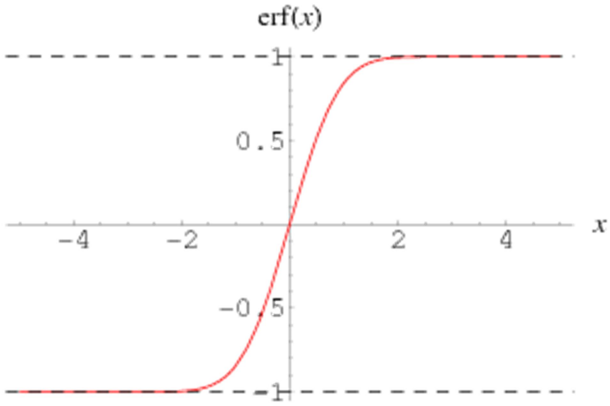
משוואת החום

נוסחאות שימושיות

פונקציית השגיאה - הגדרה

$$erf\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{x}e^{-t^{2}}dt$$



תכונות של פונקציית השגיאה

$$\lim_{x\to\infty}erf\left(x\right)=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}erf\left(x\right)=-1$$

$$erf\left(x\right)=-erf\left(-x\right)$$

$$\frac{d}{dx}erf\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^{2}}$$

פתרון מד״ר לינארית מסדר ראשון

על מנת לפתור את המשוואה $y'\left(x\right)+p\left(x\right)y\left(x\right)=g\left(x\right)$

נכפיל בגורם אינטגרציה $\mu\left(x\right)=e^{\int p\left(x\right)dx}$ ונקבל $\left(\mu\left(x\right)\cdot y\left(x\right)\right)'=\mu\left(x\right)\cdot g\left(x\right)$

מקרה נפוץ :

הפתרון הכללי של המד״ר $T'\left(t\right)+\alpha\cdot T\left(t\right)=0$ הוא $T\left(t\right)=Ae^{-\alpha\cdot t}$

($\alpha,A\in\mathbb{R}$ קבועים)

בעיות שטורם-ליוביל נפוצות

נניח כי $y''(x)+\lambda^2 y(x)=0$ בתחום $0<x<L$

תנאי שפה	פונקציות עצמיות	ערכים עצמיים	
$y(0)=y(L)=0$	$y_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x)=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$	$n\geq 1$
$y'(0)=y'(L)=0$	$y_n(x)=\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x)=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$	$n\geq 0$
$y'(0)=y(L)=0$	$y_n(x)=\cos\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x)=\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{L}\right)^2$	$n\geq 1$
$y(0)=y'(L)=0$	$y_n(x)=\sin\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi x}{L}\right)$	$\lambda_n(x)=\left(\frac{2n-1}{2}\frac{\pi}{L}\right)^2$	$n\geq 1$

משוואת החום בקטע אינסופי

<u>נוסחת פוואסון</u> :

הפתרון של הבעיה

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

נתון על ידי הנוסחה הבאה

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u(y,0) e^{-\frac{(y-x)^2}{4a^2 t}} dy$$

שאלות

1) נתונה המשוואה

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} T_1 & x \ge 0 \\ T_2 & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

א. פתרו את המשוואה

ב. חשבו $\lim_{t \to \infty} u(x,t)$

2) פתרו את הבעיה הבאה ע"י נוסחת פוואסון

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^x \end{cases}$$

3) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases} \end{cases}$$

4) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty \quad , \quad t > 0 \\ u(x,0) = e^{-x^2} \end{cases}$$

5) פתרו את הבעיה הבאה

$$u_t = u_{xx} \qquad -\infty < x < \infty \ , \ t > 0$$

א) כאשר $u(x,0) = 2$

ב) כאשר $u(x,0) = x^2$ רמז: הגדירו $q = u_t$

6) נתונה הבעיה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u & -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} & \end{cases}$$

א) מצאו את $u(x,t)$ רמז: כדאי להגדיר $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} v(x,t)$

ב) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,dx$ לכל $t > 0$

7) פתרו את הבעיה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = \cos(x) & \end{cases}$$

רמז: הגדירו פונקציה חדשה $w(x,t) = u_t(x,t)$

תשובות סופיות

1) א) $u(x,t)=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_1-T_2}{2}\cdot erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)$ ב) $\lim_{t\to\infty} u(x,t)=\frac{T_1+T_2}{2}$

2) $u(x,t)=e^{x+a^2t}$

3) $u(x,t)=\frac{1}{2}erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)+erf\left(\frac{1-x}{2\sqrt{t}}\right)-\frac{1}{2}$

4) $u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1+4t}}e^{-\frac{x^2}{(1+4t)}}$

5) א) $u(x,t)=2$ ב) $u(x,t)=2t+x^2$

6) א) $u(x,t)=\frac{1}{2}e^{-t}\cdot erf\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)+\frac{1}{2}e^{-t}$ ב) $\int_{-\infty}^{\infty} u_x^2(x,t)\,dx=\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2t}$

7) $u(x,t)=e^{-t}\cos(x)$

הפרדת משתנים בקטע סופי

נתונה הבעיה הבאה

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad 0 < x < L \quad , \quad t > 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$ (תנאי התחלה)

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \quad \text{or} \quad u_x(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \quad \text{or} \quad u_x(L,t) = 0 \end{cases}$$ (תנאי שפה)

שלבי הפתרון:

1) נמצא את כול הפתרונות מהצורה $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$ ונרשום את הפתרון הכללי כך $u(x,t) = \sum X_n(x)\cdot T_n(t)$

2) נציב תנאי התחלה ונמצא את המקדמים

סיכום המקרים הנפוצים:

תנאי שפה	צורת הפתרון
$u(0,t) = u(L,t) = 0$	$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$
$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$	$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi a}{L}\right)^2 t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$

שאלות

1) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi \;,\; t>0 \\ u(x,0)=\sin(x) \\ u(0,t)=u(\pi,t)=0 \end{cases}$$

2) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi \;,\; t>0 \\ u(x,0)=\frac{1}{2}+3\sin^2(x) \\ u_x(0,t)=u_x(\pi,t)=0 \end{cases}$$

3) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה

$$\begin{cases} u_t = 16u_{xx} & 0<x<3 \;,\; t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(3,t)=0 \end{cases}$$

4) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & 0<x<2 \;,\; t>0 \\ u(x,0)=6+4\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right) \\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0 \end{cases}$$

5) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה

$$\begin{cases} u_t = 9u_{xx} & 0<x<2 \;,\; t>0 \\ u(x,0)=x \\ u_x(0,t)=u_x(2,t)=0 \end{cases}$$

6) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0<x<\pi \ , \ t>0 \\ u(x,0) = x \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

7) פתרו על ידי הפרדת משתנים את משוואת החום הבאה

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + \dfrac{\sin(2x)}{2} & 0<x<\pi \ , \ t>0 \\ u(x,0) = \sin(x)\left(1-\cos(3x)\right) \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

<u>רמז:</u> היעזרו בפונקציית עזר מהצורה $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$

תשובות סופיות

1) $u(x,t)=e^{-t}\sin(x)$

2) $u(x,t)=2-\frac{3}{2}e^{-4t}\cos(2x)$

3) $u(x,t)=\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12}{\pi^2(2k-1)^2}e^{-\left(\frac{4\pi(2k-1)}{3}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{3}x\right)$

4) $u(x,t)=6+4e^{-\frac{81\pi^2}{4}t}\cos\left(\frac{3\pi}{2}x\right)$

5) $u(x,t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi^2(2k-1)^2}e^{-\left(\frac{3\pi(2k-1)}{2}\right)^2 t}\cos\left(\frac{\pi(2k-1)}{2}x\right)$

6) $u(x,t)=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2 t}\sin(nx)$

7) $u(x,t)=e^{-4t}\sin(x)+\frac{15}{32}e^{-16t}\sin(2x)-\frac{1}{2}e^{-64t}\sin(4x)+\frac{\sin(2x)}{32}$

עקרון דוהמל

הפתרון של הבעיה

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t) & 0<x<L \;,\; t>0 \\ u(x,0)=0 & \\ u(0,t)=0 \qquad u(L,t)=0 & \end{cases}$$

נתון ע"י $u(x,t)=\int_0^t p(x,t,\tau)d\tau$ כאשר $p(x,t,\tau)$ הינה פתרון לבעיה

$$\begin{cases} p_t = a^2 p_{xx} & 0<x<L \;,\; t>\tau \\ p(x,\tau,\tau)=f(x,\tau) & \\ p(0,t,\tau)=0 \qquad p(L,t,\tau)=0 & \end{cases}$$

<u>הערות:</u>

1) על מנת לפתור את הבעיה עבור $p(x,t,\tau)$ נגדיר משתנה חדש $T=t-\tau$

ונקבל את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} p_T = a^2 p_{xx} & 0<x<L \;,\; T>0 \\ p(x,T=0)=f(x,\tau) & \\ p(0,T)=0 \qquad p(L,T)=0 & \end{cases}$$

2) באופן דומה עבור תנאי שפה ניומן הומוגניים או בתחום אינסופי

שאלות

1) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 6\sin(\frac{2\pi x}{L}) & 0<x<L \ , \ t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u(0,t)=0 \qquad u(L,t)=0 \end{cases}$$

2) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + x^2 t & -\infty<x<\infty \ , \ t>0 \\ u(x,0)=0 \end{cases}$$

3) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + 2x\sin(t) & -\infty<x<\infty \ , \ t>0 \\ u(x,0)=0 \end{cases}$$

4) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^t\cos(\pi x) & 0<x<1 \ , \ t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u_x(0,t)=u_x(1,t)=0 \end{cases}$$

5) פתרו את הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + e^{-\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 t}\sin(\frac{\pi x}{L}) & 0<x<L \ , \ t>0 \\ u(x,0)=0 \\ u(0,t)=0 \qquad u(L,t)=0 \end{cases}$$

תשובות סופיות

1) $$u(x,t)=6\left(\frac{L}{2\pi a}\right)^2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left[1-e^{-\left(\frac{2\pi a}{L}\right)^2 t}\right]$$

2) $$u(x,t)=\frac{1}{2}x^2t^2+\frac{1}{3}a^2t^3$$

3) $$u(x,t)=2x\left[1-\cos(t)\right]$$

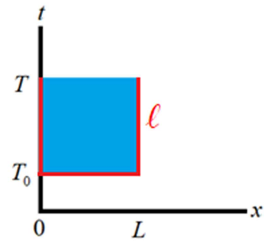
4) $$u(x,t)=\left(e^t-1\right)\cos(\pi x)$$

5) $$u(x,t)=te^{-\left(\frac{\pi a}{L}\right)^2 t}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

עקרון המקסימום והמינימום

משפט:

אם הפונקציה $u(x,t)$ רציפה במלבן $T_0 \le t \le T$, $0 \le x \le L$



ומקיימת את משוואת החום ההומוגנית בתחום הפנימי אז המקסימום והמינימום שלה במלבן מתקבלים על השפה הפרבולית:

$$\ell = \{(x,T_0) \mid 0 \le x \le L\} \cup \{(0,t) \mid T_0 \le t \le T\} \cup \{(L,t) \mid T_0 \le t \le T\}$$

ולא בנקודות הפנימיות (אלא אם כן הפונקציה קבועה).

שאלות

1) נתונה הבעיות הבאות בתחום $t > 0$ $0 < x < 1$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^t\cos(x) \\ u(x,0) = x^2 \\ u(0,t) = u(1,t) = t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_t = v_{xx} + e^t\cos(x) \\ v(x,0) = x \\ v(0,t) = v(1,t) = t \end{cases}$$

קבעו איזה ביטוי יותר גדול: $v\left(\frac{1}{2},1\right)$ או $u\left(\frac{1}{2},1\right)$

2) נתונה הבעיות הבאות בתחום $t > 0$ $0 < x < 1$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin(t)\cos(x) \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v_t = v_{xx} + \sin(t)\cos(x) \\ v(x,0) = 0 \\ v(0,t) = v(1,t) = -\sin^2(\pi t) \end{cases}$$

קבעו איזה ביטוי יותר גדול: $v\left(\frac{1}{2},1\right)$ או $u\left(\frac{1}{2},1\right)$

3) נתונה הבעיה הבאה בתחום $t>0$ $0<x<1$

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - u \\ u(x,0) = x(x-1) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הוכיחו כי $-\frac{1}{4e} < u\left(\frac{1}{2},1\right) < 0$

רמז: הגדירו את הפונקציה $h(x,t) = u(x,t)e^{\delta t}$ עבור קבוע δ מתאים

4) נתונה בעיית החום הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - e^{-t} \qquad 0<x<1 \qquad t>0 \\ u(x,0) = \sin(\pi x) \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \end{cases}$$

הראו כי $u(x,t) < 1$ בתחום

5) נתון כי $u(x,t)$ הוא פתרון של הבעיה הבאה

$$u_t = u_{xx} - \sin(\pi x) \qquad 0<x<1 \ , \ t>0$$

$$u(0,t) = \sin(\pi t) \qquad u(1,t) = \cos(\pi t)$$

$$u(x,0) = x$$

הוכיחו כי $u\left(\frac{1}{2},\pi\right) < \sqrt{\pi}$

6) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + F(x,t) \qquad 0<x<L \ , \ t>0 \\ u(x,0) = f(x) \\ u(0,t) = g(t) \qquad u(L,t) = h(t) \end{cases}$$

הוכיחו כי הפתרון יחיד.

תשובות סופיות

1) $u\left(\frac{1}{2},1\right) < v\left(\frac{1}{2},1\right)$

2) $u\left(\frac{1}{2},1\right) > v\left(\frac{1}{2},1\right)$

3) הוכחה

4) הוכחה

5) הוכחה

6) הוכחה

אסימפטוטיקה בתחום אינסופי

נתונה משוואת החום

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = h(x) \end{cases}$$

נניח כי $|h(x)| \le \beta e^{-\alpha|x|}$ עבור $\alpha, \beta > 0$

נגדיר את הביטויים הבאים

$$M_0 = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)\,ds$$

$$M_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)(x-s)^2\,ds$$

$$M_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(s)(x-s)^4\,ds$$

אם $M_0 \ne 0$ אז $u(x,t) \approx \frac{M_0}{2a\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{t}}$ עבור t מאוד גדול

אם $M_0 = 0$ ו - $M_1(x) \ne 0$ אז $u(x,t) \approx -\frac{M_1(x)}{8a^3\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}$ עבור t מאוד גדול

שאלות

1) נתונה הבעיה

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = x^2 e^{-|x|} \end{cases}$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty}\left[t^{\frac{1}{3}} \cdot u(1,t)\right]$

2) נתונה הבעיה

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 2xe^{-x^2} \end{cases}$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty}\left[\sqrt{t} \cdot u(x,t)\right]$ לכל x ממשי

3) נתונה המשוואה

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = e^{-|x|} \end{cases}$$

חשבן $\lim_{t\to\infty}\left[\sqrt{t}\cdot u(x,t)\right]$ לכל x ממשי

4) נתונה המשוואה

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} & -\infty < x < \infty \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 1 + e^{-|x|} \end{cases}$$

חשבן $\lim_{t\to\infty}\left[u(x,t)\right]$ לכל x ממשי

תשובות סופיות

1) $\lim_{t\to\infty}\left[t^{\frac{1}{3}}\cdot u(1,t)\right] = 0$

2) $\lim_{t\to\infty}\left[\sqrt{t}\cdot u(x,t)\right] = 0$

3) $\lim_{t\to\infty}\left[\sqrt{t}\cdot u(x,t)\right] = \dfrac{1}{a\sqrt{\pi}}$

4) $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 1$

אסימפטוטיקה בתחום סופי

שאלות

1) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 1 \\ u_x(0,t) = 1 \qquad u_x(1,t) = \dfrac{t^2}{t^2+1} \end{cases}$$

חשבו $U(x) = \lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$

2) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + x & -1 < x < 1 \ , \ t > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_x(-1,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} u(0,t)$

3) נתונה הבעיה הבאה

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \dfrac{1}{(t+1)^{\alpha}} & 0 < x < 1 \ , \ t > 0 \ , \ \alpha > 1 \\ u(x,0) = x \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \end{cases}$$

חשבו $\lim\limits_{t\to\infty} u(x,t)$

תשובות סופיות

1) $U(x)=x+\frac{3}{2}-\frac{\pi}{2}$

2) $U(x)=-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2}x+c_2$

3) $U(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{1-\alpha}$