# סטודנטים יקרים

לפניכם ספר תרגילים בקורס מבוא ללוגיקה ותורת הקבוצות. הספר הוא חלק מקורס חדשני וראשון מסוגו בארץ בנושא זה, המועבר ברשת האינטרנט On-line. הקורס באתר כולל פתרונות מלאים לספר התרגילים, וכן את התיאוריה הרלוונטית לכל נושא ונושא.

הקורס כולו מוגש בסרטוני וידאו המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי, לדוגמה לחצו כאן.

את הקורס בנה מר טל פלדמן, מרצה מבוקש במוסדות אקדמיים שונים ובעל ניסיון עתיר בהוראת המקצוע.

אז אם אתם עסוקים מידי בעבודה, סובלים מלקויות למידה, רוצים להצטיין או פשוט אוהבים ללמוד בשקט בבית, אנחנו מזמינים אתכם לחוויית לימודים יוצאת דופן וחדשה לחלוטין, היכנסו עכשיו לאתר www.gool.co.il.

אנו מאחלים לכם הצלחה מלאה בבחינות

צוות האתר GooL

*גול זה בול. בשבילך!*

## תוכן

# תרגילים בנושא לוגיקה

1) רשום את טבלות האמת של הפסוקים הבאים:

א. $(p\wedge q)\vee\neg r$

ב. $\neg(p\wedge q)\to(\neg r)$

ג. $(p\wedge\neg q)\vee r$

ד. $(p\vee q)\to(q\to r)$

2) בטא את שלילת הפסוקים הבאים. (בלי קשר לנכונותם)

א. דוד יפה או ראובן מכוער

ב. האוכל חם וטעים

ג. לכל $x$ קיים $y$ שהוא השורש הריבועי של $x$

ד. כל תרנגולת כחולה עוזבת את הלול כדי להטיל ביצים.

ה. כל פנתר שהוא ורוד משחק בסרטים מצוירים.

ו. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי או שהוא משחק בסרטים מצוירים.

ז. כל פנתר שהוא ורוד קוראים לו יוסי וגם הוא משחק בסרטים מצוירים.

ח. לכל נגר קיים אדם שכל רהיטיו יוצרו בידי נגר זה.

ט. אם יהיה יום יפה וגם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

י. אם יהיה יום יפה אז אם יהיה לי מצב רוח טוב אז אצא לטיול.

3) בדוק אלו מזוגות הפסוקים הבאים שקולים לוגית במקרה שהתשובה חיובית הראה זאת הן בעזרת טבלת אמת והן בעזרת עץ שקר

א. $\neg(p\to q)$     $p\wedge(\neg q)$

ב. $(\neg p)\to q$     $p\vee(\neg q)$

ג. $p\to(\neg q)$     $\neg(p\wedge q)$

ד. $(p\vee q)\wedge(\neg q)$     $p\wedge(\neg q)$

ה. $p\leftrightarrow q$     $(p\wedge q)\vee((\neg p)\wedge(\neg q))$

ו. $\left(s\to\left(p\wedge(\neg r)\right)\right)\wedge\left(\left(p\to(r\vee q)\right)\wedge s\right)$     $p\vee u$

ז. הראה כי $\neg\left(r\wedge(p\vee q)\right)\equiv\left((\neg p)\wedge(\neg q)\right)\vee\neg r$ בעזרת זהויות יסוד.

4) א. הבע את קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$

ב. הבע את קשר ה-$\vee$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$

ג. הבע את קשר ה-$\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$

ד. הבע את קשר ה-$\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\wedge,\neg\}$

ה. הבע את קשר הגרירה בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

ו. הבע את הקשר $\wedge$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

ז. הבע את קשר ה-$\oplus$ (XOR) בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

ח. הבע את קשר ה-$\leftrightarrow$ בעזרת קבוצת הקשרים $\{\vee,\neg\}$

5) יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta$ הפסוקים הבאים:

$$\alpha_1:(A\vee B)\to(D\to C)$$
$$\alpha_2:B\to\neg(C\wedge A)$$
$$\alpha_3:C\leftrightarrow(A\wedge D)$$
$$\beta:D\vee(B\wedge C)$$

בדקו אלו מהטענות הבאות נכונות והוכיחו.

א. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\Rightarrow\beta$

ב. $\beta$ אינה נובעת טאוטולוגית מהפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ אך מתיישבת אתם.

ג. $\beta$ אינה מתיישבת עם הפסוקים $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ כלומר סותרת אתם.

6) הוכח כי הפסוקים הבאים הינם טאוטולוגיות ללא שימוש בטבלת אמת

א. $p\vee(\neg p)$

ב. $p\vee(p\to q)$

ג. $(p\to q)\vee(q\to r)$

ד. $(p\wedge(p\to q))\to q$

ה. $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$

ו. $((p\to r)\wedge(q\to r))\to((p\vee q)\to r)$

ז. $(q\vee p\vee r)\to((\neg p)\to((q\vee r)\wedge(\neg p)))$

ח. $((B\to(C\wedge(\sim A)))\wedge(((\sim B)\vee C)\to D)\wedge(E\to(\sim D)))\to(A\to\sim E)$

ט. הוכח בעזרת טבלת אמת שהפסוק $(u \to v) \leftrightarrow ((\neg v) \to (\neg u))$ הוא טאוטולוגיה.

י. הוכח כי הפסוק $(u \to v) \leftrightarrow ((\neg v) \to (\neg u)) \to (((p \to r) \wedge ((\neg q) \to p) \wedge (\neg r)) \to q)$ הוא טאוטולוגיה. (מותר לך להסתמך על הסעיף הקודם)

7) בארץ חלם מתקיימת שביתת רופאים במטרה להגדיל את תקציב הבריאות. לפניך ניתוח המצב.

* אם הרופאים לא יסיימו את השביתה אז הנהלות בתי החולים יתערבו.
* אם לא תיפגע בריאותם של החולים אז הממשלה לא תגדיל את הקציב.
* אם הנהלות בתי החולים יתערבו אז לא תפגע בריאותם של החולים או שבית המשפט יתערב.
* בית המשפט לא יתערב וגם הממשלה לא תגדיל את התקציב.

מסקנה: הרופאים יסיימו את השביתה.

נסמן: $D$ הרופאים יסיימו את השביתה $H$ הנהלות בתי החולים יתערבו. $P$ בית המשפט יתערב

$C$ לא תפגע בריאותם של החולים $M$ הממשלה תגדיל את התקציב.

א. הצרן בעזרת המשתנים המוצעים את טיעון לשפת תחשיב הפסוקים.

ב. בדוק ללא שימוש בטבלת אמת אם הטיעון תקף.

8) בארץ חלם מתקיימות בחירות זרובבל, כתבינו לענייני מפלגות מנתח את המצב:

* אם אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב את דני יפרוש.
* אם שמעון יציע לדני תפקיד אז דני יפרוש.
* אם בני ייבחר לראשות מפלגת פיתה אז שמעון יציע לדני תפקיד או שאבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב.
* בני יבחר לראשות מפלגת פיתה.

לכן מסיק כתבינו שדני יפרוש.

סמן: $A$ אבי ייבחר לראשות מפלגת נתיב. $B$ בני יבחר לראשות מפלגת פיתה. $C$ שמעון יציע לדני תפקיד. $D$ דני יפרוש.

הצרן את הטענה לשפת תחשיב הפסוקים והוכח כי המסקנה תקפה.

9) בפרס העתיקה מחליט היזם וייזתא לבנות תיאטרון. אם רוצים שהתיאטרון נגיש לתושבים אז צריך להקימו בלב העיר. אם רוצים שהתיאטרון יהיה רווחי הוא צריך להיות גדול ומרווח כדי שיכיל הרבה אנשים. אבל אם התיאטרון יהיה גדול ומרווח ויבנה בלב העיר אז הוא יעלה 10 מליון זוזים פרסיים. אבל לוייזתא היזם אין 10 מליון זוזים פרסיים לכן מסיק וייזתא היזם כי התיאטרון יוקם במקום לא נגיש לתושבים או שלא יהיה גדול ומרווח.

א. תרגם את ניתוח המצב לשפת הפסוקים תוך שימוש בסימונים הבאים:

$N$ נגיש לתושבים    $L$ בלב העיר    $Y$ יכיל הרבה אנשים    $G$ גדול ומרווח    $M$ מחירו

יעלה על . . .    R ריווחי

הצרן את ההנחות והמסקנה לשפת הפסוקים בדוק האם המסקנה תקפה ללא שימוש בטבלת אמת.

10) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. (כאשר $p,q,r$ פסוקים אטומים)

א. $(p \vee q) \Rightarrow p$

ב. $(p \vee q) \Rightarrow q$

ג. $(p \to q) \Rightarrow q$

ד. $p, p \to q \Rightarrow q$

ה. $(p \to q) \wedge (p \to r) \wedge p \Rightarrow r$

ו. $r \Rightarrow (p \to q) \wedge (p \to r) \wedge p$

ז. $A \to B, C \to B, D \to (A \vee C), D \Rightarrow B$

ח. $(A \vee B \to D), D \to (C \vee P), P \to Q, (\neg C) \wedge (\neg Q) \Rightarrow \neg A$

ט. $(B \to (C \wedge (\sim A)))\ ,\ (((\sim B) \vee C) \to D)\ ,\ (E \to (\sim D)) \models (A \to \sim E)$

11) בסעיפים הבאים $\alpha, \beta, \gamma$ פסוקים לאו דווקא אטומים. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם $\alpha$ סתירה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $\beta \Rightarrow \neg \gamma$

ב. אם $\alpha$ טאוטולוגיה וגם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $\neg \beta \Rightarrow \gamma$

ג. אם $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$ אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$

ד. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \vee (\alpha \Rightarrow \gamma))$ אז $\alpha \Rightarrow \beta \vee \gamma$

ה. אם $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$ אז $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$

ו. אם $((\alpha \Rightarrow \beta) \wedge (\alpha \Rightarrow \gamma))$ אז $\alpha \Rightarrow \beta \wedge \gamma$

ז. אם $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ אז $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$

ח. אם $(\alpha \rightarrow \beta) \Rightarrow \gamma$ אז $\alpha \Rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$

ט. אם $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$ אז $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$

י. אם $(\alpha \Rightarrow \gamma) \vee (\beta \Rightarrow \gamma)$ אז $\alpha \vee \beta \Rightarrow \gamma$

יא. אם $\alpha \models \beta \rightarrow \gamma$ אז $\alpha, \beta \models \gamma$

יב. אם $\alpha \models \beta \rightarrow \gamma$ אז $\alpha \vee \beta \models \gamma$

12) עבור $\alpha$ פסוק אטומי או מורכב נגדיר את הקבוצה $F_\alpha = \{\gamma | \alpha \Rightarrow \gamma\}$ כלומר $F_\alpha$ היא קבוצת כל הפסוקים שנובעים טאוטולוגית מהפסוק $\alpha$. הוכח כי $\alpha \equiv \beta$ אם ורק אם $F_\alpha = F_\beta$.

13) לכל אחת מהטענות הבאות קבע האם היא נכונה ורשום את שלילתה ללא שימוש בקשר השלילה. במקרה שהטענה נכונה נמק זאת ובמקרה שהטענה אינה נכונה הבא דוגמה נגדית.

א. $\forall x \in \mathbb{N}(\exists y \in \mathbb{N}(x < y))$

ב. $\forall x \in \mathbb{N}(\exists y \in \mathbb{N}(x > y))$

ג. $\forall x, y \in \mathbb{R}(x > y) \rightarrow \exists z \in \mathbb{R}(x > y + z)$

ד. $\forall x \in \mathbb{R}(x > 0) \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N}(x > \frac{1}{n}))$

ה. $\forall x \in \mathbb{R}(x \neq 0 \rightarrow \forall y \in \mathbb{Z} \exists z \in \mathbb{R}(xz = y))$

ו. $\forall x \in \mathbb{N}(x \geq 1 \rightarrow \forall y \in \mathbb{N} \exists z \in \mathbb{N}(xz = y))$

ז. $\forall x \in \mathbb{R}(x > 0 \rightarrow \exists y \in \mathbb{N}(xy > 1))$

ח. $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}(xy = x \wedge x + y < 5) \rightarrow y < 4\frac{1}{2}$

ט. $\forall x \in \mathbb{R}((x > 0) \rightarrow \forall y \in \mathbb{R}(\exists n \in \mathbb{N}(nx > y)))$

14) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות. במקרה של הפרכה הדגם עולם דיון מתאים עבורו הטענה לא מתקיימת והסבר מדוע הטענה לא מתקיימת. כמו כן רשום גם את שלילה של כל טענה כאשר הקשר $\neg$ מופיע רק לצד פרדיקטים

א. $\forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x)$

ב. $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

ג. $\left(\forall x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right) \rightarrow \left(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\right)$

ד. $\left(\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)\right) \rightarrow \left(\forall x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right)$

ה. $\left(\forall x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right) \rightarrow \left(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\right)$

ו. $\left(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)\right) \rightarrow \left(\forall x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right)$

ז. $\left(\exists x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right) \rightarrow \left(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\right)$

ח. $\left(\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)\right) \rightarrow \left(\exists x\left(P(x) \wedge Q(x)\right)\right)$

ט. $\left(\exists x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right) \rightarrow \left(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\right)$

י. $\left(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x)\right) \rightarrow \left(\exists x\left(P(x) \vee Q(x)\right)\right)$

15) נסמן

$$P(x): x^2-8x+15=0$$
$$Q(x): x \text{ is odd}$$
$$R(x): x>0$$
$$L(x): x^2+2x+2=0$$

בעולם הדיון $\mathbb{Z}$. הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. $\forall x\left[P(x) \rightarrow Q(x)\right]$

ב. $\forall x\left[Q(x) \rightarrow P(x)\right]$

ג. $\exists x\left[P(x) \rightarrow Q(x)\right]$

ד. $\exists x\left[Q(x) \rightarrow P(x)\right]$

ה. $\forall x\left[L(x) \rightarrow Q(x)\right]$

ו. $\exists x\left[L(x) \rightarrow Q(x)\right]$

ז. $\exists x\left[R(x) \rightarrow P(x)\right]$

ח. $\forall x\left(\neg Q(x)\rightarrow\neg P(x)\right)$

ט. $\forall x\left[\left(P(x)\vee Q(x)\right)\rightarrow R(x)\right]$

י. $\exists x\left[P(x)\rightarrow\left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

יא. $\forall x\left[P(x)\rightarrow\left(Q(x)\wedge R(x)\right)\right]$

נפנה עתה למספר שאלות בהצרנות. בכל השאלות מותר להשתמש ב- סימני משתנים: $x,y,z$ סימני קבוצה: $A,B,C,\cdots,\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R}$ סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים: $\subseteq$ , $\in$ , $=$, $\neq$, $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $($ , $)$, $<$, $>$ ,
וכן סימנים נוספים הנתונים בגוף השאלה.

**<u>שימו לב: אסור להשתמש בקשר השלילה</u> ואין להשתמש בסימן $\notin$ !!!**

16) הצרן כל אחת מהטענות הבאות.

א. לכל מספר ממשי אין עוקב מיידי. הכוונה שאין מספר ראשון מייד אחריו.

ב. אין קבוצה שמכילה את כל הקבוצות. מותר כאן להשתמש בסימן $\notin$ .

ג. לכל מספר שאינו ראשוני יש לפחות שני מחלקים שונים. כאן גם מותר להשתמש בסימן קבוצה $P$ עבור קבוצת המספרים הראשוניים ובסימן $\notin$ .

ד. למספר הטבעי הכי גדול אין מחלקים. ( ברור שאין כזה אבל צריך רק להצרין. )

ה. לא כל מספר טבעי הוא ראשוני.

ו. כל קבוצה אינה שקולה לקבוצת החזקה שלה.

ז. לכל שני מספרים טבעיים שונים יש מחלק משותף.

ח. בכל קבוצה בת לפחות שלושה איברים שונים אין איבר מקסימלי.

ט. לא בכל תת קבוצה של ממשים יש איבר מינימלי

י. תהי פונקציה $f:X\rightarrow Y$ . נגדיר את הפונקציה $G:P(X)\rightarrow P(Y)$ באופן הבא:

$$G(B)=\left\{x\in X\,\middle|\,f(x)\in B\right\}$$

הצרין את הטענה: אם $f$ על אז $G$ ח.ח.ע.

השתמשי רק בסימנים הבאים:

סימני משתנים: $x,y,B,C$ סימני קבוצות: $X,Y$ סימן פונקציה: $f$

סוגריים, קשרים, כמתים ופרדיקטים: $\in$ , $=$, $\forall$, $\exists$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $($ , $)$, $\subseteq$ ,

<u>שימו לב: אסור להשתמש בסימנים G ו P. יש להשתמש בהגדרותיהם כדי להחליפם בסימנים אחרים.</u>

יא. לכל מספר ממשי יש לכל היותר שני מספרים ממשיים שונים זה מזה שריבועם שווה לו.

יב. הצרינו את הטענה: לכל פונקציה $f: A \to B$ לכל פונקציה $g: B \to A$ אם $g \circ f = Id_A$ אז $f$ היא על.

מותר להשתמש בסימנים הבאים ורק בהם. סימני משתנים $x_1, x_2, \cdots$ קשרים $\to, \leftrightarrow, \wedge, \vee$

והסימנים $\exists, \forall, (,), \in, A^B, B^A, f, g$ ולמען הסר ספק אסור להשתמש ב- $d_A$ ואסור ב- $\circ$

יג. מספר ראשוני הוא מספר טבעי גדול מאחד שמחלקיו היחידים הם הוא עצמו ו-1. הצרינו א הטענה הבאה:

לכל מספר טבעי, בתחום שבין המספר עצמו לפעמיים המספר ( כולל קצוות ) יש לפחות מספר ראשוני אחד.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני משתנים $x_1, x_2, \cdots$ קשרים $\leftrightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$

והסימנים $\exists, \forall, (,), \in, \mathbb{N}, \leq, 1, 2, 3, \cdots, =, |$ הסימן $|$ פירושו מחלק.

יד. הצרינו את הטענה הבאה: בקבוצה $A$ יש לכל היותר שני מספרים טבעיים. השתמשו רק בסינמנים הבאים:

סימני משתנים $x, y, z$ סימני קבוצות $A, \mathbb{N}$ וכן סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים:

$\exists, \forall, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, (,), \in, \notin, \neq, =$

טו. הצרינו את הטענה לא תמיד נכון שאם $A \subseteq B$ אז $A \sim B$

מותר להשתמש רק בסימנים הבאים: סימני קבוצות $A, B$ ( מותר לצרף אותם לקבוצה בחזקת קבוצה )

סוגריים, קשרים, כמתים, ופרדיקטים: $\exists, \forall, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, (,), \in, \neq, =$ אין להשתמש בקשר השלילה

טז. הצרינו את הטענה הבאה: קבוצת הפונקציות החח"ע מהממשיים לטבעיים אינה ריקה.

השתמשו רק בסימנים הבאים: סימני משתנים $x, y$ סימני קבוצות $\mathbb{R}, \mathbb{N}$ ( וצרופי חזקות שלהן )

סימני פונקציות $f, g$ סוגריים, קשרים, וכמתים: $\exists, \forall, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow, (,), \{,\}, \in, \neq, =$.

יז. הצרינו את כלל הכפל של אי שוויון ממשי ( קטן או שווה ) במספר ממשי שונה מאפס.

מותר להשתמש אך ורק בסימנים הבאים: סימני משתנים $x_1, x_2, \cdots$ קשרים $\leftrightarrow, \leftrightarrow, \wedge, \vee$

והסימנים $\forall, (,), \in, \mathbb{R}, \leq, 0$ דוגמה לכלל הזה היא: מאי השוויון $3.14 \leq \pi$ ( ע"י כפל במינוס חצי לקבל את אי השוויון $-0.5\pi \leq -1.57$.

17) נתונה הקבוצה $\{x \in \mathbb{R} | \forall y [ ( y \in \{t \in \mathbb{N} | t > 3\} \to ( y > x ) ) ] \}$ כתוב אותה בצורה $\{x \in \mathbb{R} | \ldots\ldots\ldots\ldots \}$ כך שבאגף ימין לא יופיע אף משתנה חוץ מ- $x$.

18) תאר במדויק את הקבוצה: $A = \{x \in \mathbb{R} | \exists y \in \mathbb{N} \ (x = y^2) \to (x > 2)\} - \{x \in \mathbb{R} | |x| > 1\}$

19) הוכח כי ההנחה $A$ גוררת טאוטולוגית את המסקנה $\neg(\neg A)$ בעזרת כללי ההיסק הבאים:

1) $\Rightarrow p \to p$

2) $p \Rightarrow q \to p$

3) $p \to q\ ,\ p \to (\neg q) \Rightarrow \neg p$

20) הוכח בעזרת ההנחות

$$B \vee D$$
$$C \to B$$
$$D \to (A \vee C)$$
$$\neg B$$

את המסקנה $A$ מותר להשתמש רק בכללי ההיסק הבאים:

$$P \Rightarrow Q \vee P$$
$$P \wedge Q \Rightarrow P$$
$$P \wedge Q \Rightarrow Q$$
$$P \to Q, Q \to R \Rightarrow P \to R$$
$$P, P \to Q \Rightarrow Q$$
$$\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$$
$$P \Rightarrow \neg\neg P$$
$$P \to Q \Rightarrow \neg Q \to \neg P$$

# תרגילים בנושא קבוצות

1) לכל אחת מהטענות הבאות, אם הטענה נכונה אז ציין רק שהטענה נכונה ואם הטענה אינה נכונה אז ציין שהטענה לא נכונה ותן דוגמה נגדית והראה כי הדוגמה שנתת באמת מהווה דוגמה נגדית. ערך רב יותר יש לדוגמה מינימלית. ( בדוק האם בדוגמה שנתת יש פרטים מיותרים והסר אותם ).
את הטענות הנכונות מבין 10-17 נסה להוכיח. רצוי להוכיח גם את טענה 9) בה נשתמש יותר מאוחר להוכחת תכונות של קבוצת חזקה

א) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cup B$.

ב) אם $x \notin A \cup B$ אז $x \notin A$

ג) אם $x \notin A$ אז $x \notin A \cap B$.

ד) אם $x \notin A \cap B$ אז $x \notin A$

ה) אם $x \notin A$ אז $x \notin A - B$

ו) אם $x \notin A - B$ אז $x \notin A$

ז) אם $x \in B$ אז $x \notin A - B$.

ח) אם $x \notin A - B$ אז $x \in B$

ט) $A \subseteq B \cap C \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

י) $A \subseteq B \cup C \Leftrightarrow (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$

יא) אם $A = A \cup B$ אז $A \subseteq B$

יב) אם $A = A \cup B$ אז $B \subseteq A$

יג) אם $A = A \cap B$ אז $A \subseteq B$

יד) אם $A = A \cap B$ אז $B \subseteq A$

טו) אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cup B$

טז) אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cup B$ יז)

יז) אם $A \subseteq B$ אז $A = A \cap B$

יח) אם $B \subseteq A$ אז $A = A \cap B$

יט) $x \notin A \Leftrightarrow x \notin A - B$

כ) $x \in B \Leftrightarrow x \notin A - B$

כא) השלם $x \notin A - B \Leftrightarrow$ ________________

2) יהיו $A, B, C$ קבוצות הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א) אם $A = A - B$ אז $B = \varnothing$.

ב) אם $A = A - B$ אז $A \cap B = \varnothing$.

ג) אם $A = A \cup B$ אז $A \cap B = B$.

ד) אם $B = A \cup B$ אז $A \cap B = B$.

ה) אם $A \cap B = A$ אז $A = A \cup B$.

ו) אם $A \cap B = B$ אז $A = A \cup B$.

ז) אם $A \cup B = A \cup C$ וגם $A \cap B = A \cap C$ אז $B = C$. ( מבחן סמסטר קיץ תשס"ח , מועד ב' )

ח) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$

ט) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$

י) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

יא) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$

יב) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

יג) $(A - B) \cap (C - D) = (A \cap C) - (B \cup D)$

יד) א. $A \cap B \cap C \subseteq A \oplus B \oplus C$

ב. $A \oplus B \oplus C \subseteq A \cap B \cap C$

3) הוכח כל אחת מהטענות הבאות בדרך השלילה.

**במקום הטענה אם $\alpha$ אז $\beta$ מוכיחים אם $\neg\beta$ אז $\neg\alpha$.**

**<u>ויש לזכור תמיד שלהנחת השלילה $\neg\beta$ ולכל הנובע ממנה מתייחסים כנתון.</u>**

א) אם $A-(B-C)\subseteq(A-B)-C$ אז $A\cap C=\varnothing$

ב) אם $(A-C)\cup(C-B)\subseteq A\cap B$ אז $A\subseteq B$

ג) אם $(A\cup B)-C\subseteq A-B$ אז $(A-C)\cap B=\varnothing$

ד) אם $(C-A)\cup(B-C)\subseteq A-B$ אז $B\subseteq A$

ה) אם $A\subseteq A\Delta B$ וגם $B-C=B\Delta C$. אז $A\cap C=\varnothing$.

ו) אם $A\subseteq A\oplus B$ וגם $B-C\subseteq B\oplus C$ אז $A\cap C=\varnothing$

ועכשיו קצת על קבוצת חזקה.

4) הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א) $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$

ב) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$

ג) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

ד) $P(A)\cap A\neq\varnothing$

ה) $P(A)\cap A=\varnothing$.

ו) אם $\{A\}\subseteq P(B)$ אז $P(A)\subseteq P(B)$

את שתי הטענות הבאות הוכח בדרך השלילה

ז) אם $P(A)\subseteq P(A-B)$ אז $A\cap B=\varnothing$

ח) אם $P(A\cup B)=P(A)\cup P(B)$ אז $(A\subseteq B)\vee(B\subseteq A)$ ( שאלה קשה ).

5) משהו גם על מכפלות קרטזיות. ( נצטרך את זה גם ליחסים )

א) $(A=B)\Leftrightarrow(A\times A=B\times B)$

ב) $((B=\varnothing)\vee(A=\varnothing)\vee(A=B))\Leftrightarrow(A\times B=B\times A)$

ג) הוכח כי לכל 4 קבוצות $A,B,C,D$ מתקיים: $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

ד) אם $((A\times A)\cup(B\times B)=(C\times C))$ אז $(((B\subseteq A)\vee(A\subseteq B))\wedge(A\cup B\subseteq C))$

ה) הוכח כי לכל 4 קבוצות $A,B,C,D$ מתקיים: $(A\cap B)\times(C\cap D)=(A\times C)\cap(B\times D)$.

6) הוכיחו או הפריכו: תהיינה $A,B$ שתי קבוצות כלשהן ותהי $S\subseteq A\times B$ אז קיימות $C\subseteq A$ ו- $D\subseteq B$ כך ש- $S=C\times D$

7) הוכיחו או הפריכו: לכל שתי קבוצות $A,B$ מתקיים: $\overline{A\oplus B}=\overline{A}\oplus\overline{B}$

8) הוכיחו או הפריכו: קיימות שלוש קבוצות $A,B,C$ שלושתן לא ריקות ושונות זו מזו כך ש- $A\cup(B-C)\subseteq A\cap(B-C)$

9) תהיינה $A,B,C$ קבוצות כלשהן. נתון $P(A)-P(B)=P(B)-\{\varnothing\}$ הוכח כי $B-A=B$

10) הוכח כי אם $A\Delta B\subseteq A\Delta C$ אז $A\cap C\subseteq B$

11)הוכח או הפרך: קיימות שתי קבוצות $A,B$ כך ש- $|A\times B|=24$ וגם $|A\cap B|=5$

12) תהיינה $A,B,C$ קבוצות כלשהן. נתון $A\cap B=\varnothing$ הוכח כי $(A\Delta C)\cup(B\Delta C)=A\cup B\cup C$

13) הוכח או הפרך: לכל שלוש קבוצות $A,B,C$ $A\times(B\oplus C)=(A\times B)\oplus(A\times C)$

14) תן דוגמא לקבוצה $A$ שמקיימת $A\cap P(A)\cap P(P(A))\neq\varnothing$

15) לכל שלוש קבוצות $A,B,C$ מתקיים: $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus(C\setminus B))$

## תרגילים בנושא פונקציות

1) ( חימום )

יהיו $f$ ו- $g$ הפונקציות מ-$\mathbb{N}$ ל-$\mathbb{N}$ המוגדרות כך:

$$f(n)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & \text{אם } n \text{ אי זוגי}\\ n-1 & \text{אם } n \text{ זוגי}\end{cases}$$

לכל $n\in\mathbf{N}$ , $g(n)=2n-1$

הוכח או הפרך כל אחת מן הטענות הבאות:

I. $f$ היא חד-חד-ערכית

II. $g$ היא חד-חד-ערכית

III. $f$ היא על $\mathbb{N}$

IV. $g$ היא על $\mathbb{N}$

V. $f\circ g$ היא פונקצית הזהות על $\mathbb{N}$

VI. $g\circ f$ היא פונקצית הזהות על $\mathbb{N}$

2) לגבי כל אחת מהפונק' הבאות קבע האם היא חח"ע והאם היא על. נמק.

א. $f_1:(0,\infty)\to(0,2)$ , $f_1(x)=\dfrac{2x}{x+3}$

ב. $f_2:(0,\infty)\to(0,\infty)$ , $f_2(x)=x+\dfrac{1}{x}$

ג. $f_3:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ , $f_3(x)=x-\dfrac{1}{x}$

ד. $f_4:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ , $f_4(X)=X\cap\mathbb{Z}$

ה. $f_5:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{Z})$ , $f_5(X)=X\cap\mathbb{Z}$

ו. $f_7:P(\mathbb{R})\to P(\mathbb{R})$ , $f_7(X)=X\Delta\mathbb{Z}$

ז. $f_8:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ , $f_8(n)=\textit{the sum of the digits of } n$

3) יהי $g:A\to B, f:B\to C$ שתי פונקציות ( כמובן שבתנאים אלו $f\circ g:A\to C$ ) הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות ( במקרה של הפרכה בחר $A=B=C=\mathbb{N}$ )

א. אם $f$ חח"ע וגם $g$ חח"ע אז $f\circ g$ חח"ע.

ב. אם $f\circ g$ חח"ע אז $f$ חח"ע.

ג. אם $f\circ g$ חח"ע אז $g$ חח"ע

ד. אם $f$ על וגם $g$ על אז $f\circ g$ על.

ה. אם $f\circ g$ על אז $f$ על.

ו. אם $f\circ g$ על אז $g$ על.

ז. אם $f\circ g$ חח"ע וגם $g$ על אז $f$ חח"ע.

ח. אם $f\circ g$ על וגם $f$ חח"ע אז $g$ על.

ט. אם $f$ לא חח"ע וגם $g$ לא על אז $f\circ g$ לא חח"ע או $f\circ g$ לא על.

4) תהי $A$ קבוצה כלשהי ותהיינה $f,g,h:A\to A$ הוכח או הפרך כ"א מהטענות הבאות.

א. אם $g\circ f=h\circ f$ אז $g=h$.

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם $f$ על אז $g=h$.

ג. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם $f$ חח"ע אז $g=h$.

ד. אם $f\circ g=f\circ h$ אז $g=h$.

ה. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם $f$ חח"ע אז $g=h$.

ו. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם $f$ על אז $g=h$.

5) נתונות פונקציה $f:A\to B$ וקבוצות $C,D\subseteq A$.

א. הוכח כי $f(C\cap D)\subseteq f(C)\cap f(D)$.

ב. הוכח שאם $f$ היא חד-חד-ערכית אז $f(C\cap D)=f(C)\cap f(D)$.

ג. הדגם קבוצות $C,D\subseteq\mathbb{N}$ ופונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש- $f$ על וגם $f(C\cap D)\subset f(C)\cap f(D)$.

ד. הוכח כי $f(C\cup D)=f(C)\cup f(D)$

**6)** תהי $A$ קבוצה ותהי $f:A\to A$ פונקציה הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.

א. אם $f\circ f=f$ אז. $f=I$

ב. אם $f\circ f=f$ אז $f=I$ או ש- $f$ היא פונקציה קבועה.

ג. אם $f\circ f=f$ וגם $f$ חח"ע אז $f=I$

ד. אם $f\circ f=f$ וגם $f$ על אז $f=I$

7) יהיו $f,g,h:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ הפרך כל אחת מהטענות הבאות. ( שאלה קשה מאוד )

א. אם $f\circ g=f\circ h$ וגם $f$ על וגם $g,h$ חח"ע וגם אז $g=h$

ב. אם $g\circ f=h\circ f$ וגם $f$ חח"ע וגם $g,h$ על אז $g=h$.

ג. אם $f\circ f\circ f=I$ אז $f\circ f=I$

ד. אם $f\circ f\circ f=f\circ f$ אז $f\circ f=f$.

8) תהי $A$ קבוצה ו- $B$ תת קבוצה החלקית **ממש** ל- $A$. נתונות הפונקציות $f,g:P(A)\to P(A)$

המוגדרות באופן הבא: $g(X)=X\cap B$ , $f(X)=A-X$ הוכח או הפרך: $g\circ f$ על.

9) הוכח או הפרך את הטענה הבאה: הפונקציה $f;\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ המוגדרת על-ידי

$f((x,y))=(3x+4y,4x+5y)$ היא פונקציה הפיכה.

10) תהי $P_{even}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת קבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן זוגית. ותהי $P_{odd}(\mathbb{N})$ קבוצת כל התת קבוצות של $\mathbb{N}$ שעוצמתן אי זוגית. לדוגמה $\{1,3\}\in P_{even}(\mathbb{N}),\{1,3\}\notin P_{odd}(\mathbb{N})$ ולעומת זאת $\{2,4,6\}\notin P_{even}(\mathbb{N}),\{2,4,6\}\in P_{odd}(\mathbb{N})$. לכל קבוצה $A$ סופית של טבעיים נסמן ב- $\mathbf{max}(A)$ את המספר הגדול ביותר ב- $A$ וב-0 $\mathbf{max}(\varnothing)=0$ הוכיחו כי הפונקציה $f:P_{even}(\mathbb{N})\to P_{odd}(\mathbb{N})$ המוגדרת על ידי $f(A)=A\cup\mathbf{max}(A)$ היא חח"ע אך אינה על.

11) נגדיר פונקציה $F:\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to P\left(\{0,1\}\times\{0,1\}\right)$ באופן הבא:

$F(g)=\{(g(n),g(n+1))|n\in\mathbb{N}\}$ הוכי כי $F$ אינה על.

12) נגדיר פונקציה $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ כך: $h(x)=2x$ הוכח כי $\{f\circ h|f\in\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}\}=\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

13) נגדיר את היחס $R$ מעל $P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $ARB\Leftrightarrow\exists b\in B(\forall a\in A(a<b))$

בנה פונקציה $f:\mathbb{N}\to P(\mathbb{N})$ שמקיימת: $\forall x,y\in\mathbb{N}(x<y\leftrightarrow f(x)Rf(y))$

14) נתונות שלוש פונקציות $f,g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

הוכח כי אם $f\circ g$ חח"ע וגם $g\circ h$ חח"ע וגם $h\circ g\circ f$ על אז $f,g,h$ שלושתן הפיכות.

15) בנה באופן מפורש תת קבוצה של $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ששקולה ל-$\mathbb{N}$

16) נגדיר $F:\mathbb{N}^{\mathbb{R}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{R}|f(x)=1\}$ הוכח כי $F$ אינה חח"ע.

17) נגדיר פ ונקציה $F:\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}\to P(\mathbb{N})$ באופן הבא: $F(f)=\{n\in\mathbb{N}|f(n)=0\}$

קבע האם $F$ חח"ע ועל.

18) תהי $\mathbb{N}$ הטבעיים ותהי $B\subseteq\mathbb{N}$ תת קבוצה סופית לא ריקה נתונה.

דוגמה: עבור $B=\{1,2\}$ מתקיים: $f(\{2,3\})=\{3\},f(\{3,4\})=\{1,2,3,4\}$

א. הוכח כי אם $X\cap B=\varnothing$ אז $f(f(X))=X$.

ב. הוכח כי אם $B\subseteq X$ אז $f(f(X))=X$.

ג. הוכח כי אם $X$ שייכת לתמונה של הפונקציה אז $f(f(X))=X$.

ד. האם הפונקציה חח"ע?

ה. האם הפונקציה על?

ו. מה העוצמה של התמונה של הפונקציה?

# **תרגילים בנושא עוצמות**

1) הוכח את השקילויות הבאות באמצעות פונקציות חח"ע ועל בין הקבוצות. ( פונקציית שקילות. )

א. $\mathbb{N}\sim\mathbb{Z}$ ב. $\mathbb{N}\times\{0,1\}\sim\mathbb{N}$ ג. $(-1,1)\sim\mathbb{R}$ ד. $\mathbb{N}\times[0,1)\sim[0,\infty)$

ה. $[1,3)\cup[4,8]\sim[0,1]$ ו. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\sim\{0,1\}^{\mathbb{N}_{even}}\times\{0,1\}^{\mathbb{N}_{odd}}$ ז. $(0,1]\sim(0,1)$

2) הוכח כי $\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\sim\{(x,y)|x^2+y^2=4\}$

3) הוכח ( ישירות ע"י מציאת פונקציה מתאימה ) כי הקטע $(0,2010)$ שקול ל-$(0,\infty)$ ורישמו עוצמתם.

4) הוכח כי אם $A\sim B$ וגם $C\sim D$ וגם $A\cap C=\varnothing$ וגם $B\cap D=\varnothing$ אז $(A\cup C)\sim(B\cup D)$

5) הוכח כי אם $A\sim B$ , $C\sim D$ אז $A\times C\sim B\times D$

6) הוכח כי $\aleph_0+n=\aleph_0$ כאשר $n\in\mathbb{N}$.

7) הוכח את הטענה הבאה: הקבוצה $A=\mathbb{Q}$ קבוצת המספרי הרציונלים

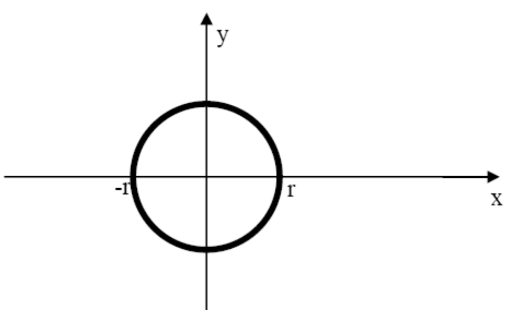
ו- $B=\{f(x)=ax^2+bx+c : a,b,c\in\mathbb{Q}\}$ הן שוות עוצמה.

8) מעגל במישור ברדיוס $r$ ( $r>0$ ממשי ) שמרכזו בראשית הצירים הוא קבוצת כל הנקודות $(x,y)$

במישור המקיימות את המשוואה $x^2+y^2=r^2$ כמודגם נ

הוכיחו שלכל $r>0$ עוצמת מעגל ברדיוס $r$

שמרכזו בראשית הצירים היא $\aleph$




9) הוכח או הפרך: תהיינה $A,B$ שתי קבוצות כלשהן. אם $A\oplus B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ וגם $A\cap B$ היא

קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ אז $A\cup B$ היא קבוצה מעוצמה $\aleph_0$.

10) תהי $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\forall n\in\mathbb{N}\left(x<\frac{1}{n}\right)\wedge\exists n\in\mathbb{N}\left(x>-\frac{1}{n}\right)\right\}$ מה עוצמת $A$?

11) תהי $A=\{(a,b)|a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R},a<b\}$ כלומר $A$ היא קבוצת כל הקטעים הפתוחים ב- $\mathbb{R}$ מהיא

עוצמת $A$?

הוכיחו טענתכם.

12) נסמן ע"י $\mathbb{N}$ את קבוצת המספרים הטבעיים $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ וב- $\mathbb{R}^+$ את הממשיים החיוביים

א. מה העוצמה של הקבוצה: $A_4=\left(a\in\mathbb{R}\,\middle|\,a^4\in\mathbb{N}\right)$ ? למשל $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7}\in A_4$

ב. מה העוצמה של $A=\left(a\in\mathbb{R}^+\,\middle|\,\exists k\in\mathbb{N},a^k\in\mathbb{N}\right)$ ? למשל $1,\sqrt{5},2,\sqrt[4]{7},\sqrt[100]{3},\sqrt[3]{4}\in A$

13) נגדיר $P_2(\mathbb{N})=\{A\subseteq\mathbb{N}\,\|A|=2\}$ כלומר $P_2(\mathbb{N})$ היא קבוצת כל התת קבוצות בנות שני אברים של טבעיים. מהי עוצמת $P_2(\mathbb{N})$ הוכיחו טענתכם.

14) נגדיר יחס $S$ מעל $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ באופן הבא: $(x_1x_2)S(y_1y_2)\Leftrightarrow\lfloor x_1\rfloor=\lfloor y_1\rfloor$. $S$ יחס שקילות.

( אין צורך להוכיח ) הוכח כי קבוצת המנה $(\mathbb{R}\times\mathbb{R})/_S$ היא מעוצמה $\aleph_0$.

15) הוכח או הפרך: לכל קבוצה $A$ מתקיים: $A\times\mathbb{N}\sim A\times(\mathbb{N}-\{1\})$

16) הוכח כי עוצמת הקבוצה $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(n,n+1)=(1,2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup\cdots$ היא $\aleph$.

17) תהי $A$ קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ ויהי $E$ יחס שקילות מעל $A$ הוכח כי $|E|=\aleph_0$

18) הוכח או הפרך את הטענה הבאה: לכל זוג קבוצות $A,B$ מתקיים: $(A\times B)^C\sim(A^C\times B)\cup(A\times B^C)$

19) פונקצית הסינוס $\mathbf{sin}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ היא פונקציה מחזורית בעלת מחזור של $2\pi$. כלומר $\mathbf{sin}(x+2\pi)=\mathbf{sin}(x)$

לכל $x\in\mathbb{R}$. עבור $0\le x\le 2\pi$ מתקיים: $\mathbf{sin}\,x=0\Leftrightarrow x\in\{0,\pi,2\pi\}$

מצא את עוצמת הקבוצה $0_{\mathbf{sin}}=\{x\in\mathbb{R}\,|\,\mathbf{sin}\,x=0\}$ הוכח טענותיך.

20) האם קיימת קבוצה $A$ כך ש- $|P(A)|=\aleph_0$? הוכח טענותיך.

21) תהיינה $k_1,k_2$ עוצמות ויהיו $A,B$ קבוצות כך ש- $|A|=k_1,|B|=k_2$. נגדיר פעולת הפרש בין עוצמות באופן הבא: $k_1-k_2=|A-B|$. פעולה זו אינה מוגדרת היטב, כלומר תוצאות של ההפרש משתנות בהתאם לקבוצה ולא בהתאם למחלקה. הציגו 2 דוגמאות לקבוצות שעוצמתן $\aleph_0$ אך עוצמת ההפרש שונה בכל אחת מהדוגמאות.

# תרגילים ביחסים

1) ( חימום ) רשום במפורש את היחסים כקבוצה של זוגות סדורים.

א. היחס $R$ המוגדר מעל $A$ באופן הבא: $aRb \Leftrightarrow b > a+3$ כאשר:

$(i)$ $A=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ $(ii)$ $A=\{3,5,19,103\}$ $(ii)$ $A=\{5,6,7\}$

2) נתונים שני היחסים הבאים מעל $A=\{1,2,3\}$

$R_2\{(1,2),(2,2),(2,3)(2,1)\}$ $R_1=\{(1,2),(2,1),(2,3)\}$

עבור כל אחד מארבעת היחסים $R_1\cup R_2$ , $R_1\cap R_2$ , $R_2$ , $R_1$ קבע האם הוא רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי.

( במקרה של הפרכה הבא דוגמה מתאימה )

3) לגבי כל אחד מהיחסים הבאים, רשום שלושה זוגות שנמצאים ביחס, ונמק מדוע הם ביחס. כתוב שלושה זוגות שאינם ביחס, ונמק מדוע אינם ביחס. כמו כן קבע האם היחס הוא רפלקסיבי, אנטי רפלקסיבי, סימטרי, א"ס חלש, א"ס חזק, וטרנזיטיבי.

א) יחס @ מעל $\mathbb{R}$ המוגדר באופן הבא: $@ \ni (x,y) \Leftrightarrow |x-y| \le 100$.

ב) יחס ♣ מעל $\mathbb{Z}$ המוגדר באופן הבא: $♣ \ni (x,y) \Leftrightarrow 3|x-y$.

ג) היחס $\subseteq$ מעל $P(\mathbb{N})$ המוגדר באופן הבא: $\subseteq \ni (A,B) \Leftrightarrow A\subseteq B$.

ד) היחס שרגא מעל $\mathbb{R}$ המוגדר באופן הבא: שרגא $\ni (x,y) \Leftrightarrow x+y \ge x\cdot y$

ה) יחס $T$ מעל $\mathbb{Z}$ המוגדר באופן הבא: $(x,y)\in T \Leftrightarrow x^2+y \ge 1$

4) מצא אלו מהתכונות: רפלקסיביות, אנטי רפלקסיביות, סימטריות, אנטי סימטריות חלשה, אנטי סימטריות חזקה וטרנזיטיביות מקיים כל אחד מהיחסים הבאים. מעל הקבוצות $\mathbb{Z}$ , $\mathbb{N}$ , $A=\{3,5,7,9\}$

א. $xRy \Leftrightarrow \exists m\in \mathbb{Z}_{odd}\ \ x=my$

ב. $xsy \Leftrightarrow \exists m\in \mathbb{Z}_{evevn}\ \ x=my$

ג. $xRy \Leftrightarrow \exists m\in \mathbb{Z}_{odd}\ (x=my \vee y=mx)$

5) תהי $A$ קבוצה ו-$R$ יחס מעל $A$ הוכח או הפרך כל אחת מהטענות הבאות.
בכל המקרים בהם בחרת להפריך תן דוגמה נגדית מינימלית. בדוק האם יש בדוגמתך פרטים מיותרים והסר אותם.

א. אם $R$ סימטרי אז $R$ טרנזיטיבי.

ב. אם $R$ אנטי סימטרי חלש אז $R$ טרנזיטיבי.

ג. אם $R$ סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש אז $R$ טרנזיטיבי.

ד. אם $R$ סימטרי וגם אנטי סימטרי חלש אז $\mathbf{R=\varnothing}$.

ה. אם $R$ סימטרי וגם אנטי סימטרי חזק אז $\mathbf{R=\varnothing}$.

ו. אם $R$ טרנזיטיבי וסימטרי אז $R$ רפלקסיבי.

ז. אם $R$ טרנזיטיבי ואנטי רפלקסיבי אז $R$ אנטי סימטרי חזק.

ח. אם $R$ טרנזיטיבי ולא סימטרי אז $R$ אנטי סימטרי חלש.

6) תהי $A$ קבוצה ויהיו $R,S$ יחסים מעל $A$ הוכח או הפרך את הטענות הבאות ( הפרכה = דוגמה מינימלית )

א. אם $R,S$ רפלקסיבים אז $R\cap S$ רפלקסיבי.

ב. אם $R,S$ רפלקסיבים אז $R\cup S$ רפלקסיבי.

ג. אם $R,S$ סימטרים אז $R\cap S$ סימטרי.

ד. אם $R,S$ סימטרים אז $R\cup S$ סימטרי.

ה. אם $R,S$ טרנזיטיבים אז $R\cap S$ טרנזיטיבי.

ו. אם $R,S$ טרנזיטיבים אז $R\cup S$ טרנזיטיבי.

ז. אם $R,S$ יחסי שקילות אז $R\cap S$ יחס שקילות.

ח. אם $R,S$ יחסי שקילות אז $R\cup S$ יחס שקילות.

ט. אם $R,S$ אנטי סימטרים חלש אז $R\cap S$ אנטי סימטרי חלש.

י. אם $R,S$ אנטי סימטרים חלש אז $R\cup S$ אנטי סימטרי חלש.

7) יהי $R$ יחס סדר חלש מעל $A$ ויהי $S$ יחס סדר חלש מעל $B$. הוכח כי אם $A\cap B=\varnothing$ אז $R\cup S$ יחס סדר חלש מעל $A\cup B$.

8) הוכח כי היחס $R$ המוגדר מעל הקבוצה $A=\left\{2^k \middle| k\in\mathbb{N}\right\}$ ע"י $aRb \Leftrightarrow a|b$ הוא יחס סדר מלא.

9) נגדיר יחס $\boldsymbol{R}$ מעל הקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ באופן הבא: $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{R}(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{a} \le \boldsymbol{c} \wedge \boldsymbol{b} \le \boldsymbol{d})$

א. הוכח כי $\boldsymbol{R}$ יחס סדר חלש שאינו מלא.

ב. מצא תת קבוצה אינסופית של $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ שעליה היחס $\boldsymbol{R}$ הוא מלא.

10) תהי $\boldsymbol{A}=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ קבוצתכל הזוגות הסדורים של המספרים הטבעיים.

ויהי $R\subseteq A^2$ יחס המוגדר על ידי: $(m_1,n_1)R(m_2,n_2) \Leftrightarrow m_1-m_2=n_1-n_2$

א. הוכח כי $R$ הינו יחס שקילות ב-$A$.

ב. תארו באופן גרפי את מחלקות השקילות הבאות. $[(1,1)]_R\ ,[(1,2)]_R\ ,[(2,1)]_R$

11) יהי $\boldsymbol{R}$ יחס סימטרי וטרזיטיבי מעל $\boldsymbol{A}$ כך ש: $\forall \boldsymbol{a}\in \boldsymbol{A}\,\exists \boldsymbol{b}\in \boldsymbol{A}\ \ \boldsymbol{aRb}$ הוכח כי $\boldsymbol{R}$ רפלקסיבי.

12) נתון היחס $\boldsymbol{R}$ מעל $\mathbb{N}$. $\boldsymbol{xRy} \leftrightarrow (\boldsymbol{6}\,|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \vee (\boldsymbol{3}\nmid \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y})$ ( אין צורך להוכיח כי $\boldsymbol{R}$ יחס שקילות )

מצא את מחלקות השקילות ואת קבוצת המנה.

13) נגדיר יחס בינארי $E$ מעל $\mathbb{Z}-\{0,1\}$ ( קבוצת השלמים ללא 0 ו-1 ) באופן הבא: $aEb \Leftrightarrow ab\ge -1$ הוכח כי $E$ יחס שקילות ותן תיאור מפורש של מחלקות השקילות שלו.

14) תהי $S$ קבוצה שאבריה הן קבוצות מגדירים יחס בינארי $E$ מעל $S$ באופן הבא: $(A\subseteq B \wedge B\subseteq A) \Leftrightarrow AEB$

הוכיחו או הפריכו: $E$ יחס שקילות.

15) יחס $R$ מעל $A$ נקרא סוגר משולשים אם לכל $a,b,c\in A$ מתקיים: $(aRb \wedge bRc) \rightarrow cRa$

א. הוכח כי יחס רפלקסיסי וסוגר משולשים הוא יחס שקילות.

ב. הוכח כי אם $R$ סימטרי, סוגר משולשים ואינו ריק אז $R$ אינו אנטי רפלקסיבי.

16) נגדיר יחס סדר ( חלש ) $S$ מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow \neg\left(\left(\lfloor x\rfloor=\lfloor y\rfloor \rightarrow y<x\right)\right)$

אין צורך להוכיח שמדובר ביחס סדר. כתוב במפורש את כל האיברים המינימלים של $S$.

תזכורת $x\in A$ נקרא מינימלי ביחס סדר $R$ אם $\forall y\in A\left((y\ne x)\rightarrow \neg(yRx)\right)$

17) נגדיר יחס שקילות $S$ מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xSy \Leftrightarrow (x=y=0)\vee(xy>0)$

נגדיר יחס שקילות $T$ מעל $\mathbb{R}$ באופן הבא: $xTy \Leftrightarrow (x^2-9)S(y^2-9)$

אין צורך להוכיח כי מדובר ביחסי שקילות. כתוב במפורש את קבוצת המנה $\mathbb{R}/T$ ונמק בקצרה.

(18) נגדיר יחס בינארי $D$ מעל הקבוצה $\mathbb{R}^2=\{(a,b)|a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}\}$

באופן הבא: $(a_1,b_1)D(a_2,b_2)\Leftrightarrow(a_1\ge a_2)\wedge(a_1+b_1\ge a_2+b_2)$

הוכח כי $D$ יחס סדר חלש שאינו מלא.

(19) רשום במפורש את כל יחסי השקילות $E$ מעל $S=\{a,b,c,d\}$ המקיימים $\left|S/E\right|=2$ וכל מחלקות השקילות הן שוות עוצמה. יש להציג כל יחס כתת קבוצה מפורשת של $S\times S$.

(20) יהיו $R,S$ יחסי שקילות מעל $A$. הוכח כי $R\Delta S$ לא יחס שקילות מעל $A$.

(21) הוכח או הפרך: לכל קבוצה $A$ ולכל יחס רפלקסיבי $R$ מעל $A$ קיימות קבוצות $B,C\subseteq A$ כך ש- $R=B\times C$

(22) יהי $S$ יחס אנטי רפלקסיבי וטרנזיטיבי מעל קבוצה $A$. ונניח ש'יים $y\in A$

עבורו מתקיים: $\forall x\in A(x,y)\in S$ הוכח כי לכל $z\in A$ מתקיים: $(y,z)\notin S$

(23) יהי $S$ יחס המוגדר מעל $P(\mathbb{N})$ קבוצת החזקה של $\mathbb{N}$ באופן הבא: $\mathbf{min}\,A=\mathbf{min}\,B\Leftrightarrow ASB$

כאשר $\mathbf{min}\,A$ הוא המספר הקטן ביותר ב- $A$.

א. הוכח כי $S$ הינו יחס שקילות.

ב. נסמן ב- $K$ את קבוצת מחלקות השקילות של היחס $S$.

בנה פונקציה $F:K\to\mathbb{N}$ חח"ע ועל.

פונקציות ויחסים משולב

24) תהיינה $A,B$ שתי קבוצות לא ריקות ויהיו $<_A,<_B$ שני יחסי סדר חזקים ומלאים ( משווים ) מעל $A,B$ בהתאמה. ותהי $f:A\to B$ פונקציה המקיימת אם $a_1<_A a_2$ אז $f\left(a_1\right)<_B f\left(a_2\right)$. הוכח כי $f$ חח"ע אך אינה בהכרח על.

25) יחס $T$ מעל $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ מוגדר באופן הבא: $fTg\leftrightarrow f\circ g=g\circ f$ הוכח או הפרך: $T$ יחס שקילות

26) תהי $J$ קבוצת כל היחסים מעל $A$ ו-$E$ קבוצת כל יחסי השקילות מעל $A$.

נגדיר פונקציה $F:J\times E\to J$ באופן הבא: $F\left(R,S\right)=R\cap S$. הוכח כי $F$ על.

27) נגדיר יחס $S$ על הקבוצה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ באופן הבא: $\left(x_1,x_2\right)S\left(y_1,y_2\right)\Leftrightarrow x_1^2-x_2=y_1^2-y_2$

$S$ יחס שקילות. ( אין צורך להוכיח. ) הוכח כי קבוצת המנה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}/_S$ שוות עוצמה לקבוצה $\mathbb{R}$

28) תהי $F:A\to A$ פונקציה. נגדיר יחס $R$ מעל $A$ באופן הבא: $aRb\Leftrightarrow f\left(a\right)=b$ נתון ש-$R$ סימטרי וטרנזיטיבי. הוכח כי $F$ היא פונקצית הזהות.

29) תהי $A$ קבוצה לא ריקה ותהי $A^A$ קבוצת כל הפונקציות מ-$A$ ל-$A$. מגדירים יחס $E$ מעל $A^A$ באופן הבא:

לכל $f,g\in A^A$ $fEg$ אם ורק אם קיימת $h\in A^A$ הפיכה כך ש-$f=h\circ g$.

א. הוכח כי $E$ יחס שקילות.

ב. הי $c\in A$ כלשהוא. תהי $f_c:A\to A$ הפונקציה הקבועה המוגדרת ע"י $f_c\left(x\right)=c$ $\forall x\in A$ תאר את מחלקת השקילות של $f_c$ ביחס ל-$E$ ( תן תאור מפורש ככל הניתן. ) נמק טענותיך.

30) יהי היחס $T$ המוגדר מעל הקבוצה $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ באופן הבא: $fTg\Leftrightarrow$ קיים $x\in\mathbb{R}$ כך ש-$f\left(x\right)=g\left(x\right)$

האם $T$ יחס שקילות?

31) תהי $A$ קבוצה סופית ותהי $B$ תת קבוצה של $A$. נסמן ב-$F$ את קבוצת כל הפונקציות מ-$A$ ל-$\left\{0,1\right\}$.

נגדיר יחס $E$ מעל $F$ באופן הבא: $F=\left\{\left(f,g\right)\middle|B\subseteq\left\{x\middle|f\left(x\right)g\left(x\right)\right\}\right\}$

א. בהנתן $A=\left\{1,2,3\right\}$ ו-$B=\left\{1,2\right\}$ תנו דוגמא ל-$f,g,h\in F$ שונות כך ש-$\left(f,g\right)\in E,\left(f,h\right)\notin E$.

ב. הוכיחו כי $E$ יחס שקילות.

ג. מה עוצמת קבוצת המנה $F/E$? נמקו תשובתכם.