

הקדמה

דוגמאות למד"ח מסדר 2:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \quad \text{משוואת הגלים}$$

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad \text{משוואת החום}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad \text{משוואת לפלס}$$

הצורה הכללית: $a_{11} \cdot u_{xx} + 2a_{12} \cdot u_{xy} + a_{22} \cdot u_{yy} + b_1 \cdot u_x + b_2 \cdot u_y + c \cdot u + f = 0$

נגדיר את הדיסקרימיננטה $\Delta = (a_{12})^2 - a_{11}a_{22}$ ונפתור את המד"ח הבאה

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{(a_{12})^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

צורה קנונית	החלפת משתנים	קווים אופייניים	סימן הדיסקרימיננטה	סוג המשוואה
$w_{\xi\eta} + \dots = 0$	$\xi = \phi(x, y)$ $\eta = \psi(x, y)$	$\phi(x, y) = c_1$ $\psi(x, y) = c_2$	$\Delta > 0$	היפרבולית
$w_{\eta\eta} + \dots = 0$	$\xi = \phi(x, y)$ $\eta = y$ או $\eta = x$	$\phi(x, y) = c$	$\Delta = 0$	פרבולית
$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + \dots = 0$	$\xi = \text{Re}\{\phi(x, y)\}$ $\eta = \text{Im}\{\phi(x, y)\}$	$\phi(x, y) = c$ $\overline{\phi(x, y)} = c$	$\Delta < 0$	אליפטית

נוסחאות גזירה:

נניח כי $u(x, y) = w(\xi(x, y), \eta(x, y))$ פונקציות גזירות פעמיים ברציפות, אזי

$$u_x = w_\xi \cdot \xi_x + w_\eta \cdot \eta_x$$

$$u_y = w_\xi \cdot \xi_y + w_\eta \cdot \eta_y$$

$$u_{xx} = w_{\xi\xi} (\xi_x)^2 + 2w_{\xi\eta} \eta_x \xi_x + w_\xi \xi_{xx} + w_{\eta\eta} (\eta_x)^2 + w_\eta \eta_{xx}$$

$$u_{xy} = w_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + w_{\xi\eta} (\eta_y \xi_x + \xi_y \eta_x) + w_\xi \xi_{xy} + w_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + w_\eta \eta_{xy}$$

$$u_{yy} = w_{\xi\xi} (\xi_y)^2 + 2w_{\xi\eta} \eta_y \xi_y + w_\xi \xi_{yy} + w_{\eta\eta} (\eta_y)^2 + w_\eta \eta_{yy}$$

מד"ח נפוצה:

הפתרון הכללי של $y'(x) + c \cdot y(x) = 0$ כאשר c קבוע הוא $y(x) = Ae^{-cx}$

סיווג משוואות מסדר שני

שאלות

(1) סווגו את המשוואה $2u_{xx} + 10u_{xy} + 8u_{yy} = 0$ והעבירו אותה לצורה קנונית

(2) סווגו את המשוואה $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$ והעבירו אותה לצורה קנונית

(3) סווגו את המשוואה $u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$ בתחום $x > 0$ והעבירו אותה לצורה קנונית

(4) נתונה המשוואה $2x^2u_{xx} + 4xyu_{xy} + 2y^2u_{yy} - 2yu_x + ye^x = 0$ בתחום $x, y > 0$

א. הוכיחו כי המשוואה פרבולית

ב. מצאו צורה קנונית

(5) נתונה המשוואה $2u_{xx} - 2(1+y^2)^2u_{yy} - 4y(1+y^2)u_y = 0$

א. הוכיחו כי המשוואה היפרבולית

ב. מצאו צורה קנונית

ג. מצאו פתרון כללי למשוואה

(6) נתונה המשוואה $2u_{xx} + 4u_{xy} - 6u_{yy} = -4(y-3x)^2 + 2\sin(2x+2y)$

א. הוכיחו כי המשוואה היפרבולית

ב. מצאו צורה קנונית

ג. מצאו פתרון כללי למשוואה

(7) נתונה המשוואה $2u_{xx} + 12u_{xy} + 18u_{yy} = 2e^x \sin(y-3x)$

א. הוכיחו כי המשוואה פרבולית

ב. מצאו צורה קנונית

ג. מצאו פתרון כללי למשוואה

(8) נתונה המשוואה $2u_{xx} + 4u_{xy} - 6u_{yy} = 0$

- א. הוכיחו כי המשוואה היפרבולית
 ב. מצאו צורה קנונית
 ג. מצאו פתרון כללי למשוואה

(9) נתונה המשוואה $2u_{xx} + 4u_{xy} + 2u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$

- א. הוכיחו כי המשוואה פרבולית
 ב. מצאו צורה קנונית
 ג. מצאו פתרון כללי למשוואה

(10) נתונה המשוואה $2u_{xx} - 2y^2u_{yy} - 2yu_y = 0$ בתחום $y > 0$

- א. הוכיחו כי המשוואה היפרבולית
 ב. מצאו צורה קנונית
 ג. מצאו פתרון כללי למשוואה
 ד. מצאו פתרון למשוואה המקיים $u(0, y) = 2y^2$, $u_x(0, y) = 0$

תשובות סופיות

(1) היפרבולית, $w_{\xi\eta} = 0$

(2) פרבולית, $w_{\eta\eta} = 0$

(3) אליפטית, $w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} + \frac{1}{\eta} w_{\eta} = 0$

(4) (א) הוכחה (ב) $w_{\eta\eta} + 2\frac{\xi^2}{\eta^2} w_{\xi} + \frac{1}{\eta} e^{\xi} = 0$

(5) (א) הוכחה (ב) $w_{\xi\eta} = 0$

(ג) $u(x, y) = F(\arctan(y) + x) + G(\arctan(y) - x)$

(6) (א) הוכחה (ב) $-16w_{\xi\eta} = -2\xi^2 + \sin(2\eta)$

(ג) $u(x, y) = \frac{1}{24}(y-3x)^3(x+y) + \frac{\cos(2x+2y)}{32}(y-3x) + F(y-3x) + G(x+y)$

(7) (א) הוכחה (ב) $w_{\eta\eta} = e^{\eta} \sin(\xi)$

(ג) $u(x, y) = e^x \sin(y-3x) + f(y-3x) \cdot x + g(y-3x)$

(8) (א) הוכחה (ב) $w_{\xi\eta} = 0$

(ג) $u(x, y) = F(x+y) + G(y-3x)$

(9) (א) הוכחה

(ב) $w_{\eta\eta} + w_{\eta} = 0$

(ג) $u(x, y) = e^{-x} F(y-x) + G(y-x)$

(10) (א) הוכחה (ב) $w_{\xi\eta} = 0$ (ג) $u(x, y) = F(ye^x) + G(ye^{-x})$

(ד) $u(x, y) = y^2 e^{2x} + y^2 e^{-2x}$