

תוכן העניינים:

2 **חשבון דיפרנציאלי**

2 **פונקציות היפרבוליות**

2..... הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות :

2..... סיכום כללי :

3..... שאלות :

3..... תשובות סופיות :

4..... **זהויות של פונקציות היפרבוליות** :

4..... סיכום כללי :

4..... שאלות :

5..... **נגזרות של פונקציות היפרבוליות** :

5..... סיכום כללי :

5..... שאלות :

5..... תשובות סופיות :

6..... **הפונקציות ההיפרבוליות ההפוכות** :

6..... סיכום כללי :

6..... שאלות :

7..... **נגזרות של פונקציות היפרבוליות הפוכות** :

7..... סיכום כללי :

7..... שאלות :

7..... תשובות סופיות :

חשבון דיפרנציאלי

פונקציות היפרבוליות

הגדרת הפונקציות ההיפרבוליות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הפונקציות ההיפרבוליות הן:

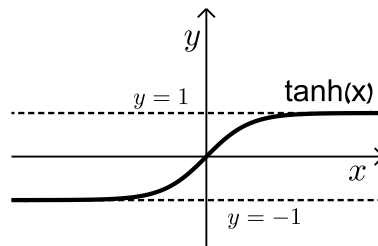
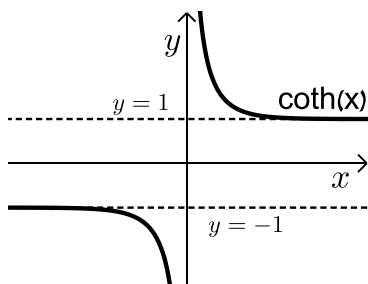
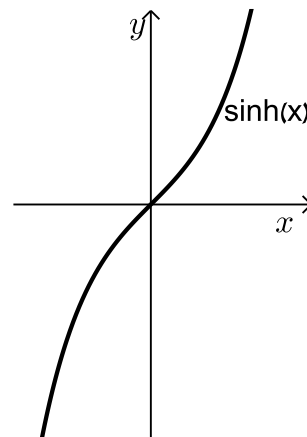
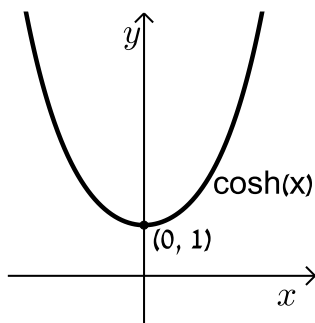
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

תיאורים גרפיים:



שאלות:

(1) חשב את ערכה של הפונקציה ההיפרבולית: $\sinh(x)$ עבור $x=1$.

(2) נתון כי: $\sinh(x_0) = -1$. חשב את ערכן של: $\cosh(x_0)$, $\tanh(x_0)$, $\coth(x_0)$.

(3) חשב: $\sinh(\ln 5)$.

(4) חשב: $\tanh(-3 \ln 2)$.

תשובות סופיות:

(1) 1.175

(2) $\cosh(x_0) = \sqrt{2}$, $\tanh(x_0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\coth(x_0) = -\sqrt{2}$

(3) 2.4

(4) $-\frac{63}{65}$

זהויות של פונקציות היפרבוליות:

סיכום כללי:

טבלת זהויות יסודיות של פונקציות היפרבוליות:

סינוס וקוסינוס היפרבוליים	טנגנס וקוטנגנס היפרבוליים	ארגומנט שלילי
$\cosh(x) \pm \sinh(x) = e^{\pm x}$	$1 + \tanh^2(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$	$\cosh(-x) = \cosh(x)$
$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$	$\coth^2(x) - 1 = \frac{1}{\sinh^2(x)}$	$\sinh(-x) = -\sinh(x)$

סכום והפרש ארגומנטים

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x)\cosh(y) \pm \cosh(x)\sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$$

זהויות של ארגומנט כפול

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x) = 2\sinh^2(x) + 1 = 2\cosh^2(x) - 1$$

שאלות:

(1) הוכח את הזהות הבאה: $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$.

(2) הוכח את הזהות הכפולה הבאה: $\sinh\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cosh(x)-1}{2}} = \frac{\sinh(x)}{\sqrt{2(\cosh(x)+1)}}$

בתחום: $x \geq 0$.

(3) הוכח את הזהות הבאה: $\cosh^4(x) - \sinh^4(x) = \cosh(2x)$.

(4) הוכח את הזהויות הבאות: $\cosh(x \pm y) = \cosh(x)\cosh(y) \pm \sinh(x)\sinh(y)$.

נגזרות של פונקציות היפרבוליות:

סיכום כללי:

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$(\sinh(x))' = \cosh(x)$	$(\tanh(x))' = \frac{1}{\cosh^2(x)}$
$(\cosh(x))' = \sinh(x)$	$(\coth(x))' = \frac{-1}{\sinh^2(x)}$

שאלות:

1. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \cosh(\ln x)$
2. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \sinh(\tanh(x))$
3. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \cosh(\ln(\sin x))$
4. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \sinh^2(x^3)$

תשובות סופיות:

1. $f'(x) = \frac{\sinh(\ln x)}{x}$
2. $f'(x) = \frac{\cosh(\tanh(x))}{\cosh^2(x)}$
3. $f'(x) = \sinh(\ln(\sin(x))) \cdot \cot(x)$
4. $f'(x) = 3x^2 \sinh(2x^3)$

הפונקציות ההיפרבוליות הפוכות:

סיכום כללי:

הגדרה:

הפונקציות ההיפרבוליות הפוכות הן:

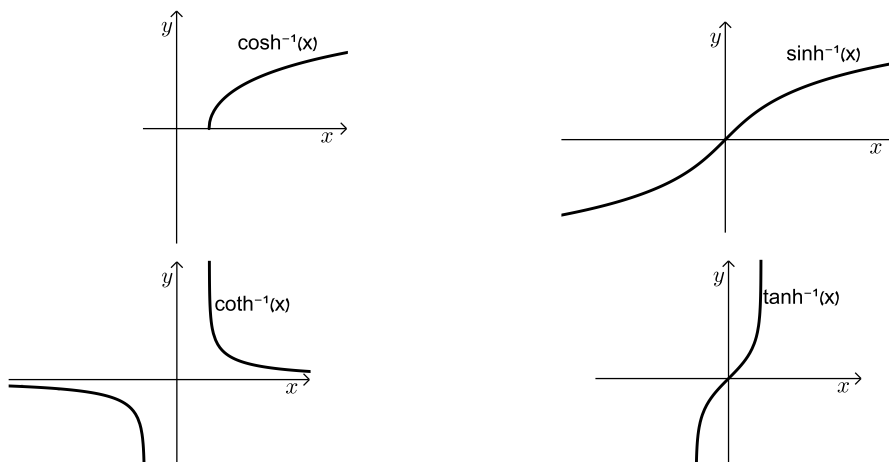
$$\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\coth^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

תיאורים גרפיים:



הערה:

יש המסמנים פונקציה הפוכה עם arc , כגון: $\sinh^{-1}(x) = \text{arcsinh}(x)$.

שאלות:

(1) הוכח כי: $\sinh(\text{arc cosh}(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$ לכל $|x| > 1$.

(2) הוכח כי: $\cosh(\text{arc tanh}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ לכל $|x| < 1$.

נגזרות של פונקציות היפרבוליות הפוכות:

סיכום כללי:

להלן הנגזרות יסודיות של הפונקציות ההיפרבוליות:

$(\sinh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$(\tanh^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}, x < 1$
$(\cosh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, x > 1$	$(\coth^{-1}(x))' = \frac{1}{1-x^2}, x > 1$

שאלות:

1. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(\operatorname{arc sinh}(x))$ (1)

2. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \ln(\cosh(\operatorname{arc tanh}(x)))$ (2)

3. גזור את הפונקציה הבאה: $f(x) = \operatorname{arc sinh}(\operatorname{arc cosh}(\tan(x)))$ (3)

תשובות סופיות:

1. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2} \cdot \ln(x + \sqrt{x^2+1})}$ (1)

2. $f'(x) = \frac{x}{1-x^2}$ (2)

3. $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+(\cosh^{-1}(\tan x))^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\tan^2 x - 1}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ (3)