

# סדנת ריענון במתמטיקה למדעי החברה

פרק 3 - אי שוויונים אלגבריים

תוכן העניינים

1. אי שוויונים ממעלה ראשונה..... 1
2. אי שוויונים ממעלה שנייה..... 2
3. אי שוויונים ממעלה שלישית..... 3
4. אי שוויונים עם מנה..... 4
5. אי שוויונים כפולים מערכות וגם ואו..... 6
6. אי שוויונים עם ערך מוחלט..... 7
7. אי שוויונים עם שורשים..... 9

## אי-שוויונים ממעלה ראשונה

### סיכום כללי

#### פעולות המותרות לביצוע בפתרון אי-שוויון

- לחבר או לחסר כל מספר או ביטוי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי חיובי.
- לכפול או לחלק בכל מספר או ביטוי שלילי תוך הפיכת סימן אי-השוויון.
- להעלות בחזקה אי זוגית.
- להעלות בחזקה זוגית אם שני אגפי אי-השוויון אינם שליליים.

#### פעולות אסורות לביצוע בפתרון אי-שוויון

- לכפול או לחלק בביטוי שלא יודעים את סימנו.
- להעלות בחזקה זוגית כשיש אגף שלילי.

### שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים :

$$45x - 26 > 109 \quad (1)$$

$$2(x - 5) \geq \frac{1}{2}(4x + 6) \quad (2)$$

$$\frac{8x - 4}{2} < \frac{9(x + 1)}{3} \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$x > 3 \quad (1)$$

$$x \leq 1 \quad (2)$$

$$x < 5 \quad (3)$$

## אי-שוויונים ממעלה שנייה

### סיכום כללי

אי שוויון ריבועי הוא מהצורה:  $ax^2 + bx + c \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$  כאשר  $a \neq 0$ .

כדי לפתור אי שוויון ריבועי יש למצוא את נקודות האפס של הביטוי הריבועי ולאחר מכן למצוא את תחום ההצבה עבורו הביטוי מקיים את אי השוויון עצמו.

### שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$(1) \quad x^2 < 144$$

$$(2) \quad x^2 - 12x > -32$$

$$(3) \quad (x+2)(x+5) < 0$$

$$(4) \quad (x+2)(x+4) < 35$$

$$(5) \quad -x^2 + 13x + 30 < 0$$

### תשובות סופיות

$$(1) \quad -12 < x < 12$$

$$(2) \quad x < 4, x > 8$$

$$(3) \quad -5 < x < -2$$

$$(4) \quad -9 < x < 3$$

$$(5) \quad x < -2, x > 15$$

## אי-שוויונים ממעלה שלישית

### סיכום כללי

אי שוויונים ממעלה גבוהה מיוחסים לכאלה שניתן לכתוב אותם בצורה של פולינומים, כגון:  $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 > 0$ ,  $x^4 + 2x^2 + 1 < 0$  וכו'. נפתור אותם על ידי פירוק לגורמים ומציאת נקודות האפס של כל גורם. לאחר מכן נבדוק את כל אחד מתחומי המספרים המתקבלים עבור הנעלם, ונראה באלו מהם מתקבל פסוק אמת.

### שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$(x-1)(x-2)(x-3) > 0 \quad (1)$$

$$(-2x^2 - 3x + 2)(x+1) \leq 0 \quad (2)$$

$$(x^2 + 3x + 5)(x-2) > 0 \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$1 < x < 2, x > 3 \quad (1)$$

$$-2 \leq x \leq -1, x \geq \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$x > 2 \quad (3)$$

## אי-שוויונים עם מנה

### סיכום כללי

אי שוויון מהצורה  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  או  $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$  נקרא אי-שוויון עם מנה,

בו  $f(x)$  ו- $g(x)$  פולינומים.

למשל  $\frac{2x+4}{x^2-3x+4} < 0$ , בו  $f(x) = 2x+4$  ו- $g(x) = x^2-3x+4$ .

כדי לפתור אי שוויון עם מנה, נמצא את נקודות האפס של  $f(x)$  ושל  $g(x)$ ,

ונציב מספרים בתחומים המתקבלים.

אלו שיתנו פסוק אמת יהיו את פתרון אי-השוויון.

### הערות

- ניתן לבצע כפל של המכנה בריבוע בכדי להעביר את אי השוויון לצורה של מכפלות.
- ניתן להעביר אי שוויון המכיל מספר מנות ומספרים שלמים לצורה הנ"ל, על ידי פעולות אלגבריות מתאימות תחילה.

### שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים :

$$\frac{x-1}{x^2-9} > 0 \quad (1)$$

$$\frac{x-1}{3x+2} \geq -3 \quad (2)$$

$$\frac{x-3}{2x^2-10x+12} > 0 \quad (3)$$

**תשובות סופיות**

$$-3 < x < 1, x > 3 \quad (1)$$

$$x < -\frac{2}{3}, x \geq -\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$2 < x < 3, x > 3 \quad (3)$$

## אי-שוויונים כפולים – מערכות וגם ואו

### סיכום כללי

אי-שוויון כפול הוא צורה מקוצרת להציג שני אי-שוויונים אשר יש לפתור יחד (קרי: כמערכת 'וגם').

למשל, במקום לכתוב:  $a < b$  וגם  $b < c$ , ניתן לכתוב:  $a < b < c$ .

מכאן, כדי לפתור אי שוויון כפול יש לפצל אותו תחילה לשני אי-שוויונים, ולפתור כל אחד בנפרד. לאחר מכן יש לקחת את חיתוך הפתרונות.

### שאלות

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$3 < x + 1 < 5 \quad (1)$$

$$-1 < \frac{x-1}{x+1} < 1 \quad (2)$$

$$6x - 38 \leq x - 3 \leq 5x + 7 \quad (3)$$

### תשובות סופיות

$$2 < x < 4 \quad (1)$$

$$x > 0 \quad (2)$$

$$-2.5 \leq x \leq 7 \quad (3)$$

## אי שוויונים עם ערך מוחלט

### סיכום כללי

כללים לפתרון אי שוויון עם ערך מוחלט יחיד

| מקרה  | $ x  < a$    | $ x  > a$           |
|-------|--------------|---------------------|
| פתרון | $-a < x < a$ | $x < -a \cap x > a$ |

כללים לפתרון אי שוויון עם מספר ערכים מוחלטים

- נמצא את הנקודות המאפסות כל ביטוי עם ערך מוחלט.
- מחלקים את אי השוויון לתחומים לפי נקודות האפס.
- פותרים את אי השוויון לכל תחום בנפרד.
- כותבים פתרון כללי (מערכת או) לכל התחומים יחדיו.

### שאלות

(1) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $|x+2| < 3$       ב.  $|2x+1| > 7$
- ג.  $|6-2x| < x$       ד.  $|2x+1|-3x > 4$

(2) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $1 < |4-3x| < 7$       ב.  $|2x+3| < 8 < |5-x|$

(3) פתור את אי-השוויונים הבאים:

- א.  $|x-3| + |2x+2| > 7$       ב.  $|3-2x|-11 > 4-|6+x|$

**תשובות סופיות**

- (1) א.  $-5 < x < 1$       ב.  $x < -4$  או  $3 < x$   
     ג.  $2 < x < 6$       ד.  $x < -1$
- (2) א.  $1\frac{2}{3} < x < 3\frac{2}{3}$  או  $-1 < x < 1$       ב.  $-5\frac{1}{2} < x < -3$
- (3) א.  $2 < x$  או  $x < -2$       ב.  $4 < x$  או  $x < -6$

## אי שוויונים עם שורשים

### סיכום כללי

מקרים בפתרון אי-שוויונות עם שורשים

| מקרה       | אי השוויון        | פתרון                  |
|------------|-------------------|------------------------|
| $a \geq 0$ | $\sqrt{f(x)} < a$ | $0 \leq f(x) < a^2$    |
| $a < 0$    | $\sqrt{f(x)} < a$ | אין פתרון              |
|            | $\sqrt{f(x)} > a$ | כל $x$ בת.ה. של $f(x)$ |

### שאלות

פתור את אי השוויונים הבאים:

$$\sqrt{x+3} < 7 \quad (1)$$

$$\sqrt{2x-5} \geq 1 \quad (2)$$

$$\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x \quad (3)$$

$$\sqrt{x^2+x-6} < x-3 \quad (4)$$

### תשובות סופיות

$$-3 \leq x < 46 \quad (1)$$

$$x \geq 3 \quad (2)$$

$$x < -10, x > 1 \quad (3)$$

$$\emptyset \quad (4)$$