3$.

א. מצא את x . (הבחן בין שני מקרים).

ב. מה יהיה הפרש הסדרה עבור הערך הקטן של x שמצאת בסעיף הקודם?

ג. מצא את האיבר השלישי הראשון בסדרה.

ד. ידוע כי: $S_{22} = 0$. מצא את a_1 .

(2) בסדרה חשבונית שבה $2n$ איברים סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים גדול ב-80 מסכום האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.

א. הוכח: $a_{n+1} = a_1 + 80$.

ב. נתון גם כי סכום n האיברים האחרונים בסדרה גדול ב-1600 מסכום n האיברים הראשונים בסדרה.

ג. מצא את מספר האיברים בסדרה.

(3) בסדרה חשבונית סכום שלושת האיברים הראשונים גדול פי 4 מהאיבר העומד במקום ה-19.

א. הוכח: $a_{70} = 0$.

ב. נתון כי סכום האיברים העומדים במקומות ה-4, ה-5 וה-6 הוא 195.

ג. מצא את a_1 ואת d .

ד. מצא בסדרה איבר שערכו שווה למיקומו הסידורי.

ה. מצא כמה איברים יש לחבר החל מהאיבר השלישי כך שסכומם יהיה אפס.

(4) בסדרה חשבונית נתון כי האיברים ה-4 וה-8 הם מספרים נגדיים.

א. הוכח כי: $a_6 = 0$.

ב. סכום האיברים בסדרה עד ל- a_6 הוא -45.

ג. מצא את a_1 ואת d .

ד. חשב כמה איברים יש לחבר החל מהאיבר השלישי כדי לקבל את הסכום 27.

(5) שני גופים הנמצאים במרחק של 110 ק"מ זה מזה נעים אחד לקראת השני. גוף א' עובר בכל שעה מרחק הגדול בק"מ אחד מהמרחק שעבר בשעה שלפניה. הגוף השני מתקדם בקצב קבוע. לאחר 5 שעות נפגשו שני הגופים.

א. הוכח כי בשעה הראשונה עברו שני הגופים יחד מרחק של 20 ק"מ.

ב. המרחק שעובר הגוף השני בכל שעה הוא 8 ק"מ.

ג. חשב את המרחק שעבר גוף א' עד שנפגשו שני הגופים.

ד. חשב את הזמן שלקח לגוף ב' להגיע לנקודת ההתחלה של גוף א'.

(6) אדם מלווה מחברו סכום של 75000 ₪.

החבר נתן לו שתי הצעות להחזרת ההלוואה:

הצעה ראשונה: להחזיר 3000 ₪ בחודש הראשון ובכל חודש נוסף להוסיף עוד 1000 ₪ על

הסכום שקדם לו. הצעה שנייה: להתחיל להחזיר רק בחודש החמישי ולתת סכום ראשוני של

8000 ₪ ולאחר מכן להוסיף סכום קבוע בכל חודש על הסכום הקודם. לפי שתי ההצעות המלווה

יקבל את מלוא הסכום לאחר אותו פרק זמן.

- א. כמה חודשים יצטרך להחזיר הלווה לפי ההצעה הראשונה?
 ב. בכמה שקלים יהיה ההפרש מחודש לחודש לפי ההצעה השנייה?

סדרה הנדסית:

- (7)** המספרים: $x+4$, $x-8$, $x-14$ הם שלושת האיברים הראשונים בסדרה הנדסית.
 א. מצא את מנת הסדרה.
 ב. מהו מיקומו בסדרה של האיבר 3072?
 ג. בסדרה יש 15 איברים. חשב את סכום כל האיברים בסדרה שאחרי האיבר 3072.
- (8)** בסדרה הנדסית שבה 10 איברים סכום כל איברי הסדרה גדול פי 2 מסכום כל האיברים כאשר מחליפים את סימני כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים.
 א. מצא את מנת הסדרה.
 ב. מצא את האיבר הראשון אם ידוע כי סכום כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים בסדרה הוא 14762.
- (9)** א. הראה כי בסדרה הנדסית שבה $2n$ איברים היחס בין סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים לבין סכום כל איברי הסדרה תלוי במנת הסדרה.
 בסדרה הנדסית שבה מספר זוגי של איברים ידוע כי סכום כל איברי הסדרה גדול פי 1.5 מסכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים. האיבר השביעי בסדרה זו הוא 384.
 ב. מצא את האיבר הראשון בסדרה זו.
 ג. 1. כתוב נוסחה לאיבר כללי של סדרה זו.
 2. האם קיים איבר בסדרה שערכו הוא 3000? הראה חישוב מתאים.
- (10)** נתונה הסדרה ההנדסית הבאה: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ שמנתה היא q .
 בונים בסדרה חדשה b_n ע"י כך שמחברים לכל איבר את האיבר שבא אחריו באופן הבא:
 $b_1 = a_1 + a_2$, $b_2 = a_2 + a_3$, $b_3 = a_3 + a_4$, $\dots, b_n = a_n + a_{n+1}$

- א. הוכח כי הסדרה b_n היא סדרה הנדסית ומנתה זהה למנת הסדרה a_n .
- ב. הוכח כי היחס בין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n ובין סכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n הוא גודל התלוי במנת הסדרות ומצא אותו.

ידוע כי סכום n האיברים הראשונים של הסדרה a_n קטן פי 3 מסכום n האיברים הראשונים של הסדרה b_n . האיבר השלישי של הסדרה b_n גדול ב-8 מהאיבר הרביעי של הסדרה a_n .

ג. כתוב נוסחה לאיבר הכללי של הסדרה b_n .

- 11** אדם המלווה מהבנק סכום כסף של 25,000 ₪ מקבל שתי הצעות להחזר ההלוואה. הצעה ראשונה: שלם בחודש הראשון 100 ₪ ובכל חודש הגדל את הסכום פי 2 ביחס לחודש הקודם לו במשך 8 חודשים.
- הצעה שנייה: שלם החל מהחודש החמישי מזמן לקיחת ההלוואה כך שבכל חודש הקטן את הסכום פי 2 ביחס לחודש הקודם לו.
- הבנק לוקח ריבית על ההלוואה לפי כל אחת מההצעות וידוע כי לאחר 8 חודשים מזמן לקיחת ההלוואה יסיים האדם להחזיר את הסכום הנדרש לפי כל אחת מההצעות.
- א. מהי הריבית שלוקח הבנק לפי ההצעה הראשונה?
- ב. כמה צריך האדם להחזיר בחודש החמישי ללקיחת ההלוואה לפי ההצעה השנייה אם ידוע כי הבנק לוקח בהצעה זו ריבית של 5,000 ₪?

- 12** בית דפוס שהוקם עתה ומתפתח במשך הזמן, מגדיל את תפוקת הוצאת הספרים שלו מדי חודש. ידוע כי בחודש השישי מאז הקמתו הדפיס בית הדפוס 16,000 ספרים וכי בכל ששת החודשים הראשונים להקמתו הדפיס בית הדפוס מספר כולל של 31,500 ספרים.
- א. כמה ספרים הדפיס בית הדפוס בחמשת חודשיו הראשונים?

ידוע כי סכום הספרים שהדפיס בית הדפוס בחמשת חודשיו הראשונים גדול פי 31 מכמות הספרים שהדפיס בחודש הראשון שלו.

ב. פי כמה מגדיל בית הדפוס את תפוקתו מדי חודש?

ג. לאחר כמה חודשים בית הדפוס ידפיס בתפוקה של מעל לחצי מיליון ספרים בחודש?

סדרות מעורבות:

- 13** שלושה מספרים מהווים שלושה איברים ראשונים בסדרה הנדסית וסכומם הוא 21. המספר הראשון, סכום שני המספרים הראשונים וסכום המספר הראשון והשלישי מהווים שלושה איברים ראשונים בסדרה חשבונית.
- א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית.
- ב. מחברים את 10 האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית המקורית.
- ידוע כי סכום זה גדול ב-1482 מסכום n האיברים הראשונים של הסדרה החשבונית שהתקבלה. מצא את n .

- 14** נתונה סדרה חשבונית: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ שהפרשה הוא d .
- האיברים העומדים במקומות הראשון, השני והשישי מהווים סדרה הנדסית.
- א. הוכח כי: $d = 3a_1$.
- ב. מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

ידוע כי סכום 8 האיברים הראשונים בסדרה ההנדסית הוא 21845.

ג. מצא את סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה החשבונית.

- 15** נתונה הסדרה: a_1, a_2, a_3, a_4 . ידוע כי a_1, a_2, a_3 היא סדרה חשבונית

- והסדרה a_2, a_3, a_4 היא סדרה הנדסית עולה.
 סכום האיבר הראשון והשלישי הוא 10 וסכום האיבר הראשון והרביעי הוא 20.
 א. מצא את האיבר a_2 .
 ב. מצא את האיבר a_1 .
 ג. 1. מצא את האיבר השישי בסדרה ההנדסית (המתחילה באיבר a_2).
 2. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית כדי לקבל סכום הקטן ב-20 מערך האיבר השישי בסדרה ההנדסית שמצאת.

16 נתונה סדרת המספרים: a_1, a_2, a_3, a_4 .

- ידוע כי המספרים: a_1, a_2, a_3 מהווים סדרה חשבונית והמספרים: a_2, a_3, a_4 מהווים סדרה הנדסית. סכום האיברים הראשון והשלישי הוא 8 וסכום האיברים השני והרביעי הוא 20.
 א. מצא את a_2 .
 ב. מצא את מנת הסדרה ההנדסית המקיימת: $a_1 = a_4$.
 ג. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה ההנדסית החל מאיברה הראשון a_2 כדי לקבל את הסכום -340.
 ד. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית החל מהאיבר הראשון כדי לקבל את הסכום -380.

17 נתונה הסדרה החשבונית הבאה: $102, 96, 90, \dots$ שכל איבריה חיוביים.

- א. 1. מצא את מיקומו הסידורי של איבר בסדרה שערכו אפס.
 2. כמה איברים יש בסדרה?
 3. חשב את סכום כל איברי הסדרה.

- בונים סדרה הנדסית עולה ובה האיבר הראשון שווה לאיבר האחרון של הסדרה החשבונית. האיבר החמישי בסדרה זו שווה לאיבר השני בסדרה החשבונית.
 ב. מצא את מיקומו הסידורי של שלושת האיברים האמצעיים של הסדרה ההנדסית בסדרה החשבונית.

- מחסרים מהסדרה החשבונית את כל האיברים של הסדרה ההנדסית.
 ג. חשב את סכום כל איברי הסדרה החשבונית שנשארו.

18 בין המספרים 3 ו-48 הכניסו שלושה מספרים נוספים כך שנוצרה סדרה הנדסית שאינה עולה.
 א. מצא את מנת הסדרה ההנדסית.

- בונים סדרה חשבונית ובה האיבר הראשון שווה בערכו לאיבר הרביעי של הסדרה ההנדסית הנתונה.
 ידוע כי יש בסדרה זו 12 איברים שליליים בלבד. האיבר העומד במקום ה-14 הוא חיובי.
 ב. מצא את הפרש הסדרה החשבונית.
 ג. מצא כמה איברים יש לחבר בסדרה החשבונית כדי שסכומם יהיה אפס.

סדרה הנדסית אינסופית מתכנסת:

- 19** בסדרה הנדסית ידוע כי סכום שני האיברים הראשונים הוא 4000 וסכום שני האיברים הבאים אחריהם הוא 250.
 א. הוכח כי הסדרה היא הנדסית יורדת.
 ב. חשב את סכום הסדרה.

מחברים n איברים ראשוניים וידוע כי היחס בין סכומם לסכום הסדרה הוא $\frac{255}{256}$.

ג. כמה איברים יש לחבר?

(20) נתונה סדרה הנדסית אינסופית יורדת: a_1, a_2, a_3, \dots שמנתה היא q ידוע כי כל איבריה

חיוביים. בונים סדרה חדשה b_n ע"י כך שמכפילים כל שני איברים סמוכים בסדרה הנתונה:

$$b_1 = a_1 a_2, b_2 = a_2 a_3, b_3 = a_3 a_4, \dots$$

א. הוכח כי הסדרה b_n היא גם סדרה הנדסית אינסופית יורדת.

ב. הוכח כי היחס בין סכום הסדרה b_n ובין סכום כל איברי הסדרה a_n כאשר מעלים אותם בריבוע שווה למנת הסדרה הנתונה.

ג. ידוע כי $b_1 = 2700$ וכי סכום הסדרה b_n הוא 3037.5. מצא את האיבר הראשון

בסדרה הנתונה a_n .

(21) נתונות שתי סדרה הנדסיות אינסופיות יורדות שמנתן היא q , $(0 < q < 0.5)$:

סדרה ראשונה: a_1, a_2, a_3, \dots שסכומה הוא 864,

וסדרה שנייה: b_1, b_2, b_3, \dots שסכומה הוא 792.

ידוע כי האיבר השני בסדרה הראשונה גדול ב-10 מהאיבר השני בסדרה השנייה.

א. מצא את מנת הסדרות.

בונים את הסדרה c_n ע"י שילוב של שתי הסדרות הנתונות באופן הבא:

$$c_1 = a_1^2 - b_1, c_2 = a_2^2 - b_2, c_3 = a_3^2 - b_3, \dots, c_n = a_n^2 - b_n$$

ב. חשב את סכום הסדרה c_n .

(22) נתונה סדרה הנדסית אינסופית שסכומה הוא 546.75.

האיבר השני בסדרה הוא -243.

א. מצא את מנת הסדרה.

מחליפים את הסימנים של כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

ב. חשב את סכום הסדרה החדשה.

ג. מצא מאיזה איבר יש להתחיל לחבר את כל איברי הסדרה החדשה כדי לקבל את הסכום 13.5.

(23) א. הוכח כי בסדרה הנדסית אינסופית יורדת היחס בין סכום הסדרה בריבוע

ובין סכום ריבועי כל איברי הסדרה תלוי רק במנת הסדרה.

בסדרה הנדסית נתונה ידוע כי היחס בין סכום הסדרה בריבוע ובין סכום ריבועי כל איברי הסדרה הוא 0.6.

סכום כל איברי הסדרה החל מהאיבר החמישי הוא 2.4.

ב. מצא את מנת הסדרה ואת האיבר הראשון.

ג. חשב את סכום האיברים העומדים במקומות הזוגיים.

סדרות כלליות וסדרות נסיגה:

(24) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה: $a_{n+1} = 5n - 5 - a_n$, $a_1 = k$.

- א. הוכח כי הסדרה בנויה משתי סדרות חשבוניות.
 האחת - סדרת האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים
 והשנייה - סדרת האיברים העומדים במקומות הזוגיים.
 ב. כתוב נוסחה לסכום $2n$ האיברים הראשונים של הסדרה.

- ידוע כי סכום 7 האיברים הראשונים של הסדרה הוא 48.
 ג. מצא את k . (הדרכה: כתוב את הסכום באופן הבא: $S_6 + a_7 = 48$
 והעזר בסעיפים הקודמים למציאת a_7 ולאחר מכן a_1).

(25) סדרה מקיימת את כלל הנסיגה הבא: $a_1 = k, a_{n+1} = \frac{6^n}{3a_n}$.

- א. הראה כי סדרת כל האיברים העומדים במקומות הזוגיים וסדרת כל האיברים העומדים במקומות האי-זוגיים הן סדרות הנדסיות.
 סכום 6 האיברים הראשונים בסדרה הוא 129.
 ב. מצא את שני הערכים האפשריים של k .

- מחליפים הסימנים של כל שני איברים סמוכים לסירוגין באופן הבא:
 $a_1, a_2, -a_3, -a_4, a_5, a_6, -a_7, -a_8, \dots$
 ג. עבור ערך הקטן של k שמצאת כתוב נוסחה לסכום $2n$ האיברים הראשונים.

(26) סדרה מוגדרת לפי כלל הנסיגה: $a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3}$.

מגדירים סדרה חדשה b_n לפי הכלל: $b_n = \frac{3a_n + 3}{a_n}$.

- א. כתוב כלל נסיגה לסדרה b_n .
 ב. כתוב נוסחה ל- n האיברים הראשונים של הסדרה b_n .
 ג. חשב את הסכום: $b_6 - b_7 + b_8 - b_9 + b_{10} - b_{11}$.

תשובות סופיות:

- (1) א. 1. $x = 6, 8$ 2. $d = -6$ ב. $a_n = -3$ ג. $a_1 = 63$ 2) ב. $2n = 40$
 (3) ב. $d = -1, a_1 = 69, a_{35} = 35$ 7. $n = 135$ 4) ב. $d = 3, a_1 = -15$ ג. $n = 9$
 (5) ב. $S = 70$ ג. 13 שעות ו-45 דקות. 6) א. 10 חודשים. ב. $d = 1800$
 (7) א. $q = 2$ ב. $n = 10$ ג. $S = 190464$ 8) א. $q = 3$ ב. $a_1 = 2$

(9) א. $\frac{S_{n(p)}}{S_{2n}} = \frac{\frac{a_1 q (q^{2n} - 1)}{q^2 - 1}}{\frac{a_1 (q^{2n} - 1)}{q - 1}} = \frac{q}{q + 1}$ ב. $a_1 = 6$ ג. 1. $a_n = 3 \cdot 2^n$ 2. לא.

(10) א. $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}} = \frac{a_1 q^n + a_1 q^{n+1}}{a_1 q^{n-1} + a_1 q^n} = \frac{a_1 q^n (1 + q)}{a_1 q^{n-1} (1 + q)} = q$

$$.b_n = 3 \cdot 2^n \text{ ג. } \frac{S_{(a_n)_n}}{S_{(b_n)_n}} = \frac{\frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}{\frac{(a_1 + a_2)(q^n - 1)}{q - 1}} = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{1}{1 + q} \text{ ב.}$$

(11) א. 500 ₪ ב. 16,000 ₪. א. (12) 15,500 ספרים. ב. פי 2. ג. לאחר 10 חודשים.

(13) א. $q = 2$ ב. $n = 23$ (14) ב. $q = 4$ ג. $S_6 = 51$.

(15) א. $a_2 = 5$ ב. $a_1 = 0$ ג. $a_7 = 160$ 2. 8 (16) א. $a_2 = 4$ ב. $q = -2$ ג. 8 7 10.

(17) א. 1. $a_{18} = 0$ 2. $n = 17$ 3. $S_{17} = 918$ ב. $a_{10} = 48$, $a_{14} = 24$, $a_{16} = 12$ ג. $S_{12}^* = 732$.

(18) א. $q = -2$ ב. $d = 2$ ג. 25 (19) א. $q = 0.25$ ב. $S = 4266 \frac{2}{3}$ ג. $n = 4$.

(20) א. $q^2 = \frac{a_1 q^{n+1}}{a_1 q^{n-1}} = \frac{a_{n+2}}{a_n} = \frac{a_{n+1} a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$ ג. $a_1 = 90$ א. (21) $q = \frac{1}{6}$ ב. $S = 532419 \frac{3}{7}$.

(22) א. $q = -\frac{1}{3}$ ב. $S = 1093.5$ ג. a_5 .

(23) א. $\frac{S^2}{S^*} = \frac{\left(\frac{a_1}{1-q}\right)^2}{\frac{a_1^2}{1-q^2}} = \frac{\frac{a_1^2}{(1-q)^2}}{\frac{a_1^2}{(1-q)(1+q)}} = \frac{1+q}{1-q}$ ב. $q = -0.25$, $a_1 = 768$ ג. $S = -204.8$.

(24) ב. $S_{2n} = 5n^2 - 5n$ ג. $k = 3$ (25) ב. $k_{1,2} = 1, 2$ ג. $S_{2n} = \frac{3 - 3(-6)^n}{7}$.

(26) א. $b_{n+1} = 3b_n$ ב. $a_n = \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1} - 1}$ ג. $S_n = 3^{n+1} + 3$ 7. $S = -265356$.