טופולוגיה במישור המרוכב

הגדרת הגבול של סדרת מספרים מרוכבים:

תהי a_n סדרת מספרים מרוכבים. נאמר כי היא מתכנסת ל $L \in \mathbb{C}$ אם ורק אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$

משפט:

סדרת מספרים מרוכבים $a_n = x_n + i \cdot y_n$ מתכנסת אם ורק אם

הסדרות x_n ו - y_n (החלק הממשי והחלק המדומה) שתיהן מתכנסות.

נקודה פנימית

תהי $A \subseteq \mathbb{C}$.

נאמר כי $z_0 \in A$ נקודה פנימית אם ורק אם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B_\varepsilon(z_0) \subseteq A$

(כלומר אם ורק אם קיים עיגול סביב z_0 המוכל כולו ב A)

קבוצה פתוחה

תהי $A \subseteq \mathbb{C}$.

נאמר כי A קבוצה פתוחה אם רק אם כל הנקודות בה הן נקודות פנימיות,

כלומר אם ורק אם לכל $z \in A$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B_\varepsilon(z) \subseteq A$

קבוצה סגורה

תהי $A \subseteq \mathbb{C}$.

נאמר כי A קבוצה סגורה אם רק אם המשלים A^c קבוצה פתוחה.

שפה של קבוצה

תהי $A \subseteq \mathbb{C}$.

$z_0 \in \mathbb{C}$ תקרא נקודת שפה של A אם ורק אם בכל עיגול סביב z_0

יש נקודה מ - A ויש נקודה מ - A^c. קבוצת כל הנקודות האלו מסומנת ב ∂A

ונקראת השפה של הקבוצה A.

סגור של קבוצה

תהי $A \subseteq \mathbb{C}$.

סגור של קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$ מסומן כך $\overline{A}$ והוא מוגדר להיות האיחוד בין A והשפה ∂A,

כלומר $\overline{A} = A \cup \partial A$.

נקודת הצטברות

תהי $A \subseteq \mathbb{C}$.

נקודה $z_0 \in \mathbb{C}$ (לאו דווקא ב A) תקרא נקודת הצטברות של הקבוצה A

אם ורק אם בכל עיגול סביב z_0 קיימת נקודה (פרט ל z_0) השייכת ל A

<u>ניסוח נוסף:</u>

נקודה $z_0 \in \mathbb{C}$ (לאו דווקא ב A) תקרא נקודת הצטברות של הקבוצה A

אם ורק אם קיימת סדרת נקודות שונות $\{z_n\} \subset A$ כך ש $z_n \xrightarrow{n \to \infty} z_0$

נקודה מבודדת

תהי $A \subseteq \mathbb{C}$.

נקודה $z_0 \in A$ תקרא נקודה מבודדת אם ורק אם קיים עיגול סביב z_0

כך שבעיגול זה אין נקודות השייכות ל A פרט ל z_0 עצמה.

(כלומר אם ורק אם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $A \cap \left(B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}\right) = \varnothing$)

קבוצה קשירה (מסילתית)

קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$ תקרא קשירה (מסילתית) אם בין כל שתי נקודות $z_1, z_2 \in A$

קיים קו רציף המחבר ביניהם המוכל כל כולו בקבוצה A.

תחום

קבוצה $A \subseteq \mathbb{C}$ תקרא תחום אם היא פתוחה וקשירה.

תחום פשוט קשר

תחום $A \subseteq \mathbb{C}$ ייקרא פשוט קשר אם ניתן לכווץ כל מסילה סגורה בתחום לנקודה בתוך התחום.

סדרות של מספרים מרוכבים

שאלות

1) חשבו את הגבול (אם קיים) של $z_n=\frac{1}{n}+i\left(\frac{n-2}{n}\right)$

2) חשבו את הגבול (אם קיים) של $z_n=\frac{n^2+n+1}{3n^2+2}+i\left(\frac{n-1}{2n}\right)$

3) נגדיר $z_n=(i)^{2n}n^3$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=\infty$

4) נגדיר $z_n=\frac{i^n}{n}$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=0$

5) חשבו את הגבול (אם קיים) של $z_n=\frac{(1+i)^n}{n}$

6) בדקו את התכנסות הסדרה $z_n=n\cdot z^n$

א) כאשר $|z|\geq 1$

ב) כאשר $0<|z|<1$

7) הוכיחו כי אם $z_n\xrightarrow{n\to\infty}z$ ו - $w_n\xrightarrow{n\to\infty}w$ אז $z_n+w_n\xrightarrow{n\to\infty}z+w$

8) בדקו אם הסדרות הבאות מתכנסות, אם כן, חשבו את גבולן:

א) $z_n=\frac{1+n}{1-2n}+i\frac{n-10}{n^2}$

ב) $z_n=\cos(\pi n)+i\cdot n\cdot\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

ג) $z_n=\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n}+i\sqrt{3^n+4^n}$

ד) $z_n=\left(\frac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)^n$

תשובות סופיות

1) i
2) $\frac{1}{3}+i\cdot\frac{1}{2}$
3) הוכחה
4) הוכחה
5) הגבול הוא אינסוף
6) א) הגבול הוא אינסוף
ב) 0
7) הוכחה
8) א) $-\frac{1}{2}$
ב) הסדרה לא מתכנסת
ג) $\frac{1}{e^2}+4i$
ד) הסדרה לא מתכנסת

מושגים טופולוגיים בסיסיים

שאלות

1) שרטטו את הקבוצה $\{z\in\mathbb{C} \mid |z-i|+|z+i|<4\}$

א) האם היא פתוחה? סגורה?

ב) האם זה תחום?

ג) אם זה תחום פשוט קשר?

2) שרטטו את הקבוצה $\left\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\left[\frac{z-a}{z+a}\right]=0\right\}$ עבור a ממשי

א) האם היא פתוחה?

ב) האם זה תחום?

ג) אם זה תחום פשוט קשר?

3) שרטטו את הקבוצה $\left\{z\in\mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\left[\frac{z-1}{z+1}\right]=0\right\}$

א) האם היא פתוחה?

ב) האם זה תחום?

ג) אם זה תחום פשוט קשר?

4) שרטטו את הקבוצה $\{z\in\mathbb{C} \mid |z+i|=2|z-i|\}$

א) האם היא פתוחה?

ב) האם זה תחום?

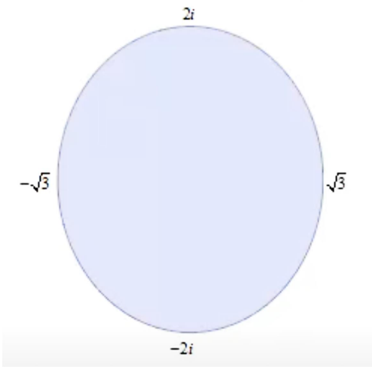
ג) אם זה תחום פשוט קשר?

5) א) הראו כי $|z\pm w|^2=|z|^2\pm 2\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)+|w|^2$

ב) עבור $z_1,z_2\in\mathbb{C}$ ו - $\lambda>0$ הראו כי המשוואה $|z-z_1|=\lambda|z-z_2|$ מתארת ישר או מעגל במישור.

תשובות סופיות

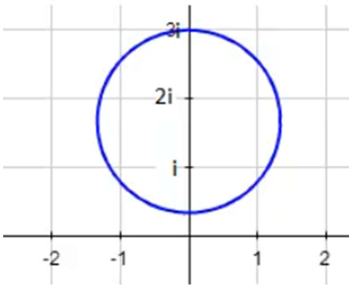
1)
א) פתוחה
ב) כן
ג) כן



2) עבור $a>0$ הקבוצה היא מעגל ברדיוס a, עבור $a\le 0$ הקבוצה ריקה
א) לא
ב) לא
ג) לא

3) הקבוצה היא $\{(x,0)\ \mid\ x\neq -1\}$
א) לא
ב) לא
ג) לא

4)
א) לא
ב) לא
ג) לא



5)
א) הוכחה
ב) הוכחה