טורים

הגדרת הגבול של סדרת מספרים מרוכבים:

תהי a_n סדרת מספרים מרוכבים. נאמר כי היא מתכנסת ל $L\in\mathbb{C}$ אמ״מ
לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$

הגדרת התכנסות של טור של מספרים מרוכבים:

הטור $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ מתכנס אם ורק אם סדרת הסכומים החלקיים $S_n=\sum_{k=0}^{k=n} z_k$ מתכנסת

משפט: התכנסות בהחלט גוררת התכנסות

אם $\sum_{k=0}^{\infty}|z_k|<\infty$ אז הטור $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ מתכנס

תנאי הכרחי (אך לא מספיק) להתכנסות טור:

אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ מתכנס אז $\lim_{n\to\infty} z_n=0$

טורי חזקות:

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ נקרא טור חזקות והוא מתכנס (גם בהחלט) בדיסק הפתוח

$$D_R(z_0)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-z_0|<R\}$$

(תיתכן גם התכנסות על חלק או על כל הנקודות בשפה $\partial D_R(z_0)$ אבל זה לא מובטח)
כאשר רדיוס ההתכנסות R נתון ע״י קריטריון קושי-הדמר

$$\frac{1}{R}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$ (במידה והגבול קיים)

תכונות חשובות:

1) טור חזקות מתכנס במ״ש בכל קבוצה קומפקטית שמוכלת ממש ב $D_R(z_0)$
כלומר בכל קבוצה קומפקטית Ω המקיימת $\Omega\subset D_R(z_0)$
2) מהתכונה הקודמת ניתן להוכיח כי טור חזקות ניתן לגזור/לאנטגרל איבר איבר בתוך $D_R(z_0)$
3) לרדיוס ההתכנסות יש גם משמעות גיאומטרית – הוא המרחק בין הנקודה סביבה מפתחים z_0 עד לנקודה הסינגולרית הקרובה ביותר (שאינה סליקה).
על נקודות סינגולריות נדבר בפרקים הבאים.

מבחן וייארשטראס להתכנסות במידה שווה:

נניח כי לטור הפונקציות $\sum u_n(z)$ קיימת סדרת מספרים ממשיים M_n

כך ש $|u_n(z)| \le M_n$ לכל n ולכל $z \in U$ ונניח כי הטור $\sum M_n$ מתכנס

אזי הטור $\sum u_n(z)$ מתכנס במידה שווה בתחום U.

משפט לורן:

נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $R_1 < |z-z_0| < R_2$

אז ל - $f(z)$ יש פיתוח לטור $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

כאשר המקדמים נתונים על ידי

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\omega - z_0| = r} \frac{f(\omega)}{(\omega - z_0)^{n+1}} d\omega \qquad (R_1 < r < R_2)$$

הערות:

1. את המסילה $|\omega - z_0| = r$ ניתן להחליף בכל מסילה פשוטה סגורה γ הנמצאת בטבעת $R_1 < |z-z_0| < R_2$ המקיפה את הנקודה z_0

2. הטור $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ מתכנס במידה שווה בכל תת-קבוצה קומפקטית המוכלת ממש בטבעת $R_1 < |z-z_0| < R_2$

3. כתוצאה מ 2 נובע שניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר לטור לורן בתוך הטבעת. כלומר $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \int_\gamma (z-z_0)^n dz$ לכל מסילה γ המוכלת ב $R_1 < |z-z_0| < R_2$.

4. ניתן גם לרשום $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

הטור $\sum_{n=-\infty}^{n=-1} a_n (z-z_0)^n$ נקרא החלק העיקרי והוא מתכנס ב $|z-z_0| > R_1$

הטור $\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (z-z_0)^n$ נקרא החלק האנליטי והוא מתכנס ב $|z-z_0| < R_2$

5. ממשפט לורן נובע שבכל טבעת שבה הפונקציה אנליטית ניתן לפתח את הפונקציה לטור לורן. בטבעות שונות הפיתוח לרוב יהיה שונה.

טורים מספריים

שאלות

1) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(in)}{2^n}$.

2) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin(in)}{3^n}$.

3) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+i}{\sqrt{5}}\right)^n$.

4) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2+i^n}$.

5) בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+i^n}$.

תשובות סופיות

1) מתבדר
2) מתכנס
3) מתבדר
4) מתבדר
5) מתכנס

קריטריון קושי - הדמה

שאלות

1) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$.

2) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{in}\right)^n$.

3) מצאו רדיוס התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n (2n+1)} (z-3)^n$.

תשובות סופיות

1) $R = 1$

2) $R = \infty$

3) $R = 3$

טורים כלליים

שאלות

4) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$.

5) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{(1-i)^n}$.

6) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n (z-1)^n}$.

7) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$.

8) מצאו תחום התכנסות עבור הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{nz}$.

תשובות סופיות

9) $|z|>1$

10) $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$

11) $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$

12) $2<|z|<4$

13) $\text{Re}(z)<0$

טורי טיילור ומקלורן

שאלות

1) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\sin(z+1)$ סביב $z=0$ ומצאו תחום התכנסות

2) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\frac{1}{z}$ סביב $z=i$ וציינו את רדיוס ההתכנסות

3) מצאו טור טיילור עבור $f(z)=\frac{2i}{2+i+z}$ סביב $z_0\neq-(2+i)$
בתחום $|z-z_0|<|2+i+z_0|$

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(1-z)^3}$ לטור חזקות סביב $z_0\neq1$
בתחום $|z-z_0|<|1-z_0|$

תשובות סופיות

1) $z\in\mathbb{C}$ $\quad f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\cos(1)\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}+\sin(1)\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}\right)$

2) $|z-i|<1$ $\quad f(z)=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{i}\right)^n(z-i)^n$

3) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2i(-1)^n}{(2+i+z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$

4) $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{(n+1)(n+2)}{(1-z_0)^{n+3}}(z-z_0)^n$

5) $\text{Re}(z)<0$

מבחן וייארשטראס להתכנסות במידה שווה

שאלות

1) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ מתכנס במ״ש ב $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|<r\}$ כאשר $0<r<1$

2) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ מתכנס במ״ש ב $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le 1\}$

3) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(z^2-1\right)^n}$ מתכנס במ״ש ב $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\ge 2\}$

4) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{z^n+1}$ מתכנס במ״ש ב $U=\{z\in\mathbb{C} \mid |z|\le r\}$ כאשר $0<r<1$

5) הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$ מתכנס במ״ש ב $U=\{z\in\mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z)\ge 2\}$
(כאשר n^{-z} מוגדרת על ידי הענף הראשי של הלוג)

תשובות סופיות

1) הוכחה
2) הוכחה
3) הוכחה
4) הוכחה
5) הוכחה

טורי לורן

שאלות

1) פתחו את הפונקציה לטור לורן סביב $z_0=0$ בכל התחומים האפשריים $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<2$ ובתחום $|z|>2$.

3) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-1$ בתחומים הבאים: $0<|z+1|<2$ ו- $|z+1|>2$.

4) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+2)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=-3$ בכל התחומים האפשריים.

5) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $1<|z|<3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

6) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|>3$.
רמז: פירוק לשברים חלקיים.

7) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$.

8) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ בתחום $|z|<1$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

9) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $0<|z-i|<2$ ומצאו את המקדם a_{-1}.

10) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ לטור לורן סביב $z_0=i$ בתחום $|z-i|>2$.

11) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-4)}$ לטור לורן סביב $z_0=1$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $z=5$.

12) פתחו את הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2-5z+6}$ לטור לורן סביב $z_0=0$ כך שיתכנס בתחום המכיל את $1-3i$.

13) נניח כי $|a|<1$ ונגדיר את הפונקציה $f(z)=\frac{a}{z-a}$ (כאשר a מספר ממשי)

א) פתחו פונקציה זו לטור לורן בטבעת $|a|<|z|<\infty$

ב) הוכיחו את הזהות $\sum_{n=0}^{\infty} a^n\cos(n\theta)=\frac{a\cos(\theta)-a^2}{1-2a\cos(\theta)+a^2}$

14) תהי $a\in\mathbb{C}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ ונניח כי מתקיים $\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=0$. הוכיחו כי לכל $r>0$ מתקיים $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a|=r}\frac{f(z)}{z-a}dz$

15) נסמן $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ פיתוח לטור לורן של $f(z)=\frac{z}{e^{z^2}-1}$ סביב $z_0=0$ בתחום $0<|z|<r$.

א) מצאו מהו ה r המקסימלי

ב) מצאו את a_n לכל $n\le 4$

הערה: תרגיל זה דורש ידע בסיווג של נקודות סינגולריות

16) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} z^3\cos\left(\frac{1}{z}\right)dz$

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

17) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} e^{\frac{1}{z}}dz$

תזכורת: מקדמי לורן נתונים ע"י הנוסחה $a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

תשובות סופיות

1)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z|<1$$

$$f(z)=-\left(\frac{1}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \qquad |z|>1$$

2)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n \qquad |z|<2$$

$$f(z)=-\left(\frac{2}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^n \qquad |z|>2$$

3)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z+1)^{n-1} \qquad 0<|z+1|<2$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z+1)^{n+2}} \qquad |z+1|>2$$

4)

$$f(z)=-\frac{1}{(z+3)}\sum_{n=0}^{\infty}(z+3)^n \qquad 0<|z+3|<1$$

$$f(z)=\frac{1}{(z+3)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+3)^n} \qquad |z+3|>1$$

5)

$$f(z)=\frac{1}{2z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^n} \qquad 1<|z|<3$$

6)

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-3)^n}{z^{n+1}} \qquad |z|>3$$

7)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{6\cdot 3^n}\right]z^n \qquad |z|<1$$

8)

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \qquad |z|<1$$

$$a_{-1}=0$$

9)
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2i}\right)^{n+1}(z-i)^{n-1} \qquad 0<|z-i|<2$$
$$a_{-1}=\frac{1}{2i}$$

10) $2<|z-i|$
$$f(z)=\frac{1}{(2-i)^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2i}{z-i}\right)^n$$

11) $|z-1|>3$
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(z-1)^{n+2}}$$

12) $|z|>3$
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}}$$

13) א) $|a|<|z|<\infty$
$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}$$
ב) הוכחה

14) הוכחה

15) א) $r=\sqrt{2\pi}$

ב) $a_{-1}=1 \ , \ a_0=0 \ , \ a_1=-\frac{1}{2} \ , \ a_2=0, a_3=\frac{1}{12} \ , \ a_4=0$

$\forall n\le -2 \ \ a_n=0$

16) $\frac{\pi i}{12}$

17) $2\pi i$