תוכן העניינים:

שימו לב!

החוברת מחולקת לנושאים כפי שמוצגים באתר GOOL.
כל נושא פותח בסיכום תיאורטי קצר ולאחריו דוגמאות – אלו נידונים בהרחבה בסרטוני התיאוריה שבאתר GOOL. לאחר מכן ישנו מגוון תרגילים ברמה עולה בכל אחד מהנושאים – כולם נפתרים באריכות ובפירוט בסרטוני השאלות שבאתר.

תורת המעגלים החשמליים

מעגלים מסדר ראשון

פתרון של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון:

סיכום כללי:

הקדמה:

תבנית המשוואות שנעסוק בהן:

$$\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=f(t) \\ v(0^+)=V_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}i(t)=f(t) \\ i(0^+)=I_0 \end{cases}$$

בהקשר של מעגלים חשמליים, נתייחס לפרמטרים הבאים:

1) הגודל τ נקרא **קבוע הזמן של המעגל** ונתייחס אליו כאן ביחידות של sec.
2) הפונקציה שבאגף ימין, $f(t)$, נקראת **עירור הכניסה של המעגל**.
3) תנאי ההתחלה (ת.ה.) יתארו ערך מתח או זרם התחלתיים, כאשר חשוב לקבלם עבור $t=0^+$. במקרים בהם ת.ה. יינתנו עבור $t=0^-$ אנו נמיר אותם תחילה לזמן $t=0^+$.

משוואה הומוגנית:

משוואה הומוגנית מקיימת: $f(t)=0$, כלומר: $\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=0 \\ v(0^+)=V_0 \end{cases}$.

הפתרון של מד״ר הומוגנית מסדר ראשון הוא: $v_h(t)=V_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$ (או: $i_h(t)=I_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$)

והוא נקרא הפתרון ההומוגני של המשוואה.

משוואה לא הומוגנית:

משוואה מהצורה: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=f(t)$ נקראת משוואה **לא הומוגנית** (כלומר: $f(t)\neq 0$).

פתרון משוואה לא הומוגנית מורכב מהסכום של **הפתרון ההומוגני והפתרון הפרטי**:

$$v(t)=v_h(t)+v_p(t).$$

לגבי הפתרון הפרטי – ננחש אותו לפי הכללים הבאים:

אגף ימין - $f(t)$	ניחוש פתרון - $v_p(t)$
$P_n(t)\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+$	$Q_n(t)$
$\exp(-\alpha t)\ ,\ \alpha>0$	$A\exp(-\alpha t)$
$t\exp(-\alpha t)\ ,\ \alpha>0$	$(At+B)\exp(-\alpha t)$
$\sin(\omega_0 t)$ או $\cos(\omega_0 t)$	$A\sin(\omega_0 t)+B\cos(\omega_0 t)$

ליניאריות הפתרונות:

כאשר נתונה מד"ר הכוללת מספר איברים כגון: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=\sum_{k=1}^{N}a_k f_k(t)$

נרכיב פתרון מהצורה: $v(t)=v_h(t)+\sum_{k=1}^{N}v_{p,k}(t)$.

פתרונות ZIR ו-ZSR:

במעגלים חשמליים, מקובל לפרק משוואה דיפרנציאלית לשני סוגים:

- משוואה עם כניסה אפס (ללא כניסה = הומוגנית): ZIR – Zero Input Response.
- משוואה עם מצב התחלתי אפס (ת.ה. הם אפס): ZSR – Zero State Response.

פתרון המשוואה, אם כן, יהיה מורכב מהסכום שלהם: $v(t)=v_{ZIR}(t)+v_{ZSR}(t)$.

בעזרת עיקרון הסופרפוזיציה נוכל לטעון לליניאריות של פתרונות ZSR ולכתוב את הפתרון הכללי בתור הסכום: $v(t)=v_{ZIR}(t)+\sum_{k=1}^{N}v_{ZSR,k}(t)$.

משוואה עם כניסת אפס (ZIR):

משוואה מהצורה: $\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=0 \\ v(0^+)=V_0 \end{cases}$ שפתרונה ידוע גם בתור <u>התגובה לכניסה אפס למעגל</u>.

למשוואה זו פתרון הומוגני בלבד ולכן נוכל לכתוב: $v_{ZIR}(t)=V_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$.

משוואה עם תנאי התחלה אפס (ZSR):

משוואה מהצורה: $\begin{cases} \frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=f(t) \\ v(0^+)=0 \end{cases}$ שפתרונה מורכב מהפתרון ההומוגני

והפתרון הפרטי של משוואה דיפרנציאלית: $v_{ZSR}(t)=v_h(t)+v_p(t)$.

הכללה:

פתרון משוואה בעלת N עירורי כניסה: $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v(t)=\sum_{k=1}^{N}f_k(t)$ (ות.ה.: $v(0^+)\neq 0$)

יהיה מהצורה הבאה: $v(t)=v_{ZIR}(t)+\sum_{k=1}^{N}v_{ZSR,k}(t)$.

סיכום פתרון משוואה ע"י חלוקה ל-ZIR ו-ZSR:

בהינתן משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון מהצורה: $\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}y(t)=f(t) \\ y(0^+)=Y_0 \end{cases}$

כאשר $y(t)$ מייצג אות מתח או זרם, ו- $y(0^+)=Y_0$ הוא ערך תנאי ההתחלה עבור אות המתח או הזרם בהתאמה, נוכל לייצג את דרך הפתרון ויזואלית בצורה הבאה:

$$y(t) \quad = \quad y_{ZIR}(t) \quad + \quad y_{ZSR}(t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt}+\dfrac{1}{\tau}y(t)=0 \\ y(0^+)=Y_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt}+\dfrac{1}{\tau}y(t)=f_1(t) \\ y(0^+)=Y_0 \end{cases} + \ldots + \begin{cases} \dfrac{dy(t)}{dt}+\dfrac{1}{\tau}y(t)=f_N(t) \\ y(0^+)=Y_0 \end{cases}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$y_{ZIR}(t)=y_h(t) \qquad \underbrace{y_{ZSR,1}(t)=y_h(t)+y_p(t) \qquad y_{ZSR,N}(t)=y_h(t)+y_p(t)}$$

$$\downarrow$$

$$y_{ZSR}(t)=\sum_{k=1}^{N}y_{ZSR,k}$$

איזון הלמים:

ניתן להמיר מד"ר מהצורה:

$$\begin{cases} y^{(N)}(t)+a_{N-1}y^{(N-1)}(t)+\ldots.+a_1y'(t)+a_0y(t)=C\cdot\delta(t) \\ y^{(N-1)}(0^-)=y^{(N-2)}(0^-)=\ldots.=y(0^-)=0 \end{cases}$$

באופן הבא:

$$\begin{cases} y^{(N)}(t)+a_{N-1}y^{(N-1)}(t)+\ldots.+a_1y'(t)+a_0y(t)=0 \\ y^{(N-1)}(0^+)=C\ ,\ y^{(N-2)}(0^+)=\ldots.=y(0^+)=0 \end{cases}$$

שאלות:

שאלות חימום יסודיות:

1) נתונה המד"ר הבאה: $i'+\frac{1}{\tau}i=5\cdot u(t)$ כאשר $\tau=40\,\text{m}\sec$.
מהו פתרון המשוואה עבור כל אחד מתנאי ההתחלה הבאים:

א. $i(0^-)=0\text{A}$.

ב. $i(0^-)=3\text{A}$.

2) נתונה המד"ר הבאה: $i'+\frac{1}{\tau}i=6\cdot\sin(4t)\cdot u(t)$ כאשר $\tau=20\,\text{m}\sec$ ו- $i(0^-)=3\text{mA}$. מצא את הפתרון הכללי של $i(t)$.

3) פתור את המד"ר הבאה: $i'+\frac{1}{\tau}i=4\delta(t)-3\cdot\cos(2t)\cdot u(t)$
כאשר: $\tau=1\sec$ ו- $i(0^-)=200\text{mA}$.

תשובות סופיות:

1) א. $i(t)=i_{ZIR}(t)=\frac{1}{5}\left(1-e^{-25t}\right)\ ;\ t\geq 0$ ב. $i(t)=\frac{1}{5}+2\frac{4}{5}e^{-25t}\ ;\ t\geq 0$.

2) $i(t)=12.4\cdot10^{-3}e^{-50t}+0.119\sin 4t-9.54\cdot10^{-3}\cos 4t\ ;\ t\geq 0$.

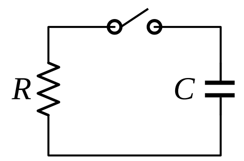
3) $i(t)=\left[4.8e^{-t}-0.6\cos 2t-1.2\sin 2t\right]u(t)$.

ניתוח מעגלים מסדר ראשון:

סיכום כללי:

מעגלי RC:

התגובה הטבעית של המעגל:

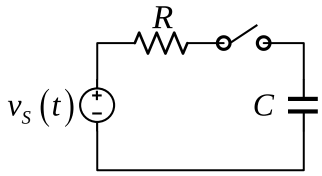


משוואה:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt}+\dfrac{1}{\tau}v_C(t)=0 \\ v_C(0^+)=V_0 \end{cases}$$

$$\tau = RC$$

תגובת המעגל לעירור כניסה:



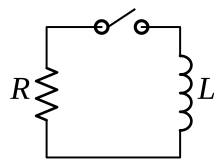
משוואה:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt}+\dfrac{1}{\tau}v_C(t)=\dfrac{1}{\tau}v_S(t)u(t) \\ v_C(0^+)=0 \end{cases}$$

$$\tau = RC$$

מעגלי RL:

התגובה הטבעית של המעגל:

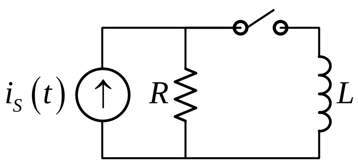


משוואה:

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt}+\dfrac{1}{\tau}i_L(t)=0 \\ i_L(0^+)=I_0 \end{cases}$$

$$\tau = L/R$$

תגובת המעגל לעירור כניסה:



משוואה:

$$\begin{cases} \dfrac{di_L}{dt}+\dfrac{1}{\tau}i_L(t)=\dfrac{1}{\tau}i_S(t)u(t) \\ i_L(0^+)=0 \end{cases}$$

$$\tau = L/R$$

כאשר נקבל מעגל מסדר ראשון מורכב נוכל לבחור בין שתי גישות:

1) במידה וקיים יותר מרכיב ריאקטיבי אחד, אך מהקשרים שבין מתחי וזרמי המעגל תתקבל משוואה מסדר ראשון, נבחר בכתיבה של משוואות המעגל והגעה למשוואה דיפרנציאלית מסודרת.
2) במידה וקיים רכיב ריאקטיבי אחד נעזר בטכניקות לפישוט המעגל והבאתו למודל הבסיסי לעיל. זאת נבצע ע״י הבאת המעגל לשקולי תבנין ונורטון וכתיבת משוואה דיפרנציאלית מסודרת.

הערה:

הסידור תקף גם כאשר יש יותר ממקור אנרגיה אחד במעגל.

פשוט נכנס את כולם בביטוי למתח $v_S(t)$ במעגל RC או בביטוי לזרם $i_S(t)$ במעגל RL.

סיכום דרך הפתרון של מעגלים מסדר ראשון:

בהינתן מעגל מסדר ראשון יש לבצע את השלבים הבאים:

1) כתיבה מסודרת של המשוואות היסודיות (חוקי קירכהוף, חוק אוהם, קשרים בין מתחים וזרמים) על מנת להגיע למשוואה דיפרנציאלית.
2) סידור המשוואות והגעה למשוואה דיפרנציאלית אחת עבור אות מתח או אות זרם מהצורה:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}y(t)=\frac{1}{\tau}x(t) \\ y(0^+)=Y_0 \end{cases}$$

כאשר:

- $y(t)$ הוא אות מתח עבור מעגל RC ואות זרם עבור מעגל RL.
- $x(t)$ הוא עירור הכניסה למעגל.
- τ הוא קבוע הזמן של המעגל.
- $y(0^+)$ הוא תנאי ההתחלה של המעגל המבוטא ע״י הזרם בסליל או מתח בקבל בהתאמה.

3) פותרים את המשוואה.

הערות:

1) במעגל שבו קבל יחיד ניתן לבצע המרה לשקול תבנין.
ההתנגדות השקולה R_T היא התנגדות תבנין ועירור הכניסה יבוטא במתח תבנין.
באותו אופן, מעגל עם סליל יחיד ניתן להמרה לשקול נורטון.
עבור מעגל RC שקול תבנין או מעגל RL שקול נורטון ניתן לכתוב את המשוואה הדיפרנציאלית באופן מיידי כאשר $x(t)$ הוא מתח תבנין או זרם נורטון לפי סוג המעגל.

2) במעגלים בהם נדרש למצוא אות שאינו מתח על פני קבל או זרם בסליל, נחבר תחילה משוואות דיפרנציאליות מתאימות לפי האמור לעיל ונמצא את הביטוי הזמני לאות מתח בקבל או אות זרם בסליל. לאחר מכן נבטא באמצעות האותות המחושבים את האותות המבוקשים.

3) נעדיף לכתוב משוואות דיפרנציאלית עבור אות מתח במעגל RC ועבור אות זרם במעגל RL מטבע הקשרים שבין המתחים והזרמים בהם.

שיטות פתרון של המשוואה המתקבלת:

בקבלת משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון המייצגת מעגל נתון, נוכל לגשת לפתרונה באחת משתי דרכים:

1) **חלוקה לפתרונות ZIR ו-ZSR:**
נחלק את הפתרון לתגובה הטבעית של המעגל (ZIR) ולתגובת המעגל לעירור הכניסה (ZSR):

$$y(t)=y_{ZIR}(t)+y_{ZSR}(t)$$

- פתרון ZIR הינו קבוע ושווה: $y_{ZIR}(t)=Y_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)u(t)$.
- פתרון ZSR ניתן לחישוב בכמה דרכים:
  - כתיבת הפתרון הכללי לפי: $y_{ZSR}(t)=y_h(t)+y_p(t)$.
  במקרה זה נקבל עם איחוד פתרון ZIR את הפתרון הכללי הבא:

$$y(t)=y_{ZIR}(t)+y_{ZSR}(t)=\left(Y_0\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+\left(y_p(0)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)+y_p(t)\right)\right)u(t)$$

  - שימוש באינטגרל הקונבולוציה: $y_{ZSR}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t')\cdot h(t'-t)dt'$
  כאשר פונקצית התגובה להלם של מעגל מסדר הראשון היא: $h(t)=\frac{1}{\tau}\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}u(t)$.

2) שימוש במשוואת הדפקים:

כאשר ניתן להביא מעגל לצורה היסודית עם עירור כניסה שהוא מדרגה מהצורה: $x(t)=X_0u(t)$ ערך אות המוצא ידוע.

במקרה זה נוכל להיעזר במשוואת הדפקים ולכתוב את אות המוצא ישירות:

$$y(t)=\left[Y_\infty+\left(y\left(0^+\right)-Y_\infty\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]u(t)$$

כל שיש למצוא הוא:

- Y_∞ הערך אליו אות המוצא שואף.
- $y\left(0^+\right)$ הערך ההתחלתי של אות המוצא.
- τ קבוע הזמן של המעגל השקול.

הערות:

1) במידה וניתן לקרב אות כניסה למספר אותות מדרגה, נוכל ליישם את משוואת הדפקים בכל מקטע זמני בו ערך אחד פעיל.

2) במידה וקיים ערך כניסה שונה במספר מקטעים, ויש למצוא מתח או זרם שאינם על הקבל או בסליל במעגלי RC או RL בהתאמה, הביטוי שיתקבל אינו חייב רציף.

3) ערך האנרגיה ההתחלתית $v\left(0^+\right)$ או $i\left(0^+\right)$ מתייחס לאנרגיה האגורה ברכיב הריאקטיבי עליו מבצעים את החישוב. במידה ומפעילים את המשוואה בפרק זמן השונה $t_0\neq 0$ משמעות הביטויים תתאים את עצמה לנקודת ההתחלה של הפעלת המשוואה. כלומר הכיתוב יהיה: $v\left(t_0^+\right)$ או $i\left(t_0^+\right)$.

4) במידה ומפעילים את המשוואה החל מזמן $t_0\neq 0$, יש להתחשב בהזזה בזמן באופן הבא:

$$y(t)=\left[Y_\infty+\left(y\left(t_0^+\right)-Y_\infty\right)\exp\left\{-\frac{t-t_0}{\tau}\right\}\right]u(t-t_0)$$

5) האיבר הראשון במשוואה נקרא האיבר היציב (steady state) וזו מכיוון שהאות המחושב ישאף להגיע אליו לאחר שתופעות המעבר יסתיימו.

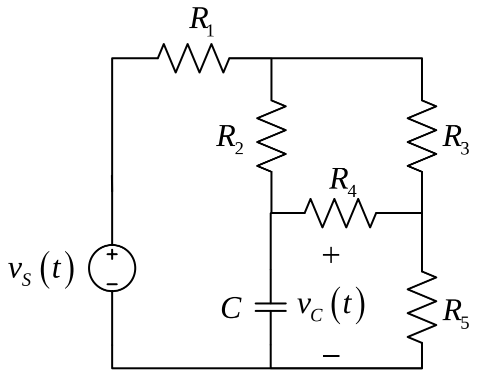
האיבר השני במשוואה נקרא האיבר המתחלף (transient state) וזו מכיוון שהוא כולל את הרכיב המשתנה בזמן בתוצאה מתופעת המעבר המחושבת.

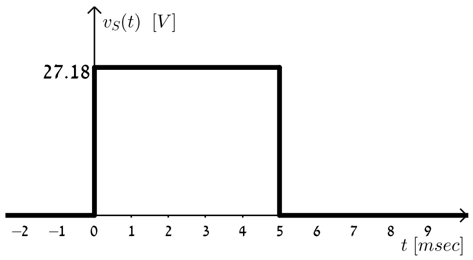
$$y(t)=\left[\underset{\substack{\text{steady}\\\text{state}}}{Y_\infty}+\underbrace{\left(y\left(0^+\right)-Y_\infty\right)\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}}_{\text{transient state}}\right]u(t)$$

שאלות:

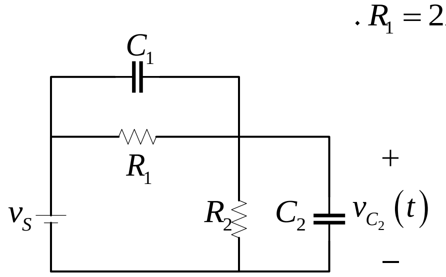
שאלות חימום יסודיות:

1) במעגל שלפניך מכניסים אות פולס כמתואר באיור הסמוך.
נתון: $R_1 = 2\text{k}\Omega$, $R_2 = 4\text{k}\Omega$, $R_3 = 8\text{k}\Omega$, $R_4 = 28\text{k}\Omega$, $R_5 = 35\text{k}\Omega$, $C = 31\mu\text{F}$.
מצא את אות המתח $v_C(t)$.





2) לפניך המעגל הבא ובו נתון: $R_1 = 2R_2 = 2R$, $C_1 = 2C_2 = 2C$.
כמו כן: $v_{C_1}(0^-) = 0\text{V}$ ו- $v_{C_2}(0^-) = V_0$.



א. כתוב, כתלות בפרמטרי השאלה,
משוואה דיפרנציאלית מתאימה עבור
אות המתח על פני הקבל C_2 , $v_{C_2}(t)$.
(אין צורך לפתור את המשוואה).

ב. מצא את אות המתח על פני הקבל C_2, $v_{C_2}(t)$, לכל t,
עבור אות כניסה: $v_S(t) = r(t) = tu(t)$.

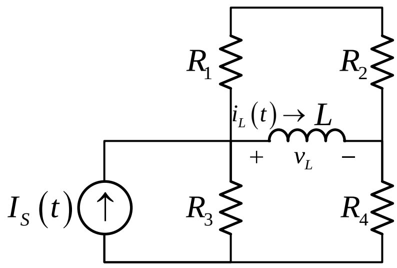
ג. מצא את אות המתח על פני הקבל C_2, $v_{C_2}(t)$, לכל t,
עבור אות כניסה: $v_S(t) = u(t)$.

ד. מצא את אות המתח על פני הקבל C_2, $v_{C_2}(t)$, לכל t,
עבור אות הכניסה הבא: $v_S(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10 - 2t & 0 \le t \le 4 \\ 2 & t \ge 4 \end{cases}$.

שאלות ברמת תרגיל כיתה:

1) בשאלה הבאה נבחן את דרכי הפתרון של משוואה מסדר ראשון באמצעות המעגל שלפנינו. כל ערכי הנגדים נתונים: $R_k\ :\ 1\le k\le 4$ וכן השראות הסליל L נתונה.

יש למצוא את הביטוי הזמני עבור זרם הסליל $i_L(t)$ בכל אחד מן המקרים הבאים:

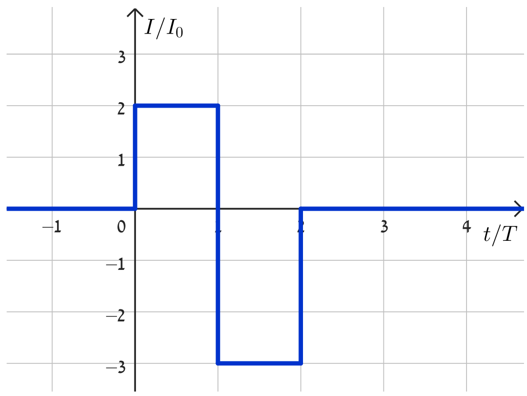


א. $i_L(0^+)=I_0$ ומקור הזרם משותק.

ב. $I_S=I_0u(t)$ ואין אנרגיה אגורה בסליל.

ג. $I_S=I_0u(t)\ ,\ i_L(0^+)=I_0$.

ד. $i_L(0^+)=I_0$ ואות זרם המקור מקיים את הגרף הבא:

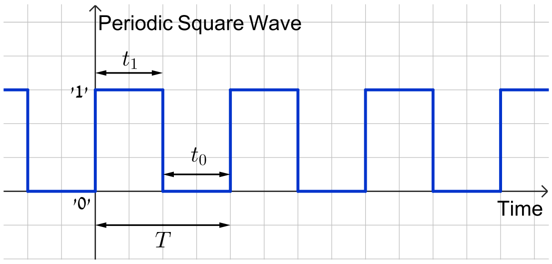


ה. $I_S=I_0T_0\delta(t)\ ,\ i_L(0^+)=I_0$.

ו. $i_L(0^+)=I_0\ ,\ I_S=I_0\left(\frac{t}{T_0}\right)^2\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}u(t)$ כאשר: $\tau=\frac{L}{R_T}$

(R_T - ההתנגדות השקולה שרואה הסליל).

2) נתון אות מתח ריבועי מחזורי עם D.C. (Duty Cycle) שמקבל את אחד מהערכים הבאים:



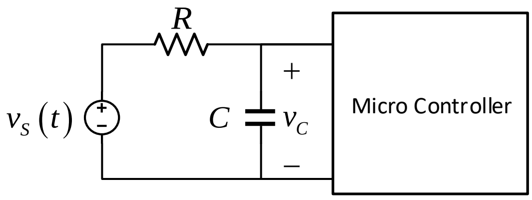
(1) D.C. = 20%
(2) D.C. = 50%
(3) D.C. = 80%

האות מייצג ערך של 0 לוגי באמצעות מתח של 0V
וערך של 1 לוגי באמצעות מתח של 5V.

הערה:
המושג Duty Cycle מתאר את היחס שבין פרק הזמן בו ערך האות הריבועי מוחזק על מתח המתאים ל-1 לוגי ביחס לזמן המחזור של האות.
למשל: נניח אות ריבועי במחזור של $T = 20\,\text{msec}$ הנע בין ערכי מתח של 0V (0 לוגי) ו- 5V (1 לוגי).

האות מוחזק על 5V במשך 15msec בכל מחזור ולכן: $\text{D.C.} = \frac{t_1}{T} = \frac{15}{20} = 0.75$ או 75%.

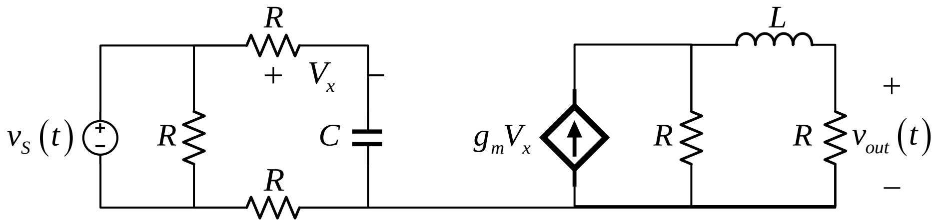
באיור הבא ישנו מסנן מעביר נמוכים הממומש באמצעות מעגל RC אליו מחובר אות המתח הריבועי. מודדים את המתח על פני הקבל באמצעות בקר. נתונים: R , C וכי לבקר התנגדות כניסה אינסופית.
ידוע כי מחזור האות הריבועי הוא $T = \tau$ כאשר $\tau = RC$.



א. מתח הקבל מתנדנד בין שני ערכים שנסמנם ב- $V_{\max}$ וב- $V_{\min}$.
יש למצוא את ערכים אלו עבור כל אפשרות של D.C.

ב. כעת נבחן את ההשפעה של מחזור האות הריבועי T על היכולת שלו להחליק את אות המתח שעל הקבל. נסמן: $\Delta V = |V_{\max} - V_{\min}|$ ונניח כי $T = k\tau$.
(1) הסיקו ביטוי $\Delta V(k)$ והראו כי $\lim_{k\to 0} \Delta V = 0$ לכל ערך של D.C.
(2) על סמך הביטוי שמצאתם, קבעו מהי הסטייה המירבית בין $V_{\max}$ ל- $V_{\min}$ עבור $k = 0.016$.

3) נתון המעגל הבא ובו : $v_S(t)=6u(t)$ V , $i_L(0^+)=0$ A , $v_C(0^+)=2$V .
כל הגדלים נתונים : R , L , C , g_m .



א. יש למצוא ביטוי זמני למתח המוצא $v_{out}(t)$ המוגדר להיות מפל המתח על הנגד הימני R .

ב. יש לסרטט את התיאור הגרפי של אות המוצא $v_{out}(t)$ בתלות בזמן.

ג. נניח כעת שלושה מצבים :

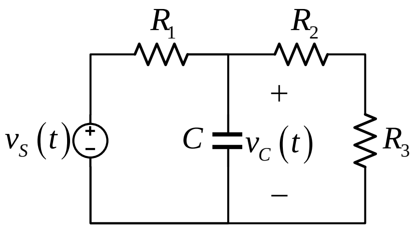
(1) $RC=\frac{L}{R}$ (2) $RC=10^6\cdot\frac{L}{R}$ (3) $RC=10^{-6}\cdot\frac{L}{R}$.

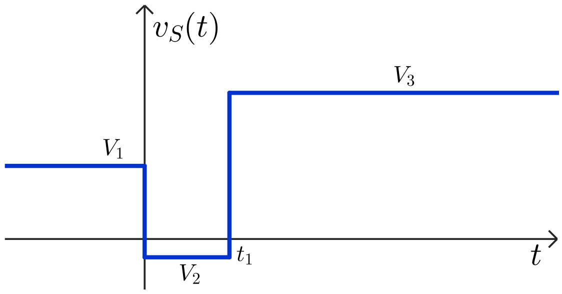
עבור כל מצב תארו מילולית כיצד ישתנה אות המוצא.
נמקו את טענותיכם בעזרת חישוב מתאים והראו זאת גרפית.

שאלות ברמת תרגיל בית:

4) במעגל שלפניכם מחובר קבל C באמצעות רשת נגדים R_3 , R_2 , R_1 למקור מתח $v_S(t)$.

ידוע כי $v_S(t)$ מתנהג לפי הגרף הבא:





נתון כי: $V_2 < V_1 < V_3$ ו- $V_1, V_3 > 0\text{V}$, $V_2 < 0\text{V}$ וכי t_1 שווה לפעמים קבוע המעגל: $t_1 = 2\tau$.

א. כתבו ביטוי מתמטי מפורש ל- $v_S(t)$.

ב. כתבו את קבוע זמן הטעינה והפריקה של הקבל. האם הם שונים או זהים?

ג. מהו המתח הנמוך ביותר אליו יכול להגיע $v_C(t)$?

(1) עבור זמן $t > t_1$, מתי יגיע המתח על הקבל ל- $\frac{V_1 + V_2}{2}$?

(2) כעת נתונים: $V_3 = 8\text{V}$, $V_2 = -1\text{V}$, $V_1 = 4\text{V}$, $\text{C} = 1\text{mF}$, $R_1 = 2R_2 = 2R_3 = 20\Omega$.
תנו ערך מספרי עבור הזמן שחישבתי בחלק הקודם.

ד. סרטטו גרף של מתח הקבל כפונקציה של הזמן עבור הערכים המספריים מהסעיף הקודם וציינו עליו ערכי מתח רלוונטיים.

תשובות סופיות:

1) $v_C(t)=21\left(1-e^{-5.95t}\right)u(t)-21\left(1-e^{-5.95(t-5m)}\right)u(t-5m)\quad [\mathrm{V}]$.

2) א. $\frac{dv_{C_2}(t)}{dt}+\frac{1}{2RC}v_{C_2}=\frac{1}{6RC}v_S+\frac{2}{3}\frac{dv_S(t)}{dt}$,

נסמן: $B=\frac{2}{3}\ ;\ A=\frac{1}{6RC}\ ;\ \tau=2RC$ ונקבל: $\frac{dv_{C_2}(t)}{dt}+\frac{1}{\tau}v_{C_2}=Av_S+B\frac{dv_S(t)}{dt}$.

ב. $v_{C_2}(t)=V_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}+\frac{1}{3}\left[(2RC)\left(\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}-1\right)+t\right]u(t)$.

ג. $v_{C_2}(t)=V_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}+\frac{1}{3}\left(1-\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}\right)u(t)$.

ד. $v_{C_2}(t)=V_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}+v_{C_2,ZSR}(t)$ כאשר:

$$\begin{aligned}v_{C_2,ZSR}(t)&=10\cdot\frac{1}{3}\left(1-\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}\right)\\&-2\cdot\frac{1}{3}\left[(2RC)\left(\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}-1\right)+t\right]u(t)\\&+2\cdot\frac{1}{3}\left[(2RC)\left(\exp\left\{-\frac{t-4}{\tau}\right\}-1\right)+t-4\right]u(t-4)\end{aligned}$$

3) א. $i_L(t)=I_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}u(t)$

ב. $i_L(t)=\frac{R_3}{R_3+R_4}I_0\left(1-\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}\right)u(t)$

ג. $i_L(t)=I_0\left(\frac{R_3}{R_3+R_4}+\frac{R_4}{R_3+R_4}\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}\right)u(t)$

ד.
$$\begin{aligned}i_L(t)&=I_0\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}u(t)+\frac{R_3}{R_3+R_4}\cdot 2I_0\left(1-\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}\right)u(t)\\&-\frac{R_3}{R_3+R_4}\cdot 5I_0\left(1-\exp\left\{-\frac{t-T}{\tau}\right\}\right)u(t-T)\\&+\frac{R_3}{R_3+R_4}\cdot 3I_0\left(1-\exp\left\{-\frac{t-3T}{\tau}\right\}\right)u(t-2T)\end{aligned}$$

ה. $i_L(t)=I_0\left(1+\frac{T_0}{\tau}\frac{R_3}{R_3+R_4}\right)\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}u(t)$

ו. $i_L(t)=I_0\left(1+\frac{R_3}{3(R_3+R_4)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^3\right)\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}u(t)$

4) א. עבור: D.C. = 20%: $V_{\max}=0.286V_0$, $V_{\min}=0.128V_0$.

עבור: D.C. = 50%: $V_{\max}=0.622V_0$, $V_{\min}=0.377V_0$.

עבור: D.C. = 80%: $V_{\max}=0.871V_0$, $V_{\min}=0.713V_0$.

ב. (1) $\Delta V(k)=V_0\dfrac{1-e^{-pk}-e^{-(1-p)k}+e^{-k}}{1-e^{-k}}$ כאשר: $p\in\{0.2\ ;\ 0.5\ ;\ 0.8\}$.

ב. (2) $\Delta V(p=0.5,k=0.016)=4\cdot10^{-3}\cdot V_0$.

5) א. $v_{out}(t)=R\cdot\dfrac{g_m}{\tau_L}\cdot\dfrac{1}{1/\tau_L-1/\tau_C}\cdot\left(\exp\left\{-\dfrac{t}{\tau_C}\right\}-\exp\left\{-\dfrac{t}{\tau_L}\right\}\right)u(t)$

ב. ראו סרטוט בסרטון הוידאו.

ג. (1) עירור המוצא שיתקבל הוא: $v_{out}(t)=R\dfrac{g_m}{\tau}\cdot t\cdot\exp\left\{-\dfrac{t}{\tau}\right\}u(t)$.

ג. (2) עירור הכניסה V_x למעגל הימני מתקרב למדרגה DC ולכן $v_{out}(t)$ הוא התגובה למדרגה.

ג. (3) עירור הכניסה V_x מתקרב ל-$\delta(t)$ ולכן $v_{out}(t)$ הוא התגובה להלם של המעגל.

6) א. $v_S(t)=V_1+(V_2-V_1)u(t)+(V_3-V_2)u(t-t_1)$.

ב. $\tau=\left(R_1\,||\,(R_2+R_3)\right)C$

ג. $V_{03}=f_R\left(V_2+(V_1-V_2)e^{-2}\right)$, $f_R=\dfrac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3}$

ד. (1) $t_A=-\tau\cdot\ln\left(\dfrac{0.5V_1+0.5V_2-f_RV_3}{f_R\left(V_1e^{-2}+V_2\left(1-e^{-2}\right)-f_RV_3\right)}\right)+2\tau$

ד. (2) $t_A=72.84\,\text{ms}$.

ה. ראו סרטוט בסרטון הוידאו.