תוכן העניינים:

חשבון דיפרנציאלי

בעיות קיצון

בעיות קיצון עם מספרים:

סיכום כללי:

בעיית קיצון (בעיית מקסימום ומינימום):

בעיות קיצון הן בעיות מילוליות שבהן יש למצוא ערך קיצון (מקסימלי או מינימלי) המקיים את תנאי השאלה. כדי לבצע זאת נחבר פונקציה שמתארת את מה שיש למצוא בשאלה. לאחר מכן נמצא את ערך הקיצון הרצוי של הפונקציה באמצעות כלים של חשבון דיפרנציאלי. נאמת כי אכן הערך שמצאנו עונה על צורכי השאלה ובכך נקבל את התשובה המבוקשת.

סיכום שלבי עבודה:

1) הגדרה משתנה או משתנים בהתאם לשאלה.
2) כתיבת פונקציה המתאימה לתיאור השאלה.
3) מציאת ערך הקיצון של הפונקציה ואימות של סוג הקיצון.
4) כתיבת תשובה סופית בהתאם לשאלה.

שאלות:

בעיות עם פונקציות פולינומיות:

1) נתונים שני מספרים שאחד מהם גדול ב-8 מהשני.
מצא את שני המספרים שמכפלתם מינימלית.

2) מהי התוצאה הגדולה ביותר שאפשר לקבל אם מחסרים ממספר את ריבועו?

3) x ו- y הם שני מספרים המקיימים: $x+y=20$.

א. הבע את y באמצעות x.

ב. הבע את המכפלה $x\cdot y$ באמצעות x.

ג. מצא את שני המספרים שמכפלתם היא מקסימלית.

4) הסכום של שני מספרים הוא 14.

א. מצא מה צריכים להיות שני המספרים כדי שסכום הריבועים שלהם יהיה מינימלי.

ב. מצא את סכום הריבועים המינימלי של שני המספרים.

5) הסכום של שלושה מספרים חיוביים הוא 36.
המספר השני גדול פי 2 מהמספר הראשון.

א. סמן ב- x את המספר הראשון והבע באמצעותו את המספר השלישי.

ב. מצא את הערך של x שעבורו מכפלת שלושת המספרים תהיה מקסימלית.

בעיות עם פונקציות רציונאליות:

6) מבין כל המספרים החיוביים x ו- y המקיימים: $x\cdot y=9$, מצא את שני המספרים שעבורם הסכום $x+y$ הוא מינימלי.

7) נתון מספר x חיובי. מחברים את המספר x עם ההופכי לו.
מה יהיה המספר x עבורו הסכום הנ"ל יהיה מינימלי?

8) נתונים שני מספרים חיוביים x ו- y שמכפלתם היא 200.

א. הבע את הסכום: $x+2y$ באמצעות x בלבד.

ב. מצא את שני המספרים עבורם הסכום $x+2y$ הוא מינימלי.

בעיות עם פונקציות עם שורשים:

9) מצא מספר חיובי שאם נכפיל אותו פי 2 ונחסר מהתוצאה את השורש הריבועי של המספר, נקבל הפרש מינימלי. מה הוא הפרש זה?

10) נתונים שני מספרים: $2\sqrt{x}$ ו- $-x$.

א. מצא את x עבורו סכום שני המספרים הנתונים הוא מקסימלי.

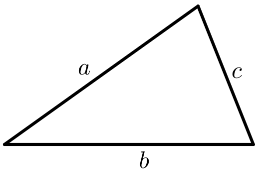
ב. מצא את סכום שני המספרים הנתונים עבור הערך של x שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות:

1) 4 ו-4-.
2) 0.25.
3) א. $y=20-x$ ב. $M=20x-x^2$ ג. 10, 10.
4) א. 7, 7. ב. 98.
5) א. x , $2x$, $36-3x$ ב. $x=8$. המספרים: 8, 16, 12.
6) 3, 3.
7) $x=1$.
8) א. $S=x+\frac{400}{x}$ ב. 10 ו-20.
9) המספר: $\frac{1}{16}$. ההפרש: $-\frac{1}{8}$.
10) א. $x=1$ ב. 1-, 2.

בעיות קיצון בהנדסת המישור:

סיכום כללי:



חזרה כללית על נוסחאות בהנדסת המישור:

היקף משולש - סכום כל צלעות המשולש: $P=a+b+c$.

שטח של משולש - יחושב ע"י מחצית ממכפלת צלע בגובה שלה: $S=\frac{b\cdot h}{2}$.

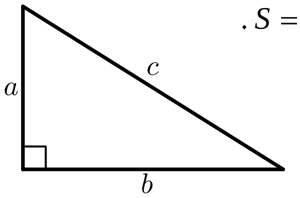
הערות כלליות:

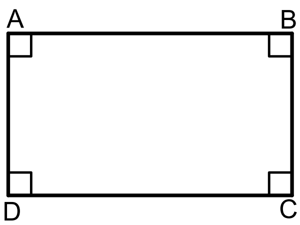
1) כאשר נתון משולש לפי הקודקודים שלו, נכתוב את ההיקף כך: $P_{\text{ABC}}=\text{AB}+\text{BC}+\text{AC}$.
היחידות של היקף הן אורך (כלומר: ס"מ, מ' וכו').

2) כאשר נתון משולש לפי הקודקודים שלו, נכתוב את השטח כך: $S_{\text{ABC}}=\frac{\text{AB}\cdot h}{2}$.
היחידות של שטח הן סמ"ר, מ"ר, וכו'.

שטח של משולש ישר זווית:

שטח של משולש ישר זווית שווה למחצית ממכפלת הניצבים: $S=\frac{a\cdot b}{2}$.





היקף מלבן: $P_{\text{ABCD}}=\text{AB}+\text{BC}+\text{CD}+\text{AD}=2\left(\text{AB}+\text{BC}\right)$

שטח מלבן: $S_{\text{ABCD}}=\text{AB}\cdot\text{BC}\quad\Rightarrow\quad S=a\cdot b$.

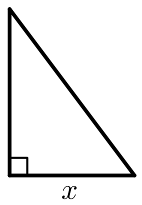
שאלות:

בעיות עם פונקציות פולינומיות:

1) באיור שלפניך נתון משולש ישר זווית שבו סכום אורכי הניצבים הוא 12 ס"מ.
מסמנים ב- x את אורכו של אחד מהניצבים.

א. (1) הבע באמצעות x את אורכו של הניצב השני.
(2) הבע באמצעות x את שטח המשולש.

ב. מצא את x עבורו שטח המשולש הוא מקסימלי.

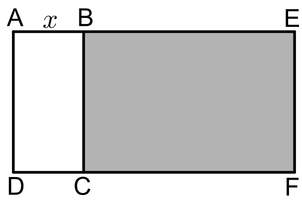


2) נתון מלבן ABCD שהיקפו הוא 72 ס"מ.
נסמן ב- x את אורך הצלע AB.

א. הבע באמצעות x את אורך הצלע BC.

על הצלע BC בנו מלבן נוסף BEFC
(המלבן האפור בציור).
אורך הצלע BE גדולה פי 3 מאורך הצלע AB.

ב. (1) הבע באמצעות x את שטח המלבן BEFC.
(2) מצא עבור איזה ערך של x שטח המלבן BEFC הוא מקסימלי.

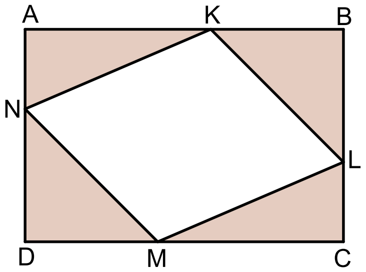


3) במלבן ABCD נתון: 12 ס"מ = AB = DC, 8 ס"מ = AD = BC.
על צלעות המלבן הקצו קטעים שווים: $BK = BL = DM = DN = x$
ונוצרו ארבעה משולשים ששטחם צבוע באיור.

א. הבע באמצעות x את כל השטח הצבוע באיור.

ב. מה צריך להיות ערכו של x כדי שהשטח הצבוע יהיה מינימלי?

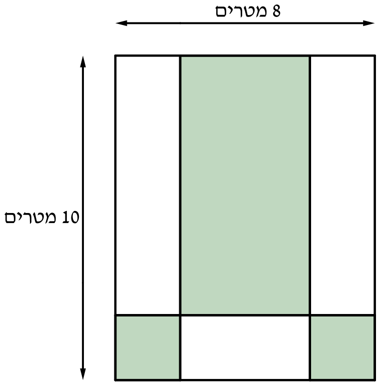
ג. חשב את שטח המרובע KLMN כאשר השטח הצבוע הוא מינימלי.



4) נתונה מדשאה מלבנית שמידותיה הן 10 מטרים ו-8 מטרים.
רוצים להקצות שטח המיועד לשתילי תבלינים המורכב משני ריבועים זהים ומלבן כמתואר בציור (השטח הירוק).
מסמנים ב- x את אורך הצלע של הריבועים.

א. הבע באמצעות x את כל השטח המיועד לשתילי התבלינים.

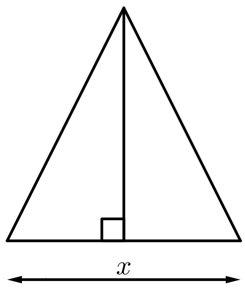
ב. מה צריך להיות x עבורו השטח המיועד לשתילי התבלינים יהיה מינימלי?



ג. בהנחה ש-1 מ״ר של שתילי תבלינים עולה 50 ₪,
מה יהיה המחיר המינימלי של שתילי התבלינים?

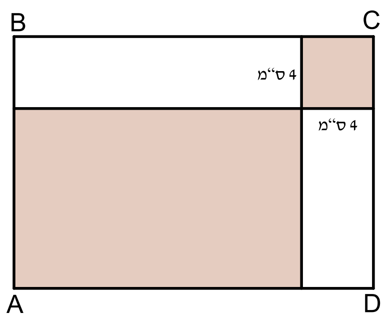
בעיות עם פונקציות רציונאליות:

5) בציור הבא מתואר משולש שווה שוקיים ששטחו הוא 18 סמ״ר.
נסמן ב- x את אורך בסיס המשולש.



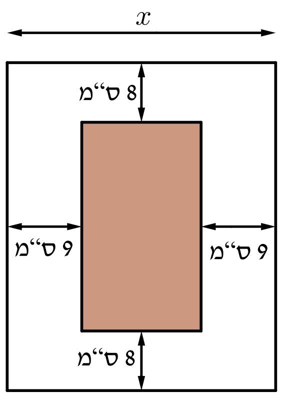
א. הבע באמצעות x את אורך הגובה לבסיס.
ב. מצא את אורך הבסיס כך שסכום האורכים של הבסיס ושל הגובה לבסיס יהיה מינימלי.

6) שטחו של מלבן ABCD הוא 144 סמ״ר.
בקצהו הימני העליון של המלבן בונים ריבוע שאורך צלעו הוא 4 ס״מ.
נסמן ב- x את אורך הצלע BC.



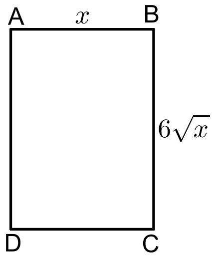
א. הבע באמצעות x את אורך הצלע AB.
ב. הבע באמצעות x את סכום שטחי המלבנים המסומנים באיור.
ג. מצא את מימדי המלבן ABCD עבורו סכום השטחים המסומנים יהיה מקסימלי.

7) שטחו של עמוד בחוברת פרסום למוצרי טקסטיל צריך להיות 800 סמ״ר.
סמן ב- x את רוחב העמוד וענה על סעיפים הבאים:



א. הבע באמצעות x את אורך העמוד.
רוחב השוליים בראש העמוד ובתחתיתו צריך להיות 8 ס״מ, ורוחב השוליים בצדדים צריך להיות 9 ס״מ (ראה איור).
ב. (1) הבע באמצעות x את השטח המיועד לדפוס (השטח המסומן באיור).
(2) מצא מה צריך להיות x על מנת שהשטח המיועד לדפוס יהיה מקסימלי.

בעיות עם פונקציות עם שורשים:



8) לפניך מלבן ABCD שבו אורך הצלע AB מסומנת ב- x
ואורך הצלע BC היא $6\sqrt{x}$.
א. מצא את x שעבורו ההפרש בין BC ל-AB הוא מקסימלי.
ב. חשב את שטח המלבן עבור ערך ה- x שמצאת בסעיף א.

תשובות סופיות:

1) א. (1) $12-x$ ס"מ א. (2) $S=6x-\frac{x^2}{2}$ ב. $x=6$.

2) א. $BC=AD=36-x$ ב. (1) $S_{BEFC}=108x-3x^2$ ב. (2) $x=18$.

3) א. $S=2x^2-20x+96$ ב. $x=5$ ג. $S_{KLMN}=$ 50 סמ"ר.

4) א. $S=4x^2-28x+80$ ב. $x=$ 3.5 מטר ג. 1550 ש"ח.

5) א. $h=\frac{36}{x}$ ב. $x=$ 6 ס"מ.

6) א. $AB=\frac{144}{x}$ ב. $S=-4x-\frac{576}{x}+176$ ג. 12 ס"מ $\times$ 12 ס"מ.

7) א. $L=\frac{800}{x}$ ב. (1) $S=-16x-\frac{14400}{x}+1088$ ב. (2) $x=30$.

8) א. $x=9$ ב. $S_{ABCD}=$ 162 יח"ש.

בעיות קיצון בפונקציות וגרפים:

סיכום כללי:

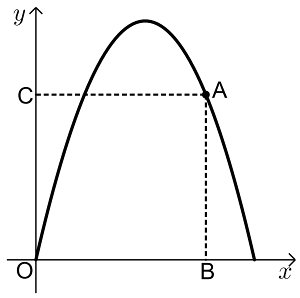
ביטוי נקודה כללית:

כדי לבטא נקודה כללית הנמצאת על גרף פונקציה $f(x)$ נכתוב את שיעוריה: $(x, f(x))$.
כלומר, שיעור ה- x הוא x ושיעור ה- y הוא הביטוי האלגברי של הפונקציה עצמה.

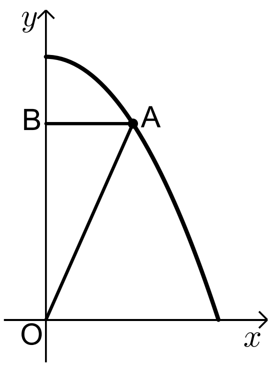
מכאן נוכל לבטא גדלים שונים כגון שטח, היקף ואורכי קטעים באמצעות שיעורי הנקודה המבוקשת.

שאלות:

בעיות עם פונקציות פולינומיות:



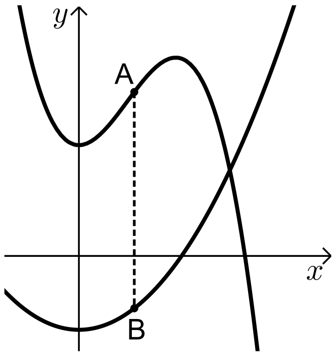
1) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)=-x^2+9x$.
מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABOC.
נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A.
א. (1) הבע באמצעות x את שיעורי הנקודה A.
(2) הבע באמצעות x את היקף המלבן ABOC.
ב. מצא את שיעורי הנקודה A עבורם היקף המלבן ABOC הוא מקסימלי.



2) נתון גרף הפונקציה: $f(x)=27-x^2$ ברביע הראשון.
ישר המקביל לציר ה- x חותך את גרף הפונקציה בנקודה A שנמצאת ברביע הראשון, ואת ציר ה- y בנקודה B.
מחברים את הנקודה A עם ראשית הצירים O.
א. מה צריך להיות שיעור ה- x של הנקודה A כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?
ב. מהו השטח המקסימלי של המשולש AOB?

3) בסרטוט שלפניך מתוארים הגרפים של הפונקציות:

$f(x)=-2x^3+4x^2+3$ ו- $g(x)=x^2-2$



הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$

והנקודה B נמצאת על גרף הפונקציה $g(x)$.

הקטע AB מקביל לציר ה- y.

שיעור ה- x של הנקודות A ו-B הוא חיובי.

הנקודה A נמצאת מעל הנקודה B, כמתואר בסרטוט.

נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודות A ו-B.

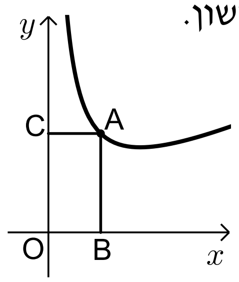
א. הבע באמצעות x את אורך הקטע AB.

ב. מצא את הערך של x שבעבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

ג. עבור הערך של x שמצאת בסעיף ב', מצא את המרחק של הנקודה B מציר ה- x.

בעיות עם פונקציות רציונאליות:

4) הנקודה A נמצאת על גרף הפונקציה: $f(x)=\frac{8}{x}+x$ ברביע הראשון.



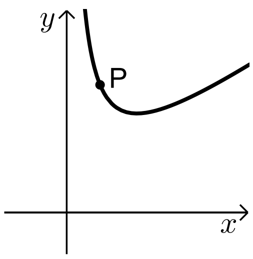
מורידים אנכים לצירים כך שנוצר המלבן ABOC

(O - ראשית הצירים).

א. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A על מנת שהיקף המלבן ABOC יהיה מינימלי.

ב. מה יהיה היקף המלבן המינימלי?

5) נתונה הפונקציה: $y=x+\frac{1}{2x}$ בתחום $x>0$ (ראה סרטוט).



הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה.

א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה P עבורו סכום השיעורים של הנקודה P הוא מינימלי.

ב. מצא את הסכום המינימלי של שיעורי הנקודה P.

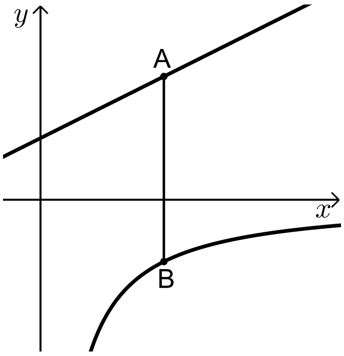
6) ישר המקביל לציר ה- y חותך את הפונקציה $y=\frac{1}{2}x+2$

בנקודה A ואת הפונקציה $y=-\frac{8}{x}$ בנקודה B

(הנקודות A ו-B נמצאות מימין לציר ה- y).

א. מהו אורכו המינימלי של הקטע AB הנוצר באופן זה?

ב. האם אורך הקטע AB יכול להיות 5? נמק.



בעיות עם פונקציות עם שורשים:

7) נתונה הפונקציה: $f(x)=7-2\sqrt{x}$.

מן הנקודה A הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ ברביע הראשון,

לצירים כך שנוצר המלבן ABOC כמתואר באיור

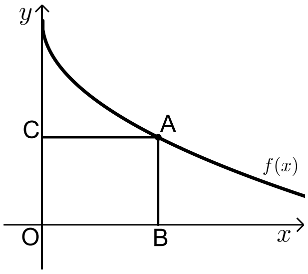
(הנקודה O היא ראשית הצירים).

נסמן ב- x את שיעור ה- x של הנקודה A.

א. (1) הבע באמצעות x את היקף המלבן ABOC.

(2) מצא את שיעור ה- x של הנקודה A עבורו היקף המלבן ABOC הוא מינימלי.

ב. עבור שיעור ה- x שמצאת בתת-סעיף א (2), מה הוא היקף המלבן ABOC?



8) באיור שלפניך מתוארים שני גרפים שמשוואותיהם:

$\text{I.}\ \ y=4\sqrt{x}$. $\qquad \text{II.}\ \ y=\frac{1}{2}x$

הנקודה A נמצאת על גרף I והנקודה B נמצאת על גרף II

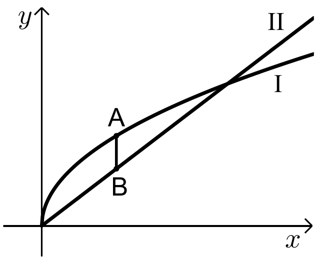
כך שהקטע AB מקביל לציר ה- y.

הנקודות A ו-B נמצאות בין נקודות החיתוך של הגרפים

כמתואר באיור.

א. מצא את שיעור ה- x של הנקודה A עבורו אורך הקטע AB הוא מקסימלי.

ב. חשב את האורך המקסימלי של הקטע AB.



תשובות סופיות:

1) א. (1) $A\left(x,-x^2+9x\right)$ א. (2) $P_{ABOC}=-2x^2+20x$ ב. $A\left(5,20\right)$

2) א. $x_A=3$ ב. $S=$ 27 יח״ש.

3) א. $AB=-2x^3+3x^2+5$ ב. $x=1$ ג. $d=1$.

4) א. $A\left(2,6\right)$ ב. 16 יח״א.

5) א. $x=\frac{1}{2}$ ב. $S=2$.

6) א. 6 יח״א.   ב. לא, כי האורך המינימלי שחושב הוא 6 יח״א.

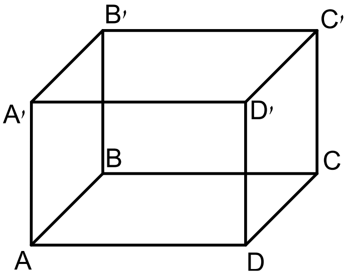
7) א. (1) $P_{ABOC}=2x-4\sqrt{x}+14$ א. (2) $x=1$ ב. 12 יח״א.

8) א. $x=16$ ב. AB = 8 יח״א.

בעיות קיצון בהנדסת המרחב:

סיכום כללי:

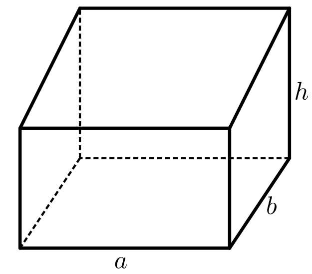
נוסחאות בתיבה:



שטח מעטפת: $M = 2\left(S_{AA'B'B} + S_{AA'D'D}\right)$.

שטח פנים: $P = 2\left(S_{AA'B'B} + S_{AA'D'D} + S_{ABCD}\right)$.

נפח תיבה: $V = AD \cdot AB \cdot AA'$.



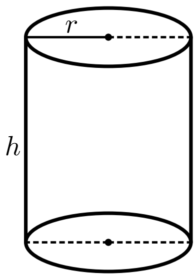
נסמן את מידות התיבה:

a - אורך, b - רוחב, h - גובה, ונקבל:

$$M = 2\left(ah + bh\right) = 2ah + 2bh$$
$$P = 2\left(ah + bh + ab\right) = 2ah + 2bh + 2ab$$
$$V = abh$$

מידות בגליל:

הגדרה - צורה המורכבת משני עיגולים הנמצאים אחד מעל השני במרחב.



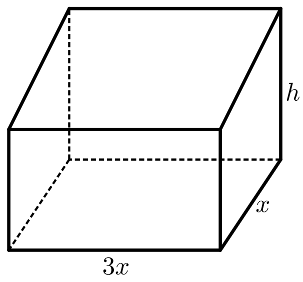
שטח המעטפת של גליל: $M = 2\pi rh$.

שטח הפנים של גליל: $P = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r\left(h + r\right)$.

נפח גליל: $V = \pi r^2 h$.

שאלות:

בעיות עם פונקציות פולינומיות:

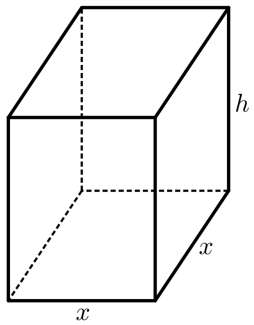


1) בונים תיבה שגובהה h מטרים.
בסיס התיבה הוא מלבן שמקצוע אחד בו ארוך פי 3 מהמקצוע השני.
מסמנים ב- x את אורכו של מקצוע הבסיס הקטן.
נתון: $x+h=18$.

א. הבע את h באמצעות x.

ב. הבע באמצעות x את נפח התיבה.

ג. מצא את x עבורו נפח התיבה הוא מקסימלי.

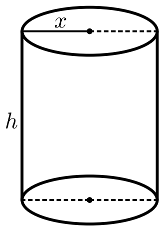


2) נתונה תיבה שגובהה h ובסיסה ריבוע שצלעו x מטרים.
נתון כי: $2x+h=60$.

א. הבע את h באמצעות x.

ב. הבע באמצעות x את שטח הפנים של התיבה.

ג. מצא את מידות התיבה עם שטח הפנים המקסימלי.



3) נתון גליל שרדיוס בסיסו הוא x ס"מ וגובהו h ס"מ.
נתון כי: $3x+h=72$.

א. הבע את h באמצעות x.

ב. הבע באמצעות x את שטח המעטפת של הגליל.

ג. מצא מה צריך להיות רדיוס הבסיס כדי ששטח המעטפת של הגליל יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות:

1)	א. $h=18-x$	ב. $V=54x^2-3x^3$	ג. $x=12$.
2)	א. $h=60-2x$	ב. $P=240x-6x^2$	ג. $20\times20\times20$.
3)	א. $h=72-3x$	ב. $M=144\pi x-6\pi x^2$	ג. 12 ס"מ.