תוכן העניינים:

שימו לב!

החוברת מחולקת לנושאים כפי שמוצגים באתר GOOL.
כל נושא פותח בסיכום תיאורטי קצר ולאחריו דוגמאות – אלו נידונים בהרחבה <u>בסרטוני התיאוריה</u> שבאתר GOOL. לאחר מכן ישנו מגוון תרגילים ברמה עולה בכל אחד מהנושאים – כולם נפתרים באריכות ובפירוט <u>בסרטוני השאלות</u> שבאתר.

פרק 7

מעגלים מסדר ראשון

פתרון של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון:

סיכום כללי:

הקדמה:

תבנית המשוואות שנעסוק בהן :

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=f(t) \\ v(0^+)=V_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}i(t)=f(t) \\ i(0^+)=I_0 \end{cases}$$

בהקשר של מעגלים חשמליים, נתייחס לפרמטרים הבאים :

1) הגודל τ נקרא **קבוע הזמן של המעגל** ונתייחס אליו כאן ביחידות של sec.

2) הפונקציה שבאגף ימין, $f(t)$, נקראת **עירור הכניסה של המעגל**.

3) תנאי ההתחלה (ת.ה.) יתארו ערך מתח או זרם התחלתיים, כאשר חשוב לקבלם עבור $t=0^+$. במקרים בהם ת.ה. יינתנו עבור $t=0^-$ אנו נמיר אותם תחילה לזמן $t=0^+$.

משוואה הומוגנית:

משוואה הומוגנית מקיימת : $f(t)=0$, כלומר : $\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=0 \\ v(0^+)=V_0 \end{cases}$.

הפתרון של מד״ר הומוגנית מסדר ראשון הוא : $v_h(t)=V_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$ (או : $i_h(t)=I_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$)

והוא נקרא הפתרון ההומוגני של המשוואה.

משוואה לא הומוגנית:

משוואה מהצורה: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=f(t)$ נקראת משוואה **לא הומוגנית** (כלומר: $f(t)\neq 0$).

פתרון משוואה לא הומוגנית מורכב מהסכום של **הפתרון ההומוגני והפתרון הפרטי**:

$v(t)=v_h(t)+v_p(t)$.

לגבי הפתרון הפרטי – ננחש אותו לפי הכללים הבאים:

אגף ימני - $f(t)$	ניחוש פתרון - $v_p(t)$
$P_n(t)\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+$	$Q_n(t)$
$\exp(-\alpha t)\ ,\ \alpha>0$	$A\exp(-\alpha t)$
$t\exp(-\alpha t)\ ,\ \alpha>0$	$(At+B)\exp(-\alpha t)$
$\sin(\omega_0 t)$ או $\cos(\omega_0 t)$	$A\sin(\omega_0 t)+B\cos(\omega_0 t)$

ליניאריות הפתרונות:

כאשר נתונה מד"ר הכוללת מספר איברים כגון: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k f_k(t)$

נרכיב פתרון מהצורה: $v(t)=v_h(t)+\sum_{k=1}^{N}v_{p,k}(t)$.

פתרונות ZIR ו-ZSR:

משוואה עם כניסת אפס (ZIR):

משוואה מהצורה: $\begin{cases}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=0\\ v(0^+)=V_0\end{cases}$ שפתרונה ידוע גם בתור <u>התגובה לכניסה אפס למעגל</u>.

למשוואה זו פתרון הומוגני בלבד ולכן נוכל לכתוב: $v_{ZIR}(t)=V_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$.

משוואה עם תנאי התחלה אפס (ZSR):

משוואה מהצורה: $\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=f(t) \\ v(0^+)=0 \end{cases}$ שפתרונה מורכב מהפתרון ההומוגני

והפתרון הפרטי של משוואה דיפרנציאלית: $v_{ZSR}(t)=v_h(t)+v_p(t)$.

הכללה:

פתרון משוואה בעלת N עירורי כניסה: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=\sum_{k=1}^{N}f_k(t)$ (ות.ה.: $v(0^+)\neq 0$)

יהיה מהצורה הבאה: $v(t)=v_{ZIR}(t)+\sum_{k=1}^{N}v_{ZSR,k}(t)$.

סיכום פתרון משוואה ע"י חלוקה ל-ZIR ו-ZSR:

בהינתן משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון מהצורה: $\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}y(t)=f(t) \\ y(0^+)=Y_0 \end{cases}$

כאשר $y(t)$ מייצג את מתח או זרם, ו- $y(0^+)=Y_0$ הוא ערך תנאי ההתחלה עבור את המתח או הזרם בהתאמה, נוכל לייצג את דרך הפתרון ויזואלית בצורה הבאה:

$$y(t) = y_{ZIR}(t) + y_{ZSR}(t)$$

$$\swarrow \qquad\qquad \swarrow \quad .... \quad \searrow$$

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}y(t)=0 \\ y(0^+)=Y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}y(t)=f_1(t) \\ y(0^+)=Y_0 \end{cases} + \dots + \begin{cases} \frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}y(t)=f_N(t) \\ y(0^+)=Y_0 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$y_{ZIR}(t)=y_h(t) \qquad \underbrace{y_{ZSR,1}(t)=y_h(t)+y_p(t) \qquad y_{ZSR,N}(t)=y_h(t)+y_p(t)}$$

$$\downarrow$$

$$y_{ZSR}(t)=\sum_{k=1}^{N}y_{ZSR,k}$$

איזון הלמים:

ניתן להמיר מד"ר מהצורה:

$$\begin{cases} y^{(N)}(t)+a_{N-1}y^{(N-1)}(t)+....+a_1y'(t)+a_0y(t)=C\cdot\delta(t) \\ y^{(N-1)}(0^-)=y^{(N-2)}(0^-)=....=y(0^-)=0 \end{cases}$$

באופן הבא:

$$\begin{cases} y^{(N)}(t)+a_{N-1}y^{(N-1)}(t)+....+a_1y'(t)+a_0y(t)=0 \\ y^{(N-1)}(0^+)=C\ ,\ y^{(N-2)}(0^+)=....=y(0^+)=0 \end{cases}$$

שאלות:

1) נתונה המד"ר הבאה: $i'+\frac{1}{\tau}i=0$, כאשר $\tau=\frac{1}{4}\sec$ ו- $i(0^-)=5\text{A}$.

א. מהו פתרון ZIR ופתרון ZSR של המשוואה?

ב. כתוב את הפתרון הכללי.

2) פתור את המד"ר הבאה: $v'+\frac{1}{\tau}v=0$, $\tau=\frac{1}{2}\sec$, $v(0^-)=1\text{V}$.

3) נתונה המד"ר הבאה: $i'+\frac{1}{\tau}i=5\cdot u(t)$ כאשר $\tau=40\,\text{m}\sec$.

מהו פתרון המשוואה עבור כל אחד מתנאי ההתחלה הבאים:

א. $i(0^-)=0\text{A}$.

ב. $i(0^-)=3\text{A}$.

4) נתונה המד"ר הבאה: $i'+\frac{1}{\tau}i=6\cdot\sin(4t)\cdot u(t)$ כאשר $\tau=20\,\text{m}\sec$

ו- $i(0^-)=3\text{mA}$. מצא את הפתרון הכללי של $i(t)$.

5) מצא את הפתרון הכללי של המד"ר הבאה: $v'+\frac{1}{\tau}v=e^{-4t}u(t)$

אם ידוע כי $\tau=0.25\sec$ ותנאי ההתחלה הוא $v(0^+)=30\text{mV}$.

6) פתור את המד"ר הבאה: $i'+\frac{1}{\tau}i=4\delta(t)-3\cdot\cos(2t)\cdot u(t)$

כאשר: $\tau=1\sec$ ו- $i(0^-)=200\text{mA}$.

7) נתונה המד"ר הבאה: $v'+\frac{1}{\tau}v=2\delta(t)+5\cdot\sin(3t)\cdot u(t)+e^{-12t}\cdot u(t)+2e^{-10t}\cdot u(t)$.

מצא את הפתרון הכללי עבור $v(t)$ כאשר $\tau=0.1\sec$ ו- $v(0^-)=0\text{V}$.

תשובות סופיות:

1) א. $i_{ZIR}(t)=5e^{-4t}\ ;\ t\geq 0$, $i_{ZSR}(t)=0$ ב. $i(t)=i_{ZIR}(t)=5e^{-4t}\ ;\ t\geq 0$.

2) $v(t)=v_{ZIR}(t)=e^{-2t}\ ;\ t\geq 0$.

3) א. $i(t)=i_{ZIR}(t)=\frac{1}{5}\left(1-e^{-25t}\right)\ ;\ t\geq 0$ ב. $i(t)=\frac{1}{5}+2\frac{4}{5}e^{-25t}\ ;\ t\geq 0$.

4) $i(t)=12.4\cdot 10^{-3}e^{-50t}+0.119\sin 4t-9.54\cdot 10^{-3}\cos 4t\ ;\ t\geq 0$.

5) $v(t)=e^{-4t}(t+0.03)\ ;\ t\geq 0$.

6) $i(t)=\left[4.8e^{-t}-0.6\cos 2t-1.2\sin 2t\right]u(t)$.

7) $v(t)=\left(\frac{575}{218}+2t\right)e^{-10t}-\frac{1}{2}e^{-12t}+\frac{1}{109}\left(50\sin 3t-15\cos 3t\right)\ ;\ t\geq 0$.

ניתוח מעגלים מסדר ראשון:

סיכום כללי:

פונקצית גרין:

פתרון ZSR ניתן לכתיבה: $v_{ZSR}(t)=\int_0^{\infty} G(t|t')\frac{1}{\tau}v_S(t')dt'$

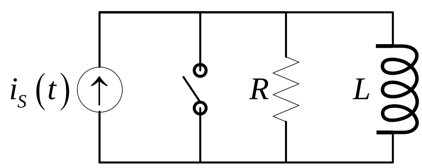
כאשר: $G(t|t')=\exp\left\{-\frac{t-t'}{\tau}\right\}u(t-t')$ כאשר $G(t|t')$ היא **פונקצית גרין** המהווה את תגובת המעגל לכניסת הלם.

מקרים פרטיים - מדרגה והלם:

הפרשנות של כניסת מדרגה היא מתח DC שמתחבר למעגל ע"י מפסק.
כניסת הלם יכולה לקבל מספר פרשנויות חשמליות, החל מהפרעה חשמלית במעגל, ועד לכניסת רכבת הלמים שמטרתה לטעון רכיבים במעגל.

❖ **דוגמה – ניתוח מעגל עם כניסת מדרגה:**

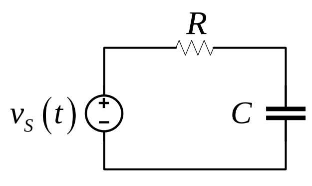
נתון מעגל RL עם מקור זרם DC: $i_S(t)=I_0u(t)$ ונרצה למצוא את $i_C(t)$.
במעגל עצמו, נניח כי המפסק נפתח ב-$t=0$ וזה מממש את פונקצית המדרגה עצמה.



❖ **דוגמה – ניתוח מעגל עם כניסת הלם:**

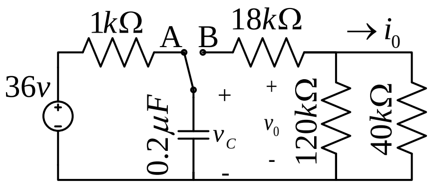
נניח מעגל RC עם אות כניסה: $v_S(t)=\tau V_0\delta(t)$. יש למצוא את $v_C(t)$.

נניח כי אין בקבל אנרגיה, כלומר: $v_C(0^-)=0$.



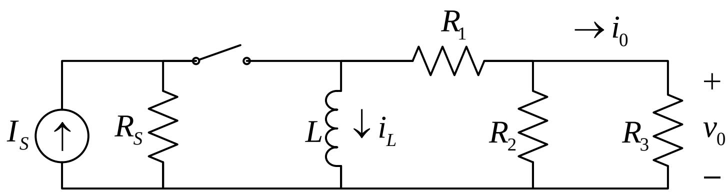
שאלות:

1) במעגל שלפניך כל הערכים מופיעים בסכמה החשמלית הבאה:
המפסק נמצא במצב A למשך הרבה זמן.
בזמן $t=0$ מעבירים אותו למצב B באופן מיידי.



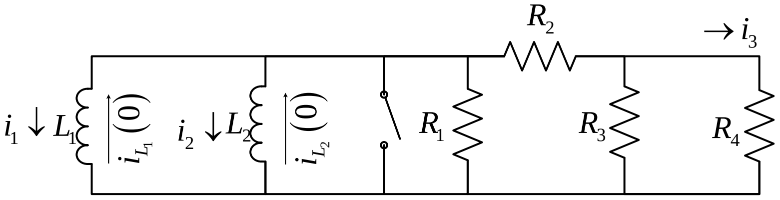
א. מצא את הביטוי הזמני $v_C(t)$ עבור: $t\ge 0$.
ב. מצא את הביטוי הזמני $v_0(t)$ עבור: $t\ge 0$.
ג. מצא את הביטוי הזמני $i_0(t)$ עבור: $t\ge 0$.
ד. חשב את האנרגיה הכוללת שהתפרקה על פני הנגד של $40k\Omega$.

2) במעגל שלפניך נתונים ערכי הרכיבים הבאים:
$I_S=20A$, $R_S=0.1\Omega$, $L=3.3H$, $R_1=2\Omega$, $R_2=5\Omega$, $R_3=20\Omega$
המפסק היה סגור במשך הרבה זמן וברגע $t=0$ פותחים אותו.



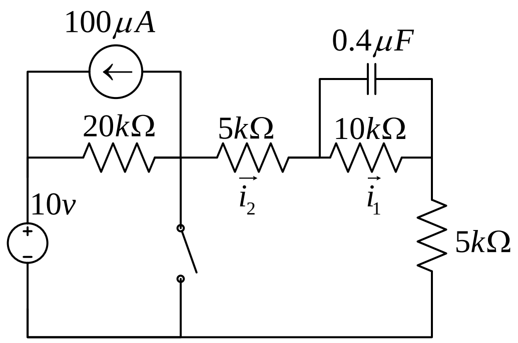
א. מצא ביטוי זמני ל- $i_L(t)$ עבור: $t\ge 0$.
ב. מצא ביטוי זמני ל- $i_0(t)$ עבור: $t\ge 0^+$.
ג. מצא ביטוי זמני ל- $v_0(t)$ עבור: $t\ge 0^+$.
ד. מצא את האחוז מהאנרגיה הכללית שאגורה בסליל, אשר התפרקה על הנגד R_2.

3) במעגל שלפניך נתונים ערכי הרכיבים הבאים:
$L_1=4H$, $L_2=16H$, $R_1=10\Omega$, $R_2=20\Omega$, $R_3=40\Omega$, $R_4=40\Omega$
הסלילים L_1 , L_2 נטענו מבעוד מועד וכעת מחזיקים את
הזרמים: $i_{L_1}(0)=8A$, $i_{L_2}(0)=6A$. פותחים את המפסק בזמן $t=0$.

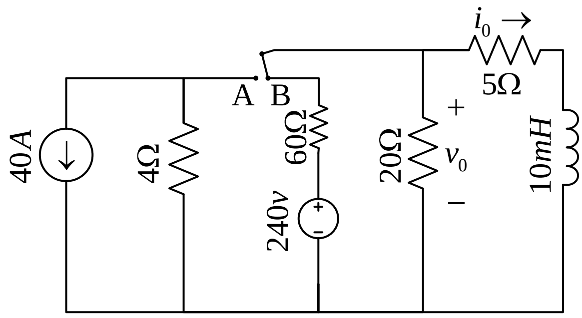


א. מצא את ערכי הביטויים הזמניים של i_3 , i_2 , i_1 עבור: $t \ge 0$.
ב. מהי האנרגיה ההתחלתית האגורה בשני הסלילים יחדיו?
ג. כמה אנרגיה תהיה בסלילים כאשר $t \to \infty$?
ד. הראה כי האנרגיה הכוללת שהועברה לרשת הנגדים שווה להפרש בין התוצאות של סעיפים ב' ו-ג'.

4) במעגל שלפניך נתונים הערכים המופיעים בתרשים.
המפסק נסגר ברגע $t=0$ לאחר שהיה פתוח במשך הרבה זמן.

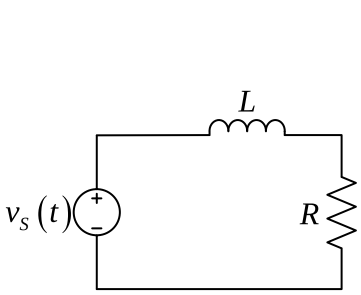


א. מצא את $i_1(0^-)$ ואת $i_2(0^-)$.
ב. מצא את $i_1(0^+)$ ואת $i_2(0^+)$.
ג. הסבר מדוע $i_1(0^-) = i_1(0^+)$.
ד. הסבר מדוע $i_2(0^-) \ne i_2(0^+)$.
ה. מצא את $i_1(t)$ עבור: $t \ge 0$.
ו. מצא את $i_2(t)$ עבור: $t \ge 0^+$.



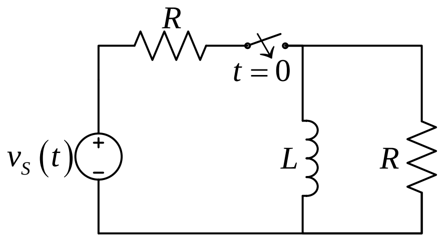
5) המפסק במעגל שלפניך היה במצב A למשך הרבה זמן.
ברגע $t=0$ העבירו אותו באופן מיידי למצב B.
מצא ביטויים מספריים עבור $i_0(t)$ ל- $t \ge 0$
ועבור $v_0(t)$ ל- $t \ge 0^+$.

6) לפניך המעגל הבא ובו: $R = 3\Omega$, $L = 6\text{H}$.
מקור המתח הוא: $v_S(t) = 40e^{-0.1t}u(t)$.



א. כתוב משוואה דיפרנציאלית עבור הזרם במעגל.
ב. מצא את האות $i(t)$ עבור תנאי ההתחלה הבאים:
i. $i(0^+) = 0\text{A}$.
ii. $i(0^+) = 1\text{A}$.

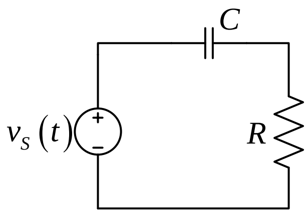
7) במעגל שלפניך המפסק פתוח למשך הרבה זמן.
בזמן $t=0$ סוגרים אותו. נתון: $L=1\text{H}$, $R=4\Omega$.
מצא את $v_L(t)$ עבור $t\geq 0$ כאשר מקור המתח
הוא $v_S(t)=3u(t)$ והזרם בסליל רגע לפני סגירת
המפסק הוא $200\,\text{mA}$.



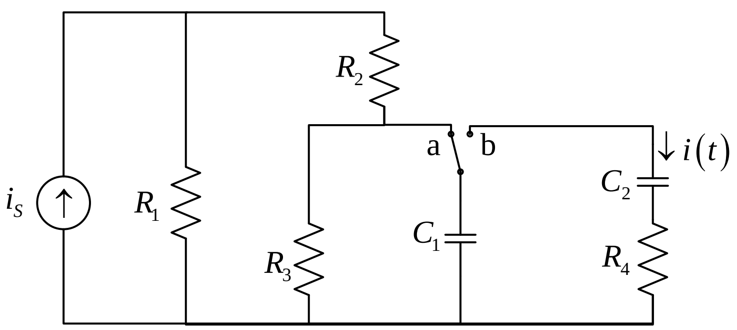
8) במעגל שלפניך מתח המקור הוא $v_S(t)=30e^{-25t}u(t)$.
בתחילה הקבל אינו טעון כלל.
נתון: $C=80\,\mu\text{F}$, $R=1.25\,\text{k}\Omega$.

א. מצא את אות הזרם במעגל, $i(t)$, עבור $t\geq 0$.

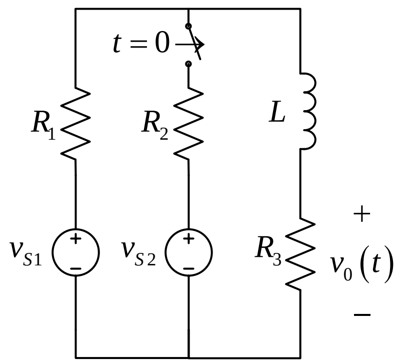
ב. משנים את ערכי הרכיבים: $C=20\,\mu\text{F}$, $R=2\,\text{k}\Omega$.
מתח המקור הוא: $v_S(t)=v_0\cdot e^{-25t}u(t)$.
מצא את v_0 המקסימלי אם ידוע כי הזרם המירבי בערכו המוחלט חייב
להיות קטן מ- $2.7\,\text{mA}$ לכל $t\geq 0$.



9) במעגל שלפניך המפסק נמצא
במצב a למשך הרבה זמן.
נתונים ערכי הרכיבים:
$i_S=3\text{A}$, $R_1=60\Omega$, $R_2=40\Omega$
$R_3=80\Omega$, $R_4=2k\Omega$
$C_1=20\,\mu\text{F}$, $C_2=30\,\mu\text{F}$
בזמן $t=0$ מעבירים
את המפסק למצב b.
תחת ההנחה כי הקבל C_2 אינו טעון כלל, מצא את הזרם $i(t)$.



10) במעגל שלפניך המפסק סגור במשך
הרבה זמן וברגע $t=0$ פותחים אותו.
נתון: $v_{S1}=8\text{V}$, $v_{S2}=6\text{V}$, $R_1=1\text{k}\Omega$
$R_2=3\text{k}\Omega$, $R_3=3\text{k}\Omega$, $L=1\text{H}$.
מצא ביטוי ל- $v_0(t)$.

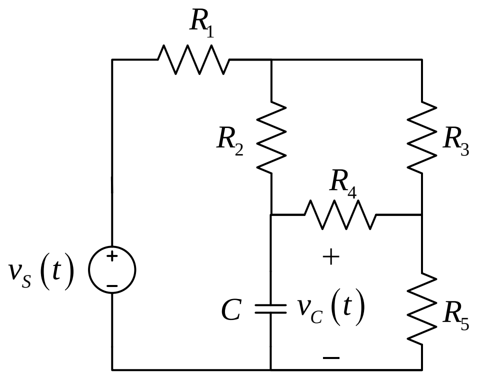


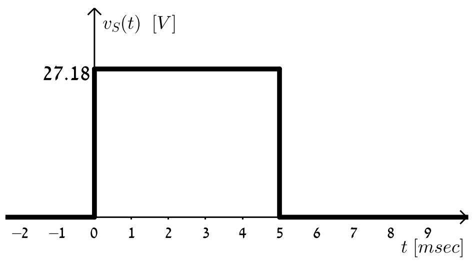
__הערה:__ ניתן לנסח את שאלה זו באופן הבא:
"הוכח כי $v_0(t)$ הוא גודל קבוע לכל $t\geq 0$ ומצא את ערכו".
עיין בסרטון כדי לראות כיצד להוכיח זאת.

11) במעגל שלפניך מכניסים אות פולס כמתואר באיור הסמוך.

נתון: $R_1 = 2\text{k}\Omega$, $R_2 = 4\text{k}\Omega$, $R_3 = 8\text{k}\Omega$, $R_4 = 28\text{k}\Omega$, $R_5 = 35\text{k}\Omega$, $C = 31\mu\text{F}$.

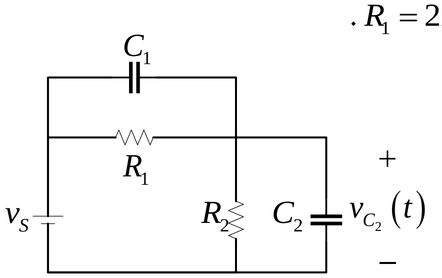
מצא את אות המתח $v_C(t)$.





12) לפניך המעגל הבא ובו נתון: $R_1 = 2R_2 = 2R$, $C_1 = 2C_2 = 2C$.

כמו כן: $v_{C_1}(0^-) = 0\text{V}$ ו- $v_{C_2}(0^-) = V_0$.



א. כתוב, כתלות בפרמטרי השאלה, משוואה דיפרנציאלית מתאימה עבור אות המתח על פני הקבל C_2 , $v_{C_2}(t)$. (אין צורך לפתור את המשוואה).

ב. מצא את אות המתח על פני הקבל C_2, $v_{C_2}(t)$, לכל t, עבור אות כניסה: $v_S(t) = r(t) = tu(t)$.

ג. מצא את אות המתח על פני הקבל C_2, $v_{C_2}(t)$, לכל t, עבור אות כניסה: $v_S(t) = u(t)$.

ד. מצא את אות המתח על פני הקבל C_2, $v_{C_2}(t)$, לכל t, עבור אות הכניסה הבא:

$$v_S(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10 - 2t & 0 \le t \le 4 \\ 2 & t \ge 4 \end{cases}$$

תשובות סופיות:

1) א. $v_C(t)=36e^{-104\frac{1}{6}t}\,[\mathrm{V}]\quad t\ge 0$ ב. $v_0(t)=22.5e^{-104\frac{1}{6}t}\,[\mathrm{V}]\quad t\ge 0$

ג. $i_0(t)=562.5e^{-104\frac{1}{6}t}\,[\mu\mathrm{A}]\quad t\ge 0$ ד. $E=60.75\mu\mathrm{J}$

2) א. $i_L(t)=20e^{-\frac{20}{11}t}\,[\mathrm{A}]\quad t\ge 0$ ב. $i_0(t)=-4e^{-\frac{20}{11}t}\,[\mathrm{A}]\quad t\ge 0^+$

ג. $v_0(t)=-80e^{-\frac{20}{11}t}\,[\mathrm{V}]\quad t\ge 0^+$ ד. $53\frac{1}{3}\%$

3) א. $t\ge 0$ $i_1(t)=3.2-11e^{-2.5t}\,[\mathrm{A}]$, $t\ge 0$ $i_2(t)=-3.2-2.8e^{-2.5t}\,[\mathrm{A}]$,

$i_3(t)=1.4e^{-2.5t}\,[\mathrm{A}]\quad t\ge 0$ ב. $E=416\mathrm{J}$

ג. $E\,(t\to\infty)=102.4\mathrm{J}$

4) א. $i_1(0^-)=i_2(0^-)=0.2\mathrm{mA}$ ב. $i_1(0^+)=-i_2(0^+)=0.2\mathrm{mA}$

ג. הקבל רציף לעניין מתח: $v_C(0^+)=v_C(0^+)$.

היות והזרם i_1 מאולץ ע"י ממתח הקבל הרי שמתקיים: $i_1(0^-)=i_1(0^+)$.

ד. פעולת המיתוג על רשת נגדים גוררת שינוי מיידי בכיוון הזרם ברשת.

לכן: $i_2(0^-)=-i_2(0^+)$.

ה. $i_1(t)=0.2e^{-500t}\,[\mathrm{mA}]\quad t\ge 0$ ו. $i_2(t)=-0.2e^{-500t}\,[\mathrm{mA}]\quad t\ge 0$

5) $i_0(t)=3-19e^{-2000t}\,[\mathrm{A}]\quad t\ge 0$, $v_0(t)=15+285e^{-2000t}\,[\mathrm{V}]\quad t\ge 0$.

6) א. $\frac{di}{dt}+\frac{1}{2}i=6\frac{2}{3}e^{-0.1t}u(t)$ ב. i. $i(t)=16\frac{2}{3}\left[e^{-0.1t}-e^{-2t}\right]u(t)$

ב. ii. $i(t)=\left[17\frac{2}{3}e^{-0.1t}-16\frac{2}{3}e^{-2t}\right]u(t)$.

7) $v_L(t)=\left(-0.4e^{-2t}+1.5e^{-2t}\right)u(t)$.

8) א. $i(t)=4\left[5e^{-25t}-2e^{-10t}\right]u(t)\;[\mathrm{mA}]$ ב. $v_0=40v$.

9) $i(t)=40e^{41\frac{2}{3}t}u(t)$.

10) $v_0(t)=6\mathrm{V}$.

11) $v_C(t)=21\left(1-e^{-5.95t}\right)u(t)-21\left(1-e^{-5.95(t-5m)}\right)u(t-5m)\;[\mathrm{V}]$.

12) א. $\frac{dv_{C_2}(t)}{dt}+\frac{1}{2RC}v_{C_2}=\frac{1}{6RC}v_S+\frac{2}{3}\frac{dv_S(t)}{dt}$,

נסמן: $B=\frac{2}{3}$; $A=\frac{1}{6RC}$; $\tau=2RC$ ונקבל: $\frac{dv_{C_2}(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v_{C_2}=Av_S+B\frac{dv_S(t)}{dt}$.

ב. $v_{C_2}(t)=V_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}+\frac{1}{3}\left[(2RC)\left(\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}-1\right)+t\right]u(t)$.

ג. $v_{C_2}(t)=V_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}+\frac{1}{3}\left(1-\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}\right)u(t)$.

ד. $v_{C_2}(t)=V_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}+v_{C_2,ZSR}(t)$ כאשר:

$$\begin{aligned}v_{C_2,ZSR}(t)&=10\cdot\frac{1}{3}\left(1-\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}\right)\\&-2\cdot\frac{1}{3}\left[(2RC)\left(\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}-1\right)+t\right]u(t)\\&+2\cdot\frac{1}{3}\left[(2RC)\left(\exp\left\{-\frac{t-4}{\tau}\right\}-1\right)+t-4\right]u(t-4)\end{aligned}$$