תוכן העניינים:

שימו לב!

החוברת מחולקת לנושאים כפי שמוצגים באתר GOOL.
כל נושא פותח בסיכום תיאורטי קצר ולאחריו דוגמאות – אלו נידונים בהרחבה בסרטוני התיאוריה שבאתר GOOL. לאחר מכן ישנו מגוון תרגילים ברמה עולה בכל אחד מהנושאים – כולם נפתרים באריכות ובפירוט בסרטוני השאלות שבאתר.

תורת המעגלים החשמליים

שיטת מתחי צמתים

כללי:

סיכום כללי:

שיטות מטריציות לפתרון של מעגלים חשמליים:

כדי לפתח את השיטות הבאות, נעזר בחוקי קירכהוף לחיבור משוואות מתאימות עבור מתחי הצמתים שבכל צומת (באמצעות KCL) או עבור זרמי הענפים (באמצעות KVL).

נגדיר תבנית של סט משוואות אליו נרצה להגיע ונוכל לדרוש עליו תנאים וכן לפתור את מערכת המשוואות בכדי למצוא את כל זרמי ומתחי המעגל.
בנוסף, נוכל להבין את אופן פעולת המעגל והתרומה של רכיביו מתוך התבוננות על סט המשוואות. לשיטות אלו קוראים 'שיטות מטריציות' לניתוח מעגלים.

כדי לפתח שיטה כללית נצטרך להניח מספר הנחות שעבורן הפתרון יהיה תקף:

1) הפתרון תמיד יניח כי המעגל נמצא במצב המתמיד שלו, כלומר אין שינוי בערכי הרכיבים.
2) הפתרון מניח רכיבים ליניאריים אשר עונים על המשוואות KCL ו-KVL.
3) נניח כי למערכת המשוואות יהיה פתרון יחיד.

שיטת מתחי צמתים:

נתאר את השיטה בכמה שלבים:

1) תיאור השיטה במעגל הכולל מקורות זרם בלבד ורכיבים פאסיביים.
2) הכללת השיטה עבור מקורות מתח מעשיים.
3) הענף הקנוני וטיפול במקורות מבוקרים.
4) הכללת השיטה עבור מקורות מתח אידיאליים.
5) סיכום השלבים ודרך פתרון מעשית.

תיאור השיטה במעגל הכולל מקורות זרם בלבד

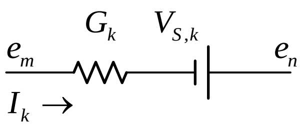
נפתור מעגלים לפי השלבים הבאים:

1) נסמן את כל N הצמתים במעגל ב- e_k: $0 \le k \le N-1$.
2) נגדיר את אחד הצמתים להיות האדמה במעגל, למשל $e_0 = 0$.
3) נכתוב את המוליכות בכל ענף ונגדיר את כיווני הזרמים לפי קונבנצית הצרכן.
4) נכתוב KCL לכל $N-1$ הצמתים האחרים במעגל ונציב את הביטוי של זרמי הענפים.
5) נסדר ונפתור את מערכת המשוואות

הכללת השיטה עבור מקורות מתח מעשיים

נמצא את הזרם העובר דרך הענף ה- k המורכב ממקור מתח מעשי $V_{S,k}$ עם מוליכות G_k.

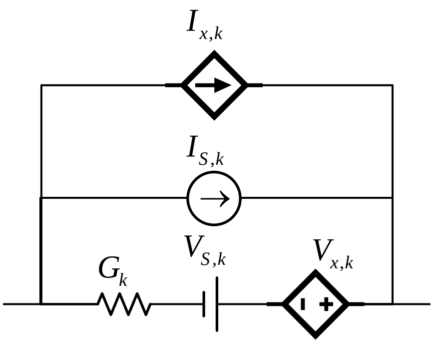
נקבל: $I_k = G_k\left(\left(e_m - e_n\right) + V_{S,k}\right)$



הענף הקנוני:

ענף שבו ניתן לתאר את הקשר בין המתח לזרם בצורה ליניארית נקרא ענף קנוני.
נתאר את הזרם I_k בענף הקנוני ה- k-י הניתן בצורתו המוכללת באופן הבא:

$$I_k = I_{S,k} \pm I_{x,k} + G_k \cdot \left(\left(e_m - e_n\right) \pm V_{S,k} \pm V_{x,k}\right)$$

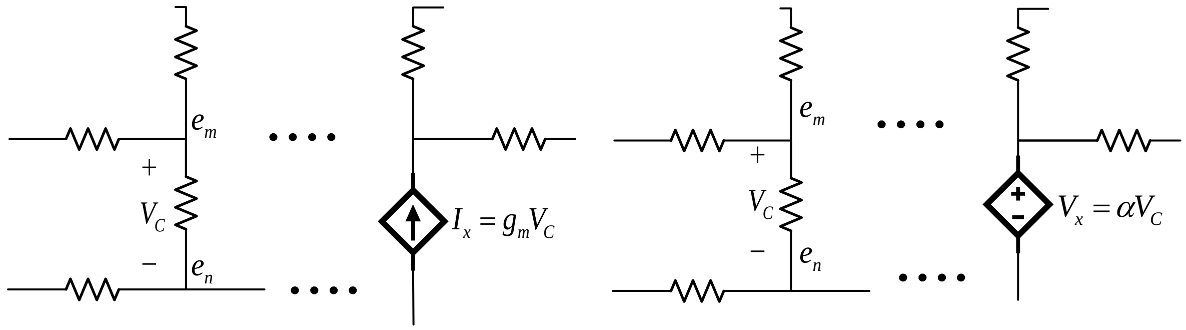


כאשר:

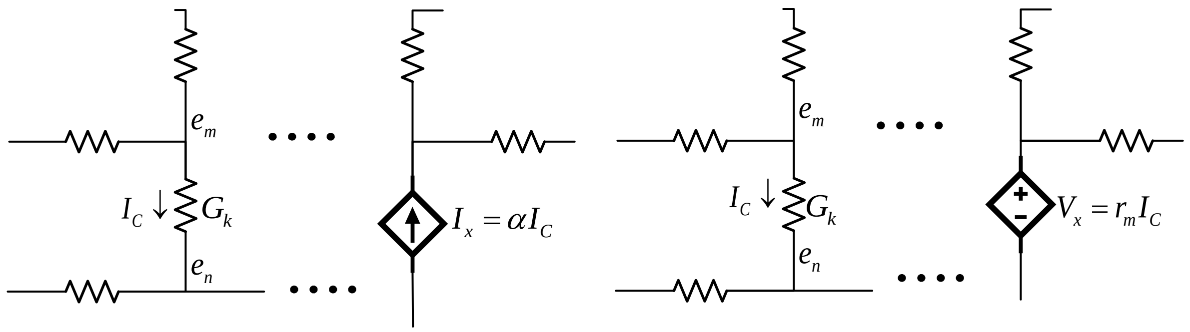
- הזרם I_k נכנס מ- e_m ויוצא מ- e_n.
- סימני המקורות יתאימו לכיוונם.

כתיבת ביטוי של מקורות מבוקרים:

כאשר קיים ענף בקרה בו יש לקחת את המתח V_C או את הזרם I_C בכדי לבטא את הערכים של מקורות מבוקרים בחלק אחר של המעגל נבצע:



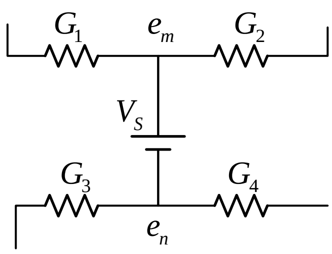
$$V_C = e_m - e_n \quad \rightarrow \quad I_x = g_m\left(e_m - e_n\right) \qquad V_C = e_m - e_n \quad \rightarrow \quad V_x = \alpha\left(e_m - e_n\right)$$



$$I_C = G_k\left(e_m - e_n\right) \quad \rightarrow \quad I_x = \alpha G_k\left(e_m - e_n\right) \qquad I_C = G_k\left(e_m - e_n\right) \quad \rightarrow \quad V_x = r_m G_k\left(e_m - e_n\right)$$

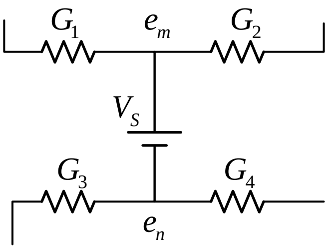
הכללת השיטה עבור מקורות מתח אידיאליים

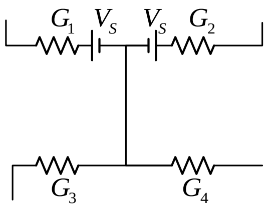
לא ניתן לתאר את הזרם העובר דרך ענף המכיל מקור מתח אידיאלי בלבד.
יחד עם זאת, אין בזה צורך מכיוון שמקור מתח אידיאלי מהווה אילוץ על ערכי הפוטנציאל החשמלי של שני הצמתים.



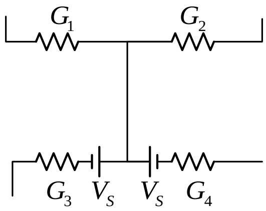
במקרה זה ניתן לוותר על אחד המשתנים ובכל סך המשוואות קטנות ב-1.
צומת המבוטא באמצעות ערך הפוטנציאל מצומת אחר בתוספת למקור המתח נקרא סופר-צומת (Super Node).

נבצע תיקון למעגל המקורי ע"י הזזת מקורות:





$\underline{e_m = e_n + V_S}$:



$\underline{e_n = e_m - V_S}$:

סיכום השלבים ודרך פתרון מעשית:

בהינתן מעגל חשמלי, נרצה להשתמש בשיטת מתחי הצמתים בכדי לכתוב מערכת משוואות מתאימה מהצורה:

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1n} \\ Y_{21} & Y_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ Y_{n1} & \cdots & & Y_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{sn,1} \\ I_{sn,2} \\ \vdots \\ I_{sn,n} \end{bmatrix}$$

כאשר:

- בהגדרת צומת ייחוס, עבור N צמתים נקבל $n = N-1$ משוואות.
- הווקטור $\underline{e}$ מתאר את מתחי הצמתים (ביחס לצומת הייחוס).
- המטריצה Y נקראת מטריצת המתירויות (Admittance) או מטריצת המוליכויות.
  בהעדר מקורות מבוקרים המטריצה תהיה סימטרית.
  האיברים על האלכסון הראשי מייצגים את סכום המוליכויות של כל הענפים המחוברים לענף ה- k. יש להקפיד כי במשוואה ה- k-ית, המקדם של e_k יהיה **חיובי**.
  האיברים $Y_{kl} = Y_{lk}$: $k \neq l$ ותמיד יהיו בסימן **שלילי**.
- הווקטור $\underline{I_{sn}}$ מתאר את סכום הזרמים הנכנסים לכל צומת מכל הענפים המחוברים אליו.
  בסידור המשוואות מתקבל כי זרמים נכנסים יהיו בסימן חיובי וזרמים יוצאים יהיו בסימן שלילי.

שלבי פתרון של מעגלים כלליים בשיטת מתחי הצמתים:

כדי לפתור מעגל חשמלי בשיטת מתחי צמתים נבצע את סדר השלבים הבא:

1) נסמן את כל N הצמתים במעגל ב- e_k $0 \le k \le N-1:$
ונגדיר את אחד הצמתים להיות האדמה במעגל (צומת הייחוס).

2) נזיז מקורות מתח אידיאליים (בלתי תלויים ותלויים).

3) נבצע המרת מקורות אנרגיה מעשיים למקורות זרם מעשיים.

4) נגדיר את וקטור הצמתים שלנו (המשתנים) $\underline{e}$, נבנה מטריצת מתירויות/מוליכויות,
ונכתוב את וקטור זרמי הקצר $\underline{I_{sn}}$ לפי הכללים לעיל.
במידה ויש מקורות זרם מבוקרים, נכתוב גם אותם כתלות במתחי הצמתים.

5) נפתור את מערכת המשוואות ונכתוב את מתחי הצמתים בכל המעגל.
נשיב אחורנית מקורות מתח אידיאליים שהוזזו ונחשב זרמים בכל ענף.

שאלות:

שאלות חימום יסודיות:

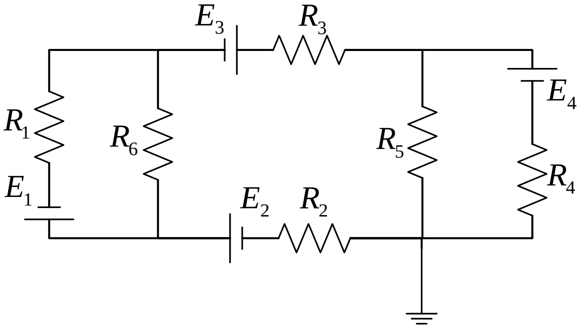
1) לפניך המעגל הבא:

א. כתוב את מטריצת המוליכויות של המעגל.

ב. מצא תנאי על הנגדים עבורם למערכת יהיה פתרון.

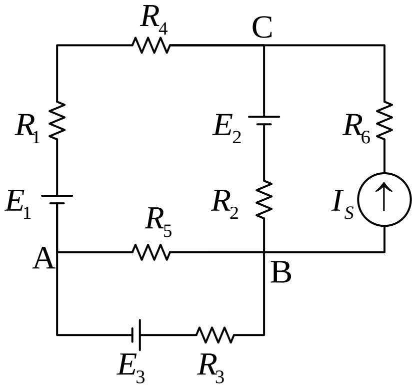
ג. כיצד תשתנה תשובתך לסעיפים א' ו-ב' אם $R_1 = 0\Omega$?

ד. כיצד תשתנה תשובתך לסעיפים א' ו-ב' אם $R_6 = 0\Omega$?



הערה:

פתרון הוידאו של השאלה הבאה ממחיש את ההתעסקות עם נגד בטור למקור זרם.
בנוסף, קיים דילוג על שלב המרת המקורות והכתיבה של $\underline{I_{sn}}$ היא ישירה מהתבוננות במעגל.



2) במעגל שלפניכם נתון:

$R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 3\Omega$, $R_3 = 4\Omega$, $R_4 = 8\Omega$

$R_5 = 6\Omega$, $R_6 = 2\Omega$

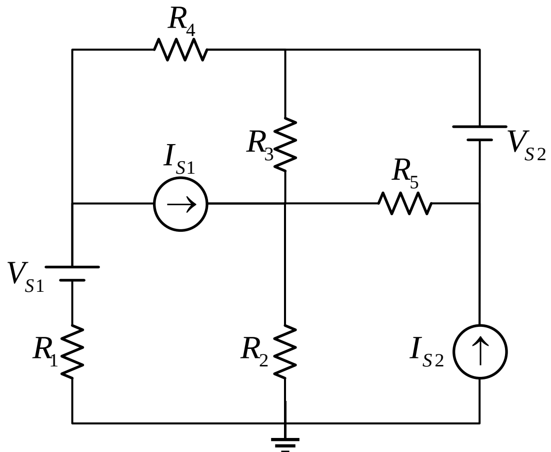
$E_1 = 5V$, $E_2 = 15V$, $E_3 = 10V$, $I_S = 3A$

מצאו את U_{AC} ואת הזרם $I(R_5)$.

שאלות ברמת תרגיל כיתה:

3) נתון המעגל הבא ובו ערכי הרכיבים:

$R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 6\Omega$, $R_3 = 5\Omega$, $R_4 = 10\Omega$, $R_5 = 1\Omega$, $I_{S1} = 1A$, $I_{S2} = 2A$, $V_{S1} = 8V$, $V_{S2} = 5V$



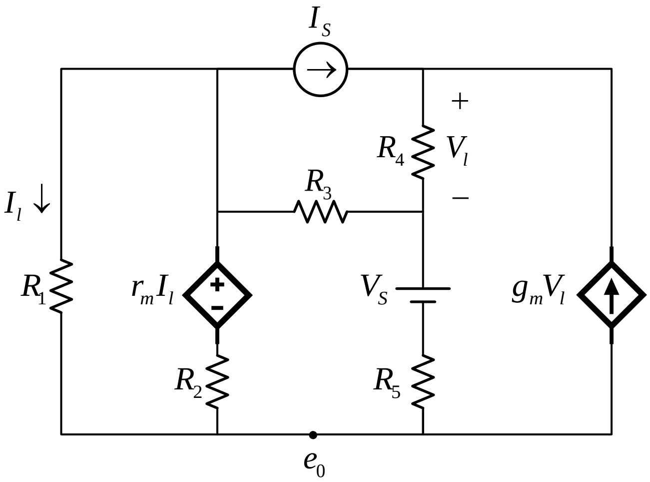
א. היעזרו בשלבי הניתוח של שיטת מתחי הצמתים וכתבו את מערכת המשוואות המתאימה לפתרון המעגל.

ב. (1) פתרו את מערכת המשוואות ומצאו את ערכי המתחים בכל צמתי המעגל.
(2) חשבו את הזרם העובר דרך הנגד R_1 ואת הזרם העובר דרך הנגד R_3.

ג. מחברים עומס חיצוני R_L במקביל לנגד R_4, (שימו לב – **לא** מנתקים את R_4).
(1) מהי ההתנגדות השקולה שרואה העומס?
(2) מהו המתח השקול שרואה העומס?

4) לפניכם המעגל הבא ובו כל ערכי הרכיבים נתונים:

$1 \le k \le 5:\ R_k\ ,\ V_S\ ,\ I_S\ ,\ r_m\ ,\ g_m$.



א. כתבו את מערכת המשוואות המתאימות לפתרון המעגל בשיטת מתחי הצמתים כאשר e_0 הוא צומת הייחוס, כלומר מצאו את: $Y \cdot \underline{e} = \underline{I_{sn}}$.

ב. לפניכם שני סטים של ערכים אפשריים עבור רכיבי המעגל. קבעו האם יש למעגל פתרון עבורם. נמקו את בחירתכם.

(1) $I_S = 3\text{A}\ ,\ V_S = 12\text{V}\ ,\ g_m = 5\text{S}\ ,\ r_m = 20\Omega\ ,\ R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = 2\Omega$.

(2) $I_S = 1\text{A}\ ,\ V_S = 8\text{V}\ ,\ g_m = 3\text{S}\ ,\ r_m = 5\Omega\ ,\ R_3 = R_5 = \frac{1}{2}\Omega\ ,\ R_2 = R_4 = 1\Omega\ ,\ R_1 = 2\Omega$.

תשובות סופיות:

1) א. $G=\begin{pmatrix} G_1+G_3+G_6 & -(G_1+G_6) & -G_3 \\ -(G_1+G_6) & G_1+G_2+G_6 & 0 \\ -G_3 & 0 & G_3+G_4+G_5 \end{pmatrix}$

ב. $G_{11}G_{22}G_{33}\neq G_{12}^2G_{33}+G_{13}^2G_{22}$ ג. נקבל: $G=\begin{pmatrix} G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3+G_4+G_5 \end{pmatrix}$

התנאי המתקבל: $G_2G_3+G_2G_4+G_2G_5+G_3G_4+G_3G_5\neq 0$ שתמיד נכון.

ד. נקבל: $G=G_C>0$ ותמיד יש פתרון.

2) $U_{AC}=-21.232\,\text{V}$, $I(R_5)=0.35\text{A}$.

3) א. $\begin{bmatrix} G_1+G_4 & 0 & -G_4 \\ 0 & G_2+G_3+G_5 & -G_3-G_5 \\ -G_4 & -G_3-G_5 & G_3+G_4+G_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} V_{S1}/R_1+V_{S2}/R_4-I_{S1} \\ I_{S1}+V_{S2}/R_3 \\ I_{S2}-V_{S2}/R_3-V_{S2}/R_4 \end{bmatrix}$

ב. (1) פתרון: $\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7.808\,\text{V} \\ 12.288\,\text{V} \\ 13.328\,\text{V} \end{bmatrix}$ ב. (2) $I_{R1}=48m\text{A}$, $I_{R_3}=1.008\text{A}$

ג. (1) $R_{eq}=5.2\Omega$ ג. (2) $V_{eq}=9.52\text{V}$.

4) א. $\begin{bmatrix} G_1\left(1-\frac{r_m}{R_4}\right)+G_2+G_3 & -G_3 & 0 \\ -G_3 & G_3+G_4+G_5 & -G_4 \\ 0 & g_m-G_4 & G_4-g_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -I_{S1} \\ V_S/R_5 \\ I_{S1} \end{bmatrix}$

ב. (1) קיים פתרון יחיד כי: $|Y|=\left\|\begin{bmatrix} -3.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1.5 & -0.5 \\ 0 & 4.5 & -4.5 \end{bmatrix}\right\|\neq 0$.

ב. (2) לא קיים פתרון כי: $|Y|=\left\|\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\right\|=0$.