הקדמה

נוסחאות שימושיות

מד"ר הומוגנית מסוג אוילר $x^2 \cdot y''(x) + \alpha \cdot x \cdot y'(x) + \beta \cdot y(x) = 0$

ננחש פתרון מהצורה $y(x) = x^\lambda$ ונקבל את המשוואה האופיינית

$$\lambda^2 + (\alpha - 1)\lambda + \beta = 0$$

נחלק למקרים :

שורשי המשוואה האופיינית	**צורת הפתרון**
שני שורשים ממשיים שונים $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y(x) = c_1 \lvert x\rvert^{\lambda_1} + c_2 \lvert x\rvert^{\lambda_2}$
שורש ממשי אחד כפול $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y(x) = c_1 \lvert x\rvert^{\lambda} + c_2 \lvert x\rvert^{\lambda} \ln\lvert x\rvert$
שני שורשים מרוכבים צמודים $\lambda_1 = \mu + i\omega$ $\lambda_2 = \mu - i\omega$	$y(x) = c_1 \lvert x\rvert^{\mu} \cos(\omega \ln\lvert x\rvert) + c_2 \lvert x\rvert^{\mu} \sin(\omega \ln\lvert x\rvert)$

בעיות שטורם-ליוביל נפוצות

נניח כי $y''(x) + \lambda^2 y(x) = 0$ בתחום $0 < x < L$

תנאי שפה	פונקציות עצמיות	ערכים עצמיים	
$y(0) = y(L) = 0$	$y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x) = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$	$n \geq 1$
$y'(0) = y'(L) = 0$	$y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x) = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$	$n \geq 0$
$y'(0) = y(L) = 0$	$y_n(x) = \cos\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x) = \left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{L}\right)^2$	$n \geq 1$
$y(0) = y'(L) = 0$	$y_n(x) = \sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x) = \left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{L}\right)^2$	$n \geq 1$

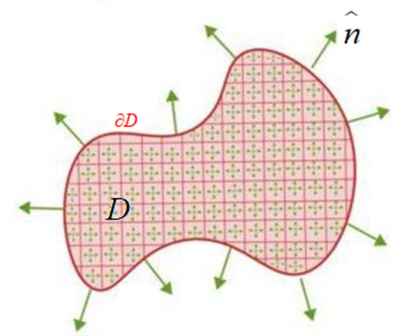
אינטגרל קווי מסוג ראשון

$$\int_{\gamma} f(x,y)\,ds=\int_a^b f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{\left[x'(t)\right]^2+\left[y'(t)\right]^2}\,dt$$

כאשר $\gamma(t)=\big(x(t),y(t)\big)$ עבור $a\le t\le b$

משפט גאוס (הדו-מימדי)

נניח כי γ מסילה פשוטה-סגורה חלקה למקוטעין התוחמת תחום $D\subset\mathbb{R}^2$ (כלומר $\gamma=\partial D$). נניח כי $\vec{F}=\big(P(x,y),Q(x,y)\big)$ שדה גזיר ברציפות בסביבת D ונסמן $\hat{n}$ - נורמל חיצוני למסילה γ.



אזי $\oint_{\partial D}\left(\vec{F}\cdot\hat{n}\right)ds=\iint_D\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{F}\right)dxdy$

כאשר $\vec{\nabla}\cdot\vec{F}=P_x+Q_y$ נקרא הדיברגנץ של השדה $\vec{F}$

זהות שימושית: אם $u(x,y)$ גזירה פעמיים אז $\vec{\nabla}\cdot\overrightarrow{\nabla u}=\Delta u$

כאשר $\overrightarrow{\nabla u}=\left(u_x,u_y\right)$ זה הגרדיאנט של u ו - $\Delta u=u_{xx}+u_{yy}$ הלפלסיאן של u

הלפלסיאן בקואורדינטות פולריות: $\Delta u=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}$

זהות גרין: $\iint_D u\Delta v\,dxdy=\oint_{\partial D}u\frac{\partial v}{\partial n}ds-\iint_D\overrightarrow{\nabla u}\cdot\overrightarrow{\nabla v}\,dxdy$

תנאי הכרחי לקיום פתרון בעיית ניומן

$$\begin{cases}\Delta u=F(x,y) & (x,y)\in D\\ \dfrac{\partial u}{\partial\hat{n}}=g(x,y) & (x,y)\in\partial D\end{cases}$$

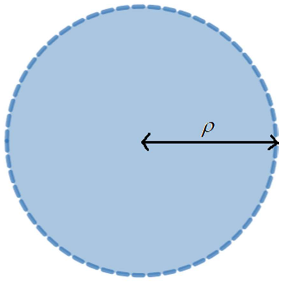
התנאי ההכרחי הוא $\int_{\partial D}g(x,y)\,ds=\iint_D F(x,y)\,dxdy$

מקרה מיוחד הוא כאשר $F(x,y)=0$ ואז נדרוש $\int_{\partial D}g(x,y)\,ds=0$

משוואת לפלס בעיגול

בעיית דיריכלה

הפתרון של הבעיה



$$\begin{cases} \triangle u = 0 & x^2+y^2<\rho^2 \\ u(x,y)=f(x,y) & x^2+y^2=\rho^2 \end{cases}$$

נתון על ידי הנוסחה הבאה (בקואורדינטות קוטביות)

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\left(a_n\cos(n\theta)+b_n\sin(n\theta)\right)$$

הערה : פונקציה u המקיימת $\triangle u = 0$ נקראת פונקציה הרמונית

שאלות

1) נתונה הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in} \quad x^2+y^2<1 \\ u(x,y)=1+y^3 & \text{on} \quad x^2+y^2=1 \end{cases}$$

פתרו אותה ובטאו את הפתרון בקואורדינטות קוטביות $u(r,\theta)$

רמז : ניתן להשתמש בזהות $\sin^3(\theta)=\frac{3}{4}\sin(\theta)-\frac{1}{4}\sin(3\theta)$

2) נתונה הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in} \quad x^2+y^2<4 \\ u(x,y)=x^2+y^4 & \text{on} \quad x^2+y^2=4 \end{cases}$$

פתרו אותה ובטאו את הפתרון בקואורדינטות קוטביות $u(r,\theta)$

3) נתונה הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in} \quad x^2+y^2<16 \\ u(x,y) = x^2 y & \text{on} \quad x^2+y^2=16 \end{cases}$$

פתרו אותה ובטאו את הפתרון בקואורדינטות קוטביות $u(r,\theta)$

רמז: ניתן להשתמש בזהות $\cos^2(\theta)\sin\theta = \frac{\sin(3\theta)+\sin(\theta)}{4}$

4) נתונה הבעיה

$$\triangle u = 0 \qquad \text{in} \quad x^2+y^2<9$$

$$u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{on} \quad x^2+y^2=9, y>0 \\ 0 & \text{on} \quad x^2+y^2=9, y<0 \end{cases}$$

פתרו אותה ובטאו את הפתרון בקואורדינטות קוטביות $u(r,\theta)$

5) נתונה הבעיה

$$\triangle u = 0 \qquad \text{in} \quad x^2+y^2<1$$

$$u(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{on} \quad x^2+y^2=1, y>0 \\ -1 & \text{on} \quad x^2+y^2=1, y<0 \end{cases}$$

פתרו אותה ובטאו את הפתרון בקואורדינטות קוטביות $u(r,\theta)$

6) נתונה בעיית ניומן הבאה

$$\triangle u = 0 \qquad \text{in} \quad x^2+y^2<1$$

$$u(0,0)=0 \qquad \frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(x,y) = \begin{cases} y & x>0, x^2+y^2=1 \\ c & x<0, x^2+y^2=1 \end{cases}$$

א) עבור איזה מספר c מתקיים התנאי ההכרחי לפתרון בעיה זו?

ב) פתרו את הבעיה עבור הערך של c שמצאתם בסעיף א'

7) נתונה בעיית ניומן הבאה

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in} \qquad x^2+y^2<16$$

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{n}}(x,y)=\alpha x^2-1 \qquad \text{on} \qquad x^2+y^2=16$$

א) עבור איזה מספר α מתקיים התנאי ההכרחי לפתרון בעיה זו?

ב) פתרו את הבעיה עבור הערך של α שמצאתם בסעיף א'

8) נתונה בעיית ניומן הבאה

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in} \qquad 0\le r<R$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}(R,\theta)=A\sin(\theta)+B\cos(\theta)+C$$

א) מצאו תנאי על הפרמטרים A,B,C כך שיתקיים התנאי ההכרחי לפתרון בעיה זו

ב) פתרו את הבעיה בהנחה והתנאי מסעיף א' מתקיים

9) פתרו את הבעיה

$$\Delta u=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \qquad \text{in} \qquad \sqrt{x^2+y^2}<3$$

$$u\big|_{\sqrt{x^2+y^2}=3}=4\cos(2\theta)-8\sin(4\theta)$$

10) פתרו את הבעיה הבאה

$$\Delta u=\left(x^2+y^2\right)^2 \qquad x^2+y^2<1$$

$$u\big|_{r=1}=x$$

תשובות סופיות

1) $$u(r,\theta)=1+r\frac{3}{4}\sin(\theta)-\frac{1}{4}r^3\sin(3\theta)$$

2) $$u(r,\theta)=8-\frac{6}{2}\left(\frac{r}{2}\right)^2\cos(2\theta)+4\left(\frac{r}{2}\right)^4\cos(4\theta)$$

3) $$u(r,\theta)=16\left(\frac{r}{4}\right)^3\sin(3\theta)+16\left(\frac{r}{4}\right)\sin(\theta)$$

4) $$u(r,\theta)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{r}{3}\right)^{2k-1}\frac{\sin([2k-1]\theta)}{2k-1}$$

5) $$u(r,\theta)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}r^{2k-1}\frac{\sin([2k-1]\theta)}{2k-1}$$

6) א) $c=0$ ב) $u(r,\theta)=\frac{1}{2}r\sin(\theta)+\sum_{k=1}^{\infty}r^{2k}\frac{(-1)^k}{2\pi}\frac{1}{1-4k^2}\sin(2k\theta)$

7) א) $\alpha=\frac{1}{8}$ ב) $u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\frac{r^2}{8}\cos(2\theta)$

8) א) $C=0$ ב) $u(x,y)=\frac{a_0}{2}+x+y$

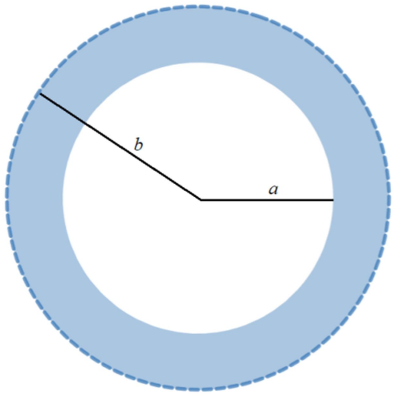
9) $$u(r,\theta)=\frac{4}{9}r^2\cos(2\theta)-\frac{8}{81}r^4\sin(4\theta)+\frac{r^2}{3\sqrt{3}}-\sqrt{3}$$

10) $$u(r,\theta)=r\cos(\theta)+\frac{1}{36}(r^6-1)$$

משוואת לפלס בטבעת

הפתרון של הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in} \quad 0<a<r<b \\ u(a,\theta)=f(\theta) & \text{on} \quad r=a \\ u(b,\theta)=g(\theta) & \text{on} \quad r=b \end{cases}$$



הינו מהצורה

$$u(r,\theta)=A_0+B_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n r^n+A_{-n}r^{-n}\right)\cos(n\theta)+\left(B_n r^n+B_{-n}r^{-n}\right)\sin(n\theta)$$

שאלות

1) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & 1<r<2 \\ u|_{r=1}=0 \\ u|_{r=2}=2\cos(\theta) \end{cases}$$

והביעו את הפתרון בקואורדינטות קרטזיות

2) נתונה הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in} \quad 1<x^2+y^2<4 \\ u=\dfrac{1}{16} & \text{on} \quad x^2+y^2=1 \\ u=2+\dfrac{x}{4}+\dfrac{3y}{8} & \text{on} \quad x^2+y^2=4 \end{cases}$$

פתרו אותה והביעו את הפתרון בקואורדינטות פולריות

3) נתונה הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = x^2 + y^2 & \text{in} \quad 1 < x^2 + y^2 < 4 \\ u = 0 & \text{on} \quad x^2 + y^2 = 1 \\ u = 0 & \text{on} \quad x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

א) פתרו אותה והביעו את הפתרון בקוארדינטות פולריות

ב) הוכיחו כי הפתרון יחיד

רמז : תוכלו להשתמש בזהות גרין $\iint\limits_D u\Delta v dxdy = \oint\limits_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}ds - \iint\limits_D \nabla u \cdot \nabla v dxdy$

4) נתונה הבעיה

$$\triangle u = r^2 \sin^3\theta \qquad 1 < r < 3$$

$$u\big|_{r=1} = \sin^3\theta$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=3} = \sin^2\theta$$

חשבון את $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial r}(2,\theta)\,d\theta$ רמז: תוכלו להשתמש במשפט גאוס

5) פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & 1 < r < 2 \\ u\big|_{r=1} = \ln(2) \\ u\big|_{r=2} = \ln(4) \end{cases}$$

והביעו את הפתרון בקוארדינטות קרטזיות

6) נתונה הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in} \quad 1 < r < 2 \\ u_r = \cos(\theta) + \sin(\theta) & \text{on} \quad r = 1 \\ u = 0 & \text{on} \quad r = 2 \end{cases}$$

א) פתרו אותה והביעו את הפתרון בקוארדינטות פולריות

ב) הוכיחו כי הפתרון יחיד

רמז : תוכלו להשתמש בזהות גרין $\iint\limits_D u\Delta v dxdy = \oint\limits_{\partial D} u\frac{\partial v}{\partial n}ds - \iint\limits_D \nabla u \cdot \nabla v dxdy$

תשובות סופיות

1) $u(x,y)=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}\frac{x}{x^2+y^2}$

2) $u(r,\theta)=\frac{1}{16}+\frac{1}{\ln 2}\left(2-\frac{1}{16}\right)\ln r+\frac{1}{3}\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\theta+\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta$

3) א) $u(r)=\frac{r^4-1}{16}+-\frac{15}{16\ln(2)}\ln(r)$ ב) הוכחה

4) $\int_0^{2\pi}\frac{\partial u}{\partial r}(2,\theta)\,d\theta=\frac{3\pi}{2}$

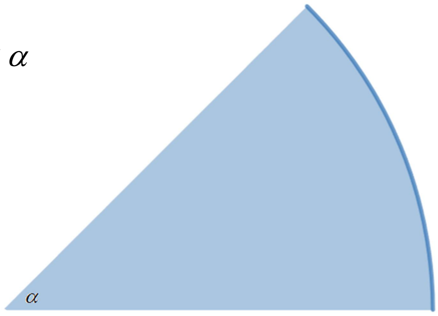
5) $u(x,y)=\ln(2)+\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)$

6) א) $u(r,\theta)=\left(\frac{1}{5}r-\frac{4}{5}r^{-1}\right)(\cos\theta+\sin\theta)$ ב) הוכחה

משוואת לפלס בגזרה מעגלית

הפתרון של הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & \text{in} \quad 0 \le r < \rho \ , \ 0 < \theta < \alpha \\ u(r,0) = 0 \quad , \quad u(r,\alpha) = 0 \\ u(\rho,\theta) = f(\theta) \end{cases}$$



הינו מהצורה $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^{\frac{\pi n}{\alpha}} \sin\left(\frac{\pi n}{\alpha}\theta\right)$

שאלות

1) פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & r < 1 \quad 0 < \theta < \alpha < \pi \\ u(r,0) = 0 \quad , \quad u(r,\alpha) = 0 \\ u(1,\theta) = \sin\left(\frac{2\pi}{\alpha}\theta\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{\alpha}\theta\right) \end{cases}$$

2) פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & r < 1 \quad 0 < \theta < \pi \\ u(r,0) = 0 \quad , \quad u(r,\pi) = 0 \\ u(1,\theta) = \theta(\theta - \pi) \end{cases}$$

והביעו את הפתרון ע"י טור אינסופי

3) פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & 0 < r < 1 \quad 0 < \theta < \pi \\ u(r,0) = 0 \quad , \quad u(r,\pi) = 0 \\ u(1,\theta) = \sin^3(\theta) \end{cases}$$

הערה: תוכלו להיעזר בזהות $\sin^3(\theta) = \frac{3}{4}\sin(\theta) - \frac{1}{4}\sin(3\theta)$

4) פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} \triangle u = 0 & 0 < r < 1 \quad 0 < \theta < \pi \\ u(r,0) = 0 \quad , \quad u(r,\pi) = 0 \\ u(1,\theta) = 1 \end{cases}$$

והביעו את הפתרון ע"י טור אינסופי

תשובות סופיות

1) $$u(r,\theta) = r^{\frac{2\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{2\pi}{\alpha}\theta\right) + r^{\frac{3\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{3\pi}{\alpha}\theta\right)$$

2) $$u(r,\theta) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3} r^{2k+1}\sin([2k+1]\theta)$$

3) $$u(r,\theta) = \frac{3}{4} r\sin(\theta) - \frac{1}{4} r^3 \sin(3\theta)$$

4) $$u(r,\theta) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1} r^{2k+1}\sin([2k+1]\theta)$$

משוואת לפלס במלבן

נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad 0<x<a \ , \ 0<y<b \\ u(x,0)=f_1(x) & \text{or} \quad u_y(x,0)=f_1(x) \\ u(x,b)=f_2(x) & \text{or} \quad u_y(x,b)=f_2(x) \\ u(0,y)=g_1(y) & \text{or} \quad u_x(0,y)=g_1(y) \\ u(a,y)=g_2(y) & \text{or} \quad u_x(a,y)=g_2(y) \end{cases}$$

1) אם $f_1(x)=f_2(x)=0$ אז נמצא את כול הפתרונות מהצורה $u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$.

נקבל בעיית שטורם ליוביל עבור $Y(y)$ וצורת הפתרון היא $u(x,t)=\sum X_n(x)\cdot Y_n(y)$

2) אם $g_1(y)=g_2(y)=0$ אז נמצא את כול הפתרונות מהצורה $u(x,y)=X(x)\cdot Y(y)$.

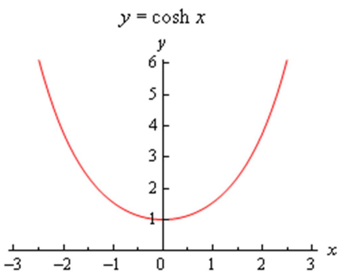
נקבל בעיית שטורם ליוביל עבור $X(x)$ וצורת הפתרון היא $u(x,t)=\sum X_n(x)\cdot Y_n(y)$

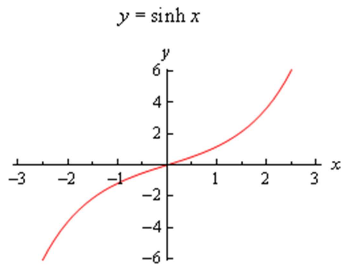
תזכורת:

הפונקציות ההיפרבוליות:

$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2} \qquad \sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2} \qquad \frac{d}{dx}\cosh(x)=\sinh(x)$$

$$\cosh(0)=1 \qquad \sinh(0)=0 \qquad \frac{d}{dx}\sinh(x)=\cosh(x)$$





שימו לב:

הפתרון הכללי של המד״ר $y''-\omega^2 y=0$ הוא $y=c_1\cosh(x)+c_2\sinh(x)$

הפתרון הכללי של המד״ר $y''+\omega^2 y=0$ הוא $y=c_1\cos(x)+c_2\sin(x)$

שאלות

1) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad in \quad 0<x<L \;,\; 0<y<L \\ u(0,y)=u(L,y)=0 \\ u(x,0)=0 \quad u(x,L)=x(L-x) \end{cases}$$

2) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad in \quad 0<x<L \;,\; 0<y<L \\ u(0,y)=u(L,y)=0 \\ u(x,0)=0 \quad u(x,L)=\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \end{cases}$$

3) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad in \quad 0<x<L \;,\; 0<y<L \\ u(0,y)=0 \quad u(L,y)=1+\cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right) \\ u_y(x,0)=u_y(x,L)=0 \end{cases}$$

4) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad in \quad 0<x<L \;,\; 0<y<L \\ u(0,y)=\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right) \quad u(L,y)=\cos\left(\frac{3\pi y}{L}\right) \\ u_y(x,0)=u_y(x,L)=0 \end{cases}$$

5) א) עבור אילו ערכים של הפרמטר K מתקיים התנאי ההכרחי לפתרון בעיה ניומן הבאה?

$$\begin{cases} u_{xx}+u_{yy}=0 \quad in \quad 0<x<2\pi \;,\; 0<y<\pi \\ u_x(0,y)=u_y(x,0)=u_y(x,\pi)=0 \\ u_x(2\pi,y)=K\cos^2(2y)+2+3\cos(y) \end{cases}$$

ב) פתרו את הבעיה הקודמת עבור ה K שמצאתם בסעיף א' ובהנחה כי $u(0,0)=10$

תשובות סופיות

1) $$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8L^2}{\left(\pi[2k-1]\right)^3\sinh\left(\pi[2k-1]\right)}\sin\left(\frac{[2k-1]\pi x}{L}\right)\sinh\left(\frac{[2k-1]\pi}{L}y\right)$$

2) $$u(x,y)=\frac{1}{\sinh(3\pi)}\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\sinh\left(\frac{3\pi}{L}y\right)$$

3) $$u(x,y)=\frac{1}{L}x+\frac{1}{\sinh(2\pi)}\cos\left(\frac{2\pi y}{L}\right)\sinh\left(\frac{2\pi}{L}x\right)$$

4)

$$u(x,y)=\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)\cosh\left(\frac{\pi x}{L}\right)-\frac{\cosh(\pi)}{\sinh(\pi)}\cos\left(\frac{\pi y}{L}\right)\sinh\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\frac{1}{\sinh(3\pi)}\cos\left(\frac{3\pi y}{L}\right)\sinh\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$$

5) א) $K=-4$

ב)

$$u(x,y)=10+\frac{1}{2\sinh(8\pi)}-\frac{3}{\sinh(2\pi)}+\frac{3}{\sinh(2\pi)}\cos(y)\cosh(x)-\frac{1}{2\sinh(8\pi)}\cos(4y)\cosh(4x)$$

עקרון הממוצע

נניח כי u הרמונית בעיגול $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<R^2$ ורציפה על השפה

אזי $u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(x_0+\rho\cos(\theta),y_0+\rho\sin(\theta))d\theta$ לכל $0<\rho\le R$

שאלות

1) נתונה בעיית דיריכלה

$$\begin{cases}\triangle u=0 & \text{in} \quad x^2+y^2<4 \\ u(x,y)=|x| & \text{on} \quad x^2+y^2=4\end{cases}$$

חשבו את $u(0,0)$ בלי לפתור את הבעיה

2) נתונה בעיית דיריכלה

$$\begin{cases}\triangle u=0 & \text{in} \quad x^2+y^2<4 \\ u(x,y)=y+y^2 & \text{on} \quad x^2+y^2=4\end{cases}$$

חשבו את $u(0,0)$ בלי לפתור את הבעיה

3) נתונה בעיית דיריכלה

$$\begin{cases}\triangle u=0 & \text{in} \quad x^2+y^2<9 \\ u(x,y)=x^2+x+y & \text{on} \quad x^2+y^2=9\end{cases}$$

חשבו את $u(0,0)$ בלי לפתור את הבעיה

4) נתונה בעיית דיריכלה

$$\begin{cases}\triangle u=0 & \text{in} \quad x^2+y^2<1 \\ u(x,y)=e^x & \text{on} \quad x^2+y^2=1\end{cases}$$

הוכיחו ע״י עקרון הממוצע כי $u(0,0)\ge\frac{1}{e}$

5) נתונות הבעיות הבאות

$$\begin{cases}\Delta u=\sinh(x) & x^2+y^2<1\\ u(x,y)=x^2-2xy & x^2+y^2=1\end{cases}\qquad \begin{cases}\Delta v=\sinh(x) & x^2+y^2<1\\ v(x,y)=-y^2 & x^2+y^2=1\end{cases}$$

הוכיחו ע"י עקרון הממוצע כי $v(0,0)<u(0,0)$

6) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases}\Delta u=2 & x^2+y^2<1\\ u(x,y)=x^2+xy & x^2+y^2=1\end{cases}$$

הוכיחו כי $u(0,0)=0$

7) נתונה פונקציה הרמונית ב - $\mathbb{R}^2$ כך ש - $u(0,0)>0$

הוכיחו כי לכל $\varepsilon>0$ קיימת נקודה (x_0,y_0) כך ש $x_0^{\,2}+y_0^{\,2}=\varepsilon^2$

ו - $u(x_0,y_0)>0$.

תשובות סופיות

1) $u(0,0)=\dfrac{3}{\pi}$

2) $u(0,0)=2$

3) $u(0,0)=\dfrac{9}{2}$

4) הוכחה

5) הוכחה

6) הוכחה

7) הוכחה

עקרון המקסימום והמינימום

<u>עקרון המקסימום עבור פונקציות הרמוניות</u>:

נניח כי $\Delta u = 0$ בתחום חסום Ω וכי u רציפה על השפה $\partial\Omega$

אז המקסימום המוחלט של u בתחום $\overline{\Omega}$ נמצא על השפה $\partial\Omega$

ולא ייתכן מקסימום מקומי (אלא אם כן u קבועה).

<u>עקרון המינימום עבור פונקציות הרמוניות</u>:

נניח כי $\Delta u = 0$ בתחום חסום Ω וכי u רציפה על השפה $\partial\Omega$

אז המינימום המוחלט של u בתחום $\overline{\Omega}$ נמצא על השפה $\partial\Omega$

ולא ייתכן מינימום מקומי (אלא אם כן u קבועה).

שאלות

1) נתונות הבעיות הבאות בטבעת $\frac{1}{2} < r < \frac{3}{2}$

$$\Delta v = \cos^2(\theta) \qquad \Delta u = 1 - \sin^2(\theta)$$

$$v\left(\frac{1}{2},\theta\right) = -\frac{1}{2}\left|\cos(\theta)\right| \qquad u\left(\frac{1}{2},\theta\right) = \frac{1}{2}\left|\sin(\theta)\right|$$

$$v\left(\frac{3}{2},\theta\right) = \frac{9}{4}\cos^2(\theta) \qquad u\left(\frac{3}{2},\theta\right) = \frac{9}{4}$$

בדקו מה יותר גדול: $v\left(1,\frac{2\pi}{3}\right)$ או $u\left(1,\frac{2\pi}{3}\right)$?

2) נתונה בעיית דיריכלה

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in} \quad x^2 + y^2 < 4 \\ u(x,y) = y + y^2 & \text{on} \quad x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

חשבו את המינימום של $u(x,y)$ בתחום $x^2 + y^2 \le 4$

3) תהי $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בריבוע $D=\{(x,y)\,|\,0<x<\pi, 0<y<\pi\}$
ונתון כי

$$u(x,0)=u(x,\pi)=0 \qquad 0\le x\le \pi$$

$$u(0,y)=u(\pi,y)=y^4-\pi^3 y \qquad 0\le y\le \pi$$

הוכיחו כי $u(x,y)>-\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}\pi^4$ לכל $(x,y)\in D$

4) תהי $u(x,y)$ פונקציה הרמונית בעיגול $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<8\}$
המקיימת

$$u(x,y)=2xy \qquad x^2+y^2=8$$

הוכיחו כי $-8<u(x,y)<8$ לכל $(x,y)\in D$

5) נניח כי $u(x,y), v(x,y)$ מקיימות:

$$\begin{cases}\Delta u=u & 1<r<2\\ u|_{r=1}=\cos^2(\theta) & u|_{r=2}=\sin^2(\theta)\end{cases} \qquad \begin{cases}\Delta v=u & 1<r<2\\ v|_{r=1}=-\sin^2(\theta) & v|_{r=2}=0\end{cases}$$

הוכיחו כי $v<u<1+v$ לכל $(x,y)\in D=\{1<x^2+y^2<4\}$

6) נניח כי $u(x,y), v(x,y)$ מקיימות:

$$\begin{cases}\Delta u=x^2+y^2 & x^2+y^2<1\\ u=\cos^2(x) & x^2+y^2=1\end{cases} \qquad \begin{cases}\Delta v=x^2+y^2 & x^2+y^2<1\\ v=x^2-\sin^2(x) & x^2+y^2=1\end{cases}$$

הוכיחו כי $v<u<1+v$ לכל $(x,y)\in D=\{1<x^2+y^2<1\}$

7) נניח כי $u(x,y)$ מקיימת:

$$\begin{cases}\Delta u=2 & x^2+y^2<1\\ u=x^2+\sin^2(x) & x^2+y^2=1\end{cases}$$

הוכיחו כי $x^2<u(x,y)<1+x^2$ בתחום $D=\{x^2+y^2<1\}$

תשובות סופיות

1) $u\left(1,\frac{2\pi}{3}\right)>v\left(1,\frac{2\pi}{3}\right)$

2) $-\frac{1}{4}$

3) הוכחה

4) הוכחה

5) הוכחה

6) הוכחה

7) הוכחה