# תכונות של פונקציות אנליטיות

**משפט ליוביל:**

אם $f(z)$ פונקציה שלמה (אנליטית בכל המישור המרוכב $\mathbb{C}$)

וחסומה בכל המישור המרוכב $\mathbb{C}$ (כלומר קיים $M>0$ כך ש $|f(z)|<M \quad \forall z\in\mathbb{C}$)

אז $f(z)$ פונקציה קבועה.

**אפס מבודד:**

נקי' $z_0$ תקרא אפס מבודד של $f(z)$ אם קיימת סביבה של $z_0$ בה $f(z)$ אינה מתאפסת, פרט לנקודה $z_0$.

**אפס לא מבודד:**

נקי' $z_0$ תקרא אפס לא מבודד של $f(z)$ אם ההגדרה הקודמת לא מתקיימת וזה שקול לכך שקיימת סדרת נקודות שונות $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$ עבורה $f(z_n)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$

**משפט האפסים:**

ניסוח 1: אם $f(z)$ אנליטית בקבוצה פתוחה וקשירה $U$

ויש ל - $f(z)$ אפס לא מבודד ב $U$ אז $f(z)\equiv 0$.

ניסוח 2: אם $f(z)$ אנליטית בקבוצה פתוחה וקשירה $U$ וקיימת סדרת נקודות שונות $z_n$ ב - $U$ כך ש:

א. $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$

ב. $f(z_n)=0$ לכל $n\in\mathbb{N}$

ג. $z_0\in U$

אז $f(z)\equiv 0$ ב $U$.

**<u>עקרון היחידות:</u>**

אם $f(z),g(z)$ אנליטיות בקבוצה פתוחה וקשירה $U$

וקיימת סדרת נקודות שונות $z_n$ ב - $U$ כך ש: א. $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$

ב. $f(z_n)=g(z_n)$ לכל $n\in\mathbb{N}$

ג. $z_0\in U$

אז $f(z)\equiv g(z)$ . ב $U$.

**<u>הגדרת מקסימום מקומי:</u>**

נקודה $z_0$ תקרא מקסימום מקומי של $|f(z)|$ אם ורק אם

קיים $\varepsilon>0$ כך ש - $|f(z)|\le|f(z_0)|$ לכל $z\in B_\varepsilon(z_0)$ (כלומר בסביבת הנקודה $z_0$)

הערה: $B_\varepsilon(z_0)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z-z_0|<\varepsilon\}$

**<u>הגדרת מקסימום מוחלט:</u>**

נקודה $z_0$ תקרא מקסימום מוחלט של $|f(z)|$ בתחום $U$ אם ורק אם

$|f(z)|\le|f(z_0)|$ לכל $z\in U$. (כלומר בכל התחום כולו)

**<u>עקרון המקסימום (גרסה 1):</u>**

אם $f(z)$ אנליטית שאינה קבועה בקבוצה פתוחה וקשירה $D$

אז ל - $|f(z)|$ אין מקסימום מקומי ב $D$

(כלומר לא קיימת נקודה $z_0\in D$ כך ש $|f(z)|\le|f(z_0)|$ בסביבה קטנה מספיק של $z_0$)

**<u>עקרון המקסימום (גרסה 2):</u>**

אם $f(z)$ אנליטית בקב' פתוחה וקשירה $D$ וקיים ל $|f(z)|$ מקסימום מקומי ב $D$

(כלומר קיימת נקודה $z_0\in D$ כך ש $|f(z)|\le|f(z_0)|$ בסביבה קטנה מספיק של $z_0$)

אז $f(z)$ קבועה.

**<u>עקרון המקסימום (גרסה 3):</u>**

אם $f(z)$ אנליטית בקבוצה פתוחה קשירה וחסומה $U$ ורציפה על השפה $\partial U$

אז המקסימום המוחלט של $|f(z)|$ ב $\overline{U}$ מתקבל על השפה $\partial U$, כלומר

$$\max_{z\in\overline{U}}|f(z)|=\max_{z\in\partial U}|f(z)|$$

הערה 1: אם $f(z)$ קבועה, אז כל נקודה ב $\overline{U}$ היא נקודת מקסימום מוחלט,

בפרט ניתן להגיד כי המקסימום המוחלט מתקבל על השפה.

הערה 2: אם $f(z)$ אינה קבועה, אז מגרסה 1 נובע כי המקסימום המוחלט מתקבל

**רק** על השפה. כלומר ניתן לרשום $|f(z)|<\max_{z\in\partial U}|f(z)|$ לכל $z\in U$

הערה 3: התנאי ש $f(z)$ רציפה על השפה $\partial U$ הכרחי ולא ניתן לוותר עליו.

למשל אם ניקח $f(z)=\frac{1}{1-z}$ ו - $U=\{|z|<1\}$

אז ל - $|f(z)|$ אין מקסימום על השפה.

הערה 4: בעזרת עקרון המקסימום ניתן להוכיח את עקרון המינימום, אך לשם כך

צריך לדרוש בנוסף כי $f(z)$ לא תתאפס בתחום הפנימי. מקבלים את אותם

הגרסאות בדיוק אך עם הדרישה הנוספת ש - $f(z)$ לא מתאפסת בתחום

הפנימי (ראו תרגיל 6 להוכחה).


כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

# משפט ליוביל

## שאלות

1) נתון כי $f(z)$ שלמה ומקיימת $\left|\sin(z)-z\cdot f(z)\right|<2$ $\forall z\in\mathbb{C}$. מצאו את $f(z)$

2) הוכיחו כי קיים $z\in\mathbb{C}$ עבורו $\left|\cos(z)\right|>1$ ע"י משפט ליוביל

3) נתון כי $f=u+iv$ פונקציה שלמה כך ש - $v(x,y)\le 0$ לכל $(x,y)$
הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה. רמז: התבוננו בפונקציה $g(z)=e^{-i\cdot f(z)}$

4) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $u\le 0$ (לכל $z$).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{f(z)}$.

5) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $u\ge 0$ (לכל $z$).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-f(z)}$.

6) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $v\ge 0$ (לכל $z$).

7) נתונה פונקציה שלמה $f(z)$, המקיימת $\left|f(z)\right|\ge 1$ לכל $z$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.
רמז: התבוננו בפונקציה $\frac{1}{f(z)}$.

8) מצאו את כל הפונקציות השלמות $f(z)=u+iv$, המקיימות $v\le 0$ (לכל $z$).
רמז: התבוננו בפונקציה $e^{-i\cdot f(z)}$.

9) הוכיחו כי כל הפונקציות השלמות $f(z)$, המקיימות
$\left|f(z)\right|\le 4+5\left|z\right|^{\frac{4}{5}}$ $\forall z\in\mathbb{C}$ הן פונקציות קבועות.

10) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $\left|f(z)\right|\ge e^{\mathrm{Re}(z)}$ $\forall z\in\mathbb{C}$.
הוכיחו שקיים קבוע $C$ מרוכב, כך ש- $f(z)=C\cdot e^{z}$ $\forall z\in\mathbb{C}$.

11) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $f(0)=0$ ו-$f(1)=1$.
הוכיחו שקיים $C$ מרוכב, כך ש-$|f(c)|>2$.

12) נתון כי $f(z)$ שלמה, המקיימת $\lim_{z\to\infty} f(z)=2$. הוכיחו כי $f(z)\equiv 2$.

13) נתון כי $f(z)=u+iv$ שלמה המקיימת $u\cdot v\geq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$
הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה.

14) נתון כי $f(z)=u+iv$ שלמה המקיימת $u\geq v$ לכל $z\in\mathbb{C}$
הוכיחו כי $f(z)$ פונקציה קבועה.

15) האם קיימת פונקציה אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ כך ש

$$|f(z)|\geq\frac{1}{\sqrt{|z|}} \qquad \forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\} \ ?$$

הערה: ניתן להשתמש במשפט רימן
אם $g(z)$ אנליטית בסביבה נקובה של $z_0$ וחסומה שם
אז ניתן להגדיר אותה ב $z_0$ כך שתהיה אנליטית שם

16) הוכח או הפרך: אם $f(z)$ שלמה שאינה קבועה אז קיים $z\in\mathbb{C}$
כך ש $\operatorname{Re} f(z)>|f(z)|^2$.

17) הוכיחו כי אם $f(z)$ שלמה שאינה קבועה אז התמונה $f[\mathbb{C}]$ צפופה ב $\mathbb{C}$
הגדרה: קבוצה $A\subseteq\mathbb{C}$ תקרא צפופה ב $\mathbb{C}$ אם ורק אם לכל $z_0\in\mathbb{C}$
ולכל $R>0$ מתקיים $D(z_0,R)\cap A\neq\varnothing$

18) ידוע כי קיימת פונקציה $T(z):\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to D(0,1)$ אנליטית המקיימת
$T'(z)\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$.
הוכיחו כי כל פונקציה שלמה $f(z)$ המקיימת $f(z)\in\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ לכל $z\in\mathbb{C}$
הינה פונקציה קבועה.

19) נניח כי $f(z)$ שלמה ומקיימת $f(z)=f(z+1)=f(z+i)$ לכל $z\in\mathbb{C}$
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

## תשובות סופיות

1) $f(z)=\begin{cases}\frac{\sin(z)}{z} & z\neq 0\\ 1 & z=0\end{cases}$
2) הוכחה
3) הוכחה
4) הפונקציה הקבועה
5) הפונקציה הקבועה
6) הפונקציה הקבועה
7) הוכחה
8) הפונקציה הקבועה
9) הוכחה.
10) הוכחה.
11) הוכחה.
12) הוכחה.
13) הוכחה.
14) הוכחה.
15) לא קיימת.
16) הוכחה.
17) הוכחה.
18) הוכחה.
19) הוכחה.

# עקרון היחידות

## שאלות

1) הוכיחו כי אם $f(z)$ שלמה ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$, אז $f(z)\equiv z$.

2) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $D=\{z|\ |z|<1\}$ ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
מצאו את $f(z)$.

3) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $D=\{z\ |\ |z|<1.5\}$,
ומקיימת $f\left(\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{nz}{nz-0.5}dz$ $\forall n\in\mathbb{N}$.
מצאו את $f(z)$.

4) כמה פונקציות אנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|<1\}$,
מקיימות $f\left(\frac{1}{3n-1}\right)=\frac{2}{n}$ $\forall n\geq 2:$ ?

5) מצאו את כל הפונקציות האנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1\}$,
המקיימות $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sin(\pi n)$ $\forall n\geq 4$.

6) מצאו (אם ישנן) את כל הפונקציות האנליטיות $f(z)$ ב- $D=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1\}$
המקיימות

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}\frac{1}{n+1} & n=2k\\ \frac{1}{n+2} & n=2k+1\end{cases}\qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

7) הוכח או הפרך: לא קיימת פונקציה אנליטית בעיגול היחידה הפתוח $D$,
בעלת אינסוף אפסים ב $D$, שאינה פונקציית האפס..

8) הוכח או הפרך: קיימת פונקציה אנליטית בתחום $1<|z|<3$
כך שלכל $x$ ממשי המקיים $1<|x|<3$ מתקיים $f(x)=|x|^3$

9) נתונות $f(z),g(z)$ אנליטיות בתחום $D$ ויהיו $a,b\in D$
הוכיחו כי אם $\left(f(z)-a\right)\left(g(z)-b\right)=0$ לכל $z\in D$ אז בהכרח
$f(z)\equiv a$ או $g(z)\equiv a$

10) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $D(z_0,R)$ עבור $z_0\in\mathbb{C}$ ו - $R>0$
נניח בנוסף כי $f'(z_0)\neq 0$. הוכיחו כי קיים $r>0$ כך ש

$$\frac{2\pi i}{f'(z_0)}=\oint_{|z-z_0|=r}\frac{1}{f(z)-f(z_0)}dz$$

הערה: תרגיל זה דורש שימוש במשפט השארית (מי שלא למד עדיין – לדלג)

11) הוכח או הפרך:
נסמן $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<|z|<1\}$. נניח כי $f(z)$ אנליטית ב $D$ כך ש $f\left(\frac{1}{n}\right)=n$
לכל $n>1$ וכי $f(z)$ בעלת קוטב ב $z=0$
אז בהכרח $f(z)=\frac{1}{z}$ לכל $z\in D$

הערה: תרגיל זה דורש ידע על נקודות סינגולריות (מי שלא למד עדיין – לדלג)

12) הוכח או הפרך:
נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $|z|>1$ ונתון כי לכל $z\in(1,\infty)$ מתקיים ש
$f(z)$ ממשי. אז בהכרח גם לכל $z\in(-\infty,-1)$ מתקיים ש $f(z)$ ממשי

13) נניח כי $f(z)$ רציפה ב $|z|<1$ ומקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$ ו - $f\left(\frac{i}{2}\right)=0$

הוכיחו כי $f(z)$ אינה אנליטית ב $|z|<1$

14) (אתגר)

נניח כי $f(z)$ רציפה ב $\overline{D(0,1)}$ ואנליטית ב $D(0,1)$ המקיימת

$$\forall|z|=1 \qquad |f(z)|=1$$

הוכיחו כי יש מספר סופי בלבד של נקודות ב $D(0,1)$ בהן $f(z)$ מתאפסת.

רמז : היעזרו במשפט בולצאנו - וייארשטראס

## תשובות סופיות

1) הוכחה.

2) $f(z)=\frac{z}{1+z}$

3) $f(z)=z$

4) $f(z)=6\frac{z}{z+1}$

5) $f(z)\equiv 0$

6) לא קיימות כאלו פונקציות.

7) הפרכה. דוגמא נגדית: $f(z)=\sin\left(\frac{\pi}{1-z}\right)$

8) לא קיימת כזו פונקציה.

9) הוכחה

10) הוכחה

11) הוכחה

12) הוכחה

13) הוכחה

14) הוכחה

# עקרון המקסימום והמינימום

## שאלות

1) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $\left|f(z)\right|$, כאשר $f(z)=e^{-z^2}$
בתחום $D=\{z \mid |z|<1\}$.

2) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $\left|f(z)\right|$, כאשר $f(z)=e^{-z^2}$
בתחום $D=\{z \mid |z|\le 3\}$.

3) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $\left|f(z)\right|$, כאשר $f(z)=\cos(z)$
בתחום $D=\{z \mid 0\le \mathrm{Re}\{z\}\le 2\pi \ , \ 0\le \mathrm{Im}\{z\}\le 2\pi\}$.

4) מצאו (אם קיים) ערך מקסימלי של $\left|f(z)\right|$, כאשר $f(z)=e^{z^2}$
ואת כל הנקודות בהן הוא מתקבל

5) תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול $|z|\le R$ ומקיימת $\left|f(z)\right|>a \quad \forall |z|=R$
הוכיחו כי אם $\left|f(0)\right|<a$ אז בעיגול $|z|<R$ יש לפחות אפס אחד של $f(z)$

6) הוכיחו את עקרון המינימום :

**<u>(גרסה 1):</u>**

אם $f(z)$ אנליטית, אינה קבועה ואינה מתאפסת בקבוצה פתוחה וקשירה $U$

אז ל - $|f(z)|$ אין מינימום מקומי ב $U$

**<u>(גרסה 2):</u>**

אם $f(z)$ אנליטית בקבוצה פתוחה וקשירה $U$, אינה מתאפסת שם

וקיים ל $|f(z)|$ מינימום מקומי ב $U$ אז $f(z)$ קבועה.

**<u>(גרסה 3):</u>**

אם $f(z)$ אנליטית בקבוצה פתוחה קשירה וחסומה $U$, אינה מתאפסת שם

ורציפה על השפה $\partial U$. אז המינימום המוחלט של $|f(z)|$ ב $\overline{U}$ מתקבל על השפה

$\partial U$, כלומר

$$\min_{z\in\overline{U}}|f(z)|=\min_{z\in\partial U}|f(z)|$$

7) תהי $f(z)$ אנליטית ב $|z|\le 1$ ונניח שאינה מתאפסת שם.

נניח גם כי לכל $|z|=1$ מתקיים $|f(z)|=1$

א. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה

ב. האם סעיף א' נכון גם ללא הנחה ש $f(z)$ אינה מתאפסת ב $|z|\le 1$?

8) (עקרון המקסימום לפונקציות הרמוניות)

נניח כי $f(z)=u+iv$ אנליטית בתחום קומפקטי $\Omega$

הוכיחו כי $u(x,y)$ מקבלת ערך מקסימלי על השפה $\partial\Omega$

9) (עקרון המינימום לפונקציות הרמוניות)

נניח כי $f(z)=u+iv$ אנליטית בתחום קומפקטי $\Omega$

הוכיחו כי $u(x,y)$ מקבלת ערך מינימלי על השפה $\partial\Omega$

10) נניח גם כי $f(z),g(z)$ אנליטיות ב $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|\le 1\}$

נניח כי לכל $|z|=1$ מתקיים $\mathrm{Re}[f(z)]=\mathrm{Re}[g(z)]$

הוכיחו כי קיים קבוע $c\in\mathbb{C}$ כך ש $f(z)=g(z)+c$ לכל $z\in D$

11) יהי $p(z)=\sum_{k=0}^{k=n} a_k z^k$ פולינום ממעלה $n$ ($a_n \neq 0$)

נתון כי לכל $|z|=1$ מתקיים $|p(z)|\le 1$

הראו כי לכל $|z|\ge 1$ מתקיים $|p(z)|\le |z|^n$

**רמז:** הראו כי הפונקציה $f(z)=z^n p\left(\frac{1}{z}\right)$ היא פונקציה שלמה ומצאו לה חסם דיסק היחידה

**הערה:** ניתן להשתמש במשפט רימן - אם $f(z)$ אנליטית בסביבה נקובה של $z_0$ והגבול $\lim_{z\to z_0} f(z)$ קיים וסופי אזי $f(z)$ אנליטית גם ב $z_0$

במידה ונגדיר $f(z_0)=\lim_{z\to z_0} f(z)$.

12) יהי $R>0$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום

$$A=\{z=x+iy \mid -R\le x\le R, -R\le y\le R\}$$

נסמן את שפות התחום כך:

$$l_1=\{z=R+iy \mid -R\le y\le R\} \qquad l_3=\{z=-R+iy \mid -R\le y\le R\}$$
$$l_2=\{z=x+iR \mid -R\le x\le R\} \qquad l_4=\{z=x-iR \mid -R\le x\le R\}$$

הוכיחו כי

$$|f(0)|\le \frac{1}{4}\left(\max_{l_1}|f(z)|+\max_{l_2}|f(z)|+\max_{l_3}|f(z)|+\max_{l_4}|f(z)|\right)$$

רמז: התבוננו בפונקציה $g(z)=\frac{1}{4}\left(f(z)+f(-z)+f(iz)+f(-iz)\right)$

13) (אתגר)

הוכיחו כי משפט ההעתקה הפתוחה:

אם $A\subset\mathbb{C}$ קבוצה פתוחה ו - $f(z)$ אנליטית ולא קבועה ב $A$

אז התמונה $f[A]$ פתוחה.

14) נסמן $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|<1\}$ ונניח כי

א) $f(z)$ הולומורפית ב $D(0,1)$

ב) לכל $z\in D(0,1)$ מתקיים $|f(z)|\le 1$

ג) $f(0)=0$

הוכיחו כי $|f(z)|\le|z|$ לכל $z\in D(0,1)$ וכי $|f'(0)|\le 1$ ואת ההערה הבאה

הערה: אם בנוסף ידוע כי קיימת נקודה $z_0\in D(0,1)$ (שאינה אפס)

כך ש $|f(z_0)|=|z_0|$ אז קיים קבוע $c\in\mathbb{C}$ כך ש $f(z)=c\cdot z$

15) נניח כי $f(z)$ הולומורפית בתחום $\overline{D(0,1)}=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\le 1\}$

ומקיימת $|f(z)|=1$ לכל $|z|=1$

נניח בנוסף כי $f(z)=0$ אם ורק אם $z=0$

הוכיחו כי קיימים קבועים $c$ ו - $k$ כך ש - $f(z)=c\cdot z^k$

הערה: ניתן להשתמש בעקרון המינימום

16) (נכון או לא נכון)

נגדיר $A=\{z\in\mathbb{C}\mid 1<|z|<2\}$ ונניח כי $f(z)$ אנליטית ב $A$ ורציפה ב $\overline{A}$

נתון כי

$$|f(z)|=1 \qquad \forall|z|=1$$
$$|f(z)|=8 \qquad \forall|z|=2$$

אזי בהכרח $|f(z)|\le|z|^3$ לכל $z\in A$

17) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב $|z|\le 1$ ומקיימת

א) $|f(z)|\le 1 \qquad \forall z\in\{\operatorname{Im}(z)\ge 0,|z|=1\}$

ב) $|f(z)|\le 3 \qquad \forall z\in\{\operatorname{Im}(z)\ge 0,|z|=2\}$

הוכיחו כי $|f(0)|\le\sqrt{6}$

רמז: התבוננו בביטוי $f(z)f(-z)$

18) יהי $r>0$. נגדיר $C_r=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=r\}$ ויהיו $z_1,\dots,z_n\in C_r$

הוכיחו כי קיים $z\in C_r$ כך ש $\prod_{k=1}^{k=n}|z-z_k|>r^n$

## תשובות סופיות

1. לא קיים.
2. $e^9$
3. $\cosh(2\pi)$
4. $|f(1)| = |f(-1)| = e$
5. הוכחה
6. לא קיים.
7. א) הוכחה ב) לא
8. הוכחה
9. הוכחה
10. הוכחה
11. הוכחה
12. הוכחה
13. הוכחה
14. הוכחה
15. הוכחה
16. נכון
17. הוכחה
18. הוכחה