תוכן העניינים:

שימו לב!

החוברת מחולקת לנושאים כפי שמוצגים באתר GOOL.
כל נושא פותח בסיכום תיאורטי קצר ולאחריו דוגמאות – אלו נידונים בהרחבה בסרטוני התיאוריה שבאתר GOOL. לאחר מכן ישנו מגוון תרגילים ברמה עולה בכל אחד מהנושאים – כולם נפתרים באריכות ובפירוט בסרטוני השאלות שבאתר.

פרק 2

מבוא למערכות ליניאריות

אותות:

סיכום כללי:

מהו אות?

גודל בעל ערך פיזיקלי כלשהו המשתנה בזמן, במרחב או בשניהם.

(בהמשך הסיכום ראה פירוט של סוגי האותות הנפוצים).

פונקצית הדלתא של דיראק:

פונקצית הדלתא מוגדרת להיות: $\delta(x)=\lim_{m\to\infty} f(x,m)$.

כאשר:

- פונקצית התפלגות, כלומר $f(x)\ge 0$ לכל x, וגם $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.
- הפונקציה דועכת לאפס ב- $\pm\infty$ חזק יותר מ- $\frac{1}{x}$, כלומר: $xf(x)\xrightarrow[|x|\to\infty]{}0$
- הפונקציה ממורכזת סביב ציר y במובן הבא: $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx=\int_{0}^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{2}$

תכונות:

1) לכל $x\ne 0$ מתקיים: $\delta(x)=0$.
2) עבור: $x=0$ נקבל: $\delta(x)\to\infty$.
3) כל הפונקציה מרוכזת סביב האפס. כלומר לכל $x>0$ נקבל:

$\int_{-\infty}^{-x} f(x')dx'=0$; $\int_{x}^{\infty} f(x')dx'=0$ וכן: $\int_{-x}^{x} f(x')dx'=1$.

שימושים של פונקצית הדלתא:

1) הכפלה: $f(t)\delta(t)=f(0)$.

2) הזזה: $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)$.

3) שינוי סקלה: $f(t)\delta(at_0)=\frac{1}{|a|}f(t_0)$.

4) הזזה ושינוי סקלה: נניח וקיימת פונקציה: $h(t)$ המקיימת: $h(t_0)=0$: $a<t_0<b$.
נקבל: $f(t)\delta(h(t_0))=\frac{f(t_0)}{|h'(t_0)|}$.

5) כאשר יש סדרת נקודות $\{t_i\}$ המקיימות: $h(t_i)=0$ נקבל: $f(t)\delta(h(t))=\sum_i \frac{f(t_i)}{|h'(t_i)|}$.

רכבת הלמים:

עבור: $h(t)=\sin t$ נקבל: $\delta(\sin t)=\sum_n \delta(t-\pi n)$.

פונקצית מדרגה:

נסמן: $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx$ ונקבל לפי ההגדרה: $u(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ 1/2 & t=0\\ 0 & t<0\end{cases}$.

❖ **דוגמא - כתיבת פונקציות באמצעות פונקצית מדרגה:**

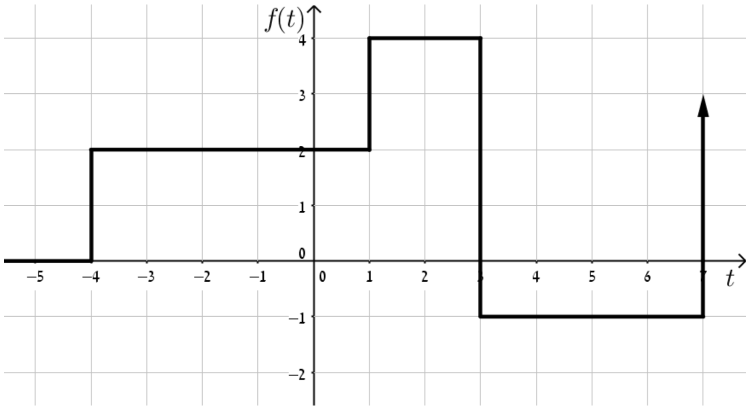
כתוב את הפונקציות הבאות עם מדרגה:

א. $f(t)=\begin{cases}3 & t>1\\ 0 & t\le 1\end{cases}$.

ב. $f(t)=\begin{cases}0 & t<-1\\ 2 & -1\le t<2\\ -3 & t>2\end{cases}$.

❖ דוגמא - מציאת ביטוי מתוך גרף:

כתוב ביטוי מתמטי עבור הפונקציה הבאה:



פונקצית רמפה:

נסמן: $r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(x)dx$ ונקבל לפי ההגדרה: $r(t)=tu(t)=\begin{cases}t & t>0\\ 0 & t\le 0\end{cases}$.

❖ דוגמא - סרטוט אות:

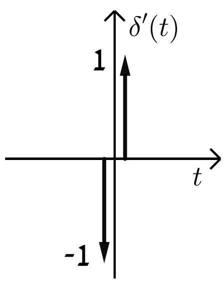
צייר את האות הבא: $f(t)=3r(t)-2u(t-1)$.

סיכום הקשר שבין פונקצית הדלתא, פונקצית המדרגה ופונקצית הרמפה:

מההגדרות: $r(t)=\int_{-\infty}^{t}u(x)dx$, $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(x)dx$ נובע כי: $\frac{d^2r(t)}{dt^2}=\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$.

הנגזרת של פונקצייית:

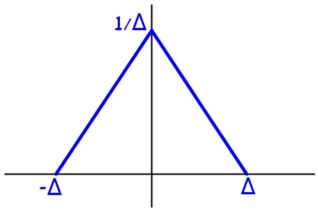
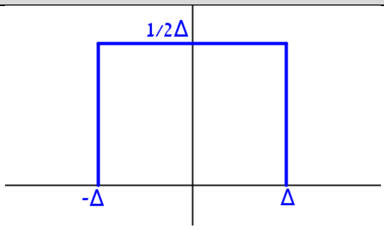
נסמן: $\delta'(t)$ וצורתה היא:



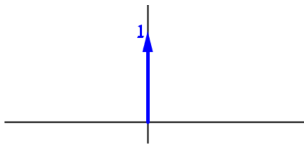
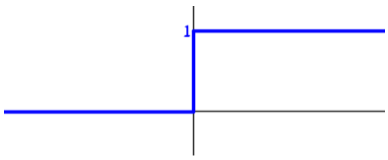
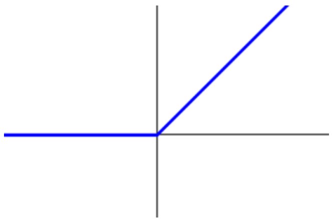
בפרט: $f(t)\delta'(t)=-f'(0)$.

הכללה: $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta^{(n)}(t)dt=(-1)^n f^{(n)}(0)$.

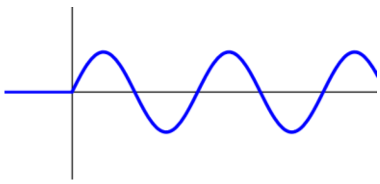
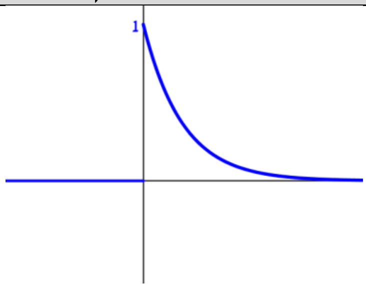
אותות כלליים:

פולס משולש	פולס ריבועי
	
$f\left(t\right)=\begin{cases}\frac{1}{\Delta^2}t+\frac{1}{\Delta} & -\Delta\le t\le 0\\ -\frac{1}{\Delta^2}t+\frac{1}{\Delta} & 0\le t\le\Delta\\ 0 & else\end{cases}$	$f\left(t\right)=\begin{cases}\frac{1}{2\Delta} & -\Delta\le t\le\Delta\\ 0 & else\end{cases}$

אותות מוכללים:

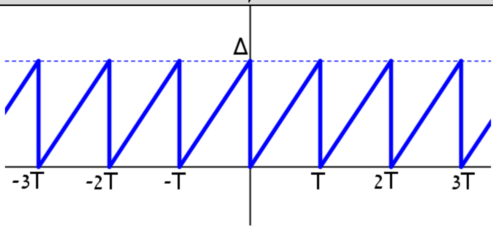
אות דלתא	אות מדרגה	אות רמפה
		
$\delta\left(t\right)=\begin{cases}\infty & t=0\\ 0 & t\ne 0\end{cases}$ $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\delta\left(t\right)dt=1$	$u\left(t\right)=\begin{cases}1 & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$r\left(t\right)=\begin{cases}t & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$

אותות טבעיים:

אות סינוס	אות מעריכי דועך
	
$f\left(t\right)=\sin\left(\omega t\right)u\left(t\right)$	$f\left(t\right)=e^{-\alpha t}u\left(t\right)$

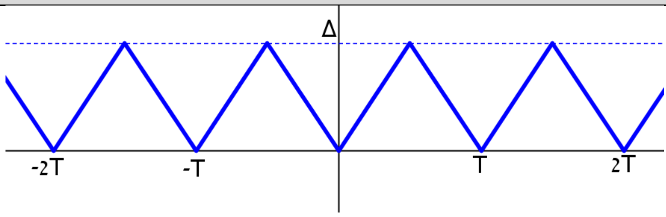
אותות מחזוריים:

אות שן מסור



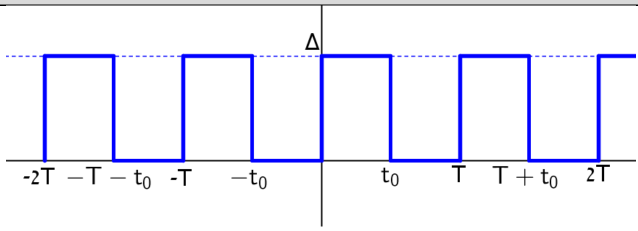
$$f(t)=\frac{\Delta}{T}t \quad kT\le t<(k+1)T\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

אות משולש מחזורי



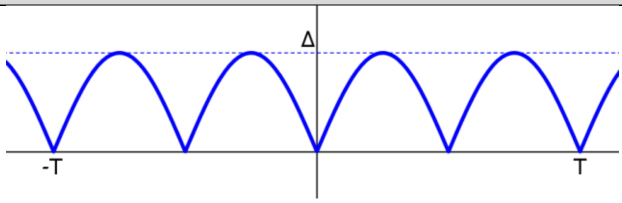
$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2\Delta}{T}t & kT\le t<(k+1/2)T\\ \dfrac{\Delta}{T}-\dfrac{2\Delta}{T}t & (k+1/2)T\le t<(k+1)T\end{cases}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

פולס ריבועי מחזורי



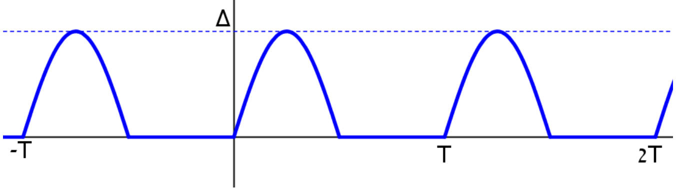
$$f(t)=\begin{cases}\Delta & kT\le t<t_0+kT\\ 0 & t_0+kT\le t<(k+1)T\end{cases}\ ,\ 0<t_0<T\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

אות סינוס מיושר גל שלם



$$f(t)=\Delta\left|\sin(\omega t)\right|=\begin{cases}\Delta\sin(\omega t) & kT<t\le(k+1/2)T\\ -\Delta\sin(\omega t) & (k+1/2)T<t\le(k+1)T\end{cases}\ ,\ \Delta>0\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

אות סינוס מיושר חצי גל

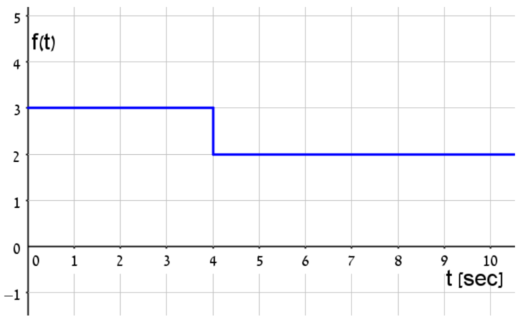


$$f\left(t\right)=\begin{cases}\Delta\sin\left(\omega t\right) & kT<t\le\left(k+1/2\right)T\\ 0 & \left(k+1/2\right)T<t\le\left(k+1\right)T\end{cases}$$

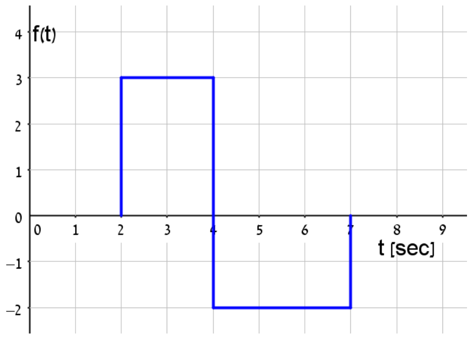
שאלות:

1) כתוב ביטוי מתמטי לכל אחד מאותות הכניסה במקרים הבאים:

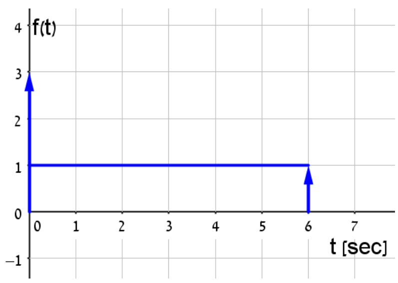
א.



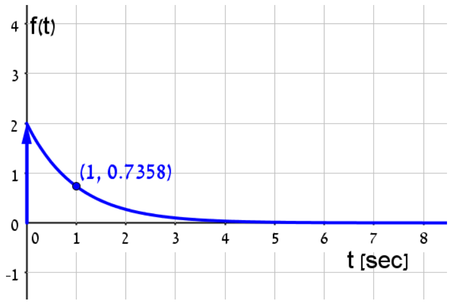
ב.



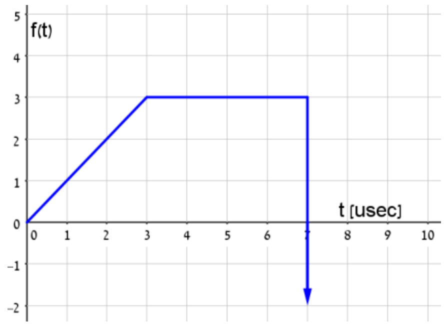
ג.



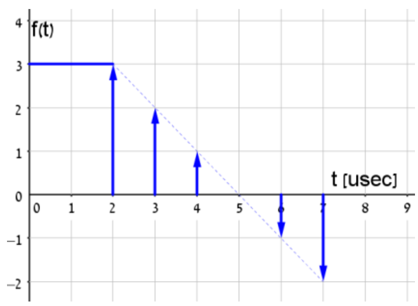
ד.



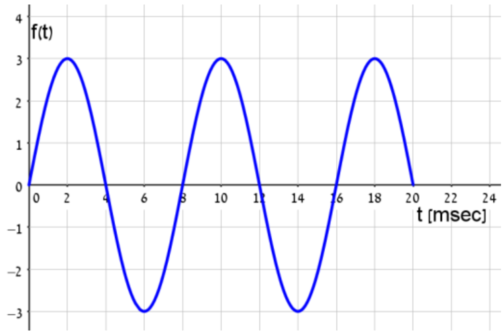
ה.



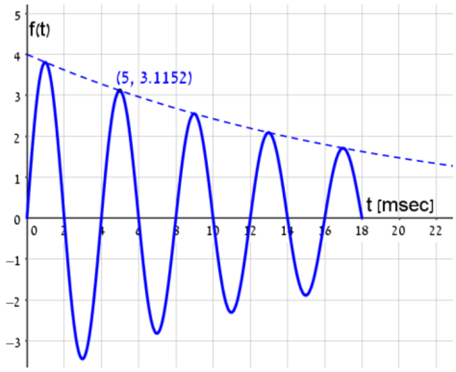
ו.



ז.



ח.



2) צייר את צורות הגל המתאימות בכל אחד מהמקרים הבאים:

א. $f(t)=2u(t)-3u(t-1)$

ב. $f(t)=3t\left[u(t)-u(t-5)\right]$

ג. $f(t)=10\sin(30t)u(t)$

ד. $f(t)=e^{-2t}\left(\delta(t)+\delta(t-1)+\delta(t-2)\right)$

ה. $f(t)=6\sin(10t)\left[u(t-1)-u(t-6)\right]$

ו. $f(t)=e^{-0.1t}\cos(4t)u(t)$

ז. $f(t)=e^{-10t}u(t)-2\delta(t)$

ח. $f(t)=\left(e^{-5t}-3e^{-15t}\right)\cdot\left(\delta(t)+u(t)\right)$

ט. $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}u(t-k)$

י. $f(t)=\sum_{k=0}^{\infty}4^{2-t}\delta(t-k)$

3) חשב את הביטויים הבאים:

א. $\left(t^2-3t\right)\delta(t)$

ב. $\left(t^2-3t\right)\delta(t-2)$

ג. $t\cdot e^{-t}\left[\delta(t-1)-5\delta(t-2)\right]$

ד. $e^{-2t}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)\cdot\left[\delta(t)+\delta(t-1)+\delta(t-2)\right]$

ה. $\sum_{k=0}^{\infty}3^{-t}\delta(t-k)$

ו. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\delta(t-k)}{t^2}$

4) גזור את הפונקציות הזמניות הבאות:

א. $f(t)=e^{-20t}u(t)$

ב. $f(t)=\sin(\omega t)u(t)$

ג. $f(t)=tu(t)$

ד. $f(t)=t^{2}u(t)$

ה. $f(t)=e^{-5t}(\cos 3t-3\sin 3t)u(t)$

ו. $f(t)=\sum_{k=1}^{N}ku(t-k)$

ז. $f(t)=\delta(t)+\sum_{k=1}^{N}e^{-10kt}u(t-2k)$

תשובות סופיות:

1) א. $f(t)=3u(t)-u(t-4)$ ב. $f(t)=3u(t-2)-5u(t-4)+2u(t-7)$.

ג. $f(t)=3\delta(t)+\delta(t-6)+u(t)-u(t-6)$ ד. $f(t)=2\delta(t)+e^{-t}u(t)$.

ה. $f(t)=t\left[u(t)-u(t-3)\right]+3\left[u(t-3)-u(t-7)\right]-2\delta(t-7)$.

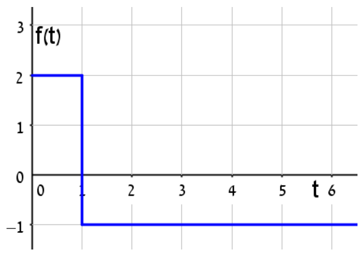
ו. $f(t)=3\left[u(t)-u(t-2)\right]+\sum_{k=2}^{7}(5-k)\delta(t-k)$.

ז. $f(t)=3\sin(250\pi t)\left[u(t)-u(t-0.02)\right]$.

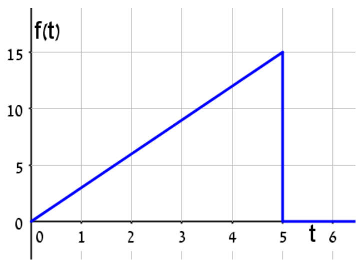
ח. $f(t)=4\sin(500\pi t)e^{-50t}\left[u(t)-u(t-0.018)\right]$.

2) להלן תוצאות התיאורים הגרפיים:

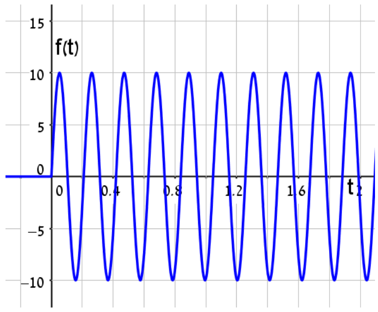
א.



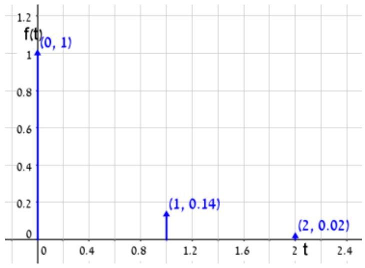
ב.



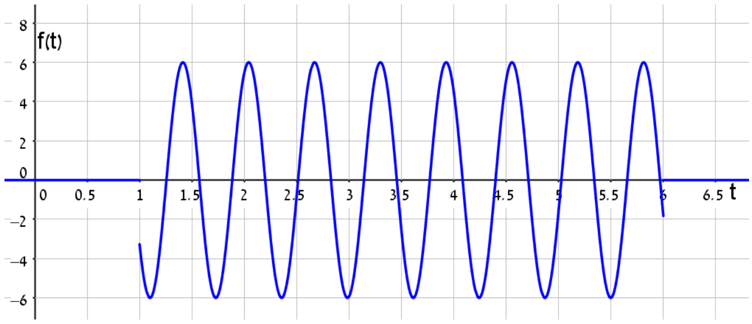
ג.



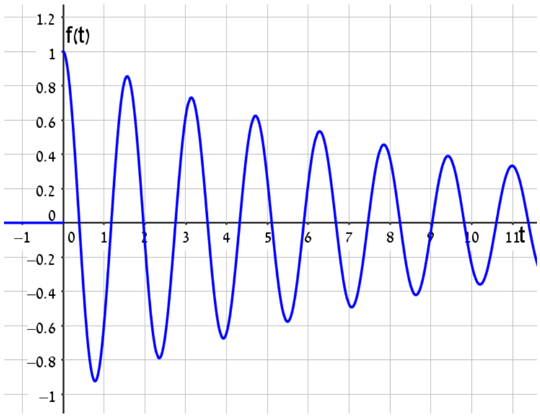
ד.



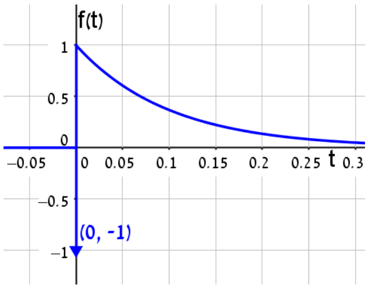
ה.



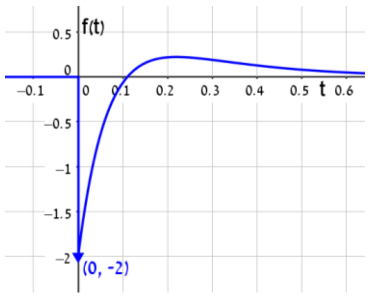
ו.



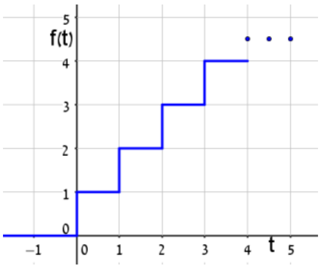
ז.



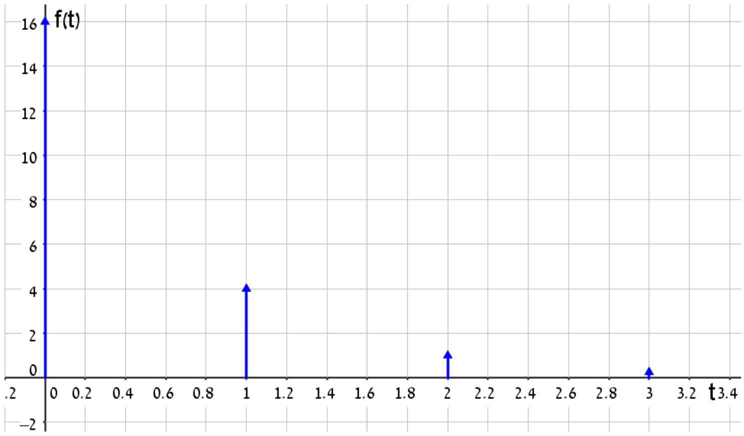
ח.



ט.



י.



3) א. 0 ב. $-2\delta(t-2)$ ג. $e^{-1}\delta(t-1)-10e^{-2}\delta(t-2)$

ד. $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-2}\delta(t-1)+e^{-4}\delta(t-2)$ ה. $\sum_{k=0}^{\infty}3^{-k}\delta(t-k)$ ו. $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k^2}\delta(t-k)$.

4) א. $f'(t)=-20e^{-20t}u(t)+\delta(t)$ ב. $f'(t)=\omega\cos(\omega t)u(t)$ ג. $f'(t)=u(t)$

ד. $f'(t)=2tu(t)$ ה. $f'(t)=2e^{-5t}(6\sin 3t-7\cos 3t)u(t)+\delta(t)$

ו. $f'(t)=\sum_{k=1}^{N}k\delta(t-k)$ ז. $f'(t)=\delta'(t)+\sum_{k=1}^{N}\left[-10ke^{-10kt}u(t-2k)+e^{-20k^2}(t-2k)\right]$.

תכונות של אותות:

סיכום כללי:

אנרגיה והספק של אות:

האנרגיה של אות רציף $f(t)$ בתחום $[t_1:t_2]$ תחושב באופן הבא: $E(t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2}|f(t)|^2\,dt$.

באופן דומה, ההספק הממוצע בתחום זה יחושב: $P(t_1,t_2)=\frac{E(t_1,t_2)}{\Delta t}=\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}|f(t)|^2\,dt$.

כדי לחשב את האנרגיה וההספק בכל התחום (כלומר: $(-\infty:\infty)$) נבצע:

$$E_\infty=\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2\,dt$$

$$P_\infty=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2\,dt$$

בהתאם להגדרות של אנרגיה והספק בתחום האינסופי (כלומר, על כל ציר הזמן) נוכל להבחין בין 3 מקרים אפשריים לפי סוגי האותות המתקבלים:

1) אותות בעלי אנרגיה סופית (והספק אפס). ($E<\infty$, $P=0$).
2) אותות בעלי הספק סופי אך אנרגיה אינסופית. ($E\to\infty$, $P<\infty$).
3) אותות בעלי הספק אינסופי (וכמובן שגם אנרגיה אינסופית). ($E\to\infty$, $P\to\infty$).

❖ **דוגמאות - חישובי הספקים ואנרגיות:**

חשב את ההספק והאנרגיה של האותות הבאים בכל התחום $(-\infty:\infty)$

וקבע לאיזה סוג שייך כל אות.

א. $f(t)=e^{-2t}u(t)$.

ב. $f(t)=\sin(\omega_0 t)u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)$.

ג. $f(t)=3t\cdot u(t)$.

אותות מחזוריים:

אות רציף $f(t)$ המחזורי בעל מחזור $T>0$ מקיים: $f(t)=f(t+kT)$ לכל $t\in\mathbb{R}$ כאשר: $k\in\mathbb{Z}$.

❖ **דוגמאות – מציאת מחזוריות של אותות:**

קבע האם האותות הבאים הם מחזוריים. אם כן מצא את המחזור (הבע באמצעות הפרמטרים):

א. $f(t)=\sin(\omega_0 t)$, כאשר: $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ ו-$T_0>0$.

ב. $f(t)=\cos(\omega_0 t)\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}$, כאשר: $\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}$ ו-$T_0>0$, $\tau>0$.

אותות זוגיים ואי-זוגיים:

אות $f(t)$ ייקרא **זוגי** אם הוא מקיים: $f(t)=f(-t)$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

אות $f(t)$ ייקרא **אי-זוגי** אם הוא מקיים: $f(t)=-f(-t)$ לכל $t\in\mathbb{R}$.

ניתן לפרק כל אות כללי $f(t)$ לרכיב זוגי ורכיב אי זוגי באופן הבא:

$$f_{\text{even}}(t)=\frac{1}{2}\left(f(t)+f(-t)\right)$$
$$f_{\text{odd}}(t)=\frac{1}{2}\left(f(t)-f(-t)\right)$$

❖ **דוגמאות – אותות זוגיים ואותות אי זוגיים:**

קבע מי מבין האותות הבאים זוגי, מי הוא אי-זוגי, ומי לא זוגי ולא אי-זוגי:

א. $f(t)=\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)\cdot\exp\left\{-\frac{t}{\tau_0}\right\}$.

ב. $f(t)=\cos(\omega_0 t)\cdot\exp\left\{-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right\}$.

ג. $f(t)=\frac{t-t^3}{2\cosh(t)}$.

❖ דוגמא – פירוק אות לרכיבים זוגי ואי זוגי:

כתוב את הרכיב הזוגי והרכיב האי-זוגי של האות הבא: $f(t)=\frac{t}{\tau}\exp\{-4t\}$.

טרנספורמציה על ציר הזמן:

נרצה לבצע הזזה (טרנספורמציה) של אות $f(t)$ בציר הזמן כדי לקבל את האות $f(at+b)$.
הגודל b מייצג הזזה בציר הזמן והגודל a מייצג כיווץ/מתיחה בציר הזמן.
כדי לבצע את הטרנספורמציה אנו נבצע:

1) תחילה נזיז את האות לפי ערך ההזזה (קרי: השהייה).
2) לאחר מכן נבצע את פעולת הכיווץ/מתיחה.

❖ דוגמא – סרטוט של אות:

נתון האות: $f(t)=2r(t)-2r(t-3)-6u(t-6)$. צייר את האות $f(3t-4)$.

מערכות:

סיכום:

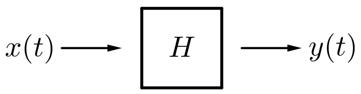
מערכת:

נתייחס לאות זמני הנכנס לקופסא בתור $x(t)$ ולאות היוצא מקופסא שכזו בתור $y(t)$.
הפעולה עצמה שהקופסא הסגורה מבצעת תסומן ב- H.

לקופסה הסגורה נקרא בשם **מערכת** ונכתוב את הקשר שבין האותות כך: $y(t)=H\{x(t)\}$.

צורת סימון נוספת: $x(t)\xrightarrow{H}y(t)$.

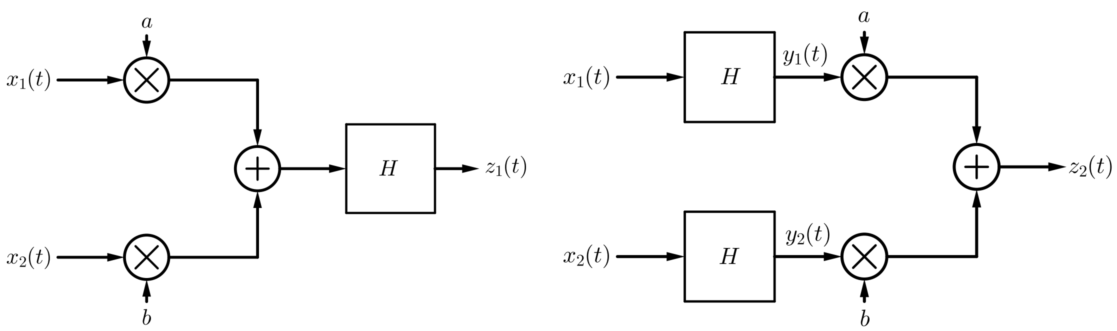
גרפית, מקובל לצייר באופן הבא:



מערכת ליניארית (Linear System):

נתונה מערכת H אשר אליה נכנסים שני אותות $x_1(t)$ ו- $x_2(t)$
כך ש: $y_1(t)=H\{x_1(t)\}$ ו- $y_2(t)=H\{x_2(t)\}$.
אם מתקיים: $H\{ax_1(t)+bx_2(t)\}=ay_1(t)+by_2(t)$ אז נאמר כי המערכת היא **ליניארית**.

גרפית, מקובל להציג מערכת שכזו באופן הבא:



❖ דוגמא - הוכחת ליניאריות:

נתונה מערכת H המקיימת: $y(t)=4\frac{d}{dt}x(t)$.

א. כתוב את האופרטור של המערכת, H.

ב. בדקו האם המערכת היא ליניארית או לא.

❖ דוגמא - שלילת ליניאריות:

הראה כי מערכת המקיימת: $y(t)=x(t)-1$ היא אינה ליניארית.

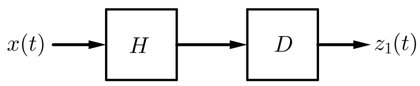
מערכת קבועה בזמן (Time Invariant):

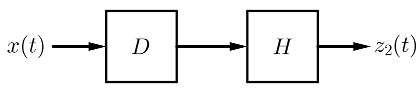
מערכת הקבועה בזמן היא כזו שהשהיית האות בכניסתה גוררת השהייה זהה באות המוצא.

מתמטית, נניח כי: $y(t)=H\{x(t)\}$ אז מתקיים: $y(t-D)=H\{x(t-D)\}$ לכל $D\in\mathbb{R}$.

סימון נוסף לאופרטור ההזזה: $(s_Y f)\triangleq f(t-Y)$ כאשר $Y\in\mathbb{R}$ מתאר את ההזזה.

גרפית, נציג זאת באופן הבא:





מסקנות מיידיות:

1) מערכת המבצעת הכפלה בזמן, או כל פעולה התלויה בזמן, לא יכולה להיות קבועה בזמן (TI).

2) מערכת הקבועה בזמן כוללת פעולות שאינן תלויות בזמן בלבד, כגון הוספת קבועים או הכפלת אות הכניסה בקבוע.

3) מערכת המפוצלת לתחומי זמן שונים לעולם תהיה תלויה בזמן.

❖ דוגמא - השהייה בזמן:

נבדוק אם המערכות הבאות הן קבועות בזמן:

א. $\frac{d}{dt}x(t)=y(t)$.

ב. $y(t)=t\cdot x(t)$.

מערכת LTI:

מערכת המקיימת את תכונת הליניאריות והיא קבועה בזמן נקראת: Linear Time invariant.

בקיצור אנו נקרא להן **מערכות LTI**.

במסגרת הקורס שלנו אנו נעסוק במערכת LTI ונלמד את תכונותיהן.

תכונות של מערכות:

ניתן לאפיין מערכת (לאו דווקא מערכת LTI) ע"י מספר תכונות:

1) מערכת חסרת זיכרון (Memoryless System):

בה המוצא תלוי בערך הכניסה אך ורק בזמן הנתון ולא בזמנים אחרים.

מתמטית, נאמר כי עבור שתי כניסות $f(t)$ ו- $g(t)$ למערכת H, מתקיים לכל t_0 בתחום ההגדרה שלהן: $H\{f(t_0)\}=H\{g(t_0)\}$.

2) מערכת סיבתית (Casual System):

המוצא נקבע ע"י ערך הכניסה בזמן הווה ובזמני עבר, אך לא בזמני עתיד.

3) מערכת יציבה BIBO (Bounded Input Bounded Output):

מערכת שבה המוצא חסום בערכיו לכל כניסה החסומה גם היא.

מתמטית נסמן: $\forall t\in\Omega: |x(t)|\le M<\infty \;\rightarrow\; |y(t)|\le N<\infty$

(כאשר: Ω הוא תחום ההגדרה של אות הכניסה $x(t)$).

4) מערכת הפיכה (Inversible System):

מערכת שבה ניתן לשחזר את אות הכניסה מאות המוצא ביחידות (חח"ע).

❖ דוגמא - תכונות של מערכות:

קבע האם מערכת המקיימת את המשוואה: $y(t)=a\cdot x^2(t)+b\cdot x(t-3)+c$ היא:

- חסרת זיכרון.
- סיבתית.
- יציבה BIBO.
- הפיכה.

התגובה להלם:

נוכל לתאר את המוצא של כל אות כניסה $x(t)$ ע"י פירוקו להלמים (קרי: דלתאות).

כדי לבצע זאת נגדיר את מוצא המערכת עבור כניסת דלתא בתור **תגובת המערכת להלם**.
התגובה להלם של המערכת תסומן: $h(t)$ ונכתוב: $h(t)=H\{\delta(t)\}$ או, בכתיבה יותר מפורטת: $x(t)=\delta(t)\xrightarrow{H}y(t)=h(t)$.
על מנת שנוכל לתאר כל אות מוצא ממערכת באמצעות התגובה להלם, המערכת חייבת להיות LTI. רק כך תתאפשר ההזזה בזמן והליניאריות בין הכניסה למוצא.

אינטגרל הקונבולוציה:

נסמן: $\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau\triangleq x(t)*h(t)$.
הוא נקרא **אינטגרל הקונבולוציה** בין שני אותות.

משפט הקונבולוציה:

המוצא של כל מערכת LTI ניתן לתיאור ע"י קונבולוציה בין אות הכניסה ותגובת המערכת להלם: $y(t)=x(t)*h(t)$.